KSA Math

daralharf.com | الملخص وخرائط المفاهيم

دار الحرف
daralharf.com

#خرائط_التحصيلي

شرح وتقديم

أ.عبدالوهاب العوهلي

FOLLOW UP!
WahabOhali

المنطق الرياضي

المركبة والشرطية

$p \wedge q$ ، نقرؤهـــا «p و q»، وتكـــون صائبة (T) في حالة واحدة عندما p و q صائبتان معًا

$p \vee q$ ، نقرؤهـــا «p أو q»، وتكون خاطئة (F) في حالة واحدة عندما p و q خاطئتان معًا

$p \to q$ ، نقرؤهـــا «إذا كان p فإن q»، وتكـون خاطئة في حالة واحدة عندما يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة

جدول صواب العبارات المركبة والشرطية

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

نفي العبارة: العبارة الصائبة نفيها عبارة خاطئة والعكس بالعكس، فمثلًا: إذا كانت العبارة p صحيحة فإن نفيها $(\sim p)$ خاطئ

المثال المضاد

مثال نثبت به أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائمًا

الشرطية المرتبطة

الشرطية	فــرض معــطــى ونتيجة
العكس	تـبـديل الفــرض والنتيجـة
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة
المعاكس الإيجـابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية

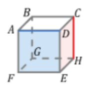
الصفحات 79-80

بعض العلاقات الهندسية

النقاط والمستقيمات والمستويات

المستقيمان المتخالفان لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان

فمثلًا .. $\overleftrightarrow{CH}$ تخالف $\overleftrightarrow{AD}$



أي ثلاث نقاط مختلفة لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط

كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة

إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة

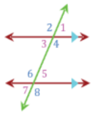
أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط

إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيم

أي مستقيم يحوي نقطتين على الأقل

المستقيم القاطع لمستقيمين متوازيين

المستقيم القاطع لمستقيمين متوازيين يُكوِّن 8 زوايا ..



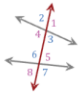
كل زاويتين متناظرتين متطابقتان

كل زاويتين متبادلتين متطابقتان

كل زاويتين متحالفتين متكاملتان

حالة خاصة

مستقيم قاطع لمستقيمين أو أكثر يُكوِّن زوايا عبارة عن ..



زاويتان متبادلتان داخليًا
$\angle 4$ مع $\angle 5$ و $\angle 3$ مع $\angle 6$

زاويتان متبادلتان خارجيًا
$\angle 1$ مع $\angle 8$ و $\angle 2$ مع $\angle 7$

زوايا داخلية
$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

زوايا خارجية
$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$

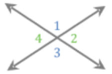
زاويتان متناظرتان
$\angle 1$ مع $\angle 5$ و $\angle 2$ مع $\angle 6$
$\angle 4$ مع $\angle 8$ و $\angle 3$ مع $\angle 7$

زاويتان متحالفتان
$\angle 4$ مع $\angle 6$ و $\angle 3$ مع $\angle 5$

بعض العلاقات بين الزوايا

كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان في القياس (متطابقتان)

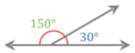
فمثلًا ..



$m\angle 2 = m\angle 4 , m\angle 1 = m\angle 3$

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما $180°$

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان، فمثلًا ..

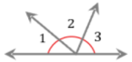


$150° + 30° = 180°$

فائدة
مكملات الزاوية الواحدة لها القياس نفسه

الزاوية المستقيمة قياسها $180°$

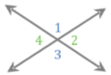
فمثلًا



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة $360°$

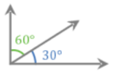
فمثلًا ..



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360°$

الزاويتان المتتامتان مجموع قياسيهما $90°$

فمثلًا ..



$60° + 30° = 90°$

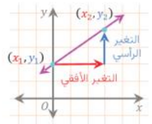
فائدة متممات الزاوية الواحدة لها القياس نفسه

المستقيم

المـيل

ميل المستقيم المار بنقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ,\ x_2 \neq x_1$$



إذا بدأنا بـ y_1 في البسط فإننا نبدأ بـ x_1 في المقام

باستثناء المستقيمات الرأسية

- ميل المستقيمان المتوازيان $m_1 = m_2$
- ميل المستقيمان المتعامدان $m_1 \times m_2 = -1$

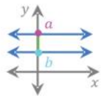
ميل المستقيم الأفقي يساوي صفر

ميل المستقيم الرأسي غير معرف

البُعد

بين مستقيمين متوازيين

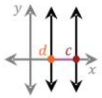
أفقيًا



$y = a$ ، $y = b$

البُعد $= |a - b|$

رأسيًا



$x = c$ ، $x = d$

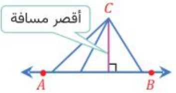
البُعد $= |c - d|$

بين نقطتين $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ يساوي ..

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه

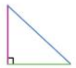
طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة



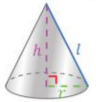
نظرية فيثاغورس للمثلث قائم الزاوية

$(\text{القائم الآخر})^2 + (\text{الضلع القائم})^2 = (\text{الوتر})^2$

ومن ثلاثيات فيثاغورس المشهورة $(3 ، 4 ، 5)$ ومضاعفاتها مثل: $(6 ، 8 ، 10)$



المخروط



الارتفاع (h)

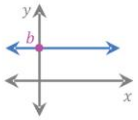
نصف قطر القاعدة (r)

الراسم (l)

معادلة المستقيم

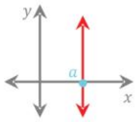
- بدلالة الميل والمقطع y: $y = mx + b$
- بدلالة ميله ونقطة تقع عليه (x_1, y_1): $y - y_1 = m(x - x_1)$

الأفقي



$y = b$

الرأسي



$x = a$

الصفحات 83-86

المضلع

يُسمى المضلع بعدد أضلاعه

مجموع قياسات زواياه الداخلية

$S = 180°(n-2)$

المضلع المنتظم

أضلاعه متطابقة وزواياه متطابقة

قياس الزاوية الخارجية $= \frac{360°}{n}$

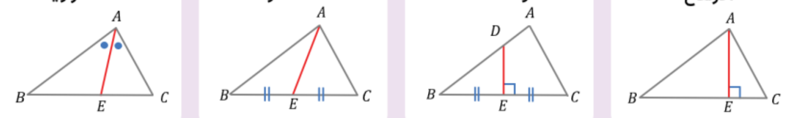
(عدد الأضلاع) $n = \frac{360°}{180° - m}$

(قياس الزاوية الداخلية) $m = \frac{180°(n-2)}{n}$

المثلث

قطع خاصة

- منصف زاوية
- القطعة المتوسطة
- العمود المنصف
- الارتفاع

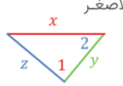


حالات التطابق

- تطابق 3 أضلاع في المثلثين SSS
- تطابق (ضلع – زاوية – ضلع) SAS
- تطابق (زاوية – ضلع – زاوية) ASA
- تطابق (زاوية – زاوية – ضلع) SAA

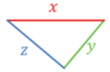
المتباينات في المثلث

الضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر، والضلع الأقصر يقابل الزاوية الأصغر



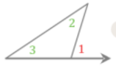
$x > z \ , \ m\angle 1 > m\angle 2$

طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين، وأكبر من الفرق بينهما



$|y - z| < x < y + z$

الزاوية الخارجية قياسها أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخلتين البعيدتين عنها



$m\angle 1 > m\angle 2 \ , m\angle 1 > m\angle 3$

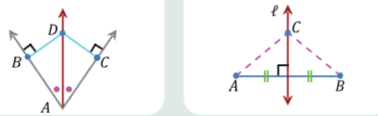
نظريات المنصفات

منصف الزاوية

إذا كان $\overrightarrow{AD}$ منصفًا لـ $\angle CAB$ فإن $DB = DC$

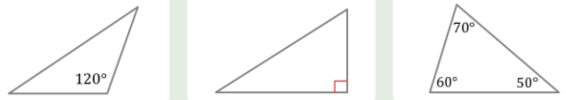
العمود المنصف للقطعة المستقيمة

إذا كان ℓ عمودًا منصفًا فإن $CA = CB$



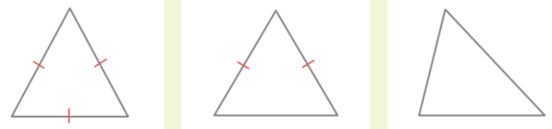
تصنيف وفقًا لزواياه

- **منفرج الزاوية**: يحوي زاوية قياسها أكبر من $90°$
- **قائم الزاوية**: يحوي زاوية قياسها $90°$
- **حاد الزوايا**: قياس كل زاوية أقل من $90°$



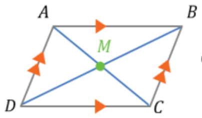
تصنيف وفقًا لأضلاعه

- متطابق الأضلاع
- متطابق الضلعين
- مختلف الأضلاع



بعض الأشكال الرباعية

متوازي الأضلاع



فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

خواصه

- الضلعان المتقابلان متطابقان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
- الزاويتان المتقابلتان متطابقتان $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle D$
- القطران ينصف كلًا منهما الآخر $DM = BM$ و $AM = CM$
- الزاويتان المتحالفتان متكاملتان $m\angle A + m\angle B = 180°$

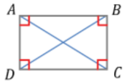
إذا كانت M نقطة المنتصف بين النقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ؛ فإن ..

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

حالات خاصة

المستطيل

زواياه الأربع قوائم

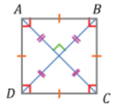


خواصه

نفس خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى أن قطري المستطيل متطابقان $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المربع

جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم

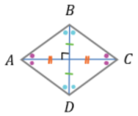


خواصه

نفس خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى أن قُطري المربع متطابقان ومتعامدان وينصفان زوايا الرؤوس

المعين

جميع أضلاعه متطابقة



خواصه

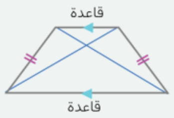
نفس خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى أن قطري المعين متعامدان وينصفان زوايا الرؤوس

شبه المنحرف

فيه ضلعان فقط متوازيان

حالة خاصة

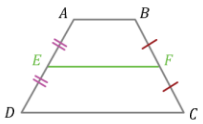
شبه المنحرف متطابق الساقين



خواصه

- قطراه متطابقان
- الضلعان غير المتوازيين متطابقان
- زاويتا كل قاعدة متطابقتان

القطعة المتوسطة



$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

التشابه

المضلعات المتشابهة

يتشابه مضلعان إذا كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة والزوايا المتناظرة متطابقة

في المضلعين المتشابهين

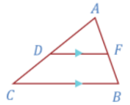
$$\text{معامل التشابه} = \frac{\text{طول أي ضلع}}{\text{طول المناظر له}} = \frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}}$$

بعض النظريات في المثلث

التناسب

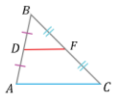
إذا كان $\overline{DF} \parallel \overline{CB}$ فإن ..

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FB}$$



القطعة المنصفة

القطعة المنصفة توازي أحد الأضلاع، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع

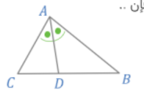


$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ ، $DF = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2DF$

منصف الزاوية

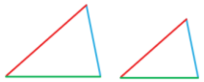
إذا كان $\overline{AD}$ منصفًا لـ $\angle A$ فإن ..

$$\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$$

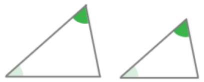


حالات تشابه مثلثين

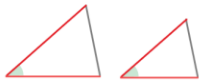
أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة (SSS)



طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في الآخر (AA)



تناسب طولا ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في الآخر وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما (SAS)



البرهان الإحداثي

برهان نستخدم فيه رسم الأشكال في المستوى الإحداثي لإثبات صحة المفاهيم الهندسية

فائدتان

- النقاط التي على نفس الخط الرأسي لها نفس الإحداثي x
- النقاط التي على نفس الخط الأفقي لها نفس الإحداثي y

التحويلات الهندسية والتماثل

التمدد

التمدد **لا** يُسمى تحويل تطابق لأنه **لا** يحافظ على الأبعاد

التمدد في المستوى الإحداثي

صورة النقطة (x, y) بتمدد معامله k هي (kx, ky)

إذا كانت $\overline{A'B'}$ هي صورة $\overline{AB}$ بمعامل تمدد k فإن ..

$$k = \frac{A'B' \text{ (طول الصورة)}}{AB \text{ (طول الأصل)}}$$

حالاته

- $k > 1$ التمدد تكبير
- $0 < k < 1$ التمدد تصغير
- $k = 1$ التمدد تطابق

التماثل الدوراني

رتبة التماثل الدوراني لأي مضلع منتظم تساوي عدد أضلاعه n

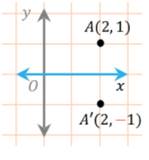
مقدار التماثل الدوراني $= \frac{360°}{n}$

الانعكاس

حول محور x

نغير إشارة الإحداثي y

$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$

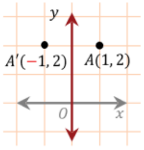


$A(2,1) \longrightarrow A'(2,-1)$

حول محور y

نغير إشارة الإحداثي x

$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$

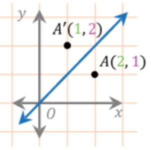


$A(1,2) \longrightarrow A'(-1,2)$

حول المستقيم $y = x$

نبدل الإحداثيين

$(x, y) \longrightarrow (y, x)$



$A(2,1) \longrightarrow A'(1,2)$

الانعكاس يُسمى تحويل تطابق

الإزاحة (الانسحاب)

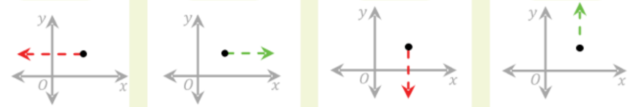
$P(x, y) \longrightarrow P'(x + a, y + b)$

أفقية

- لليسار: a سالبة
- لليمين: a موجبة

رأسية

- لأسفل: b سالبة
- لأعلى: b موجبة



الإزاحة تُسمى تحويل تطابق

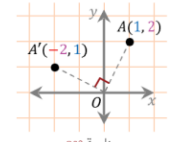
الدوران حول نقطة الأصل

عكس عقارب الساعة

بزاوية $90°$

نبدل الإحداثيين **ثم** نغير إشارة الأول

$(x, y) \xrightarrow{\text{زاوية } 90°} (-y, x)$

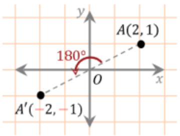


$A(1,2) \xrightarrow{\text{زاوية } 90°} A'(-2,1)$

بزاوية $180°$ (التناظر حول نقطة الأصل)

نغير إشارة الإحداثيين x و y

$(x, y) \xrightarrow{\text{زاوية } 180°} (-x, -y)$

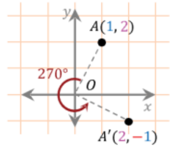


$A(2,1) \xrightarrow{\text{زاوية } 180°} A'(-2,-1)$

بزاوية $270°$

نبدل الإحداثيين **ثم** نغير إشارة الثاني

$(x, y) \xrightarrow{\text{زاوية } 270°} (y, -x)$



$A(1,2) \xrightarrow{\text{زاوية } 270°} A'(2,-1)$

بزاوية $360°$

صورة النقطة الناتجة هي الأصلية نفسها

الدوران يُسمى تحويل تطابق

الرياضيات | الدائرة

الصفحات 93-95

الدائرة

قطع خاصة

نصف القطر r: قطعة مستقيمة أحد طرفيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة

الوتر: قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة

القطر d: وتر يمر بالمركز
$d = 2r$

المحيط C: طول الخط الخارجي
$C = \pi d$, $C = 2\pi r$

معادلة الدائرة

مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

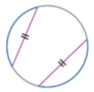
الأقواس وقياسها

قياس القوس: يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

القوس الأصغر: قياس زاويته المركزية أقل من 180°

القوس الأكبر: قياس زاويته المركزية أكبر من 180°

الأقواس والأوتار: تطابق الأوتار يؤدي إلى تطابق أقواسها، والعكس بالعكس



زوايا خاصة

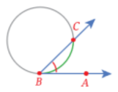
الزاوية المركزية: زاويــة رأســها مركــز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين للدائرة

قياسها يساوي قياس القوس المقابل لها

الزاوية المحيطية: زاوية رأســها علــى الدائرة وضلعاها وتران للدائرة

قياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

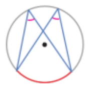
الزاوية المماسية: زاوية ناتجة من تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس



قياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة (قياسها 90°)

الزاويتان المحيطيتان المرســومتان علــى نفس القوس لهما نفس القياس



الأعداد الحقيقية

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية

مجموعة الأعداد غير النسبية I

العدد غير النسبي عدد صورته العشرية ليست منتهية ولا دورية

π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\text{عدد ليس مربعًا كاملًا}}$

مجموعة الأعداد النسبية Q

تتكون من أي عدد يمكن كتابته على صورة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ بحيث المقام $\neq 0$ ، وأيضًا الأعداد الدورية، مثل ..

$2, \sqrt{49}, 0.125, \frac{22}{7}, \frac{3}{5}, 0.\bar{3}, 0.\overline{45}$

الأعداد الصحيحة Z

$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

الأعداد الكلية W

$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

الأعداد الطبيعية N

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

بعض خصائص الجمع والضرب

الجمع		الضرب
$a + b = b + a$	الإبدال	$a \cdot b = b \cdot a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	التجميع	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
النظير الجمعي لعدد هو نفس العدد بعكس إشارته	النظير	النظير الضربي للعدد $\frac{a}{b}$ هو العدد $\frac{b}{a}$

التوزيع

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot C$

الجمع أو الطرح للمساواة

إذا كان $a = b$ فإن $a + c = b + c$ و $a - c = b - c$

مسلَّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

إذا كان $FH + HG = FG$ فإن النقطة H تقع بين F و G أي أنها تمثل قطعة مستقيمة FG

الفترات

محدودة

$a < x < b$ — (a, b)

$a \leq x \leq b$ — $[a, b]$

غير محدودة

$x > a$ — (a, ∞)

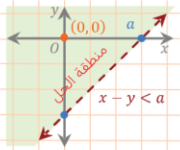
$x \leq a$ — $(-\infty, a]$

العلاقات والدوال

المتباينات الخطية

عبارة رياضية تحوي المتغيرين x , y وإحدى علامات التباين > أو < أو ≤ أو ≥

إذا كانت نقطة ما تحقق متباينة فهي تقع في منطقة حل المتباينة، والعكس بالعكس، فمثلًا: النقطة $(0, 0)$ تقع في منطقة الحل



إذا كانت نقطة ما تقع في منطقة حل النظام فهي تحقق جميع المتباينات في النظام، والعكس بالعكس

الدالة

علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى

المجال: قيم x التي يمكن التعويض بها في الدالة

المدى: القيم الناتجة من التعويض بقيم x في الدالة

قيمة الدالة $f(x)$ عند نقطة

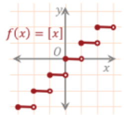
لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عند نقطة نعوض بالنقطة في الدالة بشرط انتماء النقطة لمجال الدالة

في الدالة متعددة التعريف يتم التعويض بالعدد في الجزء الذي يحقق شروطها، ثم نبسط

دالة أكبر عدد صحيح (الدرجية)

الدالة الدرجية

فتصبح $f(x) = [x]$



مجالها: مجموعة الأعداد الحقيقية R

مداها: مجموعة الأعداد الصحيحة Z

الرمز $[x]$ يرمز للعدد الصحيح الأقل من أو يساوي x ، فمثلًا ..

$[3.7] = 3, [-3.7] = -4$

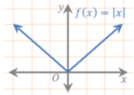
القيمة المطلقة ودالة القيمة المطلقة

القيمة المطلقة للعدد

$|\pm a| = a$ (دائمًا موجبة)

الدالة الرئيسة (الأم)

$f(x) = |x|$



مجالها: R

مداها: $[0,\infty)$

الصورة العامة

$f(x) = |x - a| + b$

مجالها: R

مداها: $[b, \infty)$

المصفوفات

المُحدِّدات والنظير الضربي لمصفوفة

مساحة المثلث

الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ تساوي $|A|$ حيث..

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مُحدِّدة الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (1 \times -3) = 2 + 3 = 5$$

مُحدِّدة الدرجة الثالثة

$$\begin{vmatrix} a & b & g \\ c & d & n \\ e & f & m \end{vmatrix}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 60 + 0) - (0 + 24 + 10) = 29$$

النظير الضربي للمصفوفة

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ هو..

$$A^{-1} = \frac{1}{2(3) - 5(1)}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة

نُعبر عن رتبة المصفوفة بـ $m \times n$ ، حيث m عدد الصفوف و n عدد الأعمدة

لتحديد عنصر في مصفوفة نحدد الصف ثم العمود الذي يتقاطع معه، ونعبر عنه بـ a_{mn}

مصفوفة الوحدة I

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بعض العمليات عليها

جمع مصفوفتين

من نفـس الرتبة نجمع كل عنصر في المصفوفة الأولى مع نظيره في الثانية، والطرح بالطريقة نفسها

المصفوفتان المتساويتان

تكونان من نفس الرتبة وكل عنصر في المصفوفة الأولى يساوي نظيره في المصفوفة الثـانية

ضرب مصفوفة بعدد

نضرب العدد بكل عنصر من عناصر المصفوفة

ضرب مصفوفتين

عملية ضرب ممكنة

$A_{m\times r} \cdot B_{r\times t}$ ($=$)

عملية ضرب غير ممكنة

$A_{m\times r} \cdot B_{n\times t}$ ($\neq$)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bf & ag + bh \\ ce + df & cg + dh \end{bmatrix}$$

كثيرة الحدود

المقصود بها: وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد.

درجتها: أكبر درجة لوحيدات الحد المكونة لها.

معاملها الرئيس: معامل وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر.

كثيرة الحدود الأولية: هي التي لا يمكن تحليلها.

جذورها (أصفارها)

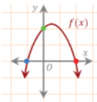
لإيجاد أصفار $f(x)$ نساويها بالصفر ونوجد قيم x وإذا كان $f(c) = 0$ فإن c من أصفار كثيرة الحدود $f(x)$

الأصفار الحقيقية بيانيًا

نقاط تقاطع $f(x)$ مع محور x

فمثلًا:

في الشكل الأصفار هي $-1, 2$ والعوامل هي $(x + 1), (x - 2)$



الجذور التخيلية

يكون الجزء الحقيقي فيها يساوي صفرًا

إذا كان العدد المركب $(a + ib)$ صفرًا لدالة كثيرة حدود فإن مرافقه $(a - ib)$ صفر للدالة أيضًا

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة

عواملها

تكون $(x - r)$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان r صفرًا لـ $f(x)$ أي أن $f(x) = 0$ (باقي القسمة)

نظرية الباقي

إذا قُسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x - r)$ فإن باقي القسمة ثابت ويساوي $f(r)$

المعادلة التربيعية

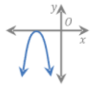
$ax^2 + bx + c = 0$

(القانون العام)

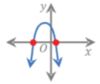
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تحديد نوع الجذور باستخدام المميز $(b^2 - 4ac)$

إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين

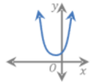


إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين



إذا كان المميز مربعًا كاملًا فإن الجذرين حقيقيان نسبيان، والعكس بالعكس

إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فإن للمعادلة جذرين مركبين مترافقين



بعض العمليات عليها

نستعمل خاصية التوزيع للتخلص من الأقواس، ثم نجمع ونطرح الحدود المتشابهة

في حالة القسمة نحلل كلًا من البسط والمقام، ثم نختصر العوامل المشتركة بينهما

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $R - \{\text{أصفار المقام}\}$

إذا كانت كثيرة الحدود غير ممكنة التحليل فإنه يمكن استخدام القسمة التركيبية

مثال:

ما ناتج $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x + 2)$ ؟

قبل البدء في الحل يتم ترتيب حدود المقسوم تنازليًا حسب درجة الحدود (في حالة وجود حد ناقص نعوض مكانه بصفر)

خطوات الحل ..

الخطوة الأولى: نساوي المقسوم عليه بصفر، ثم نضع المعادلة في الصندوق

الخطوة الثانية: نكتب معاملات المقسوم

الخطوة الثالثة: نضرب المعامل الأول في الصندوق ثم نضع الناتج تحت المعامل الثاني ونجمعه مع المعامل أعلاه، ثم نضرب الناتج في الصندوق وهكذا ...

الخطوة الرابعة: نضع المتغيرات بدرجة أقل من المقسوم تنازليًا من اليسار إلى اليمين

$x - 2 = 0$

$x = -2$	$+1$	$+2$	-2	-3	$+2$
		-2	0	4	-2
(درجة كل حد تنقص 1)	$+1x^3$	$+0x^2$	$-2x$	$+1x^0$	$+0$

ناتج القسمة $= x^3 - 2x + 1$

تبسيط العبارات الجبرية

درجة وحيدة الحد

تساوي أس المتغير، أو مجموع أسس متغيراتها إذا احتوت على أكثر من متغير

بعض العمليات عليها

$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

الدالة العكسية

رمزها

$f^{-1}(x)$

من خصائصها

- مجال $f(x)$ = مدى $f^{-1}(x)$
- مدى $f(x)$ = مجال $f^{-1}(x)$

طريقة إيجادها

- نستبدل $f(x)$ بـ y
- ثم نستبدل y بـ x ونستبدل كل x بـ y
- ثم نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y

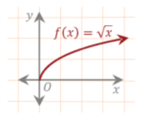
الصفحات 107-108

الدالة والعبارة الجذريتان

الدالة الجذرية

جذر دليله زوجي

الدالة الأم للجذر التربيعي



- مجالها $[0, \infty)$
- مداها $[0, \infty)$

الصورة العامة لدالة الجذر التربيعي

$f(x) = \sqrt{x - a} + b$

- مجالها $[a, \infty)$
- مداها $[b, \infty)$

جذر دليله فردي

- مجالها $(-\infty, \infty)$
- مداها $(-\infty, \infty)$

العبارة الجذرية

التحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية والعكس

الصورة الجذرية		الصورة الأسية
$\sqrt[c]{a^b}$	$\rightleftarrows$	$a^{\frac{b}{c}}$

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

إذا كان أحد أطراف معادلة أو متباينة يحوي جذرًا فإننا نجعل الجذر أحد الطرفين، ثم نرفع الطرفين لقوة مساوية لدليل الجذر للتخلص منه ثم نحل المعادلة بالنسبة للمتغير المعطى

إذا كان دليل الجذر زوجيًا، وأس ما تحت الجذر زوجيًا، وكان أس الناتج فرديًا؛ فإنه يجب وضع القيمة المطلقة

العمليات عليها

- **الجمع والطرح**: $a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$
- **الضرب**: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ حيث $n > 1$
- **القسمة**: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، حيث $b \neq 0$ و $n > 1$

لتبسيط كسر مقامه يحوي جذورًا نضرب في مرافق المقام بسطًا ومقامًا

الصفحات 108-111

الدالة والعبارة النسبيتان

الدالة النسبية

صورتها العامة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x) \neq 0$ ، حيث $a(x)$ ، $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة

مجالها: $R - \{$أصفار المقام$\}$ — تكون غير معرفة عند أصفار المقام

نقطة الانفصال: إذا كان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام فإنه توجد نقطة انفصال عند $x = c$ وتكون نقطة الانفصال $(c, f(c))$

خط التقارب

- للدالة خط تقارب رأسي عند أصفار المقام
- للدالة خط تقارب أفقي واحد على الأكثر
  - أكبر أس في المقام: خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$
  - أكبر أس في البسط: لا يوجد خط تقارب أفقي
  - أس البسط يساوي أس المقام: خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = \frac{a(x) \text{ المعامل الرئيس لـ}}{b(x) \text{ المعامل الرئيس لـ}}$

العبارة النسبية

تعريفها: النسبة بين كثيرتي حدود، وتكون غير معرّفة عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر

لتبسيط عبارة نسبية: نحلل كلًا من البسط والمقام، ثم نختصر العوامل المشتركة بينهما

العمليات عليها

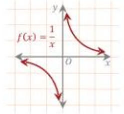
- الجمع والطرح: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- الضرب: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- القسمة: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- تبسيط الكسر المركب: نكتب الكسر على صورة قسمة عبارتين

حل المعادلة النسبية: إيجاد قيم المجهول التي تحقق المعادلة

دالة المقلوب

دالتها الأم

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$



- مجالها: كل الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$
- مداها: كل الأعداد الحقيقية عدا $y = 0$

صورتها العامة

$f(x) = \frac{a}{x - h} + k$

تكون غير معرفة عند $x = h$

خط التقارب: رأسي $x = h$ ، أفقي $y = k$

دوال التغير

الطردي

تتغير y طرديًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kx$ و k (ثابت التغير)، ونستخدم طريقة المقص ..

$\frac{x_1}{y_1} \times \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

المشترك

تتغير y تغيرًا مشتركًا مع x و z إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kxz$ و k (ثابت التغير)..

$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$

العكسي

تتغير y عكسيًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $xy = k$ و k (ثابت التغير)، ونستخدم طريقة اليساوي ..

$\begin{matrix} x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2$

في التغير العكسي يكون حاصل ضرب x و y مقدارًا ثابتًا دائمًا

المركب

إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وعكسيًا مع z إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = \frac{kx}{z}$ و k (ثابت التغير) ..

$\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$

المتتابعات

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

الهندسية		الحسابية
نمط عددي يمكن إيجاد أي حد فيه بضرب الحد السابق له في مقدار ثابت غير الصفر	المقصود بها	نمط عددي يزيد أو ينقص بمقدار ثابت
$\frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له}}$	أساسها	الفرق بين أي حدين متتاليين
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	حدها النوني	$a_n = a_1 + (n-1)d$
يتم إيجادها باختيار الإجابة التي تجعل النسبة بين أي حدين متتاليين ثابتة	الأوساط الحسابية	يتم إيجادها باختيار الإجابة التي تجعل الفرق بين أي حدين متتاليين ثابتًا

إذا وضعنا إشارة الجمع + بين الحدود يعطينا :

المتسلسلات

الحسابية

على الصورة

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

مقدار المجموع

- في حالة وجود الحد الأخير a_n: $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
- في حالة وجود أساس المتتابعة d: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

بالرمز Σ (سيجما)

$\sum_{k=a}^{b} f(k)$ صيغة حدود المتسلسلة

- لإيجاد عدد الحدود n : نطرح قيمة a من b ثم نضيف 1
- لإيجاد الحد الأول a_1 : نعوض بقيمة a في $f(k)$
- لإيجاد الحد الأخير a_n : نعوض بقيمة b في $f(k)$

ولإيجاد مقدار المجموع

الهندسية

على الصورة

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

مقدار المجموع

$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1 - r}$

بالرمز Σ (سيجما)

$\sum_{k=b}^{d} a(r)^{k-1}$

- لإيجاد عدد الحدود n : نطرح قيمة b من d ثم نضيف 1
- لإيجاد الحد الأول a_1 : نعوض بقيمة b مكان k

ولإيجاد مقدار المجموع

المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$\sum_{k=1}^{\infty} a_1(r)^{k-1}$

- $|r| < 1$ متقاربة — مقدار المجموع: $S = \frac{a_1}{1 - r}$
- $|r| \geq 1$ متباعدة — مقدار المجموع: لا يوجد مجموع

الاحتمالات

التباديل والتوافيق

التباديل

تستخدم عندما يكون الترتيب مهمًا

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

طريقة لحساب التباديل ذهنيًا

نضرب r أعداد صحيحة متتالية مرتبة تنازليًا بداية من n

تباديل n من العناصر

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

التباديل مع التكرار

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_k!}$$

التباديل الدائرية

- بنقطة مرجعية ثابتة: $n!$
- بدون نقطة مرجعية ثابتة: $(n-1)!$

التوافيق

تستخدم عندما يكون الترتيب غير مهم

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

طريقة لحساب التوافيق ذهنيًا

$${}_nC_r = \frac{\text{نضرب } r \text{ أعداد صحيحة متتالية مرتبة تنازليًا بداية من } n \text{ بعدد}}{\text{نضرب العدد } r \text{ تنازليًا وصولاً إلى العدد واحد}}$$

التجربة العشوائية

إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة

فضاء العينة لتجربة عشوائية

مجموعة جميع النواتج الممكنة

مثال: فضاء عينة إلقاء مكعب مرقم هو $\{1,2,3,4,5,6\}$

الحادثة

مجموعة جزئية من التجربة العشوائية

$$P(\text{حادثة}) = \frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة}}$$

$$0 \le P(X) \le 1$$

مبدأ العد الأساسي

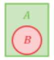
لإيجاد عدد نواتج تجربة متعددة المراحل نضرب عدد نواتج جميع مراحلها

الاحتمال الهندسي

المساحة

احتمال وقوع نقطة في المنطقة B يساوي ..

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B \text{ (الدائرة)}}{\text{مساحة المنطقة } A \text{ (المستطيل)}}$$



الأطوال

احتمال وقوع نقطة على $\overline{BC}$ يساوي ..

$$\frac{\text{طول } \overline{BC}}{\text{طول } \overline{AD}}$$

الحوادث

المستقلة وغير المستقلة

الحادثتان المستقلتان

وقوع إحداهما لا يؤثر على الأخرى

مثال: السحب مع الإرجاع

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

احتمال وقوع A ، احتمال وقوع B

الحادثتان غير المستقلتين

وقوع إحداهما يؤثر على الأخرى

مثال: السحب دون إرجاع

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

احتمال وقوع B بشرط وقوع A أولاً

الاحتمال المشروط

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \ne 0$$

الجداول التوافقية

تستخدم لتوضيح مفهوم الاحتمال المشروط،

مثل: احتمال وقوع العنصر في A شرط وقوعه في C أولاً يساوي

$$P(A/C) = \frac{\omega}{\omega + \Delta}$$

C	D	
ω	β	A
Δ	$\propto$	B

الحادثة المتممة

يوجد فرصتان لأي حادثة إما وقوعها أو عدمه، وتسمى الفرصتان حادثتان متتامتين ومجموعهما 1

$$P(\text{عدم وقوع حادثة}) = 1 - P(\text{وقوع الحادثة})$$

المتنافية وغير المتنافية

الحادثتان المتنافيتان

حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما

مثل: ظهور عدد زوجي أو عدد فردي على الوجه الظاهر لمكعب مرقم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

الحادثتان غير المتنافيتين

حادثتان توجد عناصر مشتركة بينهما

مثل: ظهور عدد أكبر من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر لمكعب مرقم

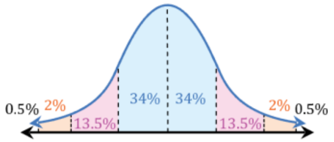
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الإحصاء

التوزيع

الطبيعي

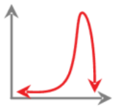
المنحنى يشبه الجرس، والمساحة تحت المنحنى تساوي 1



الملتوي

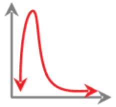
التواء سالب

التوزيع مكثف في اليمين والذيل إلى اليسار



التواء موجب

التوزيع مكثف في اليسار والذيل إلى اليمين



الدراسات

الدراسة التجريبية	إجراء تعديل متعمد على عينة وملاحظة استجاباتها
الدراسة بالملاحظة	ملاحظة العينة دون أي محاولة للتأثير في النتائج
الدراسة المسحية	جمع بيانات أو استفتاء عن العينة دون تعديل فيها

هامش الخطأ

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإن ..

هامش الخطأ $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

التوزيعات ذات الحدين

الوسط	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

مقاييس

التشتت

المدى

الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}}$$

النزعة المركزية

الوسط (المتوسط) الحسابي

يُستعمل عندما لا تكون هناك قيم متطرفة

$\frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$

الوسيط

يُستعمل عندما تُوجد قيم متطرفة ولا توجد فراغات في المنتصف

رُتب البيانات تصاعديًا أو تنازليًا

- **عدد البيانات فردي:** يكون الوسيط هو البيان الموجود في منتصف البيانات
- **عدد البيانات زوجي:** يكون الوسيط هو متوسط البيانين الموجودين في منتصف البيانات

المنوال

يُستعمل في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة

هو البيان الأكثر تكرارًا

قياسات الزوايا

السِتيني
وحدته: الدرجة

$\times \frac{\pi}{180^\circ}$

$\times \frac{180^\circ}{\pi}$

الدائري
وحدته: الراديان

تحويل زوايا مشهورة

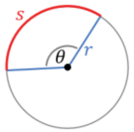
$2\pi = 360^\circ$ | $\pi = 180^\circ$ | $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$

فائدة

دورة الأرض دورة كاملة (كل 24 ساعة) تعادل °360 أي ما يعادل °15 كل ساعة

من تطبيقاتها

إيجاد طول القوس s



θ بالدرجات

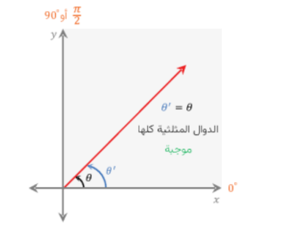
$s = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

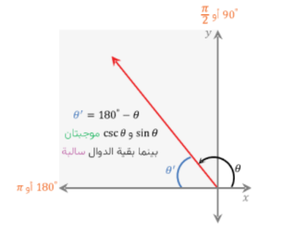
θ بالراديان

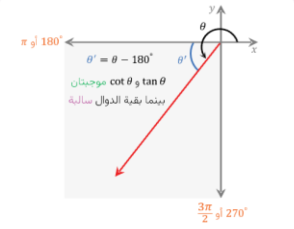
$s = r \times \theta$

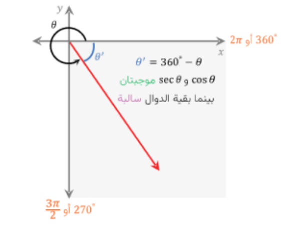
الدوال المثلثية

الزاوية المرجعية θ' وإشارات الدوال المثلثية

الربع الأول


الربع الثاني


الربع الثالث


الربع الرابع


الدوال المثلثية في المثلث قائم الزاوية

$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ومقلوبها $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ومقلوبها $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ومقلوبها $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

من تطبيقاتها

إيجاد مساحة المثلث

وهي تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ (المساحة)

الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	0

الدالة الدورية

يتم تمثيلها بمنحنى على شكل نمط يتكرر بانتظام

من أمثلتها

$y = a\sin b\theta$

$y = a\cos b\theta$

الدالة	$a\sin b\theta$	$a\cos b\theta$	$a\tan b\theta$
طول دورتها	$\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$	$\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$	$\frac{180^\circ}{\lvert b\rvert}$
سعتها	$\lvert a\rvert$	$\lvert a\rvert$	غير معرفة

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام

قانون الجيوب

$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

نستخدمه عند معرفة
قياس زاويتين وطول ضلع في مثلث، أو معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

قانون جيوب التمام

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$

نستخدمه عند معرفة
طولي ضلعين وقياس الزاوية بينهما

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

نستخدمه عند معرفة
أطوال الأضلاع الثلاثة

المتطابقات المثلثية

لمجموع زاويتين والفرق بينهما

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

لنصف زاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لضعف زاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

للزاوية السالبة

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

لزاويتين متتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$

فيثاغورس

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

النسبية

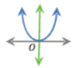
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

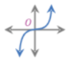
تحليل الدوال

الدوال الزوجية والفردية

الزوجية
ذهنيًا: جميع أسس x زوجية.
جبريًا: $f(-x) = f(x)$
بيانيًا: الدالة متماثلة حول محور y .



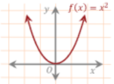
الفردية
ذهنيًا: جميع أسس x فردية.
جبريًا: $f(-x) = -f(x)$
بيانيًا: الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.



ليست زوجية وليست فردية
ذهنيًا:
بعض أسس x زوجي والبعض الآخر فردي

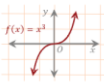
بعض الدوال الرئيسة (الأم)

الدالة التربيعية
$f(x) = x^2$



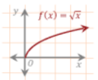
من صورها
$g(x) = a(x-h)^2 + k$

الدالة التكعيبية
$f(x) = x^3$



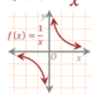
من صورها
$g(x) = a(x-h)^3 + k$

دالة الجذر التربيعي
$f(x) = \sqrt{x}$



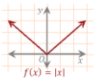
من صورها
$g(x) = a\sqrt{x-h} + k$

دالة المقلوب
$f(x) = \frac{1}{x}$



من صورها
$g(x) = \frac{a}{x-h} + k$

دالة القيمة المطلقة
$f(x) = |x|$



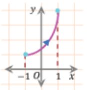
من صورها
$g(x) = a|x-h| + k$

القيمة العظمى والصغرى

القـمــة الأعــلـى تُسمى عظمى مطلقة،
بينما بقية القمم تُسمـــى عظمى محلية،
وكذلك القاع الأدنى يُسمى صغرى مطلقة،
بينما بقية القيعان تُسمى صغرى محلية

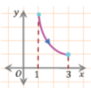
تزايد وتناقص وثبوت الدالة

متزايدة
قيـمة الدالة تتزايد بـتزايد قيم x



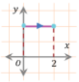
تتزايد في الفترة $(-1, 1)$

متناقصة
قيـمة الدالة تتناقص بتزايد قيم x



تتناقص في الفترة $(1, 3)$

ثابتة
قيـمة الدالة ثابتـة بـتزايد قيم x



ثابتة في الفترة $(0, 2)$

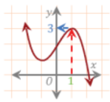
متوسط معدل التغير

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

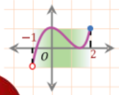
للدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$

تحليل التمثيل البياني للدالة

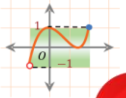
قيمة الدالة عند نقطة
الإحداثي y الناتج من رسم خط رأسي من النقطة إلى منحنى الدالة،
فمثلًا: في الشكل $f(1) = 3$



المجال
نستعمل القيم على محور x لتحديده،
فمثلًا: في الشكل المجال $(-1, 2]$



المدى
نستعمل القيم على محور y لتحديده،
فمثلًا: في الشكل المدى $(-1, 1]$



المقطع x
جبريًا: نوجد قيم x بالتعويض عن $f(x) = 0$
بيانيًا: نقاط تقاطع الدالة مع محور x

المقطع y
جبريًا: نوجد قيم y بالتعويض عن $x = 0$ في الدالة
بيانيًا: نقاط تقاطع الدالة مع محور y

بعض التحويلات الهندسية للدالة

$$g(x) = f(x-h) + k$$

الانسحاب (الإزاحة)

رأسي
لأعلى عندما تكون k موجبة
لأسفل عندما تكون k سالبة
مقدار الإزاحة $|k|$

أفقي
لليمين عندما تكون h موجبة
لليسار عندما تكون h سالب
مقدار الإزاحة $|h|$

الانعكاس

حول محور x
تتغير إشارة الدالة الأم
$g(x) = -f(x)$

حول محور y
تتغير إشارة x في الدالة الأم
$g(x) = f(-x)$

الدالــة الأسية

الدالة الرئيسة (الأم)

$f(x) = b^x$

المجال

مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

مقطع المحور y

$y = 1$

مقطع المحور x

لا يوجد

المعادلة الأسية

$b^y = x$

المتباينة الأسية

$b^y < x$

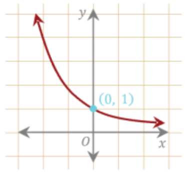
$0 < b < 1$

$b^x > b^y \Leftrightarrow x < y$

$b > 1$

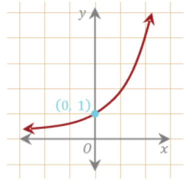
$b^x > b^y \Leftrightarrow x > y$

$f(x) = b^x, \ 0 < b < 1$



دالة متناقصة

$f(x) = b^x, \ b > 1$



دالة متزايدة

من خصائصها

$a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

فائدة

إذا تساوت الأساسات فإن الأسس متساوية والعكس صحيح

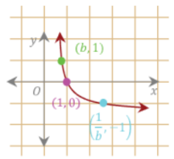
اللوغاريتمات

الدالة اللوغاريتمية

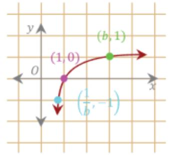
الدالة الرئيسة (الأم)

$f(x) = \log_b x$

$f(x) = \log_b x, \; 0 < b < 1$



$f(x) = \log_b x, \; b > 1$



المجال

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

المدى

مجموعة الأعداد الحقيقية R

مقطع المحور y

$y = f(0)$

من صورها

$f(x) = \log_b (x - h) + k$

مجالها

مجموعة حل المتباينة $x - h > 0$

رمزها

$\log_b x$

حيث x عدد موجب و $b > 1$

اللوغاريتم العشري $\log x$

لوغاريتم أساسه 10 ويُكتب بدون كتابة الأساس

الصورة اللوغاريتمية

$y = \log_b x$ ، $y < \log_b x$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

إذا كان كل من طرفي المعادلة أو المتباينة عبارة عن لوغاريتم، ولهما نفس الأساس (أكبر من 1)؛ فإننا نحذف اللوغاريتم من الطرفين

نعوض بقيم المتغيرات في المعادلة ونستبعد القيم التي تجعل في المعادلة لوغاريتم لعدد سالب

لإيجاد حل المتباينة اللوغاريتمية نُوجِد المجال لاستبعاد القيم التي تجعل اللوغاريتم غير معرف

خصائصها

خصائص أساسية

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^x = x$

خاصية الضرب

$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$

خاصية القسمة

$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$

خاصية لوغاريتم القوة

$\log_b m^p = p \log_b m$

خاصية تغيير الأساس

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية والعكس

الصورة الأسية

$b^y = x$

$b^y < x$

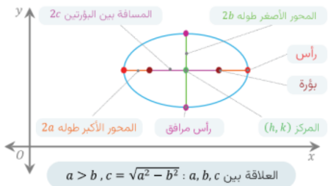
الصورة اللوغاريتمية

$y = \log_b x$

$y < \log_b x$

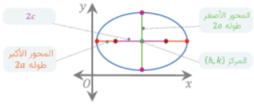
القطوع المخروطية

القطع الناقص



العلاقة بين a, b, c : $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

محوره الأكبر أفقي



معادلته: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

مثال توضيحي

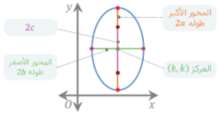
خصائص القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$h = -1$, $k = 1$, $a = \sqrt{25} = 5$, $b = \sqrt{16} = 4$, $c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

- المركز: $(h, k) = (-1, 1)$
- البؤرتان: $(h \pm c, k) = (-1 \pm 3, 1) = (2, 1)$, $(-4, 1)$
- الرأسان: $(h \pm a, k) = (-1 \pm 5, 1) = (4, 1)$, $(-6, 1)$
- الرأسان المترافقان: $(h, k \pm b) = (-1, 1 \pm 4) = (-1, 5)$, $(-1, -3)$
- معادلة المحور الأكبر : $y = k = 1$
- معادلة المحور الأصغر: $x = h = -1$
- الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ (قيمته تنحصر بين 0 و 1)

محوره الأكبر رأسي



معادلته: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

مثال توضيحي

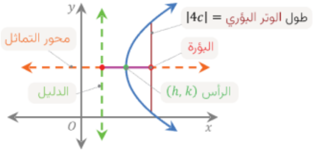
خصائص القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

$h = 0$, $k = 1$, $a = \sqrt{25} = 5$, $b = \sqrt{9} = 3$, $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

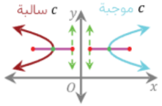
- المركز: $(h, k) = (0, 1)$
- البؤرتان: $(h, k \pm c) = (0, 1 \pm 4) = (0, 5)$, $(0, -3)$
- الرأسان: $(h, k \pm a) = (0, 1 \pm 5) = (0, 6)$, $(0, -4)$
- الرأسان المترافقان: $(h \pm b, k) = (0 \pm 3, 1) = (3, 1)$, $(-3, 1)$
- معادلة المحور الأكبر: $x = h = 0$
- معادلة المحور الأصغر: $y = k = 1$
- الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ (قيمته تنحصر بين 0 و 1)

القطع المكافئ



بُعد الرأس عن البؤرة = بُعد الرأس عن الدليل = $|c|$

المفتوح أفقيًا



معادلته: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

مثال توضيحي

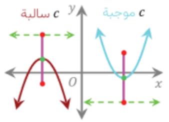
خصائص القطع المكافئ الذي معادلته

$$(y - 1)^2 = -12(x + 2)$$

$h = -2$, $k = 1$, $c = \frac{-12}{4} = -3$

- الرأس: $(h, k) = (-2, 1)$
- البؤرة: $(h + c, k) = (-2 + (-3), 1) = (-5, 1)$
- طول الوتر البؤري: $|4c| = 12$
- معادلة الدليل: $x = h - c = -2 - (-3) = 1$
- معادلة محور التماثل: $y = k = 1$

المفتوح رأسيًا



معادلته: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

مثال توضيحي

خصائص القطع المكافئ الذي معادلته

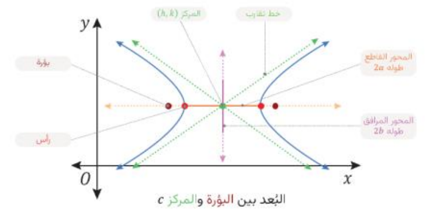
$$(x - 2)^2 = 8(y + 2)$$

$h = 2$, $k = -2$, $c = \frac{8}{4} = 2$

- الرأس: $(h, k) = (2, -2)$
- البؤرة: $(h, k + c) = (2, -2 + 2) = (2, 0)$
- طول الوتر البؤري: $|4c| = 8$
- معادلة الدليل: $y = k - c = -2 - 2 = -4$
- معادلة محور التماثل: $x = h = 2$

القطوع المخروطية

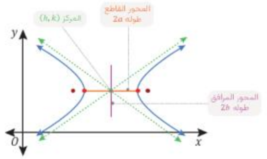
القطع الزائد



البُعد بين البؤرة والمركز c

العلاقة بين a, b, c : $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

محوره القاطع أفقي



معادلته: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

$h = 5, k = 7, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

المركز: $(h, k) = (5, 7)$

البؤرتان: $(h \pm c, k) = (5 \pm 5, 7) = (10, 7), (0, 7)$

الرأسان: $(h \pm a, k) = (5 \pm 3, 7) = (8, 7), (2, 7)$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

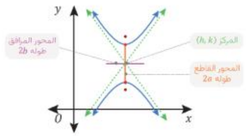
$y - 7 = \frac{4}{3}(x - 5), y - 7 = -\frac{4}{3}(x - 7)$

معادلة المحور القاطع: $y = k = 7$

معادلة المحور المرافق: $x = h = 5$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ (قيمته أكبر من 1)

محوره القاطع رأسي



معادلته: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

$h = -2, k = 1, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

المركز: $(h, k) = (-2, 1)$

البؤرتان: $(h, k \pm c) = (-2, 1 \pm 5) = (-2, 6), (-2, -4)$

الرأسان: $(h, k \pm a) = (-2, 1 \pm 3) = (-2, 4), (-2, -2)$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

$y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2), y - 1 = -\frac{3}{4}(x + 2)$

معادلة المحور القاطع: $x = h = -2$

معادلة المحور المرافق: $y = k = 1$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ (قيمته أكبر من 1)

معادلة الدرجة الثانية وتصنيف القطوع

الصورة العامة للمعادلة

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

قطعًا مكافئًا

إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

قطعًا زائدًا

إذا كان $B^2 - 4AC$ موجبًا

قطعًا ناقصًا

إذا كان $B^2 - 4AC$ سالبًا

إذا كان
$B = 0$ و $A = C$
فإن القطع الناقص
يصبح دائرة

الرياضيات | المتجهات

المتجهات

في المستوى الإحداثي

- **التوافق الخطي**: $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$
  - $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ باتجاه x
  - $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ باتجاه y
- **متجه الوحدة**: $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
- **طول المتجه**: $\overrightarrow{AB} = \langle x, y\rangle$ ، $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **الصورة الإحداثية**: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ، $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

العمليات عليها

- **الضرب الداخلي**: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
  - $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ شرط تعامد متجهين
- **قياس الزاوية بين متجهين**: $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$
- **جمع متجهين**: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$
- **طرح متجهين**: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$
- **ضرب متجه بعدد**: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

في الفضاء ثلاثي الأبعاد

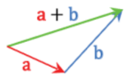
- **التوافق الخطي**: $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$
  - $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$
  - $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$
  - $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$
- **متجه الوحدة**: $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
- **طول المتجه**: $\overrightarrow{AB} = \langle x, y, z\rangle$ ، $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- **الصورة الإحداثية**: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ ، $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$

العمليات عليها

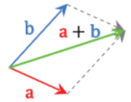
- **الضرب الداخلي**: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
  - $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ شرط تعامد متجهين
- **الضرب الاتجاهي**: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

بعض العلاقات بين متجهين

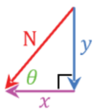
- **المتجهان المتوازيان**
  - لهما نفس الاتجاه إذا كان لهما نفس الإشارات
  - لهما اتجاهان متعاكسان إذا اختلفت الإشارات
- **المتجهان المتساويان**
  - لهما نفس الاتجاه والطول
- **المحصلة بين المتجهين a و b**
  - قاعدة المثلث



  - قاعدة متوازي الأضلاع



تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين



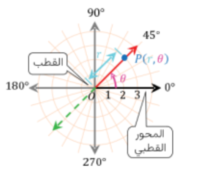
- **المركبة الرأسية**: $|y| = N\sin\theta$
- **المركبة الأفقية**: $|x| = N\cos\theta$

الرياضيات | الإحداثيات القطبية

الإحداثيات القطبية

المستوى القطبي

الإحداثيات القطبية لنقطة $P(r, \theta)$



r
المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P

- **r موجبة**: النقطة P على ضلع الانتهاء
- **r سالبة**: النقطة P على الشعاع المقابل لضلع الانتهاء

θ
الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$ (ضلع الانتهاء)

- **θ موجبة**: الدوران عكس عقارب الساعة
- **θ سالبة**: الدوران مع عقارب الساعة

تمثيل النقاط $P(r, \theta)$

يمكن تمثيل النقطة
$(3, 45°)$
بعدة نقاط لها نفس التمثيل البياني

بإضافة أو طرح 360° للزاوية 45°
$(3, 45° \pm 360°)$

- $(3, 405°)$
- $(3, -315°)$

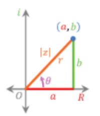
بإضافة أو طرح 180° للزاوية 45° وتغيير إشارة 3
$(-3, 45° \pm 180°)$

- $(-3, 225°)$
- $(-3, -135°)$

صور العدد المركب

الصورة الديكارتية

$a + bi$



تحويلها إلى قطبية

القيمة المطلقة (المقياس) للعدد المركب z

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

سعة العدد المركب z

- **a موجبة**: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
- **a سالبة**: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$

حالتان خاصتان

- $a = 0$ ، b موجبة: $\theta = 90°$
- $a = 0$ ، b سالبة: $\theta = 270°$

الصورة القطبية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تحويلها إلى ديكارتية

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة

عددان مركبان z_1, z_2 على الصورة القطبية

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \ , \ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

حاصل ضربهما

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

خارج قسمتهما

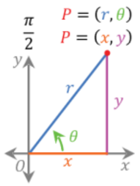
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

التحويل بين الإحداثيات

تحويل إحداثي نقطة

من قطبي إلى ديكارتي

نعوض عن كل x بـ $r\cos\theta$ ،
وكل y بـ $r\sin\theta$



من ديكارتي إلى قطبي

- **نُوجد r**: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **نُوجد θ**:
  - **x موجبة**: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
  - **x سالبة**: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

تحويل معادلة

من قطبية إلى ديكارتية

- $r =$ (دالة مثلثة)
  - $r^2 = x^2 + y^2$
  - $y = r\sin\theta$
  - $x = r\cos\theta$
- $\theta = h°$
  - $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- $r = k$
  - $r^2 = x^2 + y^2$

من ديكارتية إلى قطبية

نعوض عن x بـ $r\cos\theta$
وعن y بـ $r\sin\theta$ ،
ثم نبسط المعادلة

النهايات

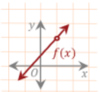
عند نقطة

اتصالها

أنواع عدم الاتصال

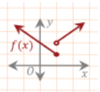
قابل للإزالة

يكون هناك فجوة في منحنى الدالة وعندها تكون قيمة الدالة $\frac{0}{0}$



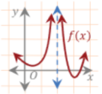
قفزي

دالة متعددة التعريف والنهايتين من اليمين واليسار موجودتين وغير متساويتين



لا نهائي

تتجه الدالة إلى $\pm\infty$ عندما تقترب من نقطة عدم الاتصال وعندها تكون قيمتها $\frac{a}{0}$ حيث $a \neq 0$



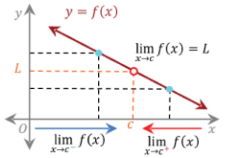
متصلة

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$ إذا كان ..

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

تقديرها بيانيًا

قيمة الدالة عند اقتراب قيم x من العدد c من جهتي اليمين واليسار

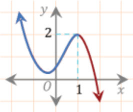


موجودة: النهاية اليمنى تساوي اليسرى ولها نفس قيمة النهايتين

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2,$

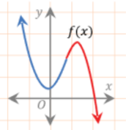
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2,$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$



غير موجودة: النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى

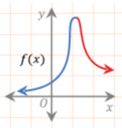
سلوك طرفي التمثيل البياني



سلوك الطرف الأيمن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

سلوك الطرف الأيسر
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

من الممكن أن يقترب الطرف الأيمن أو الطرف الأيسر لبعض الدوال من عدد حقيقي، مثل:



سلوك الطرف الأيمن
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

سلوك الطرف الأيسر
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

حسابها جبريًا

دوال نسبية

عند نقطة

لإيجاد $\lim_{x\to c} f(x)$ فإننا نعوض في $f(x)$ عن كل x بـ c (التعويض المباشر)

- $\frac{0}{0}$ (صيغة غير محددة)
  يتم معالجتها بإحدى الطرائق التالية
  - إذا كان البسط (أو المقام) يحوي جذرًا تربيعيًا فإننا نضرب بسطًا ومقامًا في مرافق البسط (أو المقام)
  - نحلل البسط أو المقام أو كليهما، ثم نختصر العوامل المشتركة
- $\frac{a}{0}$ حيث $a \neq 0$
  تكون النهاية غير موجودة

عند المالانهاية

لها 3 حالات

- درجة البسط أكبر من درجة المقام ← النهاية تساوي ∞ أو $-\infty$
- درجة البسط تساوي درجة المقام ← النهاية تساوي $\frac{\text{المعامل الرئيس للبسط}}{\text{المعامل الرئيس للمقام}}$
- درجة البسط أصغر من درجة المقام ← النهاية تساوي 0

دوال كثيرات الحدود

عند نقطة

لإيجاد $\lim_{x\to c} f(x)$ فإننا نعوض في $f(x)$ عن كل x بـ c (التعويض المباشر)

عند المالانهاية

نعوض عن قيمة x في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) فقط

أهم خصائص $+\infty$ و $-\infty$

لا يتغيران إذا ضربناهما أو قسمناهما على أي عدد عدا الصفر، ولكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات ..

موجب (× أو ÷) موجب ← موجب

سالب (× أو ÷) سالب ← موجب

موجب (× أو ÷) سالب ← سالب

إذا قسمنا أي عدد عليهما يكون الناتج صفرًا.

لا يتغيران إذا رفعناهما لأس موجب، ولكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات ..

$(\pm\infty)^{\text{عدد فردي}} = \pm\infty$ ، $(\pm\infty)^{\text{عدد زوجي}} = \infty$

الاشتقاق

من قواعده

الدالة	المشتقة
الدالة الثابتة $f(x) = c$	$f'(x) = 0$
كثيرة الحدود $f(x) = cx^n$	$f'(x) = ncx^{n-1}$
دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{n}$	$f'(x) = \dfrac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \sqrt{n}}$
مجموع وفرق دالتين $f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
ضرب دالتين $f(x) = g(x) \times h(x)$	$f'(x) = (\text{مشتقة الأولى})(\text{الثانية}) + (\text{الأولى})(\text{مشتقة الثانية})$
قسمة دالتين $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{(\text{مشتقة البسط})(\text{المقام}) - (\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

من تطبيقاته

تعيين القيم العظمى والصغرى جبريًا

نشتق الدالة ثم نساويها بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة، ثم نعوض في الدالة بالنقاط الحرجة التي تنتمي للفترة وبأطراف الفترة، والقيمة الأكبر تكون قيمة عظمى بينما الأصغر قيمة صغرى.

التكامل

غير المحدد

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

من قواعده

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int [g(x) \pm f(x)]\,dx = G(x) \pm F(x) + C$$

المحدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

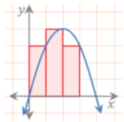
من خصائصه

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

من تطبيقاته

إيجاد المساحة تحت المنحنى



نقوم بتقسيمها إلى عدة مستطيلات متساوية العرض، وتكون المساحة التقريبية هي مجموع مساحات المستطيلات.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x في الفترة $[a, b]$ تُعطى بالتكامل ..

$$\text{المساحة} = \int_a^b f(x)\,dx \ \text{وحدة مساحة}$$

KSA Math

انقر للوصول لقنوات مفيدة في تليجرام:

قنوات رياضيات السعودية

شروحات متكاملة | تمارين مكثفة | اختبارات تجريبية

الصف الأول ثانوي

الصف الثاني ثانوي

الصف الثالث ثانوي

قناة التحصيلي

قناة اليوتيوب

شروح كتاب التحصيلي في YouTube

انقر للوصول لقائمة التشغيل في يوتيوب

دار الحرف
daralharf.com

طبعة 2024

أ. أمين السعيدي

أ. راكان العتيبي

أ. فرح إبراهيم

أ. عبدالله العدواني

مهند للقدرات والتحصيلي

أ. عمرو المهدي

الصفوة في القدرات والتحصيلي

الأحمدي في القدرات والتحصيلي

KSA Math

الملخص وخرائط المفاهيم | daralharf.com

دار الحرف
daralharf.com

شكراً لمتابعتكم

أخوكم

عبدالوهاب توفيق العوهلي

FOLLOW UP!

WahabOhali