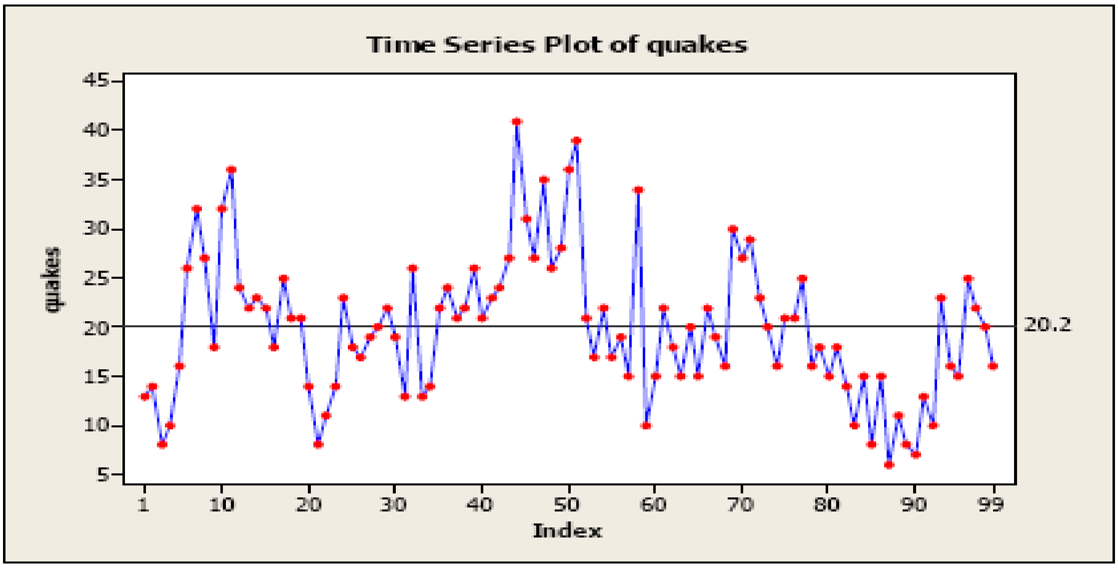
مقرر السلاسل الزمنية



المحاضرة (السادسة)

لطلاب السنة الثالثة إحصاء رياضي

مدرس المقرر

د. رفيف الحبيب

$$Ln\ y_t = \ln a + t \ln b$$

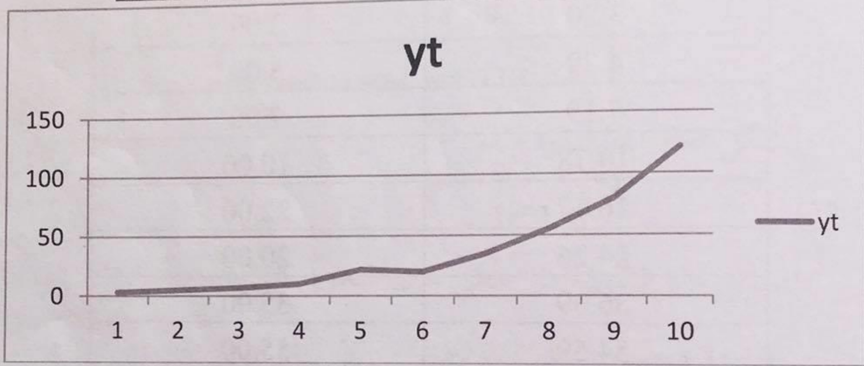
نضع $Y_t = \ln y_t$ ، $A = \ln a$ ، $B = \ln b$

ويصبح النموذج كمايلي:

$$Y_t = A + B\ t$$

مثال (1-13): لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمني والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج المركب:

y_t	3	5	7	10	22	20	35	55	80	121



شكل (1-11)انتشار السلسلة

من الشكل واضح أن انتشار البيانات يمكن أن يخضع للنموذج المركب

نحسب معاملات النموذج

جدول(1-17) حساب معاملات النموذج

	y_t	Y_t	t	$Y_t.t$	t^2
	3.00	1.10	1.00	1.10	1.00
	5.00	1.61	2.00	3.22	4.00
	7.00	1.95	3.00	5.84	9.00
	10.00	2.30	4.00	9.21	16.00
	22.00	3.09	5.00	15.46	25.00
	20.00	3.00	6.00	17.97	36.00
	35.00	3.56	7.00	24.89	49.00
	55.00	4.01	8.00	32.06	64.00
	80.00	4.38	9.00	39.44	81.00
	121.00	4.80	10.00	47.96	100.00
مجموع	358.00	29.78	55.00	197.14	385.00

$$B=\frac{\sum Y.t-\sum Y\sum t/n}{\sum t^2-(\sum t)^2/n}=\frac{(197.14-29.78*55/10}{385-(55)^2/10}=0.40 \longrightarrow \hat{b}=e^{0.40}=1.50$$

$$A=\overline{Y}\ \text{-}b\bar{t}=0.76 \longrightarrow \hat{a}=e^{0.76}=2.13$$

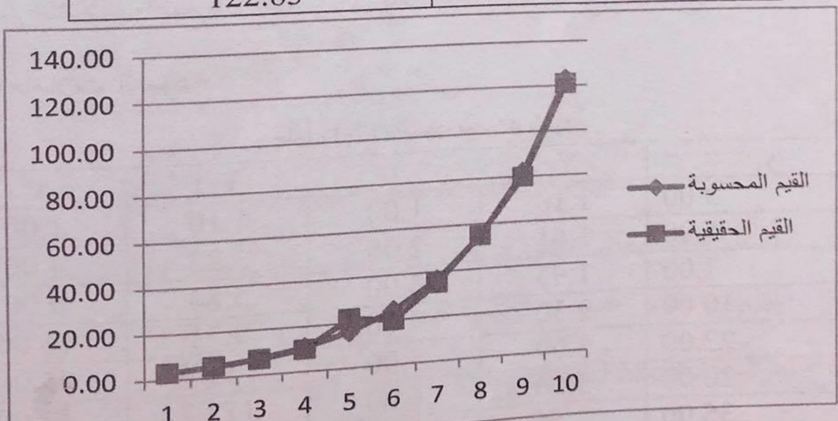
بالتعويض في العلاقة (1-36) نجد أن:

$$\widehat{y_t}=2.13(1.50)^t$$

الجدول التالي يبن القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج السابق

جدول(1-18) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم المحسوبة	القيم الحقيقية
3.20	3.00
4.79	5.00
7.19	7.00
10.78	10.00
16.17	22.00
24.26	20.00
36.39	35.00
54.59	55.00
81.88	80.00
122.83	121.00

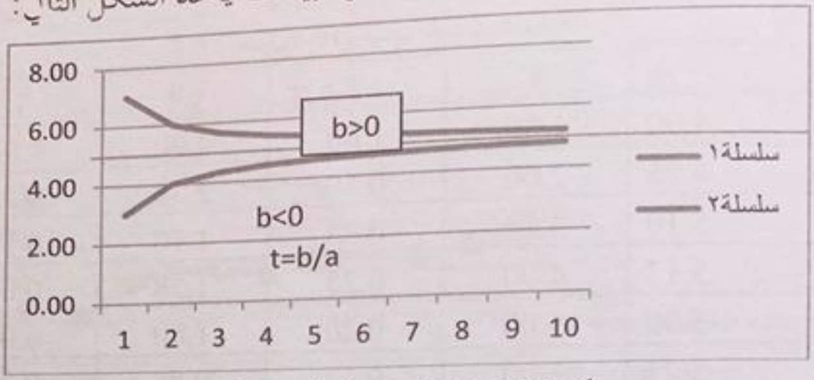


شكل(1-12) الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

6.النموذج العكسي Inverse I Model

يستخدم هذا النموذج عندما يكون انتشار البيانات يأخذ الشكل التالي:



شكل(1-13) انتشار البيانات وفق النموذج العكسي

الشكل العام لهذا النموذج هو:

$$\boxed{y_t = a + \frac{b}{t}} \qquad (37\text{-}1)$$

لتحويل هذا النموذج الى خطي نجري التحويل التالي:

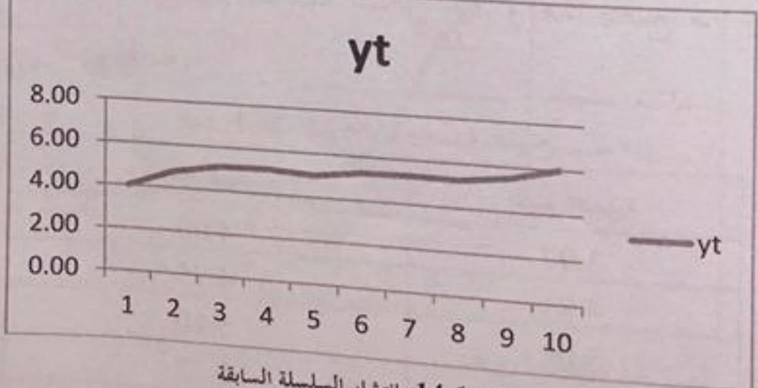
$T=1/t$ ويصبح شكل النموذج

$$y_t = a + b\,T$$

مثال (1-14) لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمني والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج العكسي 1:

y_t	4	4.75	5.10	5.13	5	5.25	5.29	5.25	5.5	6

نرسم الشكل البياني لانتشار السلسلة



شكل(1-14) انتشار السلسلة السابقة

من الشكل يتضح لدينا أن البيانات تلائم النموذج العكسي1

نخرج معاملات هذا النموذج

جدول(**1-19**) حساب معاملات النموذج

	y_t	t	$T = \frac{1}{t}$	y_tT	T^2
	4.00	1.00	1.00	4.00	1.00
	4.75	2.00	0.50	2.38	0.25
	5.10	3.00	0.33	1.70	0.11
	5.13	4.00	0.25	1.28	0.06
	5.00	5.00	0.20	1.00	0.04
	5.25	6.00	0.17	0.88	0.03
	5.29	7.00	0.14	0.76	0.02
	5.25	8.00	0.13	0.66	0.02
	5.50	9.00	0.11	0.61	0.01
	6.00	10.00	0.10	0.60	0.01
مجموع	**51.26**	**55.00**	**2.93**	**13.85**	**1.55**

$$\hat{b}=\frac{\sum y.T-\sum y.\sum T/n}{\sum T^2-(\sum T)^2/n}=\frac{(13.85-2.93*51.26/10}{1.55-(2.93)^2/10}=-1.67715$$

$$\hat{a}=\overline{y.}-b\overline{T}=5.617302$$

بالتعويض في العلاقة (1-37) نجد أن:

$$\widehat{y_t}=5.62-\frac{1.68}{t}$$

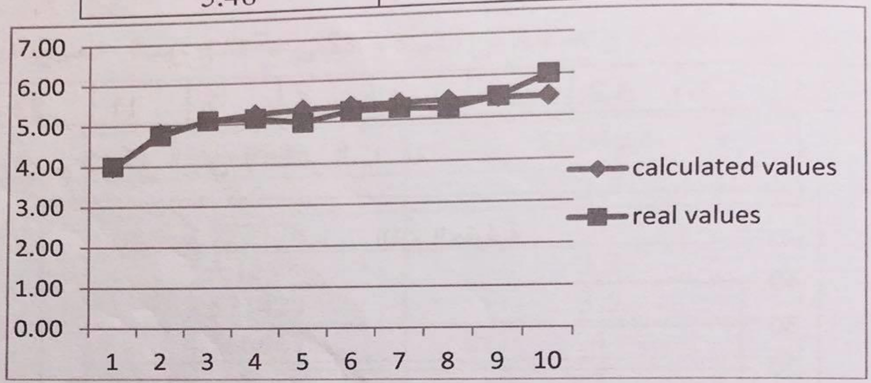
بمقارنة قيم الجدول بين القيم الحقيقية والمحسوبة من النموذج (1-37)

نجد أن النموذج يمثل قيم السلسلة بشكل جيد و هذا يتضح من خلال اقتراب القيم الحقيقة من القيم المحسوبة

جدول(**1-20**) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم المحسوبة	القيم الحقيقية
3.97	4.00
4.81	4.75
5.09	5.10
5.23	5.13

5.31	5.00
5.37	5.25
5.41	5.29
5.44	5.25
5.46	5.50
5.48	6.00



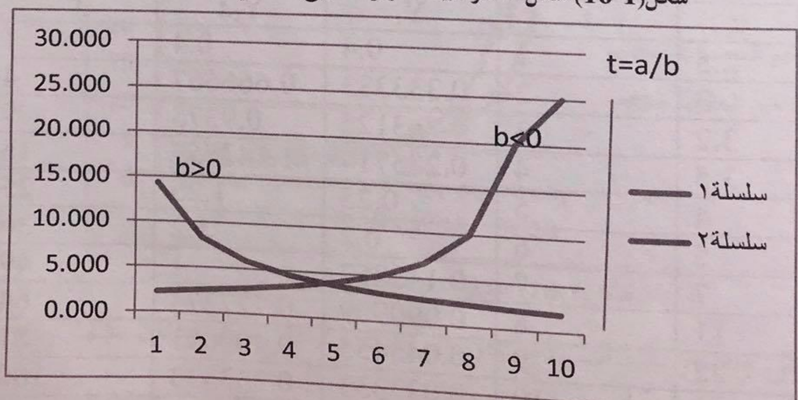
شكل(1-15) الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

7.النموذج العكسي 2Inverse Model II

نستخدم هذا النموذج عندما يكون انتشار البيانات بالشكل التالي:

شكل(1-16) شكل انتشار البيانات وفق النموذج العكسي 2



الشكل العام لهذا النموذج هو:

$$\boxed{y_t = \frac{1}{a+b\,t}} \qquad (38\text{-}1)$$

يحول هذا النموذج الى شكل خطي بالتحويلة التالية:

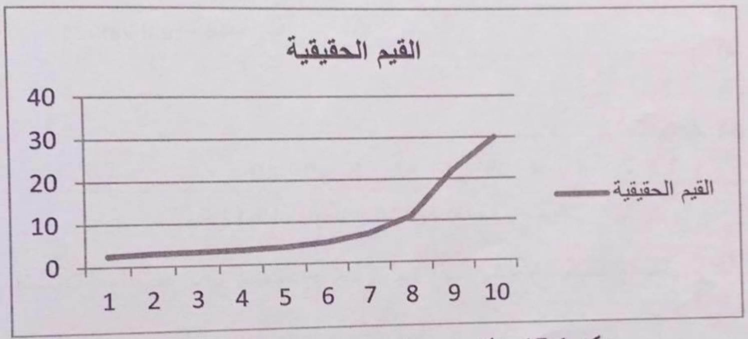
$$Y_t = 1/y_t$$

ويصبح النموذج: $Y_t = a + b\,t$

مثال (1-15) لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمنية والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج العكسي 2:

y_t	2.5	3	3.2	3.5	4	5	7	11	22	30

نرسم الشكل البياني لانتشار السلسلة



شكل(1-17) شكل انتشار البيانات للسلسلة في المثال (1-15)

نلاحظ من شكل الانتشار أن البيانات قريبة لشكل النموذج العكسي 2، نخرج معاملات هذا النموذج.

جدول(1-21) حساب معاملات النموذج

	y_t	t	$Y_t = \frac{1}{y_t}$	$Y_t.t$	t^2
	2.5	1	0.4	0.4	1
	3	2	0.333333	0.666667	4
	3.2	3	0.3125	0.9375	9
	3.5	4	0.285714	1.142857	16
	4	5	0.25	1.25	25
	5	6	0.2	1.2	36
	7	7	0.142857	1	49
	11	8	0.090909	0.727273	64
	22	9	0.045455	0.409091	81
	30	10	0.033333	0.333333	100
مجموع	91.2	55	2.094102	8.066721	385

$$\hat{b}=\frac{\sum Y.t-\sum Y\sum t/n}{\sum t^2-(\sum t)^2/n}=\frac{(8.066-2.09*55/10}{385-(55)^2/10}=-0.04$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-b\overline{t}=0.44$$

بالتعويض في (1-38) نجد أن:

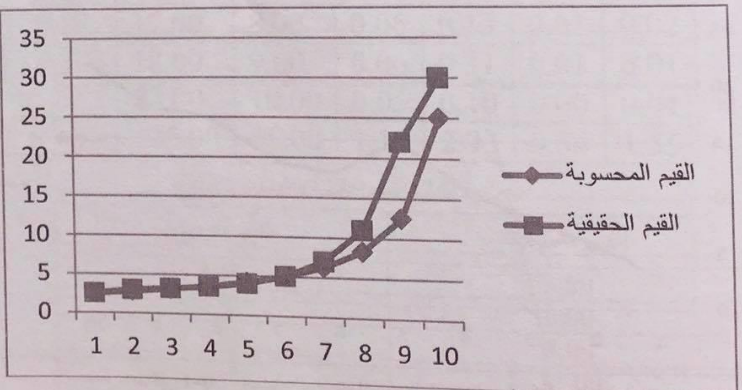
$$\widehat{y_t}=\frac{1}{0.44-0.04t}$$

جدول القيم الحقيقية والمحسوبة من النموذج السابق

جدول(1-22) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم المحسوبة	القيم الحقيقية
2.5	2.5
2.777778	3
3.125	3.2
3.571429	3.5
4.166667	4
5	5
6.25	7
8.333333	11
12.5	22
25	30

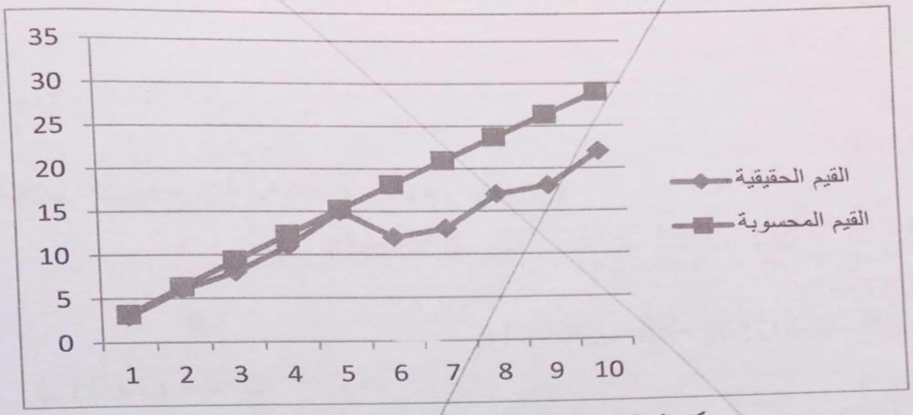
نرسم الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة



شكل(1-18) انتشار القيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

نرسم الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج السابق

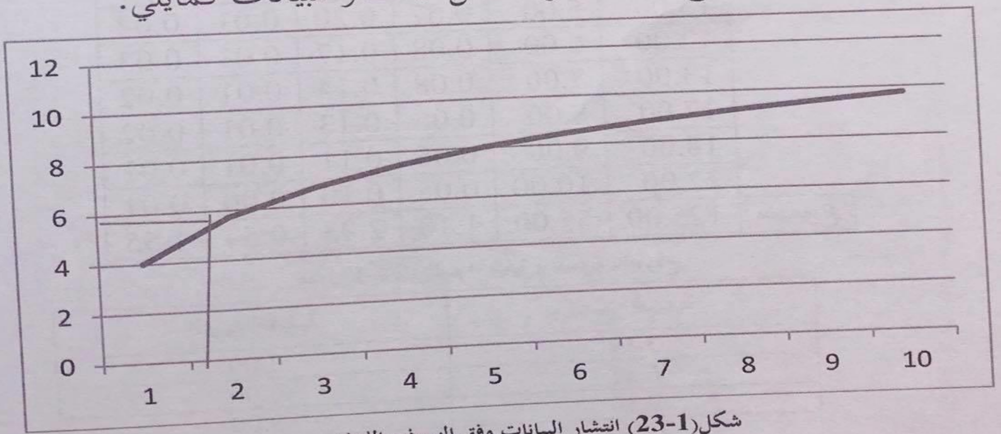


شكل(1-22) انتشار القيم الحقيقية والمحسوبة للمثال(1-16)

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

9.النموذج أللوغاريتمي Logarithmic Model

نستخدم هذا النموذج عندما يكون شكل الانتشار البيانات كمايلي:



شكل(1-23) انتشار البيانات وفق النموذج اللوغاريتمي

الشكل العام للنموذج هو:

$$\boxed{y_t = a + b \ln t} \quad (40\text{-}1)$$

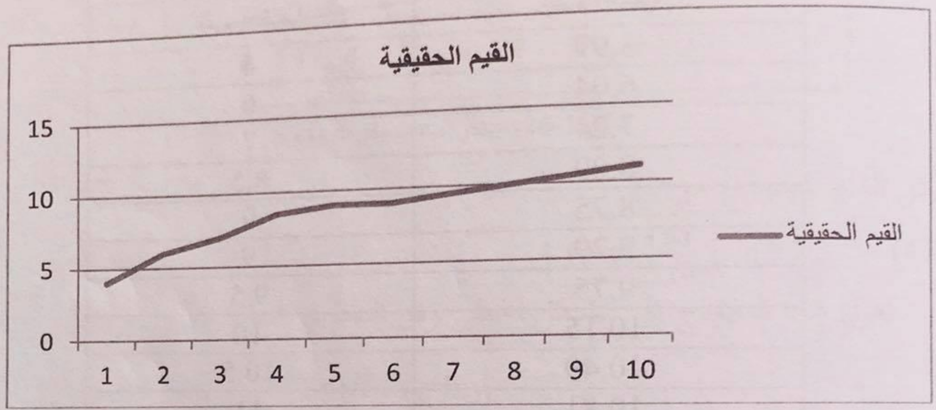
نحول هذا النموذج الى نموذج خطي بالتحويل التالي: $T=\ln t$

ويصبح النموذج خطياً كمايلي: $y_t=a + bT$

مثال (1-15): لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمني والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج أللوغاريتمي:

y_t	4	6	7	8.5	9	9	9.5	10	10.5	11

نرسم الشكل البياني لانتشار السلسلة



شكل(1-24) انتشار بيانات السلسلة في المثال (1-15)

واضح أن النموذج الأسي يمثل بيانات السلسلة بشكل جيد،نخرج معاملات النموذج:

جدول(1-25) حساب معاملات النموذج

	y_t	t	$T=\ln t$	$y_t.T$	T^2
	4	1	0.00	0.00	0.00
	6	2	0.69	4.16	0.48
	7	3	1.10	7.69	1.21
	8.5	4	1.39	11.78	1.92
	9	5	1.61	14.48	2.59
	9	6	1.79	16.13	3.21
	9.5	7	1.95	18.49	3.79
	10	8	2.08	20.79	4.32
	10.5	9	2.20	23.07	4.83
	11	10	2.30	25.33	5.30
مجموع	84.5	55	15.10	141.92	27.65

$$\hat{b}=\frac{\sum y.T-\sum y\sum T/n}{\sum T-(\sum T)^2/n}=\frac{(141.92-84.5*15.1/10}{27.56-(15.10)^2/10}=2.96$$

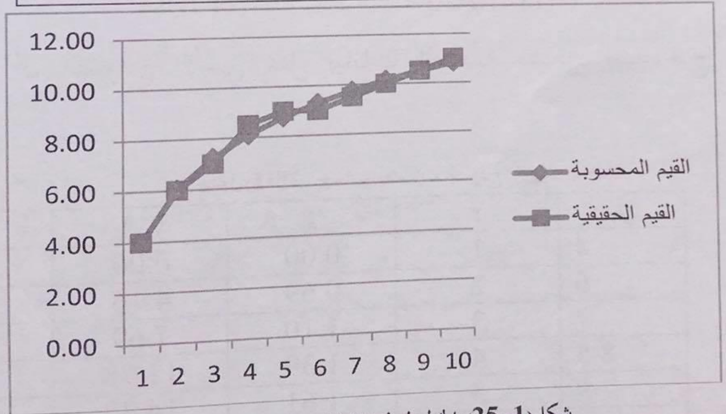
$\hat{a}=\overline{y}$ -b$\overline{T}$ =3.99

بالتعويض في (1-40) نحصل على:

$\widehat{y_t}$=3.99 + 2.96ln t

جدول(1–26) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم المحسوبة	القيم الحقيقية
3.99	4
6.04	6
7.24	7
8.09	8.5
8.75	9
9.29	9
9.75	9.5
10.15	10
10.49	10.5
10.81	11

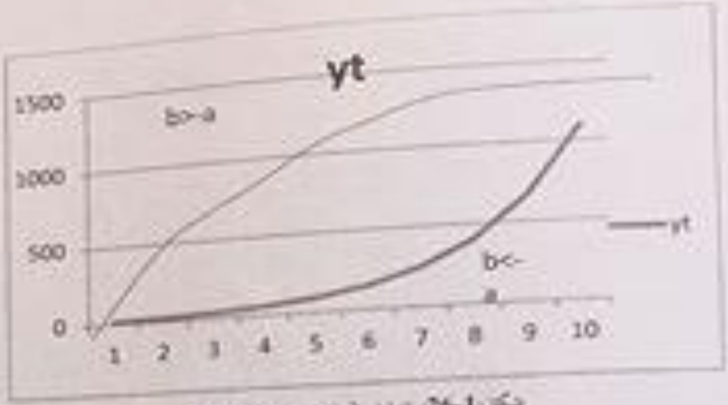


شكل(1–25) الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

10.النموذج S – Model

يستخدم هذا النموذج عندما يكون شكل انتشار البيانات كمايلي:



شكل (1-26) انتشار البيانات وفق النموذج S

الشكل العام للنموذج هو:

$$\boxed{y_t=e^{a+b/t}} \qquad (41\text{-}1)$$

يحول هذا النموذج الى الشكل الخطي وفق التحويل التالي:

$$T=1/t \text{ ،} Y_t=\ln y_t$$

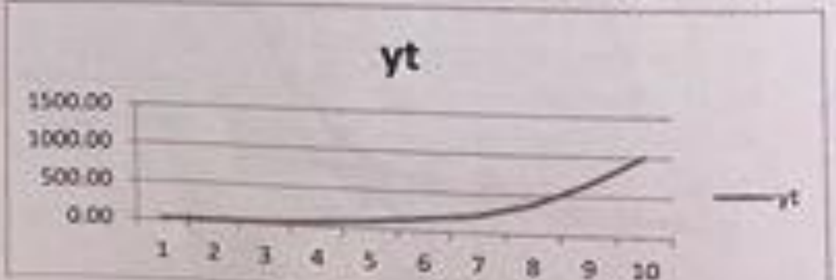
ويصبح الشكل الخطي للنموذج بعد التحويل:

$$Y_t=a+b\,T$$

مثال (1-18): لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمني والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج S:

y_t	12	20	30	54	95	160	220	380	650	1000

نرسم الشكل البياني لانتشار السلسلة



شكل (1-27) انتشار بيانات المثال (1-18)

الشكل العام للانتشار يبين أن البيانات تمثل بشكل جيد بواسطة النموذج S

نخرج معاملات النموذج:

جدول(**1-27**) حساب معاملات النموذج

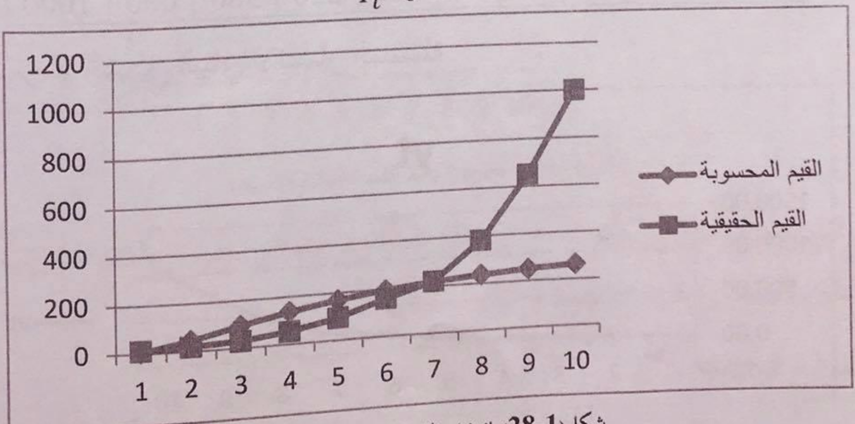
	y_t	t	Y_t	T $\frac{1}{t}$	Y_tT	T^2
	12.00	1.00	2.48	1.00	2.48	1.00
	20.00	2.00	3.00	0.50	1.50	0.25
	30.00	3.00	3.40	0.33	1.13	0.11
	54.00	4.00	3.99	0.25	1.00	0.06
	95.00	5.00	4.55	0.20	0.91	0.04
	160.00	6.00	5.08	0.17	0.85	0.03
	220.00	7.00	5.39	0.14	0.77	0.02
	380.00	8.00	5.94	0.13	0.74	0.02
	650.00	9.00	6.48	0.11	0.72	0.01
	1000.00	10.00	6.91	0.10	0.69	0.01
مجموع	2621.00	55.00	47.22	2.93	10.79	1.55

$$\hat{b}=\frac{\sum Y.T-\sum Y\sum T/n}{\sum T-(\sum T)^2/n}=\frac{(10.79-47.22*\frac{2.93}{10})}{1.55-(2.93)^2/10}=-4.39$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-b\overline{T}=6.01$$

بالتعويض في (1-41) نجد أن:

$$\widehat{Y_t}=e^{6.01-4.39/t}$$



شكل(**1-28**) انتشار القيم الحقيقية والمحسوبة