أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{1}{e^x}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$.

السؤال الثاني: أوجد مجموعة تعريف التابع $f(x)=\ln(4-9^x-3^{x+1})$.

السؤال الثالث: أثبت أن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}$ و $f(-1)=e$ مستمر عند -1.

السؤال الرابع: ليكن التابع $f(x)=\frac{3e^x+5}{e^x+2}$ ، احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين عدداً حقيقياً A يحقق:

" أياً كانت $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.1 ".

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: ($90°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: I) ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=(ax+b)e^x$ والمطلوب:

عيّن العددين a و b كي يمر الخط البياني f قيمة حدّية في النقطة $A(1,-e)$.

II) في حالة $a=1$ و $b=-2$ نعرّف C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=(x-2)e^x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

3) اكتب معادلة d المماس للخط C في النقطة التي تعدم $f''(x)$.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C.

5) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $xe^x=m+2e^x$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=xe^{-x}+x-2$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق $1<\alpha<2$.

4) ارسم d و Δ ثم ارسم C.

5) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $(E)\ \ y+y'=e^{-x}+x-1$

a) أثبت أن التابع f حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

b) أثبت أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة التفاضلية $(F)\ \ y+y'=0$.

c) حل المعادلة التفاضلية (F) ثم استنتج جميع حلول المعادلة (E).

انتهى الاختبار الأول

التابع الأسي

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} \le \dfrac{3}{4}$.

السؤال الثاني: ليكن التابع $f(x)=x+3^x$ ، أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ، احصر هذا الحل بمجال طوله واحد.

السؤال الثالث: أثبت باستخدام تعريف العدد المشتق أن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x+\ln x}-e}{x-1}=2e$.

السؤال الرابع: أثبت أن التابع $f(x)=xe^x$ حل المعادلة التفاضلية $y'-y=e^x$ ثم استنتج أن $x=e^{-x}\big(f''-2f'+2f\big)$.

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: ($90°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نعرف التابع $f(x)=\ln(e^x+a)$ حيث a عدد حقيقي والمطلوب:

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f أياً كانت قيمة a.

2) عيّن قيمة a ليمر الخط C بالنقطة $A(0,\ln 2)$

3) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\ln(e^x+1)$ والمطلوب:

a) ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

b) ارسم Δ ثم ارسم C.

c) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=x-\ln(e^x+1)$.

d) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة التدريجية $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=0$ ، أثبت أن المتتالية u_n متزايدة تماماً.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x+\dfrac{4}{e^x+1}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) أثبت $\Delta : y=x$ مقارب مائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+4)\big)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

4) اكتب معادلة T المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها صفر.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T و C.

6) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-x$.

انتهى الاختبار الثاني

التابع الأسي

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x}+4e^{-x}\leq 5$.

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابع $f(x)=3^{x^2-2x}$ ، احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2-2x}-1}{x}$.

السؤال الثالث: حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ثم عيّن k بحيث يكون ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2.

السؤال الرابع: حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين $\begin{pmatrix} e^{x+y}=3 \\ e^{x}-3e^{y}=8 \end{pmatrix}$.

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: ($90°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}-1}$ والمطلوب:

1) أثبت أن مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}^*$.

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ثم دل على مقاربات C الأفقية والشاقولية.

3) أثبت أن النقطة $I\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع f.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

5) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=-\dfrac{1}{e^{x}-1}$.

6) نعرف المتتالية $u_n=f(n)$ ، ما أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n\in\,]1.8,2.2[$.

المسألة الثانية: I) ليكن التابع $g(x)=xe^{x}+1$ ، ادرس اطراد التابع g ثم استنتج أن $g(x)>0$.

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=e^{x}+\ln x$ والمطلوب:

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ ، ثم استنتج مقاربات C.

2) أثبت $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع f.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد أياً كان العدد الحقيقي m.

4) أثبت أن T معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 1 تعطى بالعلاقة $y=ex+x-1$.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

6) أثبت أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية $y'-y=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

انتهى الاختبار الثالث

التابع الأسي

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4^{-x}+2^{-x+1}\leq 3$.

السؤال الثاني: أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع $f(x)=(3-x)e^{x}$ في النقطة التي تعدم f'' .

السؤال الثالث: احسب نهاية المتتالية $u_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$.

السؤال الرابع: عيّن تابعاً من الدرجة الثانية f بحيث يحقق المعادلة التفاضلية $2y'-y=-x^2+x$.

ثانياً: حل المسألتين الآتيتين: ($90°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=27^{x}-3^{x+1}$ والمطلوب:

1) أثبت أن إشارة $f(x)$ تتفق مع إشارة $3^{2x}-3$.

2) جد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم دل على معادلة المقارب الأفقي وادرس وضعه النسبي.

3) أثبت أن $f'(x)=3^{x+1}(3^{2x}-1)\ln 3$ ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

4) اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي تعدم $f'(x)$.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

6) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

7) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=\dfrac{1-3^{2x+1}}{3^{3x}}$.

المسألة الثانية: I) ليكن التابع $g(x)=e^{x}-x$ ، ادرس اطراد التابع g ثم استنتج أن $g(x)>0$.

II) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x+\dfrac{x+1}{e^{x}}$ والمطلوب:

1) أثبت $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^{x}}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع f .

2) أثبت $\Delta: y=x$ مقارب مائل C ، وادرس وضعه النسبي.

3) أثبت أن C يقبل مماساً T يوازي المستقيم Δ ، اكتب معادلته وادرس وضعه النسبي.

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ، احصر هذا الحل بمجال طوله واحد.

5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T و C.

6) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=\dfrac{(x+1)(e^{x}+1)}{e^{x}}$.

انتهى الاختبار الرابع

التابع الأسي

أولاً:

السؤال الأول:

$$\frac{1}{e^{x}}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$$

$$e^{-x}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$$

نفرض $X=e^{-x}$ فتكون $X=\frac{1}{2X+1}$

$$2X^2+X=1$$

$$2X^2+X-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-1)=9>0$$

أي $X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2(2)}=\frac{1}{2}$ وبالتالي $e^{-x}=\frac{1}{2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=e^{-\ln 2}$ أي $x=\ln 2$

أي $X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{2(2)}=-1$ أي $e^{-x}=-1$ مرفوض

السؤال الثاني:

التابع $f(x)=\ln(4-9^{x}-3^{x+1})$ معرف بشرط $4-9^{x}-3^{x+1}>0$

$$4-3^{2x}-3.3^{x}>0$$

نفرض $X=3^{x}$ ومنه $4-X^2-3X>0$

$$X^2+3X-4<0$$

$$(X+4)(X-1)<0$$

$$(3^{x}+4)(3^{x}-1)<0$$

بما أن $3^{x}+4$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ:

$$3^{x}-1<0$$

$$3^{x}<1$$

$$3^{x}<3^{0}$$

$$x<0$$

وبالتالي مجموعة تعريف التابع f هي $D_f=]-\infty,0[$

السؤال الثالث:

$f(-1)=e$ و $f(x)=(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}$

$$(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}=\left(1+(x+1)\right)^{\frac{x+2}{x+1}}$$

نفرض $t=x+1$ ومنه $x=t-1$

ومنه $\frac{x+2}{x+1}=\frac{t-1+2}{t-1+1}=\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}$ وبالتالي

$$(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}=\left(1+(x+1)\right)^{\frac{x+2}{x+1}}=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}=(1+t).(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

عندما x تسعى إلى -1 فإن t تسعى إلى الصفر ، وبالتالي:

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{t\to0} f(t)=\lim_{t\to0}(1+t).(1+t)^{\frac{1}{t}}=(1)(e)=e=f(-1)$$

أي أن f مستمر عند -1

السؤال الرابع:

$f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.1 أي:

$$\left|f(x)-3\right|<0.1$$

$$\left|\frac{3e^x+5}{e^x+2}-3\right|<0.1$$

$$\left|\frac{3e^x+5-3e^x-6}{e^x+2}\right|<0.1$$

$$\left|\frac{-1}{e^x+2}\right|<0.1$$

$$\frac{1}{e^x+2}<\frac{1}{10}$$

$$10<e^x+2$$

$$e^x>8$$

$$x>\ln 8$$

$$x>3\ln 2$$

أي أن $A=3\ln 2$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$I)$ $A(1,-e)$ قيمة حدية للتابع $f(x)=(ax+b)e^{x}$ أي $f(1)=-e$ و $f'(1)=0$

عندما $f(1)=-e$ فإن $f(1)=(a+b)e=-e$ أي $a+b=-1$ ...(1)

لدينا $f'(x)=ae^{x}+e^{x}(ax+b)=(ax+a+b)e^{x}$

عندما $f'(1)=0$ فإن $f'(1)=(2a+b)e=0$ أي $2a+b=0$ ...(2)

بطرح (1) و (2) نجد $-a=-1$ ومنه $a=1$

نعوض في (2) فنجد $b=-2a=-2$

وبالتالي $f(x)=(x-2)e^{x}$

$II)$ $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ و $f(x)=(x-2)e^{x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x}-2e^{x})=0-0=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=e^{x}+(x-2)e^{x}=(1+x-2)e^{x}=(x-1)e^{x}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x-1=0$ أي $x=1$ حيث $f(1)=(1-2)e=-e$ وبالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=-e$ قيمة حدية صغرى

2) $y=0$ مقارب أفقي

الوضع النسبي: $f(x)-y_{\Delta}=(x-2)e^{x}$

بما أن $e^{x}>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $x-2$

عندما $x>2$: C فوق المقارب

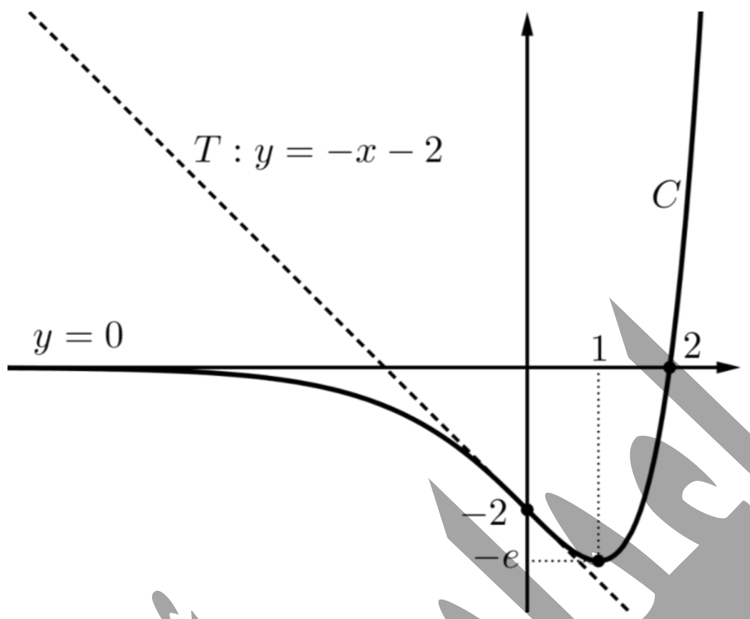
عندما $x<2$: C تحت المقارب

3) $f''(x)=e^{x}+e^{x}(x-1)=(1+x-1)e^{x}=xe^{x}$

عندما $f''(x)=0$ فإن $x=0$ وبالتالي:

$$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x-2$$

(4



(5

$$xe^x = m + 2e^x$$
$$xe^x - 2e^x = m$$
$$m = (x-2)e^x = f(x)$$

عندما $m \in]-\infty, -e[$ ليس للمعادلة حل

عندما $m = -e$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in]-e, 0[$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $m \in [0, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد

المسألة الثانية:

$$f(x)=xe^{-x}+x-2 \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+x-2\right)=+\infty$$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+1$ لا يمكن معرفة إشارة المشتق

لذلك نفرض التابع $g(x)=e^{-x}-xe^{-x}+1$ المعرف على $\mathbb{R}$

$$g'(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

عندما $g'(x)=0$ فإن $x=2$ حيث $g(2)=e^{-2}-2e^{-2}+1=-e^{-2}+1=-\frac{1}{e^2}+1=\frac{e^2-1}{e^2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	

من جدول اطراد g نجد أن $g(x)\geq\frac{e^2-1}{e^2}>0$

وبالتالي $f'(x)>0$ والتابع f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}+x-2-(x-2))=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=xe^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة x

عندما $x>0$: C فوق المقارب

عندما $x<0$: C تحت المقارب

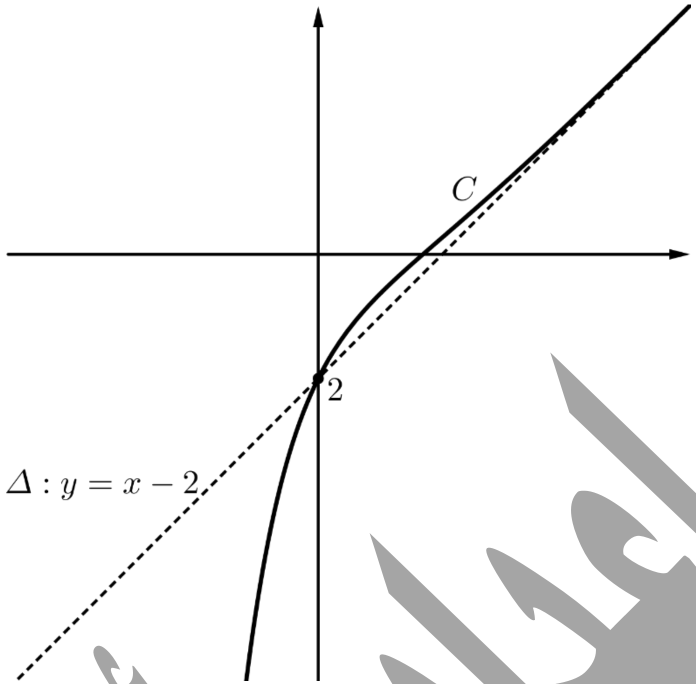
3) على المجال $]1,2[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$$f(2)=2e^{-2}+2-2=\frac{2}{e^2}>0 \text{ و } f(1)=e^{-1}+1-2=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$$

أي $f(1)\times f(2)<0$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق $1<\alpha<2$

4)



5) $(E)\ \ y + y' = e^{-x} + x - 1$

a) لدينا $f(x) = xe^{-x} + x - 2$ و $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$ وبالتالي:

$$f + f' = xe^{-x} + x - 2 + e^{-x} - xe^{-x} + 1 = e^{-x} + x - 1$$

وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية (E)

b) - نفرض أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (E) أي $g + g' = e^{-x} + x - 1$ ...(1)

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) أي $f + f' = e^{-x} + x - 1$ ...(2)

بطرح العلاقتين (1) و (2) نجد: $g + g' - f - f' = 0$

وتكافئ $(g - f) + (g - f)' = 0$

وبالتالي $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية $(F)\ \ y + y' = 0$

- من جهة أخرى ، نفرض $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية $(F)\ \ y + y' = 0$ أي أن:

$(g - f) + (g - f)' = 0$ أي $g + g' - f - f' = 0$ أي $g + g' = f + f'$ ...(3)

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) أي $f + f' = e^{-x} + x - 1$ ...(2)

نعوض (2) في (3) فنجد $g + g' = e^{-x} + x - 1$

أي أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

c) المعادلة $(F)\ \ y + y' = 0$ تكافئ $y' = -y$ وهي من الشكل $y' = ay$ وحلها يعطى بالشكل $y = ke^{-x}$

بما أن $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية (F) فإن $g - f = ke^{-x}$

$$g = ke^{-x} + f$$

$g = ke^{-x} + xe^{-x} + x - 2$ وهي جميع حلول المعادلة التفاضلية (E)

انتهى حل النموذج الأول

التابع الأسي

أولاً:

السؤال الأول:

$$\frac{e^{2x}-1}{2e^x} \le \frac{3}{4}$$

$$4e^{2x}-4 \le 6e^x$$

$$2e^{2x}-3e^x-2 \le 0$$

نفرض $X=e^x$ وبالتالي $2X^2-3X-2 \le 0$

$$\Delta = b^2-4ac = 9-4(2)(2)=25$$

$X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ و $X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+5}{4}=2$

وبالتالي $(X-2)\left(X+\frac{1}{2}\right)\le 0$

$$(e^x-2)\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\le 0$$

بما $\frac{1}{2}+e^x$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ $e^x-2\le 0$ أي $e^x \le 2$ ومنه $x \le \ln 2$

وبالتالي حل المتراجحة $x \in]-\infty, \ln 2]$

السؤال الثاني:

$f(x)=x+3^x=x+e^{x\ln 3}$ و $D_f=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=1+\ln 3 e^{x\ln 3}>0$ أي أن التابع f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

على المجال $]-\infty,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $0\in f(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

أي أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α

بما أن $f(0)=0+3^0=1>0$

و $f(-1)=-1+3^{-1}=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0$

أي أن $-1<\alpha<0$

السؤال الثالث:

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x+\ln x}-e}{x-1}\overset{?}{=}2e$$

نفرض التابع $f(x)=e^{x+\ln x}$ فإن $f(1)=e^{1+\ln 1}=e$

و $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln x}$ فإن $f'(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)e^{1+\ln 1}=2e$

f معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ فهو اشتقاقي عند الواحد

حسب تعريف العدد المشتق $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ نجد:

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x+\ln x}-e}{x-1}=2e$$

السؤال الرابع:

لدينا $f(x)=xe^{x}$ و $f'(x)=e^{x}+xe^{x}$

نعوض في المعادلة $y'-y=e^{x}$ فنجد:

$$f'-f=e^{x}+xe^{x}-xe^{x}=e^{x}$$

أي أن $f(x)=xe^{x}$ حل المعادلة التفاضلية $y'-y=e^{x}$.

من جهة أخرى لدينا $f''(x)=e^{x}+e^{x}+xe^{x}=2e^{x}+xe^{x}$

وبالتالي $(f''-2f'+2f)e^{-x}=\left(f''-2(f'-f)\right)e^{-x}=\left(2e^{x}+xe^{x}-2e^{x}\right)e^{-x}=xe^{-x}e^{x}=x$

أي أن $(f''-2f'+2f)e^{-x}=x$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\ln(e^x+a)$$

1) يمكن كتابة التابع f بالشكل $f(x)=\ln\left(e^x.\left(1+\frac{a}{e^x}\right)\right)=\ln e^x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)$ وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=\ln 1=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f أياً كانت قيمة a.

2) C يمر بالنقطة $A(0,\ln 2)$ أي $f(0)=\ln 2$

$$\ln(e^0+a)=\ln 2$$

$1+a=2$ وبالتالي $a=1$

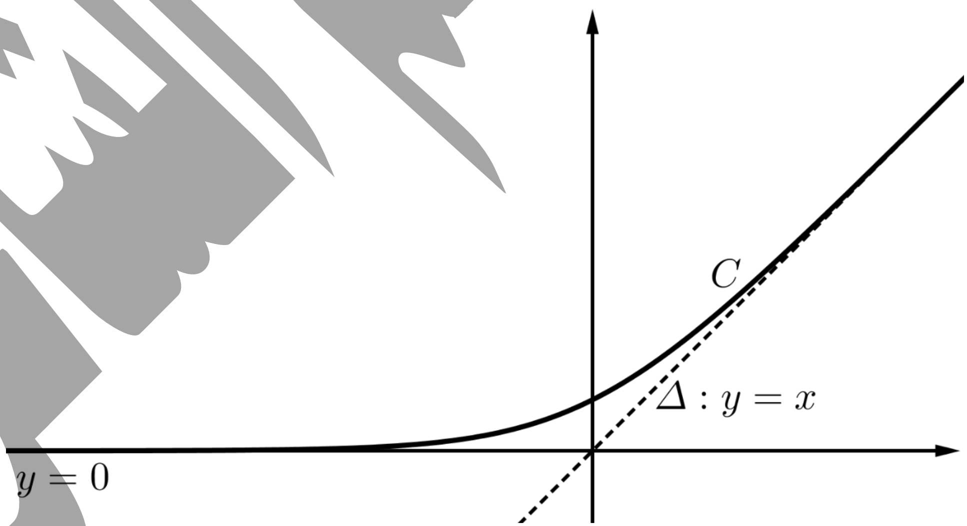
3) $D_f=]-\infty,+\infty[$ و $f(x)=\ln(e^x+1)$

a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln 1=0$

التابع f متزايد تماماً $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b)



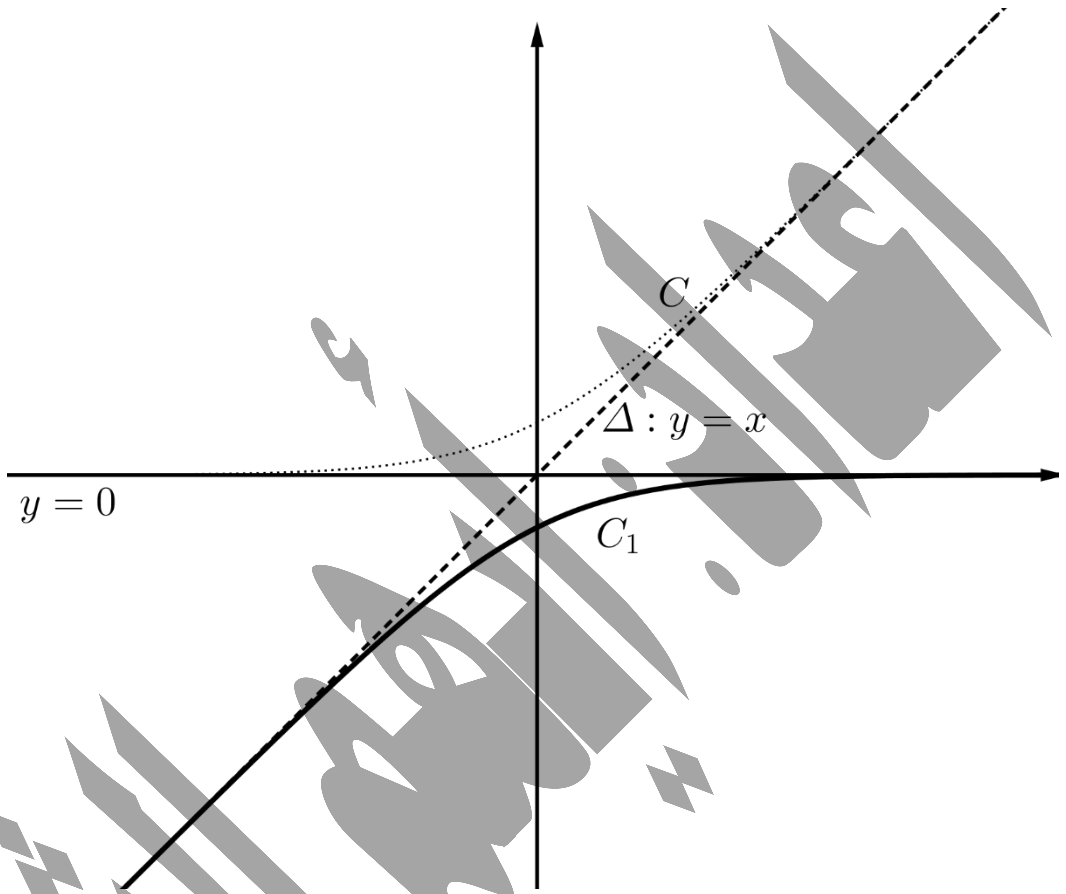
(c

$$f_1(x)=x-\ln(e^x+1)$$

$$f(-x)=\ln(e^{-x}+1)=\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)=\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)=\ln(1+e^x)-\ln e^x=\ln(1+e^x)-x$$

$$f(-x)=-\left(x-\ln(1+e^x)\right)=-f_1(x)$$

الخط البياني للتابع f_1 هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ



(d

$$u_0=0 \text{ و } u_{n+1}=f(u_n)=\ln(e^{u_n}+1)$$

نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

- نثبت صحة القضية $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_0=0<u_1=\ln 2$ محققة.
- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل n : $u_n < u_{n+1}$ محققة
- نثبت صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2}$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1}$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n

المسألة الثانية:

$$f(x)=x+\frac{4}{e^{x}+1} \text{ و } D_f=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=1-\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{(e^{x}+1)^{2}}\geq 0$$

وبالتالي التابع f متزايد

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_{\Delta}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{e^{x}+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}+1}=0$$

وبالتالي $\Delta : y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{4}{e^{x}+1}>0$ وبالتالي C فوق المقارب Δ

3) $$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+4)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{4}{e^{x}+1}-(x+4)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e^{x}+1}-4\right)=\frac{4}{0+1}-4=4-4=0$$

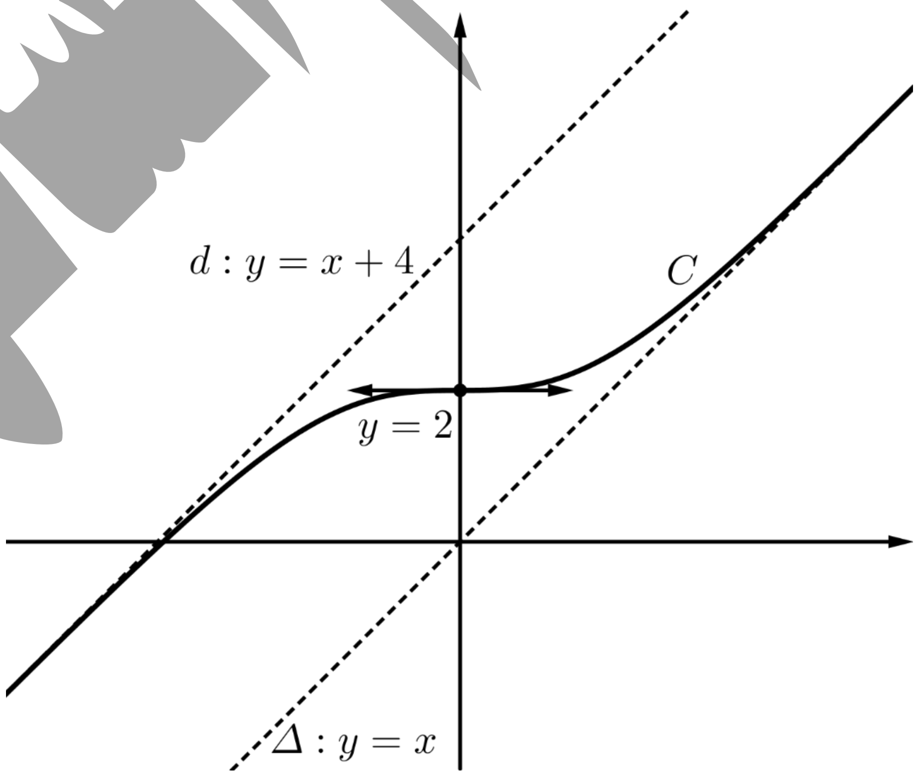
وبالتالي $d : y=x+4$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_{d}=\dfrac{4}{e^{x}+1}-4=\dfrac{4-4e^{x}-4}{e^{x}+1}=\dfrac{-4e^{x}}{e^{x}+1}<0$ وبالتالي C تحت المقارب d

4) $$T : y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

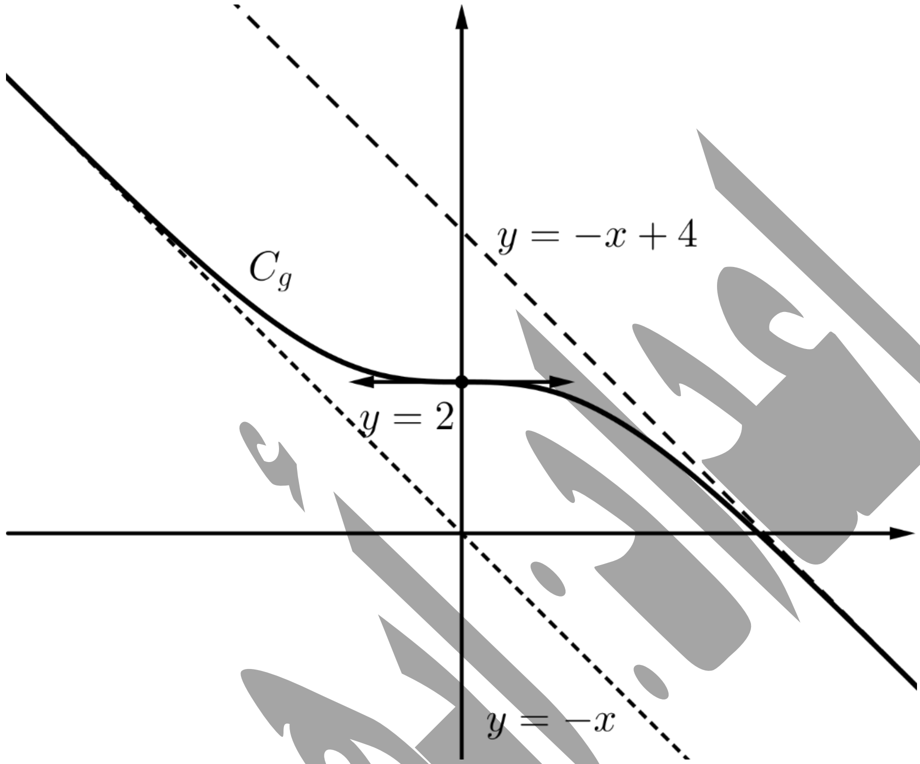
$$T : y=2$$

5)



6) $$f(-x)=-x+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x+\frac{4}{\frac{1}{e^{x}}+1}=-x+\frac{4}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=-x+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}=g(x)$$

الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمحور التراتيب



انتهى حل النموذج الثاني

التابع الأسي

أولاً:

السؤال الأول:

$$e^x + 4e^{-x} \le 5$$

$$e^x + \frac{4}{e^x} \le 5$$

$$e^{2x} + 4 \le 5e^x$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 \le 0$$

نفرض $X = e^x$ وبالتالي $X^2 - 5X + 4 \le 0$

$$(X-4)(X-1) \le 0$$

$$(e^x-4)(e^x-1) \le 0$$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$(e^x-4)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		//////		محققة		//////	

وبالتالي حل المتراجحة $x \in [0, \ln 4]$

السؤال الثاني:

لدينا $f(x) = 3^{x^2-2x}$ و منه $f(0) = 3^0 = 1$

أو بصيغة أخرى : التابع يكتب بالشكل $f(x) = e^{(x^2-2x)\ln 3}$ و منه $f(0) = e^0 = 1$

و $f'(x) = (2x-2)\ln 3 e^{(x^2-2x)\ln 3}$ و منه $f'(0) = (0-2)\ln 3 e^0 = -2\ln 3$

التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي عند الصفر

حسب تعريف العدد المشتق $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ وبالتالي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2-2x}-1}{x} = -2\ln 3$$

السؤال الثالث:

$$2y'+y=1$$

$$2y'=-y+1$$

$$y'=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

حل المعادلة التفاضلية هو $f(x)=y=ke^{-\frac{1}{2}x}-\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=ke^{-\frac{1}{2}x}+1$

بما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2 أي $f'(0)=-2$

لدينا $f'(x)=-\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}$

$-\frac{1}{2}ke^{0}=-2$ وبالتالي $k=4$

$$f(x)=4e^{-\frac{1}{2}x}+1$$

السؤال الرابع:

الجملة $\begin{pmatrix} e^{x+y}=3 \\ e^{x}-3e^{y}=8 \end{pmatrix}$ تكافئ $\begin{pmatrix} e^{x}.e^{y}=3 \\ e^{x}-3e^{y}=8 \end{pmatrix}$

نفرض $X=e^{x}$ و $Y=e^{y}$ وبالتالي $\begin{matrix} X.Y=3 & (1) \\ X-3Y=8 & (2) \end{matrix}$

من (2) لدينا $X=3Y+8$

نعوض في (1) فنجد $(3Y+8).Y=3$

$$3Y^{2}+8Y-3=0$$

$$\Delta=64-4(3)(-3)=64+36=100$$

$Y_1=\frac{-8+10}{2(3)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ أي $e^{y}=\frac{1}{3}=e^{\ln\frac{1}{3}}=e^{-\ln 3}$ وبالتالي $y=-\ln 3$

$X=3Y+8=3\left(\frac{1}{3}\right)+8=1+8=9$ أي $e^{x}=9=e^{\ln 9}$ وبالتالي $x=\ln 9=2\ln 3$

$Y_2=\frac{-8-10}{2(3)}=\frac{-18}{6}=-3$ أي $e^{y}=-3$ مرفوض

وبالتالي حل الجملة $(x,y)\in\left\{(2\ln 3,-\ln 3)\right\}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{2e^{x}-3}{e^{x}-1}$$

1) f معرف بشرط $e^{x}\neq 0$ أي $x\neq 0$ وبالتالي مجموعة تعريف التابع f هي:

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^{*}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{0-3}{0-1}=3$ وبالتالي $y=3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=\dfrac{-1}{0^{-}}=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\dfrac{-1}{0^{+}}=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(2-\dfrac{3}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\dfrac{1}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{3}{e^{x}}}{1-\dfrac{1}{e^{x}}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$ وبالتالي $y=2$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{2e^{x}(e^{x}-1)-e^{x}(2e^{x}-3)}{(e^{x}-1)^{2}}=\frac{2e^{2x}-2e^{x}-2e^{2x}+3e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}=\frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}>0$$ التابع f متزايد تماماً

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

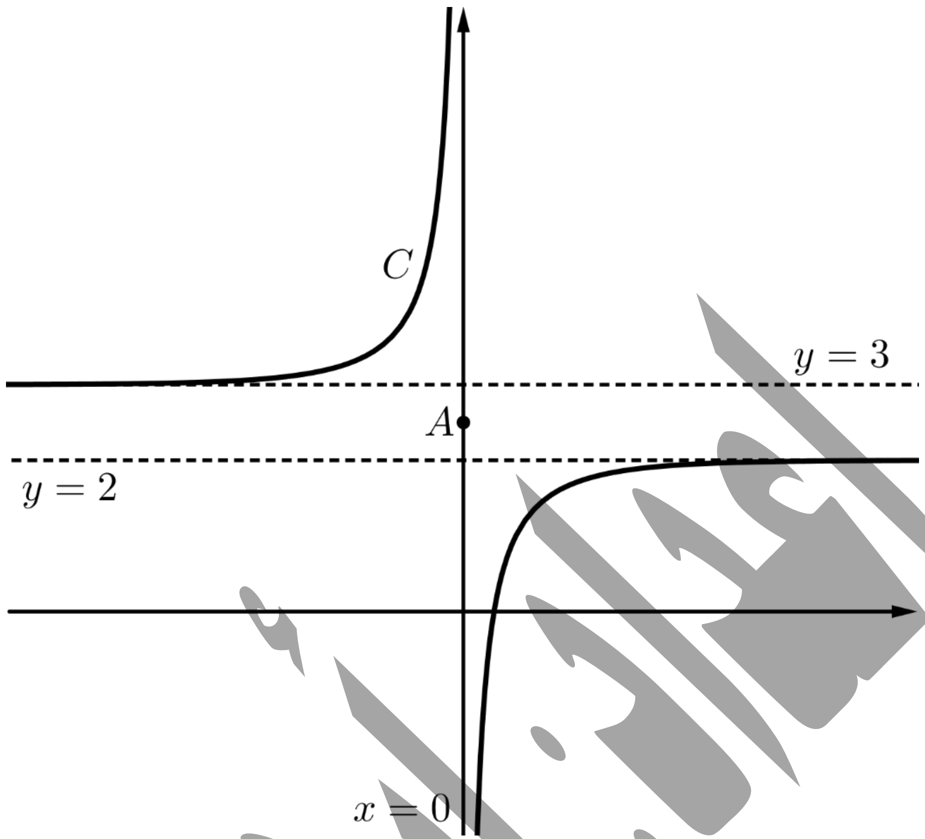
3) أياً كان $h\in D_f=\mathbb{R}^{*}$ فإن $-h\in D_f=\mathbb{R}^{*}$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\dfrac{2e^{h}-3}{e^{h}-1}+\dfrac{2e^{-h}-3}{e^{-h}-1}}{2}=\frac{\dfrac{2e^{h}-3}{e^{h}-1}+\dfrac{\dfrac{2}{e^{h}}-3}{\dfrac{1}{e^{h}}-1}}{2}=\frac{\dfrac{2e^{h}-3}{e^{h}-1}+\dfrac{\dfrac{2-3e^{h}}{e^{h}}}{\dfrac{1-e^{h}}{e^{h}}}}{2}$$

$$\frac{f(h)+f(-h)}{2}=\frac{\dfrac{2e^{h}-3}{e^{h}-1}+\dfrac{2-3e^{h}}{1-e^{h}}}{2}=\frac{\dfrac{2e^{h}-3}{e^{h}-1}+\dfrac{3e^{h}-2}{e^{h}-1}}{2}=\frac{\dfrac{5e^{h}-5}{e^{h}-1}}{2}=\frac{\dfrac{5(e^{h}-1)}{e^{h}-1}}{2}=\frac{5}{2}$$

وبالتالي النقطة $I\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

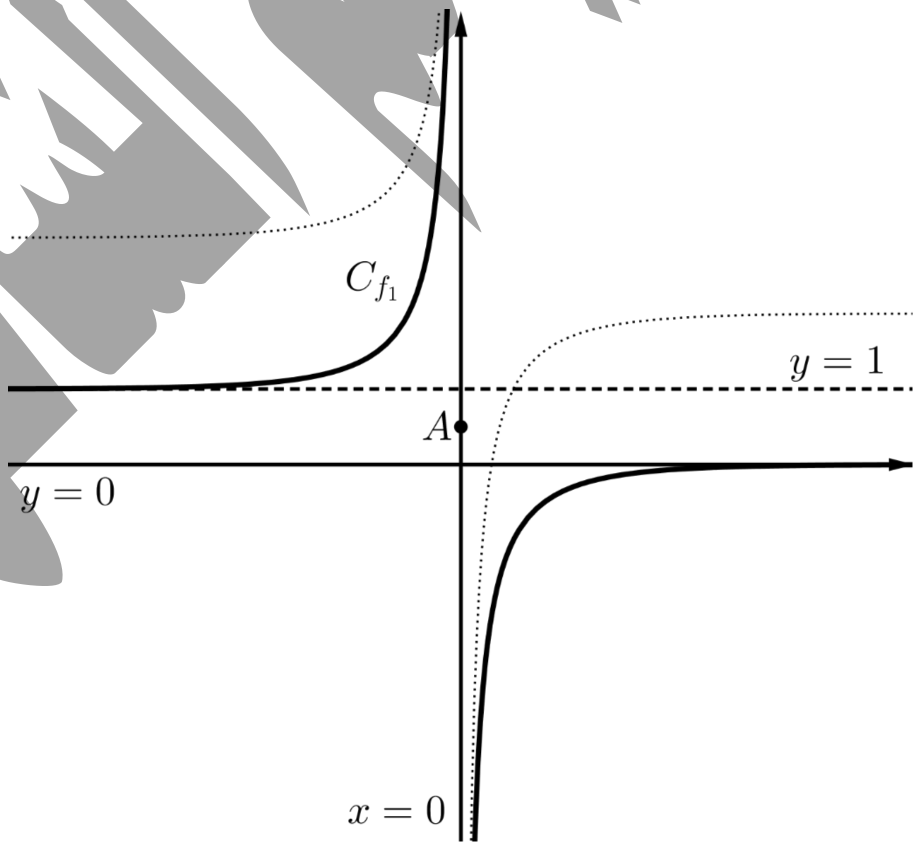
4)



5) $$f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x-1}=\frac{2e^x-2-1}{e^x-1}=\frac{2e^x-2}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}=2+f_1(x)$$

أي $f_1(x)=f(x)-2$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو انسحاب الخط البياني للتابع f بمقدار وحدتين للأسفل



(6 لدينا $u_n = f(n) = \frac{2e^n - 2}{e^n - 1}$

$$u_n \in]1.8, 2.2[$$

$$1.8 < u_n < 2.2$$

$$1.8 - 2 < u_n - 2 < 2.2 - 2$$

$$-0.2 < \frac{2e^n - 2}{e^n - 1} - 2 < 0.2$$

$$-0.2 < \frac{-1}{e^n - 1} < 0.2$$

$$\left|\frac{-1}{e^n - 1}\right| < 0.2$$

$$\frac{1}{e^n - 1} < \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{e^n - 1} < \frac{1}{5}$$

$$5 < e^n - 1$$

$$e^n > 6$$

$$n > \ln 6$$

$$n > \ln 3 + \ln 2 \approx 1.1 + 0.7 = 1.8$$

فإن أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n \in]1.8, 2.2[$ هو $n = 2$

المسألة الثانية:

$I)$ $$g(x)=xe^x+1$$

$$g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

عندما $g'(x)=0$ فإن $x=-1$ حيث $g(-1)=-e^{-1}+1=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

من جدول اطراد التابع g نجد $g(x)\geq\frac{e-1}{e}>0$

$I)$ $f(x)=e^x+\ln x$ و $D_f=]0,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

2) $$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}=\frac{xe^x+1}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

لدينا سابقاً $g(x)>0$ وعلى المجال $]0,+\infty[$ فإن $x>0$ وبالتالي:

$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>0$ والتابع f متزايد تماماً

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) على المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $m\in f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد أياً كان العدد الحقيقي m.

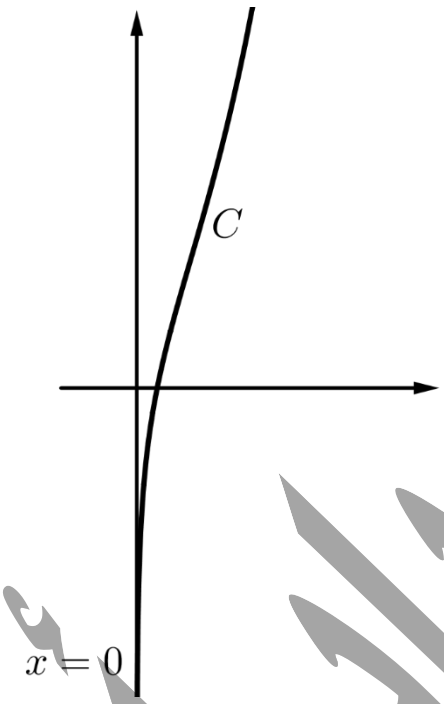
4) $$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$T: y=(e+1)(x-1)+e$$

$$T: y=ex-e+x-1+e$$

$$T: y=ex+x-1$$

5)



6) لدينا $f(x)=e^{x}+\ln x$ و $f'(x)=e^{x}+\dfrac{1}{x}$ ومنه:

$$f'-f=e^{x}+\frac{1}{x}-e^{x}-\ln x$$

$$f'-f=\frac{1}{x}-\ln x$$

أي أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية $y'-y=\dfrac{1}{x}-\ln x$

انتهى حل النموذج الثالث

التابع الأسي

أولاً:

السؤال الأول:

$$4^{-x}+2^{-x+1}\le 3$$
$$(2^2)^{-x}+2^{-x}.2\le 3$$
$$2^{-2x}+2.2^{-x}-3\le 0$$

نفرض $X=2^{-x}$ أي $X^2+2X-3\le 0$

$$(X+3)(X-1)\le 0$$
$$(2^{-x}+3)(2^{-x}-1)\le 0$$

بما أن المقدار $2^{-x}+3$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ:

$$2^{-x}-1\le 0$$
$$2^{-x}\le 1=2^0$$
$$-x\le 0$$
$$x\ge 0$$

وبالتالي حل المتراجحة هو $x\in[0,+\infty[$

السؤال الثاني:

$$f(x)=(3-x)e^x$$
$$f'(x)=-e^x+e^x(3-x)=(-1+3-x)e^x=(2-x)e^x$$
$$f''(x)=-e^x+e^x(2-x)=(-1+2-x)e^x=(1-x)e^x$$

عندما $f''(x)=0$ فإن $x=1$ وبالتالي معادلة المماس :

$$T:y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$T:y=e(x-1)+2e$$
$$T:y=ex-e+2e$$
$$T:y=ex+e$$

السؤال الثالث:

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{n}{n+1} - 1 = 1 + \frac{n-n-1}{n+1} = 1 + \frac{-1}{n+1}$$

نفرض $t = \frac{-1}{n+1}$ وبالتالي $n+1 = -\frac{1}{t}$ أي $n = -\frac{1}{t} - 1$

عندما n تسعى إلى $+\infty$ فإن t تسعى إلى الصفر

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}-1} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}.(1+t)^{-1} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}.\frac{1}{1+t} = \frac{1}{e}$$

السؤال الرابع:

f من الشكل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ويحقق المعادلة التفاضلية $2y' - y = -x^2 + x$

لدينا $f'(x) = 2ax + b$ نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد:

$$2(2ax+b) - (ax^2 + bx + c) = -x^2 + x$$

$$4ax + 2b - ax^2 - bx - c = -x^2 + x$$

$$-ax^2 + (4a-b)x + (2b-c) = -x^2 + x$$

$-a = -1 \quad (1)$

بالمطابقة نجد $4a - b = 1 \ (2)$

$2b - c = 0 \ (3)$

من (1) نجد $a = 1$

نعوض في (2) فنجد $4 - b = 1$ أي أن $b = 3$

نعوض في (3) فنجد $6 - c = 0$ أي أن $c = 6$

وبالتالي التابع f يكتب بالشكل $f(x) = x^2 + 3x + 6$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=27^x-3^{x+1} \text{ و } D_f=]-\infty,+\infty[$$

(1 $f(x)=27^x-3^{x+1}=(3^3)^x-3^x.3=3^{3x}-3.3^x=3^x(3^{2x}-3)$

بما أن المقدار 3^x موجب تماماً فإن إشارة f من إشارة $3^{2x}-3$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln3}\left(e^{2x\ln3}-3\right)=+\infty(+\infty-3)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x\ln27}-e^{(x+1)\ln3}\right)=0-0=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=27^x-3^{x+1}=3^x(3^{2x}-3)$

$$\boxed{\begin{aligned}3^{2x}-3&=0\\3^{2x}&=3^1\\2x&=1\\x&=\frac{1}{2}\end{aligned}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta=3^{2x}-3$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت المقارب		C فوق المقارب

(3 لدينا $f(x)=e^{x\ln27}-e^{(x+1)\ln3}$

$$f'(x)=\ln27e^{x\ln27}-\ln3e^{(x+1)\ln3}$$
$$f'(x)=\ln3^3e^{x\ln3^3}-\ln3e^{x\ln3+\ln3}$$
$$f'(x)=3\ln3e^{3x\ln3}-\ln3e^{x\ln3}.e^{\ln3}$$
$$f'(x)=3\ln3e^{3x\ln3}-3\ln3e^{x\ln3}$$
$$f'(x)=3\ln3\left(e^{3x\ln3}-e^{x\ln3}\right)$$
$$f'(x)=3\ln3(3^{3x}-3^x)$$
$$f'(x)=3\ln3.3^x(3^{2x}-1)$$
$$f'(x)=3^{x+1}\ln3.(3^{2x}-1)$$

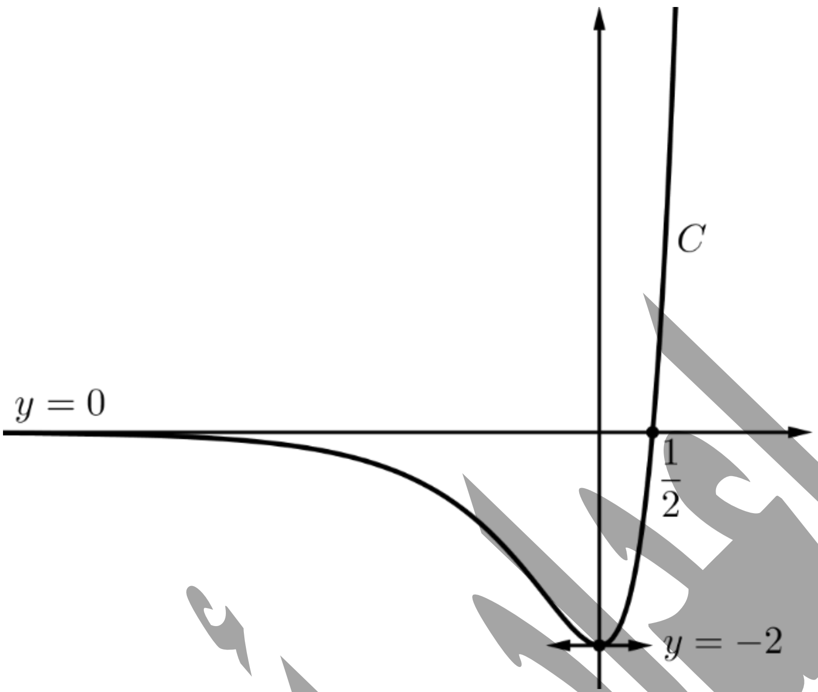
عندما $f'(x)=0$ فإن $3^{2x}=1$ أي أن $x=0$ حيث $f(0)=27^0-3^{0+1}=1-3=-2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=-2$ قيمة حدية صغرى

(4 المماس للخط C في النقطة التي تعدم $f'(x)$ أفقي معادلته $y=-2$

(5



(6

$$f(x) = m$$

$m \in \left]-\infty, -2\right[$ ليس للمعادلة حل

$m = -2$ للمعادلة حل وحيد

$m \in \left]-2, 0\right[$ للمعادلة حلين مختلفين

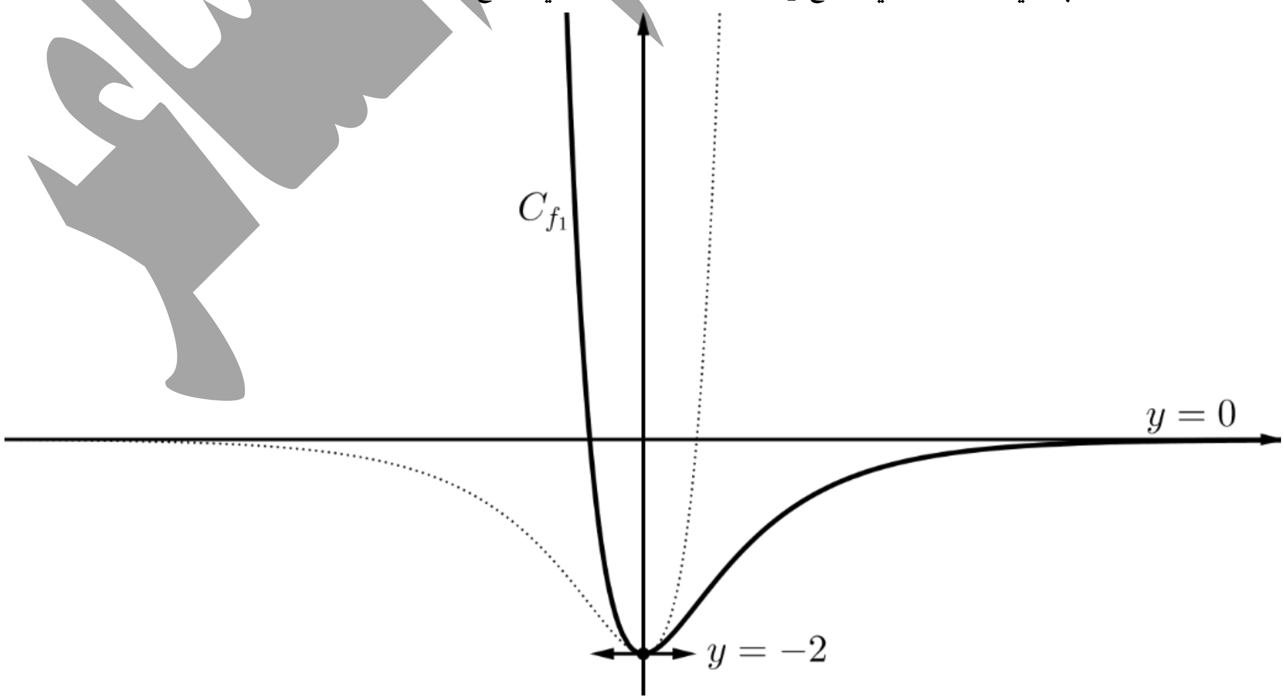
$m \in \left[0, +\infty\right[$ للمعادلة حل وحيد

(7

$$f_1(x) = \frac{1-3^{2x+1}}{3^{3x}}$$

$$f(-x) = 27^{-x} - 3^{-x+1} = \frac{1}{27^x} - 3^{-x}.3 = \frac{1}{3^{3x}} - \frac{3}{3^x} = \frac{1-3.3^{2x}}{3^{3x}} = \frac{1-3^{2x+1}}{3^{3x}} = f_1(x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمحور التراتيب



المسألة الثانية:

$I)$
$$g(x)=e^x-x$$
$$g'(x)=e^x-1$$

عندما $g'(x)=0$ فإن $e^x=1$ أي $x=0$ حيث $g(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

من جدول اطراد g نجد أن $g(x)\geq 1>0$

$II)$ $D_f=]-\infty,+\infty[$ و $f(x)=x+\dfrac{x+1}{e^x}$

1) $$f'(x)=1+\frac{e^x-e^x(x+1)}{e^{2x}}=1+\frac{e^x(1-x-1)}{e^{2x}}=1-\frac{xe^x}{e^{2x}}=1-\frac{x}{e^x}=\frac{e^x-x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$$

بما أن $g(x)>0$ و $e^x>0$ فإن $f'(x)>0$ والتابع f متزايد تماماً

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\frac{-\infty}{0^+}=-\infty-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=+\infty+0+0=+\infty$$

وبالتالي جدول تغيرات التابع f هو:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\dfrac{x+1}{e^x}$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $x+1$

عندما $x>-1$ فإن C فوق المقارب Δ

عندما $x<-1$ فإن C تحت المقارب Δ

3) C يقبل مماساً يوازي المستقيم Δ إذا كان ميل المماس يساوي ميل المستقيم Δ أي:

$$f'(x)=1$$

$$\frac{e^x-x}{e^x}=1$$

$$e^x-x=e^x$$

$-x=0$ أي $x=0$

وبالتالي C يقبل مماساً يوازي المستقيم Δ معادلته:

$$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)=x+1$$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_T=x+\dfrac{x+1}{e^x}-x-1=\dfrac{x+1}{e^x}-1=\dfrac{x+1-e^x}{e^x}$

وجدنا سابقاً أن $e^x-x\geq 1$ وبالتالي $x-e^x\leq -1$ أي $x+1-e^x\leq 0$

ولدينا $e^x>0$ وبالتالي فإن:

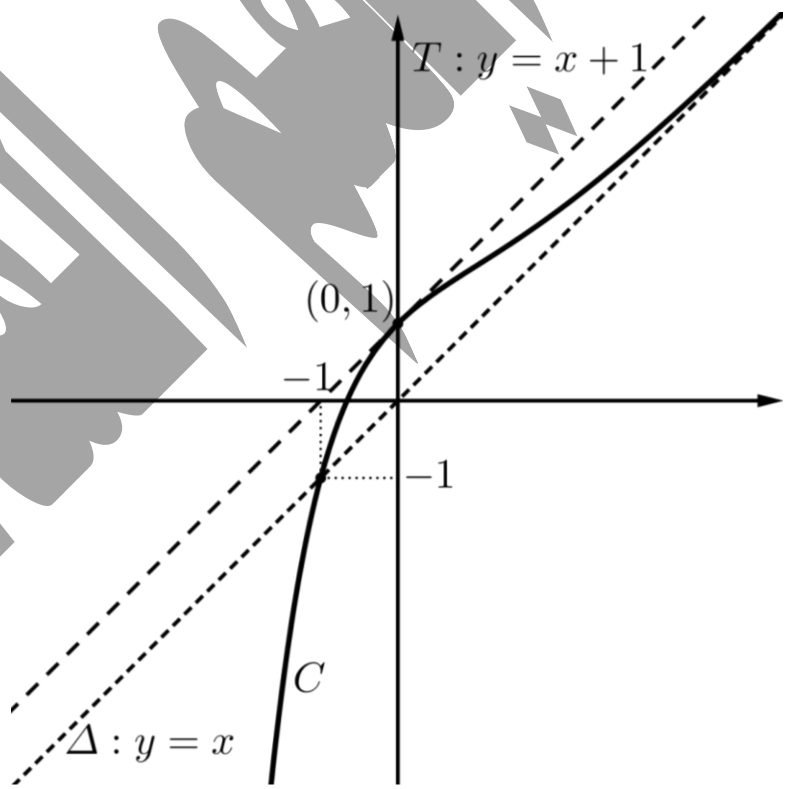
$f(x)-y_T\leq 0$ و C تحت المماس T

4) على المجال $]-\infty,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $0\in f(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α

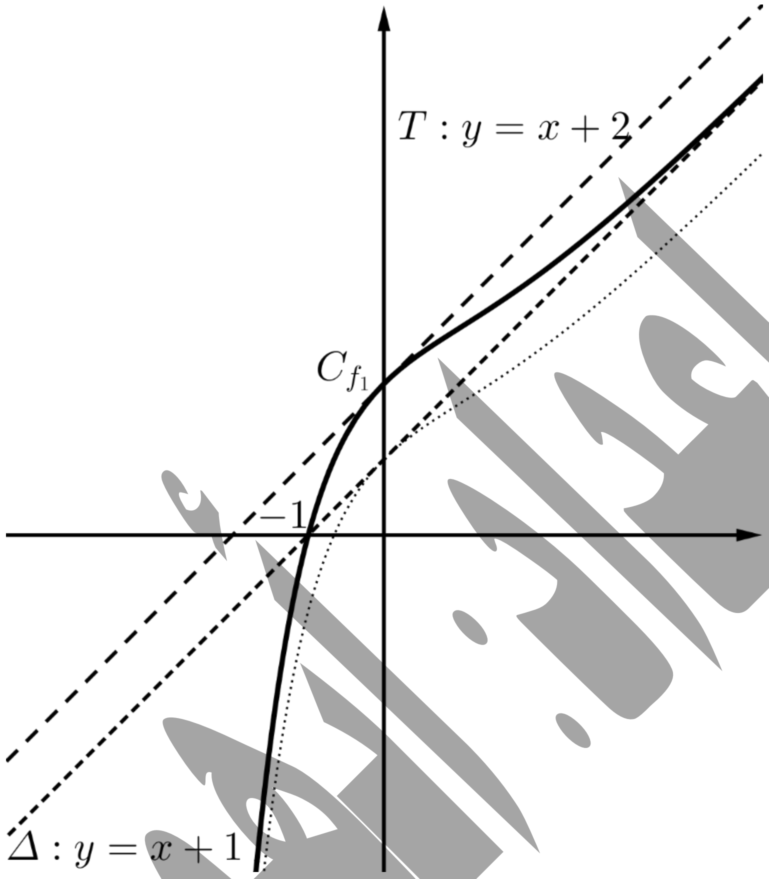
بما أن $f(0)=1>0$ و $f(-1)=-1<0$ فإن $-1<\alpha<0$

5)



$$f_1(x)=\frac{(x+1)(e^x+1)}{e^x}=\frac{(x+1)e^x}{e^x}+\frac{x+1}{e^x}=x+1+\frac{x+1}{e^x}=f(x)+1$$ (6

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو انسحاب الخط البياني للتابع f بمقدار واحد للأعلى



انتهى حل النموذج الرابع

التابع الأسي