Online center

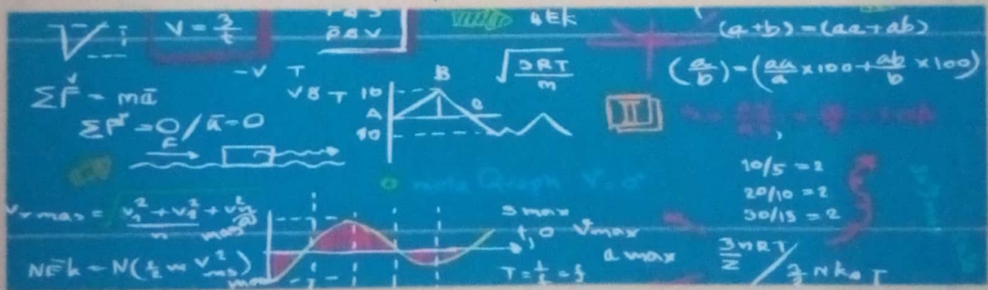
مركز أونلاين التعليمي

طـــريـــقـــك نحو الـــ 600

أ. فارس جقل

رياضيات - للصف الثالث الثانوي العلمي

الجلسات الامتحانية المكثفة لمادة الرياضيات في مركز أونلاين لعام 2021



تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل +مكتبة هديل بدمشق0932658124

مكتبة الأمل

0959458194

هذه المكثفة لا تنوب عن الكتاب المدرسي
إنما يستفيد منها الطالب بعد أن يتم دراسة المنهاج المقرر للتركيز على الفقرات الهامة وأنماط المسائل التي تأتي في الامتحان

طريقك نحو الـ 600

مخطط أسئلة الامتحان النهائي ... بكالوريا رياضيات
(2021)

Online center
مركز أونلاين التعليمي

أولا: أجب عن الأسئلة التالية (40 درجة)

السؤال الأول :

- شكل خط بياني لتابع وأسئلة عليه
- جدول تغيرات تابع وأسئلة عليه
- أحسب Lim وأحسب تكامل
- مخطط شجري (أكمل أو استنتج قيمة احتمال)
- جدول قانون احتمالي لزوج من المتحولات العشوائية

السؤال الثاني

- عقدية
  - اكتب العدد العقدي بالشكل المثلثي أو الجبري أو الأسي
  - أوجد صورة العدد العقدي وفق (تحويلات هندسية)
  - حل في ..c المعادلات التالية
  - أكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق العدد العقدي
  - استنتاج Sin, cos اعتمادا على z_1/z_2
  - حل في C جملة المعادلتين أو جد عددين عقديين
  - تطبيق على دوموافر أو أويلر دورة 2017
- إثبات متراجحة
- حل في R المعادلات أو المتراجحات
- حل معادلة تفاضلية + حل مشترك جملة معادلتين
- جدول تجربة برنولية (بنك مكثفة الاحتمالات)
- تحليل توافقي
- *عدد النتائج المختلفة في مسألة سحب

شروحات مكثفة طريقك نحو ال600
على اليوتيوب قناة مركز أونلاين التعليمي
افتح قوائم التشغيل

السؤال الثالث

- جد الأعداد C, b, a التي تحقق : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+}$
  (إثبات مقارب مع إيجاد التكامل ..تفريق كسور هام)
- أكتب معادلة المستوى المحوري ..
- المكعب
  - جد إحداثيات الرؤوس مع الرسم
  - إثبات علاقة + حساب مركبات أشعة
  - إثبات ارتباط خطي
- رباعي وجوه
- عين مجموعة النقاط التي تحقق
- اوجد نهاية تابع ثم عين A <x أو α <x

طريقك نحو الـ 600

مخطط أسئلة الامتحان النهائي ... بكالوريا رياضيات

(2021)

مركز أولاين التعليمي

ثانياً : حل التمارين الآتية :(60 درجة)

التمرين الأول

- ادرس قابلية الاشتقاق واكتب معادلة المماس
- منشور ذي الحدين انشر أو عين الحد
- متتاليات (أثبت هندسية أو حسابية – اكتب U_n بدلالة n -أوجد نهاية متتالية أوجد حدود – أوجد مجموع الحدود ... – برهان متتاليتان متجاورتان – أثبت عنصر راجح أو قاصر -إثبات تزايد أو تناقص متتالية – دراسة التقارب (بنك مكثفة المتتاليات) – أثبت عدد $\le U_n \le$ عدد
- اكتب معادلة كرة + عين طبيعة النقاط

التمرين الثاني

- مسألة مخروط أو أسطوانة
- تطبيقات الأعداد العقدية
- الهندسة في الفراغ

مراجعة النماذج الوزارية + اختبارات الكتاب

- برهان ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة(والعكس)
- برهان أربع النقاط تقع على مستوي واحد
- أثبت نقطة مركز أبعاد متناسبة أوعين مركز الأبعاد
- أثبت أن المستقيمين متقاطعين + متعامدين + متوازيين + متخالفين
- إيجاد معادلة المستوى المحدد بالمستقيمين
- حجم الهرم + إيجاد إحداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية
- إثبات (إيجاد) مستقيم فصل مشترك لمستويين
- إثبات مستوي يمس الكرة
- مسقط نقطة على مستو
- بعد نقطة عن مستو + بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين ...تقاطع 3 مستويات
- إثبات مثلث قائم و حساب مساحته
- اكتب المعادلات الوسطية لمستقيم
- الوضع النسبي لمستقيم مع مستوي
- إيجاد معادلة مستوي يعامد مستوي ويمر بنقطتين

فارس حفل

التمرين الثالث

- برهان أو إيجاد نهاية عن طريق التعريف

التمرين الرابع

- إثبات مقارب مائل + مسألة هرم أو مكعب

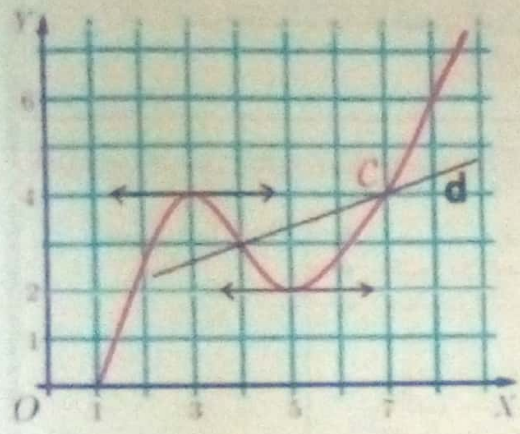
ثالثاً : حل المسائل التالية : (مسألتين لكل مسألة 100 درجة)

- مسألة هندسة .. مكعب أو متوازي مستطيلات
- دراسة تغيرات ثم حساب مساحة ضمنه سؤال موكد..
- مسألة احتمالات ⟸ متغير عشوائي..هام.. – راجع بنك الاحتمالات

أحدهما

قراءة الخط البياني لتابع

تمرين



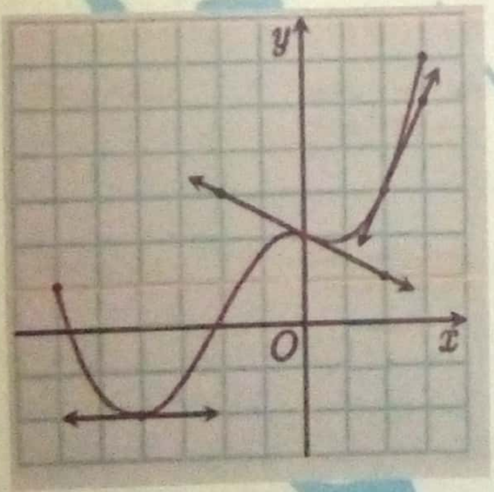
في الشكل المجاور نجد الخط البياني للتابع f ..المطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(1), f(3), f(5), f'(3), f'(5)$
4. أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها 3
5. أوجد معادلة المستقيم d
6. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
7. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

الحل

1) $D_f = [1, +\infty[$
2) $[0, +\infty[$
3) $f(1) = 0$ ، $f(3) = 4$ ، $f(5) = 2$ و $f'(3) = 0$ و $f'(5) = 0$
4) $y = 4$
5) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
6) $[3, 5]$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

تمرين



ليكن الخط البياني للتابع f والمطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(0), f(-4), f(2)$
4. أوجد $f'(0), f'(-4), f'(2)$
5. اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة $(2, 3)$
6. ما حلول المعادلة $f(x) = 1$
7. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 3$
8. أوجد $f(\,]-2.2[\,)$

الحل

1. $D_f = [-6, 3]$
2. $[-2, 6]$
3. $f(2) = 3$ ، $f(-4) = -2$ ، $f(0) = 2$
4. $f'(2) = 2$ ، $f'(-4) = 0$ ، $f'(0) = -\frac{1}{2}$
5. من الطلب السابق : $m = f'(2) = 2 \Leftarrow y = 2x - 1$
6. $x = -6$ و $x = -1.5$
7. $[2, 3]$ .8 $]0, 3[$

قراءة جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{2}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↘	0

تأمل جدول تغيرات التابع f.. و المطلوب :

1. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. اكتب معادلات المقاربات الأفقية و الشاقوليه للتابع f .
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.
4. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f ثم حل المتراجحة $f'(x)>0$.

هام : مراجعة النماذج النهائية الشاملة لمركز أونلاين

الحـــل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
2. $y=0$ (أفقي) ، $x=1$ (شاقولي)
3. حل وحيد
4. $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ، $]-1,1[$

فارس جقل 🙂 يشعر بالسعادة مع **Hadi Alkhrfan** و٣٣ من الأشخاص الاخرين. ...
٥ نوفمبر، ٢٠٢٠ •

🌹 أطباء #سوريا المستقبل 🌹
زين ❤️ هادي ❤️ منار ❤️ نجوى ❤️ سارة ❤️ هنادي ❤️ هبة
❤️ محمد ❤️ شادي ❤️ جودي ❤️ وئام ❤️ الأيهم ❤️ تالا ❤️
زهير ❤️ علي ❤️ مايا ❤️ ميس ❤️ لجين ❤️ أحمد ❤️ بشار
❤️ جعفر ❤️ حيدر ❤️ ايهاب ❤️ ساندي ❤️ شهد ❤️ راما ❤️
رمضان ❤️ رغد ❤️ دعاء ❤️ ريما ❤️ محمود ❤️ علي ❤️
بشار ❤️ مجد ❤️ شمس ❤️ تبارك ❤️ زينه ❤️
..انتظرت هذا اليوم كثيرا لكي أفرح بنجاحكم وأهنئكم 💙
هنيئا لنا ولأهاليكم ولسوريا بكم ..فأنتم أملنا و مستقبلنا 💙

#هامش: يلي نسيان حطلو اشارة أو نسيان اسمو يكتبلي بالتعليقات 🌹 🌹 🌹

تمرين

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف و المستمر على R وخطه البياني C المطلوب :

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C .
3) هل $f(2) = 4$ قيمة حدّية محلياً ؟
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في R
5) أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2 .
6) ماعدد حلول المعادلة $f(x) - e = 0$

الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2) معادلة المقارب الأفقي هو : $y = 3$
3) كلا ، ليست قيمة حدية.
4) حلّان.
5) $y = 4$
6) حلّان .

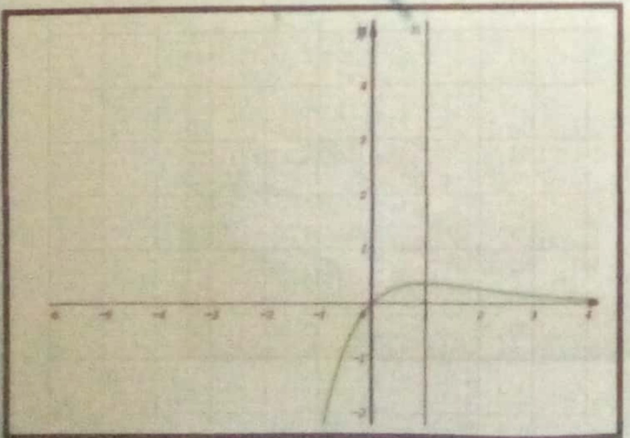
تمرين

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

ليكن الجدول المجاور :

1) أوجد مجموعة التعريف.
2) كم عدد القيم المحلية ، وما هي؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟
4) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
5) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$
6) بفرض أن التابع $f(x) = xe^{-x}$ احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور xx' المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$
7) ارسم الخط البياني اعتماداً على الجدول.

الحل



1) $D =]-\infty , +\infty[$
2) قيمة محلية واحدة هي $f(1) = \frac{1}{e}$
3) $y = 0$ (أفقي)
4) حل وحيد (ينتمي للمجال $]-\infty , 1[$)
5) لا يوجد حلول.
6) نقاط مساعدة $(0,0)$
7) $S = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

بالتجزئة : نفرض $u = x \Rightarrow \grave{u} = 1$

$u = x \Rightarrow \grave{u} = 1$

$$\acute{v} = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-1)$$

$$= -\frac{2}{e} + 1$$

8) اوجد قيمة المشتق عند x=1 واكتب معادلة المماس عند هذه النقطة. (وظيفة)

ملاحظات حول النهايات

1) عندما يكون مضمون الـ sin و cos

- $\infty \Leftarrow$ مبرهنة الاحاطة
- $0 \Leftarrow \lim_{\bullet\to 0} \frac{\sin \bullet}{\bullet} = 1$

★ تدل على أي مقدار

2) تابع جذر تربيعي

- اخراج عامل مشترك
- الضرب بالمرافق

3) تابع صحيح أو تابع كسري حدودي نعوض ب الحد المسيطر ل x في البسط والمقام عند (∞)

4) في حالة $(0 . \infty)$ تابع أسي و لوغارتمي نستخدم :

$$\lim_{x\to 0^+} (x.\ln x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x.e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} (x.e^{x}) = 0$$

$\cos(\bullet) = 1 - 2\sin^2(\frac{\bullet}{2})$
$2\cos^2(\bullet) = 1 + \cos(2\bullet)$
$\cos(3\bullet) = 4\cos^3(\bullet) - 3\cos(\bullet)$
$\sin(3\bullet) = 3\sin(\bullet) - 4\sin^3(\bullet)$
$\sin(2\bullet) = 2\sin(\bullet)\cos(\bullet)$

5) في حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

نخرج عامل مشترك في البسط والمقام ونختصر ثم نعوض

6) في حالة $\frac{0}{0}$:

أ) نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم lim (تابع كسري).

ب) في التابع الكسري الجذري (نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ثم نختصر ثم نوجد lim).

جـ) توابع كسرية لوغاريتمية وأسية نخرج عامل مشترك من البسط و المقام ونختصر ونطبق :

$$\lim_{\bullet\to 0} \frac{\ln(\bullet+1)}{\bullet} = 1 \qquad \lim_{\bullet\to 0} \frac{\bullet}{e^{\bullet}-1} = 1$$

وظيفة — أوجد النهايات التالية:

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}$

2- $\lim\limits_{x\to 3} |x-3| \cos^2\left(\frac{1}{x-3}\right)$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

4- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+4-4\cos x}{x^3}$

5- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\cos x}{3x^2}\right)$

6- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)$

7- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x}$

8- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{3x}}{x}$

9- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x}$

10- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \ln(1+x)$

11- $\lim\limits_{x\to+\infty} (3+e^x) - x$

12- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}$

13- $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sin x$

14- $\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot 2^x$

15- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - e^x$

16- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

17- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

نهايات مميزة

- $\lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$
- $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

أهم أنماط النهايات

تمرين هام

احسب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$

$$= \frac{1-\cos x(0)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(عدم تعيين)}$$

$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \sin x}{x} \quad \to 1$$

$$= 2(0)(1) = 0$$

قواعد هامة

1) $\lim\limits_{*\to\infty} \frac{\ln *}{*} = 0$

2) $\lim\limits_{*\to\infty} \frac{*}{\ln *} = \infty$

3) $\lim\limits_{*\to 0} \frac{\ln(1+*)}{*} = 1$

4) $\lim\limits_{*\to 0} \frac{*}{\ln(1+*)} = 1$

قواعد هامة

1) $\lim\limits_{*\to 0} \frac{1-e^*}{*} = -1$

2) $\lim\limits_{*\to 0} \frac{e^*-1}{*} = 1$

3) $\lim\limits_{*\to 0} \frac{*}{e^*-1} = 1$

4) $\lim\limits_{*\to+\infty} \frac{e^*}{*^n} = +\infty$, 5) $\lim\limits_{*\to+\infty} \frac{*^n}{e^*} = 0$

برهان (إعداد) نهاية عن طريق تعريف العدد المشتق

مثال

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برهن أن $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$

نفرض البسط كاملاً:

$$f(x)=ln(1+x)$$

$$f(a)=f(0)=ln(1+0)=ln(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow f'(a)=f'(0)=1$$

نعوض بالقانون:

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-0}{x-0}$$

مثال

الطريقة الامتحانيه للسوال : ليكن $f(x)=e^x-1$ والمطلوب :

أوجد $f(0)$ ثم أوجد $f'(x)$ ، $f'(0)$ ، ثم استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$$f(0)=1-1=0$$

$$f'(x)=e^x$$

$$f'(0)=e^0=1$$

نعوض بالقانون: $1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-0}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

وظيفة أوجد نهاية :

1) $\lim_{x\to ln2}\frac{e^x-2}{x-ln2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{xlnx}{x-1}$

3) $f(x)=\frac{tan\,x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$

5) $\lim_{x\to\pi}\frac{sin\,x}{x-\pi}$

دراسة قابلية الاشتقاق في a

(لتابع f مستمر في a)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

عدد حقيقي ← قابل للاشتقاق

∞ ← غير قابل للاشتقاق

مثال

ادرس قابلية الاشتقاق عند $x=1$ من اليمين للتابع $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$

التابع مستمر على $[1,0[$

$f(a)=f(1)=1-2\sqrt{1-1}=1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-2\sqrt{x-1}-1}{x-1}=\frac{1-2\sqrt{1-1}-1}{1-1}$$

$=\frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}-\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$=1-\infty=-\infty$

التابع غير قابل للاشتقاق عند $x=1$

إثبات المقارب المائل

سؤال إجباري

نطبق ما يلي :

1) نوجد $f(x)-y_\Delta$

2) نبرهن أن $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل و المقارب الأفقي

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$ و نميز حالتين :

1- $f(x)-y_\Delta>0$ فالخط C يقع فوق Δ

2- $f(x)-y_\Delta<0$ فالخط C يقع تحت Δ

3- $f(x)-y_\Delta=0$ (نقطة تقاطع)

مثال

ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)=\sqrt{4x^2+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}=\sqrt{4(+\infty)^2+5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\frac{|x|.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}=\frac{x.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$=\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\sqrt{4+\frac{5}{+\infty}}=\sqrt{4}=2=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)=+\infty-\infty$$ (عدم تعيين)

نضرب بالمرافق

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$=\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}=\frac{5}{+\infty}=0=b$$

المقارب المائل: $y=ax+b$

$\Leftarrow$ $y=2x$

لاستنتاج معادلة المقارب المائل

1. نوجد $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
2. نوجد $b=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$
3. نعوض بالمعادلة $y=ax+b$

" لا تقل: لا اقدر .. عبارة يجب شطبها او استبدالها بأخرى مالذي يمكن فعله

فكل شخص يختار طريقه.

فإذا اخترت الهزيمة لنفسك، فعليك أن تتحمل النتائج.

"لذا كن شجاعا" واختر الطريق الصحيح حتى لو كان صعبا

مثال

ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+2}$:

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C عند كل من $+\infty$ و $-\infty$

ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

الحل :-

$$f(x)=(x-4)+\frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow f(x)-y_\Delta=\frac{5}{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

مما سبق نستنتج أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C

لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\frac{5}{x+2}$

في المجال : $]-\infty,-2[$ يكون $f(x)-y_\Delta<0$ فالخط C يقع تحت Δ

في المجال : $]-2,+\infty[$ $f(x)-y_\Delta>0$ فالخط C يقع فوق Δ

(..... يمكن أن ننظم جدول الوضع النسبي)

هام : تابعوا اهم الملاحظات الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك

فارس جقل

تطبيق هام

ليكن التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln(x)$

أثبت أن $\Delta: y=x$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لل خط C بالنسبة للمقارب Δ

الحـــل

$$f(x)-y_\Delta=\ln(x+1)-\ln(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln(1)=0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

ايا كان $x\in]0,+\infty[$ فإن $\ln(x+1)>\ln(x)$ أي $f(x)-y_\Delta>0$ فالخط C يقع فوق Δ

مثال (وظيفة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = -2x$ مستقيم مقارب للخط عند $-\infty$

دراسة تغيرات تابع (سؤال إجباري 100 درجة)

مسألة هامة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

والمستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x - 1$ ، المطلوب :

1) أثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ
2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ثم ارسم كل مقارب وجدته وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدد بالخط C و Δ والمستقيمين $x = 0, x = 2$

الحـــل

1) f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{(عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{(بعد اختصار } x\text{)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

Δ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي :

$f(x) - y_\Delta > 0$ لأن $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ فالخط C يقع فوق Δ

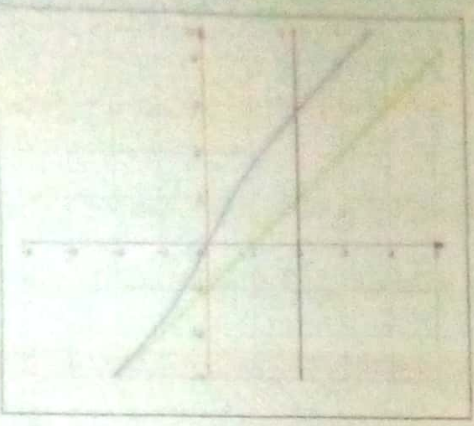
2) دراسة التغيرات :

f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



$$S = \int_0^2 [f(x) - y_\Delta]\, dx \quad (3$$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx \qquad = \sqrt{5} + 1$$

مسألة هامة

أولاً : ليكن التابع g المعرف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

أوجد العددين الحقيقيين a و b علماً أن التابع g يقبل قيمة حدّية محلياً عند $x = 0$ قيمتها تساوي 2

ثانياً : بفرض التابع f المعرّف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$ و خطه البياني C

1) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C
2) أوجد نهايات التابع f عند حدود مجموعة تعريفه
3) ادرس تغيرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، واستنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$
4) ارسم المقاربات ثم ارسم الخط C

الحـــــل

أولاً: $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

$g(0) = 2$ نعوض النقطة $(0,2)$ بالتابع:

$$2 = \frac{0+0+a}{-1} \Rightarrow a = -2$$

$$g'(0) = 0 \qquad g'(x) = \frac{(2x+b)(x-1) - 1(x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(0+b)(-1) - a}{1}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-b-(-2)}{1} \Rightarrow 0 = -b + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2}$$

ثانياً: $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$

1- $f(x) - y_\Delta = x + 3 + \frac{1}{x-1} - (x-3)$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} = 0$ $y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

وبنفس الطريقة عند $-\infty$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

دراسة التغيرات:

التابع مستمر واشتقاق على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 4 - \infty = -\infty$$

$x = 1$ مقارب $y\acute{y}$ والخط C على يساره.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4 + \infty = +\infty$$

$x = 1$ مقارب // $y\acute{y}$ والخط C على يمينه.

$$\acute{f}(x) = 1 + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

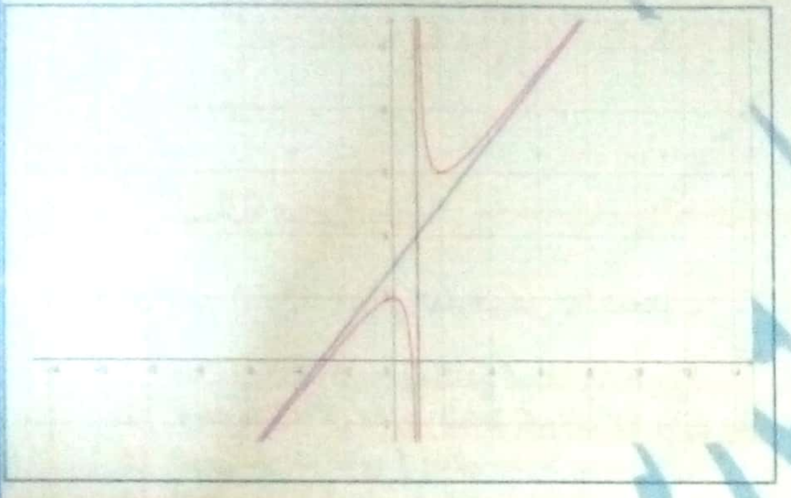
$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 1$$

إما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

قيمة محلية كبرى $f(0) = 2$

قيمة محلية صغرى $f(2) = 6$



التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3, -2[$

$$f(-2) = \frac{2}{3}, f(-3) = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(-3) . f(-2) < 0$$

$\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

لرسم المقارب: $y = x + 3$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \ (0, 3)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -3 \ (-3, 0)$$

لرسم الخط البياني:

نوجد نقط مساعدة (نقاط التقاطع مع المحورين)

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x-1} = x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$$

تمرين: ادرس تغيرات التابع $f(x) = x\ln x$

التابع مستمر و اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1-e}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x = \frac{1}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(x+3) + \frac{1}{x-1}\right]\ dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

ثم نعوض ....

مسألة هامة جدّاً

ليكن التابع $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ المعرف على R..المطلوب :

1) أثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية له .
2) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' وعيّن وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته .
3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
4) أوجد معادلة المماس في النقطة $(0, 0)$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .
6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = 0, x = \ln 2$
7) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ (وظيفة)

الحل

1) $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$ *

* $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$

$$= \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الاحداثيات

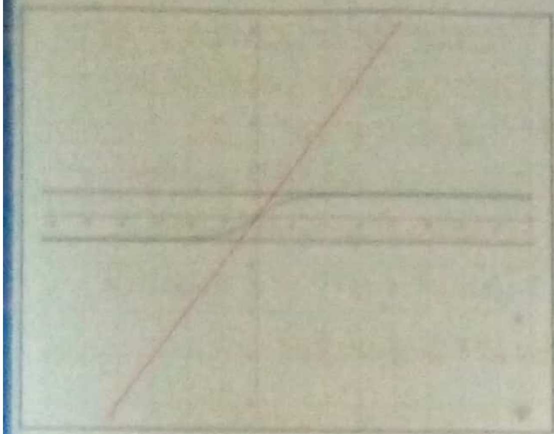
2) التابع مستمر على R

في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Leftarrow y = -1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني C يقع فوق المقارب لأن :

$$\forall x \in R \Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} + 1 = \frac{2e^x}{e^x+1} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	↗	1



في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ مستقيم مقارب للخط C

في جوار $+\infty$ والخط البياني C يقع تحت المقارب لأن :

$\forall x \in R \Rightarrow f(x) - y_{\Delta} = \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 = \frac{-2}{e^x+1} < 0$

3) $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ التابع متزايد تماماً $\Leftarrow$

4) $y = \frac{x}{2}$

6) الخط البياني C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0, \ln 2]$

$\Leftarrow \quad S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

لحساب هذا التكامل يمكن كتابة f بالشكل :

$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{-2}{e^x+1} = 1 + \frac{-2}{e^x+1} = 1 + \frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$\Leftarrow \quad S = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

$= \int_0^{\ln 2} \left(1 + \frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx = \ln\frac{9}{8}$

تذكر !!

$e^x e^{-x} = 1$

تمرين هام جداً

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = ae^{2x} + be^x + 1 \quad ; \quad a, b \in R$

أولاً : عين قيمة كلاً من a, b إذا علمت أن للتابع f قيمة كبرى أو صغرى محلياً تساوي الصفر عندما $x = 0$

ثانياً : بفرض $a = 1$ و $b = -2$ يصبح التابع ..

$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$ ..والمطلوب :

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، و استنتج معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' أو yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .

2) استنتج من تغيرات f أن للمعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ حلاً وحيداً .. أوجد هذا الحل .

3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y = 1$ والمحور yy'

الحـــل

أولاً: التابع f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي من أجل $x = 0$

ولدينا $f(0) = 0$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً

$\Rightarrow \star \quad \boxed{a + b + 1 = 0}$

وأيضاً : $f'(0) = 0$ نشتق التابع $f'(x) = 2ae^{2x} + be^x$

$\Rightarrow \star\star \quad \boxed{f'(0) = 2a + b = 0}$

بالحل المشترك بين $\star$ و $\star\star$ نجد : $a = 1$ و $b = -2$

Scanned by CamScanner

ثانيا:

1) دراسة التغيرات على الطالب :

لدراسة الوضع النسبي بين الخط والمستقيم $y = 1$

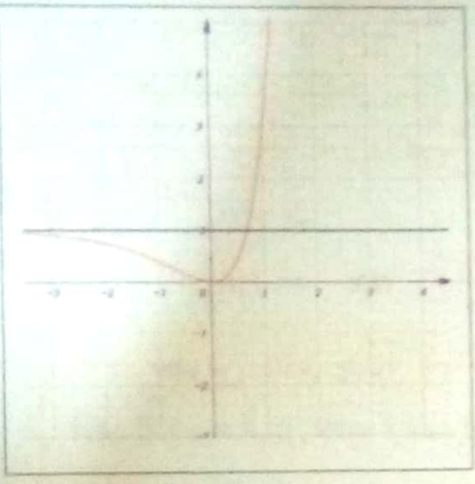
$$f(x) - y_\Delta = e^{2x} - 2e^{x} = e^{x}(e^{x} - 2)$$

ندرس الإشارة :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$\|$	$-$	0	$+$	
		C يقع تحت Δ		C يقع فوق Δ	

الخط C يشترك مع Δ بالنقطة $(\ln 2 , 1)$



2) المعادلة $e^{x} + e^{-x} = 2$ تكافئ $e^{x} + \frac{1}{e^{x}} = 2$

$$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^{x}$$

أي المطلوب : $f(x) = 0$

ومن الجدول نجد أن لهذه المعادلة حل وحيد هو $x = 0$

3) $$S = \int_0^{\ln 2} [y_\Delta - f(x)] \; dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (-e^{2x} + 2e^{x}) \; dx$$

$$= [-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{x}]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}$$

اهم أنماط التغيرات

1) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ $\quad D = [1, +\infty[$

2) $f(x) = x + \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ $\quad D = R$

3) $f(x) = \ln(\frac{x-2}{2+x})$ $\quad D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

4) $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$ $\quad D = R/\{-1\}$

5) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ $\quad D = R$

6) $f(x) = (x-1)e^{x}$ $\quad D = R$

7) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $\quad D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

8) $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ $\quad D = R$

9) $f(x) = \exp(\frac{x}{x^2+1})$ $\quad D = R$

10) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x-2}$ $\quad D = R/\{-2, 1\}$

11) $f(x) = \ln(1+x) - x$ $\quad D =]-1, +\infty[$

12) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\quad D =]0, +\infty[$

13) $f(x) = (x+1) . \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

14) $f(x) = x - \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

15) $f(x) = x - x . \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

16) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$ $\quad D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

بنك المسائل الهامة

المسألة الأولى :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = 3e^x - x - 3$

1. أثبت أن المستقيم $d: y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي ، ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر و الآخر α و أثبت أن $-3 < \alpha < -2$
3. ارسم الخط البياني واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور ox و المستقيم $x = \ln 2$

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخطين C و d

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 + 2\ln(\frac{x}{x-1})$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم أثبت أن المستقيم $d: y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C
3. لتكن متتالية معرفة على $n > 1$ وفق $U_n = f(n)$ جد نهاية هذه المتتالية $(U_n)_{n>1}$
4. لتكن $S_n = u_2 + \dots + u_n$ أوجد S_n وما نهاية $(S_n)_{n\geq 2}$

المسألة الرابعة :

ليكن التابع $x \to f(x) = x - \ln x$ المعرف على $I =]0, +\infty[$..والمطلوب :

1. جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$
2. ما نهاية $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - \ln x - 1}{x - 1}$

المسألة الخامسة :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على وفق : $f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$ و $g(x) = x\sqrt{x}$

أثبت أن g اشتقاقي عند 0 ثم استنتج أن f اشتقاقي عند 0 ثم أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

1) أثبت أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
2) هل $\Delta_2: y = x + 2$ مقارب للخط C عند $-\infty$ ؟ وادرس الوضع النسبي .
3) ادرس تغيرات f وارسم C مع رسم المقاربات .

المسألة السابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1,+1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2-1}$

1) أثبت أن المستقيم $d: y = x$ مقارب مائل للخط C
2) احسب A, B حيث $f(x) = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ و جد $I = \int_0^t [f(x) - x] \quad dx$
3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم d و المستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

المسألة الثامنة :

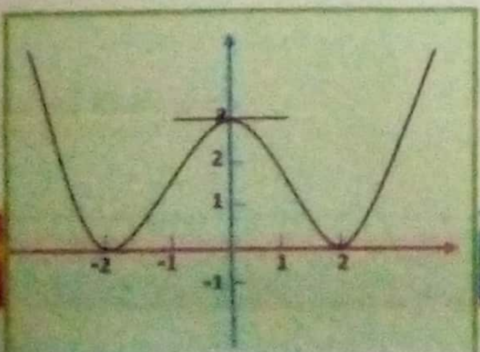
ليكن التابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ .. وفق : $f(x) = x - 1 - \ln x$ و خطه البياني C

1) ادرس تغيرات التابع و بيّن القيم الكبرى و الصغرى محلياً
2) استنتج من تغيرات التابع أن $\ln x < x$ أياً كانت $x \in]0,+\infty[$
3) ارسم الخط البياني C
4) أثبت أن التابع $g(x) = \frac{x^2}{2} - x\ln x$ تابع أصلي للتابع f على المجال $]0,+\infty[$

المسألة التاسعة :

ليكن f المعرف على R وفق $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$ وخطه البياني C

1) أثبت أنه أياً كانت $x \in R$ فإن :
أ- $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ ب- $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$
2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
3) أثبت أن للمعادلة $x(e^x + 1) = e^x - 1$ حل وحيد ثم أوجده
4) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيم $x = 1$



المسألة العاشرة : في الرسم المجاور :

1) كم حل للمعادلة $f(x) = 1$

2) ما هي قيمة $f(0)$

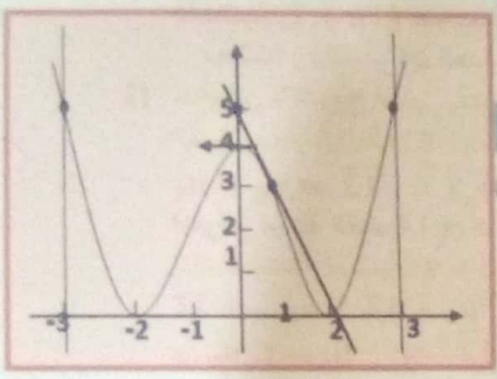
3) كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل ، وما هي ؟

4) عين $f(\,]-2,2[\,)$

5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الحادية عشر :

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب :



a) أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي .

b) هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك.

c) أوجد $f(1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(-1), f(-2)$.

d) أوجد $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$

e) أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1).

f) أوجد $f(\,[-2,2]\,)$

g) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$.

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

h) نظم جدول تغيرات التابع.

المسألة الثانية عشر :

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

1) ما هي القيم الحدية المحلية؟ و ما نوعها ؟

2) هل يوجد مقاربات مائلة؟

3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟

4) ما هي عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ ، واحصرها بمجالات.

5) أوجد مجموعة تعريف التابع f

6) أكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 1$

7) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

8) برهن أن للمعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد.

9) أكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = ln\,(f(x))$

المسألة الثالثة عشر : نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	1 ‖ -2	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	-3

2) عيّن مجموعة تعريف التابع f

3) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C

4) هل يوجد مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟

5) هل f إشتقاقي عند 3 ؟

6) عيّن القيم الحديّة للتابع f ؟

اهم نماذج المتتاليات

مثال : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

1) اثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أيا كان العدد الطبيعي n

2) اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ، واستنتج أنها متقاربة

الحل :

1) لنبرهن أن المتراجحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$ بالتدريج كما يلي :

لنبرهن صحة القضية $E(0)$ محققة لأن $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 0 + 12 \leq u_n + 12 \leq 4 + 12$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{u_n + 12} \leq \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12 + u_n} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي بالتدريج وجدنا: $0 \leq u_n \leq 4$ محققة و ذلك أيا كان العدد الطبيعي n

2) سنبرهن بالتدريج أن $E(n): u_n \leq u_{n+1}$ أيا كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$ كما يلي :

$$u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13} \Rightarrow u_0 \leq u_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_n \leq u_{n+1}$

لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_n + 12 \leq u_{n+1} + 12$$

$$\sqrt{u_n + 12} \leq \sqrt{u_{n+1} + 12} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ..

قاعدة

لبرهان متتالية هندسية نبرهن أن $u_{n+1} = q . u_n$ حيث q :عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = const$$

تطبيق هام

لتكن المتتالية :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \quad , \quad v_n = u_n + 3 \end{cases}$$

1) برهن (v_n) متتالية هندسية و عيّن أساسها .

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) إذا كانت $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$

الحـــل

1) $v_n = u_n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 \Rightarrow$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 3) + 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - 1 + 1$$

$q = \frac{1}{3}$ متتالية هندسية أساسها $v_n \Leftarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

$v_0 = 4 \Leftarrow v_0 = u_0 + 3$ حيث $v_n = q^n v_0$

$$\Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

2) $s_n = v_0 + \dots + v_n$

s_n هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها $q = \frac{1}{3}$

و عدد حدودها $n + 1$

$$s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 6 - \frac{2}{3^n}$$

بما أن : $q = 3 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n = \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 6 - 0 = 6$$

قاعدة

لبرهان متتالية حسابية نبرهن أن $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r : عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن

$$u_{n+1} - u_n = const$$

مثال

أيُّ المتتاليتين $(U_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ الآتيتين حسابية

1) $u_n = 3n + 1$

2) $v_n = n^2 + 1$

الحـــل

1) $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3 \in \mathcal{R}$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ حسابية حدها الأول 1 و أساسها 3

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2+1) = 2n + 1$ (ليس ثابت)

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ ليست متتالية حسابية

قواعد المتتالية الحسابية — قواعد المتتالية الهندسية

• $S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{آخر حد}+\text{أول حد}}{2}$	• $S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$
• $u_{\star} - u_{\heartsuit} = (\star - \heartsuit)r$	• $\frac{u_{\star}}{u_{\heartsuit}} = q^{\star - \heartsuit}$

تطبيق امتحاني هام

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ ، $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ برهن أنهما متجاورتين .

الحـــل

دراسة اطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

دراسة اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

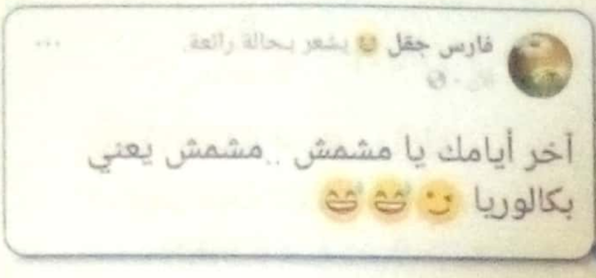
$$\lim_{x\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

تطبيق هام

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً .



الحــل

سنبرهن بالتدريج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً كما يلي :

$E(n) : u_n < u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي :

محققة $u_1 > u_0 \Rightarrow u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_{n+1} > u_n$ ... (*)

و لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

(حسب *) $u_{n+1} > u_n$

نربع الطرفين : $u_{n+1}^2 > u_n^2$

نضيف 1 للطرفين: $u_{n+1}^2 + 1 > u_n^2 + 1$

نجذر الطرفين: $\sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$

فحسب البرهان بالتدريج فإن $u_{n+2} > u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

تمريـن

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n

الحـــــل

$$u_0 = 1 \ , u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

① إثبات ان $u_n > 0$: $E(n)$

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$:

محققة $u_0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$

2- نفرض صحة القضية من أجل n أي:

* $\boxed{u_n > 0}$

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n + 1$:

$u_{n+1} > 0$

نقسم البسط على المقام:

سنبرهن : $1 + \frac{-1}{1 + u_n} > 0$

ننطلق من *: $u_n > 0$

نضيف (1): $1 + u_n > 1$

نقلب: $\frac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب بـ (-1) : $\frac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف (1) : $1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

② $v_n = \frac{1}{u_n}$

لاثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون:

عدد ثابت $= \vartheta_{n+1} - \vartheta_n$

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1 + u_n}} = 1 \cdot \frac{1 + u_n}{u_n}$$

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1 + u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 = const$$

$\Leftarrow$ المتتالية حسابية أساسها $r = 1$

كتابة ϑ_n بدلالة n :

$$\vartheta_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \vartheta_n = \vartheta_0 + (n - 0)1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta_n = 1 + n}$$

ستنتاج عبارة u_n :

$$\vartheta_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\vartheta_n} = \frac{1}{n + 1}$$

بنك التمارين الهامة

التمرين الأول :

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق .. $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$ عند كل $n \ge 0$

أثبت بالتدريج أن $0 \le u_n \le 5$ أياً كان n و أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً ثم استنتج تقاربها و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

لتكن المتتاليتان المعرّفتان وفق $(u_n)_{n\ge1}$ و $(t_n)_{n\ge1}$: $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ، $t_n = 1 - \frac{1}{n}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة .

التمرين الثالث :

ليكن التابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

1) أوجد النهاية على أطراف مجموعة التعريف و اكتب معادلة كل مقارب لخطه C_f

2) أثبت أن التابع متزايد تماماً ونظم جدول التغيرات

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة : $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n+1}$ ، $u_0 = 2$

I) أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً و أن $0 \le u_n \le 2$ II) استنتج تقارب المتتالية و أوجد نهايتها .

التمرين الرابع :

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ كما يأتي : $v_0 = \frac{1}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{5v_n+4}{v_n+2}$ والمطلوب :

1) ادرس جهة اطراد المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$.

2) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة $u_n = \frac{v_n-4}{v_n+1}$

I) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية ثم عيّن حدها الأول وأساسها

II) أوجد عبارة u_n بدلالة n ، ثم أستنتج عبارة v_n بدلالة n وعيّن نهاية $(v_n)_{n\ge0}$

التمرين الخامس :

لتكن المتتالية $u_{n+1} = e(u_n)^{\frac{1}{2}}$ ، $u_0 = e^3$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة بالشكل : $v_n = \ln(u_n) - 2$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\ge0}$ هندسية و عين $v_0 . q$

2) اكتب $(v_n)_{n\ge0}$ بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) أثبت أن المتتالية u_n متقاربة

التمرين السادس :

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \ge 0$

1) أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً

التمرين السادس : أثبت أن المتتاليتان: (u_n)، (v_n) متجاورتان حيث :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

قواعد حساب التوابع الأصلية

1) $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax \; ; a \in R$

مثال: $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$

2) $f(x) = g^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)(g')}$

حيث g كثير حدود درجة أولى
و $n \in R\backslash\{-1\}$

مثال: $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{(4)(1)}$

مثال: $f(x) = (2x+5)^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(2x+5)^4}{(4)(2)}$

3) $f(x) = \dfrac{g'}{g} \Rightarrow F(x) = \ln|g|$

$|g| = g \; ; g > 0$
$|g| = -g \; ; g < 0$

مثال:

$f(x) = \dfrac{5}{x-1} = 5\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \; ; I =]-\infty, 1[$

$\Rightarrow F(x) = 5\ln|x-1|$ *

$F(x) = 5\ln(-x+1)$ *

4) $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} \; ; a \neq 0$

مثال: $f(x) = e^{3x+1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$

5) $f(x) = g^n . g' \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)}$

قاعدة هامة :

$f(x) = \dfrac{\star'}{\sqrt{\star}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{\star}$

مثال :

$f(x) = \dfrac{[\ln x]^2}{x} = \dfrac{1}{x}.(\ln x)^2$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{3}$

6) $f(x) = \star' . e^{\star} \Rightarrow F(x) = e^{\star}$

مثال : $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}(2x)e^{x^2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$

7) $f(x) = \sin(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{\star'}\cos(\star)$

8) $f(x) = \cos(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}\sin(\star)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}.\tan(\star)$

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}(-\cot(\star))$

قاعدة هامة :

$\sin^2(\star) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\star)$

$\cos^2(\star) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\star)$

مجالات و ملاحظات للتابع الأصلي من جداول الكتاب ص 213+225

التكامل بالتجزئة : لدينا عدة أشكال:

1) $\int_a^b x^n e^{ax} dx$

2) $\int_a^b x^n \sin ax \, dx$

3) $\int_a^b x^n \cos ax \, dx$

نفرض

$x^n = u$

والثاني v'

القانون:-

$$\int_a^b u.v' = [u.v]_a^b - \int_a^b vu'$$

4) $\int_a^b x^n \ln ax \quad dx$

نفرض $u = \ln x$

$v' = x^n$

مثال

$$I = \int_0^\pi x \sin x \quad dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow \quad v = -\cos x$$
$$\int_0^\pi x\sin x \quad dx = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \, dx$$
$$= [-x\cos x + \sin x]_0^\pi$$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع أصلي للتابع f

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ حيث $k \in R$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ حيث $c \in [a,b]$

مثال هام

$$I = \int_0^1 x^2 . \cos x \quad dx$$

$$u' = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$
$$I = [x^2 . \sin x]_0^1 - 2\int_0^1 x \sin x \, dx$$
$$I' = \int_0^1 x \sin x \, dx$$
$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I' = [-x\cos x]_0^1 - \int_0^1 -\cos x \, dx$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 . \sin x - 2\,[-x\cos x + \sin x]\right]_0^1 = F(1) - F(0)$$

أهم خواص اللوغاريتم

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3) $e^{\ln x} = x$

4) $\ln a^n = n\ln a$

5) $\ln e^x = x\ln e = x$

$$I = \int_0^e x . \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^e - \int_0^e \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2}\right]_0^e$$

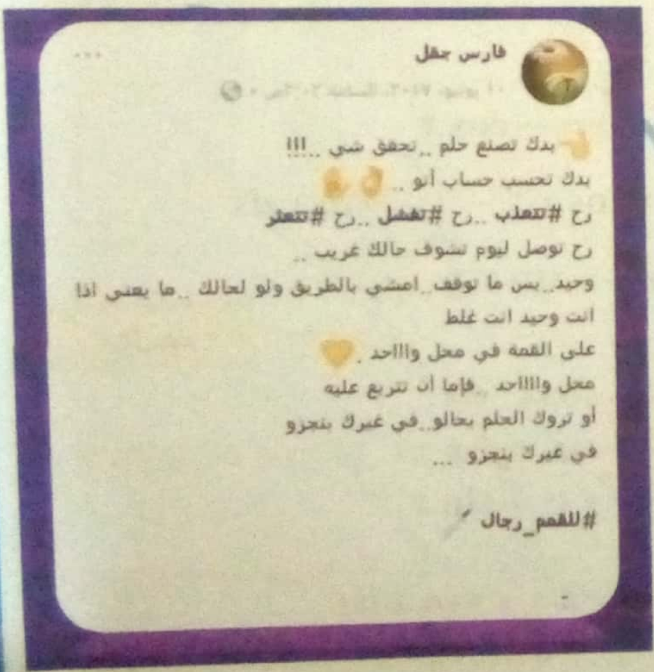
مثال

$$I = \int_0^e \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [x\ln x]_0^e - \int_0^e x . \frac{1}{x} \, dx = [x\ln x - x]_0^e$$



$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \int_1^e \ln x . x^{-2} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x}$$

$$I = \left(\frac{-\ln x}{x}\right)_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{-1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e x^{-2} \, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = F(e) - F(1)$$

ترتيب قوة التوابع :

1) التابع اللوغارتمي.(الأقوى)

2) كثيرة الحدود.

3) المثلثية.

4) الأسية

نفرض التابع الأقوى u

والأخر v'

حساب تكامل التوابع الكسرية : نفرق الكسر ثم نكامل

تفريق الكسور :

نميز حالتين : (إذا كانت عوامل المقام مختلفة من الدرجة الأولى)

الحالة الأولى : درجة البسط أقل من درجة المقام عندها نفرق الكسر كما يلي:

$$f(x) = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

نحلل المقام للشكل: $(x - r_1)(x - r_2)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{البسط}}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{A}{(x - r_1)} + \frac{B}{(x - r_2)}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - r_1)$ ثم نجعل x تسعى الى r_1

ولحساب B نضرب الطرفين بـ $(x - r_2)$ ثم نجعل x تسعى الى r_2

طريقة ثانية : نوحد المقامات ثم نطابق بين الطرفين ونحل المعادلات الناتجة

مثال

أوجد التابع الأصلي للتابع f على المجال $]2, 4[$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$$

نفرق الكسر الى مجموع كسور جزئية

نحلل المقام: $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

$$\Rightarrow * \boxed{f(x) = \frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{A}{(x - 4)} + \frac{B}{(x - 2)}}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x - 4)$ ثم نجعل x تسعى الى 4

$$\frac{x}{x - 2} = A + \frac{B(x - 4)}{x - 2}$$

طريقة ثانية : نوحد المقامات فنجد :

$$\frac{x}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A - 4B}{(x - 4)(x - 2)}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$A + B = 1 \ldots ①$

$-2A - 4B = 0 \ldots ②$

بالحل المشترك نجد :

$B = -1 ; A = 2$

نجعل x تسعى إلى 4

$$\Rightarrow A = \frac{4}{4-2} \Rightarrow A = 2$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ثم نجعل x تسعى إلى 2

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2}{2-4} \qquad \Rightarrow B = -1$$

نعوض في *

$$f(x) = \frac{2}{x-4} + \frac{-1}{x-2}$$

$$F(x) = 2\ln(-x+4) - \ln(x-2) + k$$

احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2-6x+8}dx$

بعد التفريق ينتج:

$$\int_0^1 \frac{2}{x-4}dx + \int_0^1 \frac{-1}{x-2}dx$$

$$= [2\ln|x-4| - \ln|x-2|]_0^1 = F(1) - F(0)$$

مثال

احسب التكامل :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$$

نحلل المقام لكي نفرق الكسر :

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-1)

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{1} \quad \Rightarrow A = -1$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-2)

$$\Rightarrow \frac{-3}{-1} = B \qquad \Rightarrow B = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{-1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{3}{x+2}dx \quad = [-\ln|x+1| + 3\ln|x+2|]_0^1 = \dots$$

الحالة الثانية : إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ونعود للحالة الأولى

حالة خاصة : إذا كانت عوامل المقام درجة أولى مكررة مثل $(x+1)^2$ فإننا نفرق الكسر كما يلي

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}$$ ثم نطابق بين الطرفين

تمرين هام

احسب ما يلي : $\int_0^{\ln 3} e^x(1-e^x)^5\,dx$

$$=-\int_0^{\ln 3} -e^x(1-e^x)^5\,dx$$

$$=-\left[\frac{(1-e^x)^6}{6}\right]_0^{\ln 3}=-\frac{32}{3}$$

اهم انماط المعادلات و المتراجحات المتوقعة في الكتابين

السؤال الأول: حل في R المعادلة : $9^x-3^{x+1}+2=0$ $\quad D=R$

الحل: نلاحظ أن : $9^x=3^{2x}$

$$3^{x+1}=3.3^x$$

لذا نفرض $t=3^x$ عندئذ : $3^{2x}-3.3^x+2=0$

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$

إما : $t_1=1 \Rightarrow 3^{x_1}=1 \Rightarrow \ln(3^{x_1})=\ln 1 \Rightarrow x_1.\ln 3=0$

$\Rightarrow \boxed{x_1=0}$ مقبول

أو : $t_2=2 \Rightarrow 3^{x_2}=2 \Rightarrow \ln(3^{x_2})=\ln 2 \Rightarrow x_2.\ln 3=\ln 2$

$\Rightarrow \boxed{x_2=\frac{\ln 2}{\ln 3}}$ مقبول

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

السؤال الثاني : أثبت أن $\ln x \le x-1$ أيا كان $x>0$ باختيار $x=e^{1/3}$, $x=e^{-1/3}$ احصر e.

الحل: المتراجحة المعطاة تكافيء : $\ln x - x+1\le 0$

لنأخذ التابع f المعرف والاشتقاقي على R^{*+} وفق: $f(x)=\ln x-x+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x=1 \qquad f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

نلاحظ من الجدول : أيا تكن $x>0$ فإن : $f(x)\le f(1)=0$

$$\ln x-x+1\le 0 \Rightarrow \boxed{\ln x\le x-1}$$

حصر العدد e: نعوض $e^{\frac{1}{3}}$ في المتراجحة :

$$\ln e^{\frac{1}{3}}\le e^{\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{1}{3}\le e^{\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{4}{3}\le e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{64}{27}\le e}$$

$$\ln e^{\frac{-1}{3}}\le e^{\frac{-1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{-1}{3}\le e^{\frac{-1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{2}{3}\le e^{\frac{-1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{27}\le\frac{1}{e}\Rightarrow \boxed{\frac{27}{8}\ge e} \qquad \Rightarrow \frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$$

السؤال الثالث : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

الحل: بالإتمام لمربع كامل :

$$z^2-(1+2i)z+\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2+3+3i=0$$

$$\Rightarrow\left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=-\frac{15}{4}-2i$$

$$\Rightarrow\left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(-15-8i)$$

لنفرض أن $\omega=a+bi$ الجذر التربيعي لـ $-15-8i$ عندئذ:

$$\omega^2=(a^2-b^2+2abi)=-15-8i$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17 \\ a^2-b^2=-15 \\ a.b=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow 2a^2=2$$

$$a^2=1\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow b=-4\\ a=-1\Rightarrow b=4\end{cases}\Rightarrow\omega_1=1-4i$$

$$\omega_2=-1+4i$$

$$\Rightarrow z_1-\frac{1+2i}{2}=\frac{1-4i}{2}\Rightarrow z_1=\frac{1-4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{z_1=1-i}$$

$$z_2-\frac{1+2i}{2}=\frac{-1+4i}{2}\Rightarrow z_2=\frac{-1+4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{z_2=3i}$$

السؤال الرابع : أثبت أنه أيا كانت x من $]-1,+\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x}\leq\ln(x+1)$$

الحل: حل المتراجحة يكافيء:

$$\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}\geq 0$$

نفرض التابع: $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}$ المعرف والاشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x=0\ \Rightarrow f(0)=0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

نلاحظ من الجدول ان $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى.

أيا تكن $x\in]-1,+\infty[$ فإن $0=f(0)\leq f(x)$ ومنه

$0\leq\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ وبالتالي: $\frac{x}{x+1}\leq\ln(x+1)$

السؤال الخامس: حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

لاحظ أن : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

الحل: نلاحظ أن أمثال المعادلة حقيقية عندئذ نطبق طريقة المميز حيث :

$$a = 1 \;, b = -2(1-\sqrt{3}) \,, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1-2\sqrt{3}) - 32 = 4(4-2\sqrt{3}) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4+2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}$$

السؤال السادس: حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$

الحل: نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x) = \ln(5^{x+1})$

((عواص $\ln$)) $x.\ln 4 = (x+1)\ln 5$

$$x.\ln 4 - x.\ln 5 = \ln 5$$

$$\Rightarrow x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5 \;\Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}}$$


مركز أونلاين التعليمي يشعر بالأمل مع فارس جقل

#بكالوريا_تاسع_طلابنا_الغوالي
بعرف انكن تعبانين كتير وبعرف انكن مضغوطين كتير ..وبعرف انكن خايفين كتير..
بس بعرف انكن كمان قدها وقدود
اوثقوا بأنفسكن و توكلوا عالله واعرفوا انو ربنا مارح يضيع تعبكن
اعرفوا ان نحن اساتذتكن وأهاليكن عم ندعيلكن و نحلم بنجاحكن و نحن جنبكن مارح نتخلا عنكن لآخر لحظه
صدقوني هالتعب وهالجهد بعدها رح ترتاحوا وتعيشوا مستقبلكن الزاهر
الوقت كافي جدا صدقوني و يلي ما فيش بيقدر يلحق بس نظموا وقتكن و كثفوا جهودكن
محبكم أ. فارس جقل

السؤال السابع: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل: نلاحظ أن : $|1 + i2\sqrt{2}| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ : ① $2ab = 2\sqrt{2}$ ……

② $a^2 - b^2 = 1$ ……

③ $a^2 + b^2 = 3$ ……

نجمع ② مع ③ نجد : $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow z = \sqrt{2} + i & \text{إما} \\ a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i & \text{أو} \end{cases}$$

السؤال الثامن : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية :

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل : شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1) \;\Rightarrow\; \ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 1 = 0$$

مقبول $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مرفوض $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

السؤال التاسع: عين العددين z_2, z_1 حيث:

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأول ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} 2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 &= -3 + i2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4\bar{z}_1 = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

السؤال العاشر: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$e^x - \frac{1}{e}e^y = 1$$
$$2e^x + e^y = 4 + e$$

الحل: $D = R$ نفرض: $X = e^x$, $Y = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 \dots\dots\dots ① \\ 2X + Y = 4 + e \dots\dots ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ(-2) ونجمع:

$$\boxed{Y = e} \Leftarrow \left(\frac{2}{e} + 1\right) Y = 2 + e \text{ نجمع } \Leftarrow \begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{x = ln2} \Leftarrow \boxed{y = 1} \Leftarrow e^y = e$

السؤال الحادي عشر: حل المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 1$ ثم عين حلها الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل: $2y' + y = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2}y + \frac{1}{2}$

لدينا معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث:

$$b = \frac{1}{2} \quad , a = \frac{-1}{2}$$

ومجموعة حلولها من الشكل: $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ وبالتالي:

$$y = ke^{\frac{-1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لحساب قيمة k نعوض الشرط:

$$2 = ke^{\frac{-1}{2}(-1)} + 1 \Rightarrow 1 = ke^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = e^{\frac{-1}{2}}$$

فـ حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{\frac{-1}{2}} . e^{\frac{-1}{2}x} + 1 \Rightarrow y = e^{\frac{-1}{2}(x+1)} + 1$$

السؤال الثاني عشر : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad (1)$$
$$3\ln x - 5\ln y = 4 \quad (2)$$

الحل: شرط الحل $x > 0 \ , \ y > 0$ نفرض $\ln y = b \ , \ \ln x = a$

$$2a + b = 7$$
$$3a - 5b = 4$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 5 :

$$10a + 5b = 35$$
$$3a - 5b = 4$$

بالجمع :

$$13a = 39 \Rightarrow a = \frac{39}{13} = 3$$
$$a = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

نعوض في (2)

$$3(3) - 5b = 4 \Rightarrow 9 - 5b = 4 \Rightarrow -5b = -5$$
$$b = 1 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

السؤال الثالث عشر: أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى : $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها 2- من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل : ميل المماس $\frac{1}{2}$ في النقطة التي فاصلتها 2-

(x) بعلاقة المشتق

y'

$$y' = -2y$$
$$\Rightarrow \boxed{y = ke^{-2x}}$$

الشرط : نشتق :

$$y' = -2ke^{-2x}$$
$$f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2ke^{-2(-2)} \Rightarrow k = \frac{1}{-4e^4}$$

⇐ الحل هو :

$$y = \frac{1}{-4e^4}e^{-2x}$$

السؤال الرابع عشر: حل المعادلة الآتية:

$$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$$

الحل: $D=R$

$$e^{3x}.e+4e^{2x}.e+5e^{x}.e=0$$

$$ee^{x}(e^{2x}+4e^{x}-5)=0$$

$$ee^{x}=0 \quad \text{مستحيلة}$$

$$(e^{x}-1)(e^{x}+5)=0$$

$$e^{x}-1=0 \Rightarrow e^{x}=1 \Rightarrow x=0$$

$$e^{x}+5=0 \Rightarrow e^{x}=-5 \quad \text{مستحيلة الحل}$$

السؤال الخامس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1}<\frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$$

الحل: $D=R$

$$(e^{x}-1)(e^{x}+2)<(e^{2x}+1)(e^{x}-2)$$

$$\Rightarrow e^{2x}+2e^{x}-e^{x}-2<e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}-2$$

$$\Rightarrow e^{3x}-3e^{2x}>0$$

$$e^{2x}(e^{x}-3)>0$$

ندرس: إشارة المقدار $e^{x}-3$ فقط لأن $e^{2x}>0$ أيا كان $x\in R$

$$e^{x}-3=0 \Rightarrow e^{x}=3 \Rightarrow x=\ln 3$$

ننظم جدول فنجد حلول المتراجحة هي:

$$]\ln 3\ ,+\infty[$$

السؤال السادس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\ln(x^{2}+3x)>\ln(2x+2)$$

شرط الحل هو: $]-1\ ,+\infty[$ ومنه:

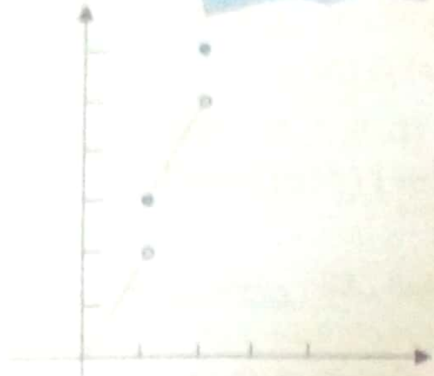
$$x^{2}+3x>2x+2$$

$$\Rightarrow x^{2}+x-2>0 \Rightarrow (x+2)(x-1)>0$$

وهذه المتراجحة محققة عندما $x<-2$ أو $x>1$ ...نقاطع مع شرط الحل $x>1$

فنجد مجموعة الحلول هي: $]1\ ,+\infty[$

$x-1 < E(x) \le x$



تابع الجزء الصحيح

مثال : ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق العلاقة $f(x) = 2x + E(x)$ والمطلوب :

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

الحل:
$$f(x) = \begin{cases} 2x & ;[0,1[\\ 2x+1 & ;[1,2[\\ 2(2)+2 = 6 & ;x=2 \end{cases}$$

2) ارسم الخط البياني C على المجال $[0,2]$

3) أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1}$

الحل:
$$x-1 < E(x) \le x$$
$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{E(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1} = 0$$

4) نعرّف تابع $g(x) = 2x + \frac{E(x)}{x^2+1}$

أثبت أن $y = 2x$ مقارب مائل في جوار ∞

الحل:
$$g(x) - y_\Delta = \frac{E(x)}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) - y_\Delta = \lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^2+1} = 0$$ فهو مقارب مائل

x في غاية الكبر

مثال : ليكن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ المعرّف على $R \backslash \{+1\}$

أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم أعط عدد حقيقي A يحقق $x > A$ فإن : $f(x) \in]2.9, 3.1[$

الحل :
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x-1} = 3 = l \quad , \quad \varepsilon = 3 - 2.9 = 0.1$$

نعوض بالقانون :
$$|f(x) - 3| < 0.1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{3x+2}{x-1} - 3\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{5}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5}{x-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow x > \underbrace{51}_{A}$$

لأن x كبيرة

ملاحظة هامة جداً : نفس السؤال سيأتي بالمتتاليات ولكن n عوضاً عن x و u_n عوضاً عن $f(x)$

<u>التمرين الأول</u> : ليكن التابع f المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$:

1. جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]0.9, 1.1[$
2. احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))$

<u>التمرين الثاني</u> : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$

عين عدد طبيعي n يحقق الشرط إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n \in]2.99 , 3.01[$

استنتاج خط بياني C' لتابع جديد g بدلالة الخط البياني C لتابع f معطى مسبقاً

اولاً : نرسم الخط البياني C للتابع القديم f

ثانياً : نكتب التابع الجديد g بدلالة التابع القديم f

ثالثاً : نستنتج العلاقة بين C' و C حسب ما يلي :

$g(x) = -f(x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات
$g(x) = f(x) + b$	C' ينتج عن C بانسحاب متجهه $(0, b)$
$g(x) = f(x+a)$	C' ينتج عن C بانسحاب متجهه $(-a, 0)$
$g(x) = \lvert f(x)\rvert$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع فوق محور الفواصل الجزء الثاني : هو نظير الجزء من C الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(\lvert x\rvert)$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع على يمين محور التراتيب الجزء الثاني : هو نظير الجزء الأول بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = f(x)$ حيث $D_g \subseteq D_f$	C' هو الجزء من C الواقع ضمن D_g
$g(x) = af(x)$	C' ينتج عن C بالتحويل النقطي $(x, y) \to (x, ay)$

الجدول من إعداد المدرس : واصف خضرة

رابعاً : نرسم الخط البياني C' للتابع الجديد g

ملحق تدريبي .. الجزء الأول

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$

وفق : $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ، دل على القيمة الصغرى محليا للتابع f و استنتج أن للخط البياني C مقارب يوازي yy'
2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما x_1 يحقق $0 < x_1 < 1$ ثم أوجد الجذر الآخر x_2
3. أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x - 5$ مقارب للخط C
4. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$, $x = 4$

المسألة الثانية :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1]$ وفق : $f(x) = x\sqrt{1-x}$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم أثبت أن $f(1)$ قيمة صغرى محليا للتابع f

2) أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال $]-\infty, 1]$

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D.وفق : $f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f ثم أوجد معادلة المقارب للخط C الموازي ل yy'

2) أثبت أن المستقيم Δالذي معادلته $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - x$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها و بين ما له من قيم كبرى أو صغرى محليا

3) استنتج أن للمعادلة $x = e^x - 1$ جذرا وحيدا يطلب إيجاده

المسألة الخامسة :

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$وفق : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها

2) دل على قيمه الكبرى أو الصغرى محليا

3) استنتج من جدول التغيرات أن مجموعة حلول المتراجحة $x < 2\sqrt{x}$ هي $]0, 4[$

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع : $f(x) = x\ln x$ ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

*ثم أوجد مجموعة التوابع الأصلية للتابع f في المجال $[0,1]$

المسألة السابعة :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني C أوجد كل مقارب للخط C يوازي احد المحورين الاحداثيين

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وبين ما له من قيم كبرى محليا و ماله من قيم صغرى محليا
2. برهن أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية ثم ارسم الخط C.
3. انطلاقاً من C ارسم الخط البياني للتابع g المعطى بالعلاقة : $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بالخط C والمستقيمين $x = -1 , x = 1$

المسألة الثامنة :

أثبت أن $\frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} \leq \frac{x^2-1}{x^2+1}$ أيا يكن x .. استنتج نهاية $f(x) = \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$ عند ∞

المسألة التاسعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال I ..برهن أن المستقيم d مقارب..

1) $d: y = x$; $f(x) = \ln(1+e^x)$ عند $+\infty$

2) $d: y = x - 1$; $f(x) = x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

المسألة العاشرة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

أوجد $f'(x)$ واستنتج مشتق التابع $f(\ln x)$ ومشتق $g(x) = \frac{2\cos x}{\cos x+1}$

المسألة الحادية عشر :

أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ جذرا وحيدا α يقع في المجال $]-1,0[$

المسألة الثانية عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = 2xe^{-x} - \frac{2}{e}$

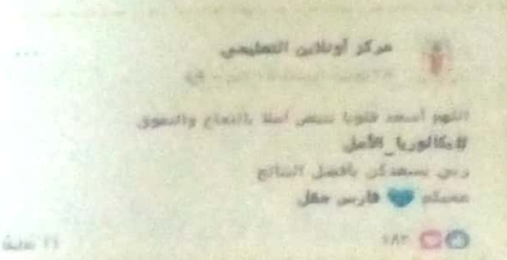
1) ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها و عين المقاربات و القيم المحلية وارسم C

2) احسب مساحة السطح المحدد بـ C و المستقيمات $x = 1$ و $x = 0$ و $y = -\frac{2}{e}$

المسألة الثالثة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (ax+b)e^x$

1) احسب قيمة كل من a و b لكي يكون للتابع قيمة حدية محليا -1 عند 0
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدد ب C والمحور Ox والمستقيم $x = 1$ والمستقيم $x = 0$



المسألة الرابعة عشر :

f و g هما تابعان المعرفان على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ و $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ، و h هو التابع المعرف على R وفق $h = \frac{g}{f}$

أحسب كلا من $f'(x)$ و $g'(x)$ وأثبت أن $h' = \frac{1}{f^2}$

المسألة الخامسة عشر :

f هو التابع المعرف على المجال $I = R^{*+}$ وفق : $f(x) = 2 + \ln x$ بين أن f أشتقاقي على I واحسب $f'(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1 ، استنتج $f'(\sqrt{x})$

المسألة السادسة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}$ و المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$: حيث $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

1) تحقق أن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$ و أثبت أن $0 \leq f(x) \leq 1$ و أيضا $0 \leq u_n \leq 1$
2) أثبت أن $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

المسألة السابعة عشر :

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ، $t_n = -\frac{1}{n}$ أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة

المسألة الثامنة عشر :

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

1) ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f و مقارباته ثم أثبت أن $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل
2) احسب احداثيات نقطة تقاطع المستقيم $d : y = x$ مع C_f ثم ارسم d على الشكل السابق
3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $u_0 = 2$
   ونعلم أن $u_n \geq 0$ أيا يكن n
   برهن بالتدريج $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

المسألة التاسعة عشر :

1) حل في R جملة المعادلتين : $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

2) إذا كان $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\, dx$, $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\, dx$ فاحسب $I - 3J$, $I + J$ واستنتج قيمة كل من I , J

المسألة العشرون :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \cdots - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$.

❖ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة .

المسألة الحادية و العشرون :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \sin x$ وبافتراض أن f أشتقاقية n مرة على R

أثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin(\frac{\pi}{2} n + x)$.

المسألة الثانية والعشرون :

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق : $x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ ، $y_n = x_n + 3$

1) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم اكتب y_n ثم x_n بدلالة n

2) نضع $s_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $s'_n = x_0 + \cdots + x_n$ احسب كلا من s_n و s'_n بدلالة n

3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(s'_n)_{n\geq 0}$

المسألة الثالثة والعشرون :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})$

1) أثبت أن التابع f زوجي واستنتج الصفة التناظرية للخط C

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

3) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور xx' والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول xx'

المسألة الرابعة والعشرون :

لتكن مجموعة التوابع $f_\lambda(x) = \ln(x^2 + \lambda)$ حيث λ وسيط حقيقي

أولاً : عين قيمة الوسيط λ ليمر خطه البياني بالنقطة $(2, \ln 3)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

وفق : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

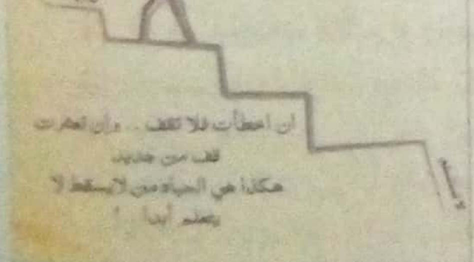
1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'

2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C

4) إذا كان C_1 الجزء من الخط C الذي تكون فاصلة كلٍّ من نقطة موجبة

فاكتب معادلة المماس للخط C_1 في نقطة تقاطعه مع محور xx'



المسألة الخامسة والعشرون:

لتكن مجموعة التوابع : $f(x) = ae^{-x} + b$

أولاً : أوجد التابع العددي الذي يمر خطه البياني من مبدأ الإحداثيات ويكون المستقيم $y = 2$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = -2e^{-x} + 2$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور xx' أو المحور yy'
2) ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولا بها
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) اكتب معادلة مماس الخط C الذي ميله يساوي 2
5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المماس السابق و المستقيم $x = 1$

هام : تابعوا أهم الملاحظات الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك

فارس جقل

المسألة السادسة والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{0\}$ وفق : $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ وليكن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$

1) عين a, b إذا علمت أن المستقيم d يمس C في نقطة من محور xx'
2) ادرس تغيرات f : $f(x) = \frac{2x-1}{4x}$ المعرف على $R\setminus\{0\}$ ونظم جدولاً بها ثم أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و d و المستقيم $\Delta: x = 2$
5) أوجد معادلة مماس آخر ل C يوازي المماس d

المسألة السابعة والعشرون:

ثانياً : ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$ خطه البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها
2) استنتج من جدول التغيرات أنه إذا كان $b \in R$ كانت المعادلة $be^x = 2 - b$ غير قابلة للحل عندما $b \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ ولها جذر وحيد عندما $b \in]0, 2[$
3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبين وضع C بالنسبة إلى كل مقارب له
4) أوجد معادلة المماس Δ للخط C في النقطة $A(0, 1)$
5) ارسم كل مقارب للخط C وارسم Δ ثم ارسم C

النجاح لا ينتظر احد ، بل يتطلب الكثير من الجهد والعمل الشاق وانتهاز الفرص

المسألة الثامنة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{-2,0\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2x}$

1) أثبت أن f يكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{g(x)}{x^2+2x}$
2) ابحث عن كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته
3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب للخط C ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المقارب Δ

المسألة التاسعة والعشرون:

ليكن التابع f المعرف على $]-\infty,3]$ وفق $f(x)=x\sqrt{3-x}$ خطها البياني C

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها ثم عين ما للتابع f من قيم كبرى وصغرى محليا
2) ارسم الخط C
3) أثبت أن التابع g المعيّن بالعلاقة : $g(x)=\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$ هي تابع أصلي على المجال $]-\infty,3]$ للتابع f
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور xx' و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$, $x=0$

هام : تابعوا نماذج و توقعات جميع المواد على صفحة (مركز أونلاين التعليمي)على الفيس بوك

المسألة الثلاثون:

f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

1) أثبت أن $\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$ أيا يكن $x>1$
2) استنتج نهاية f عند $+\infty$

المسألة الحادية والثلاثون:

ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$

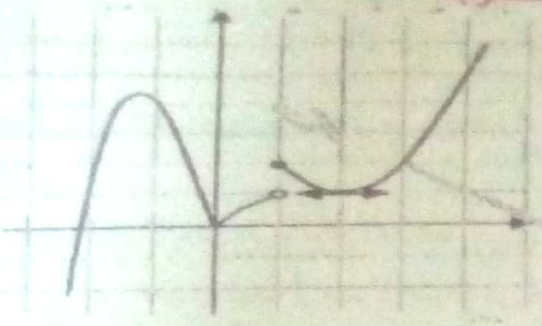
1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2) عين عددين a , b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ أياً كان x
3) استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على R

المسألة الثانية والثلاثون:

ليكن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x+1}$

1) ادرس تغيرات التابع f
2) تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]0,+\infty[$

المسألة الثالثة والثلاثون : نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R و المطلوب :



1. ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 5$
2. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$
3. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع علل ذلك
4. ماعدد القيم الحدية للتابع f
5. ماقيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$
6. أيكون التابع f اشتقاقيا عند $x = 1$

المسألة الرابعة والثلاثون :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; \ x \neq 0 \\ m & ; \ x = 0 \end{cases}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند الصفر
2. عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

المسألة الخامسة والثلاثون :

يكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ و المطلوب :

1. عيّن العددين الحقيقيين a , b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1, 0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$
2. من أجل $a = 4$, $b = -4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

المسألة السادسة و الثلاثون : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ و المطلوب :

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$
2. أثبت أن العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$
3. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعيا n_0 يحقق أيا كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9 , 2.1[$

المسألة السابعة و الثلاثون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. في معلم متجانس ارسم الخط C
4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محوري الاحداثيات و المستقيم $x = 1$
5. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق : $g(x) = 2xe^x$
6. أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$

المسألة الثامنة و الثلاثون : المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة وفق : $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3 ، جد عدد طبيعي u_0 يحقق $u_n \in [2.99, 3.01]$ عند كل n أكبرتماماً من u_0

المسألة التاسعة والثلاثون : إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً يكن x من R^* أوجد نهاية التابع f عند الصفر

المسألة الأربعون : ليكن C الخط البياني f المعرف على $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln\frac{x+2}{x}$

1. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f
2. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
3. ارسم الخط C في معلم متجانس
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n = f(n)$ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ أثبت أن $S_n = \ln(\frac{(n+2)(n+1)}{2})$

المسألة الواحدة والأربعون : أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g و استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ و المستقيمين $x = 0 , x = 1$

المسألة الثانية والأربعون : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة : $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ و $x_0 = 5$

1. احسب x_1 , x_2 , x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية
2. نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية
3. اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

المسألة الثالثة و الأربعون :

أثبت صحة المساواة $\cos^2 x . \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \; dx$

المسألة الرابعة و الأربعون : ليكن C الخط البياني المعرف على R بالصيغة : $f(x) = xe^{-x}$

1. احسب نهاية التابع f عند $-\infty$, $+\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f و نظم جدولاً بتغيراته و عيّن قيمته الحدية ثم ارسم C
2. احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$, $x = 1$
3. بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين
4. لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ و $u_0 = 1$
   1) أثبت أن $0 < u_n < 1$ وذلك مهما كان الدليل n
   2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ، ثم بين تقاربها و احسب نهايتها

المسألة الخامسة و الأربعون : ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$

وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ احسب كلا من $g(1), g'(x), g'(1)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$

المسألة السادسة و الأربعون :

أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x(\ln x)^2$

1. أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x) = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$
2. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $g(x) = -2x\ln x$

أثبت أنه عند $x > 0$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ و استنتج الوضع النسبي للخطين C_f , C_g

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0, +\infty[$

1. بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$
2. ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_g عند النقطة التي فاصلتها x_0

المسألة السابعة و الأربعون :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الاحداثيين و عيّن قيمته الحدية مبينا نوعها
2. ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C
3. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e^2}$

المسألة الثامنة و الأربعون : لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان كما يلي :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{4n}$ أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

المسألة التاسعة و الأربعون : ليكن التابع f المعرف بالصيغة : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - |x|$

احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الخمسون : حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عيّن حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

المسألة الواحدة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها و استنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه
2. ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C
3. بيّن أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد □ و أن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2,-1]$ واستنتج أن □ تحقق المعادلة $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = 1$, $x = 0$
5. استنتج مجموع تعريف التابع $x \to g(x) = ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

المسألة الثانية والخمسون :

لتكن المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ والمطلوب :

1. أثبت أن المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً
2. أثبت أن s_n تكتب بالشكل $s_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$

المسألة الثالثة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف واكتب معادلة كل مقارب وجدته .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0, 2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C , T
4. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T و الخط البياني C
5. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C' للتابع g

المسألة الرابعة والخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - ln(x)$ والمطلوب :

1. أوجد مجموعة تعريف التابع ثم أوجد كل مقارب للخط البياني C .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الصغرى محلياً
3. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط البياني C
4. استنتج رسم الخط C' للتابع f' المعرف وفق $f'(x) = \frac{-1}{8}x^2 + ln(-x)$

المسألة الخامسة و الخمسون : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = x + x(lnx)^2$ المعرف على $I =]0, +\infty[$ وليكن $g(x) = (ln(x) + 1)^2$ المطلوب :

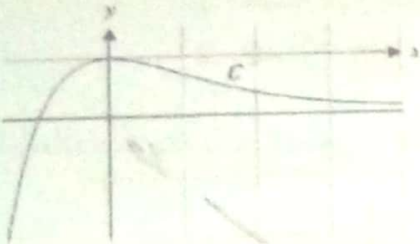
1. أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$
2. أثبت $f'(x) = g(x)$
3. حل المعادلة $g(x) = 0$
4. نظم جدول بتغيرات f
5. اكتب معادلة المماس Δ في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة السادسة والخمسون : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1. أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n
2. استنتج أن العدد $\frac{5}{2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

المسألة السابعة والخمسون : في الشكل المجاور خط بياني C للتابع f و المطلوب :



1. مامعادلة المستقيم المقارب للخط C وما الوضع النسبي للخط C مع المقارب ؟
2. يقبل f قيما حدية حددها وحدد نوعها
3. في حالة عدد حقيقي K عين بدلالة K عدد حلول المعادلة $f(x) = K$

المسألة الثامنة والخمسون : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة وفق : $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل $n \geq 1$ معرفة وفق $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

1. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم يطلب تعيين أساسها
2. استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

المسألة التاسعة والخمسين : (u_n) متتالية معرفة على N ب : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

1. عين العدد الحقيقي a بحيث يكون (u_n) متتالية ثابتة
2. ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ والخط البياني C للتابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
3. بفرض $a = 0$ باستعمال الرسم السابق مثّل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_4, u_3, u_2, u_1, u_0

المسألة الستون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}$ والمطلوب :

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها
3. أثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$
4. في معلم متجانس ارسم الخط C
5. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع : $g(x) = \frac{1-x+lnx}{x}$

المسألة الواحدة و الستين : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}$

المطلوب :

1. أثبت أن $n \geq 2^n$ أيا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$
2. استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة

المسألة الثانية و الستين : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$

والمطلوب :

1. اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

المسألة الثالثة و الستين : أثبت أن $ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أيا كان $x > -1$

المسألة الرابعة و الستين : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$
2. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

المسألة الخامسة و الستين : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية :

$u_0 = 3 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$ عند كل n و المطلوب :

1. اثبت أن التابع متزايد تماما على
2. اثبت بالتدريج أن أيا كان العدد الطبيعي
3. استنتج أن المتتالية متقاربة و احسب نهايتها

المسألة السادسة و الستين : ليكن التابع $f : x \to ln\,x$ المعرف و المستمر على $I =]0,+\infty[$ ، عين تابعا أصليا للتابع f

المسألة السابعة و الستين : لتكن المتتالية: $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجيا وفق: $U_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{5}{2}$

-1 ارسم في معلم متجانس المستقيم Δ الذي معادلته $Y = x$ والخط c الممثل للتابع f المعرّف على R وفق: $f(x) = \frac{2}{3}x+2$

-2 باستعمال الرسم السابق مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 , u_1, u_2, u_3, u_4

-3 ليكن $V_n = u_n - 6$:

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية,عين أساسها وحدها الأول

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جلسة امتحانية لمراجعة التحليل

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

المطلوب: 1 احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2 أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

السؤال الثاني: حل المعادلة: $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في R .

السؤال الثالث: حل المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4, 1)$

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{-3\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1 اكتب التابع f بالشكل: $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$

2 أثبت أن المستقيم $y = ax+b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

3 احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

السؤال الخامس: أثبت أن:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$$

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1}$

السؤال السادس: ليكن التابع $f(x) = x - \ln x$ المعرف على $I =]0,+\infty[$ والمطلوب:

1 جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$

2 ما نهاية $\lim_{x\to 1} \frac{x-\ln x-1}{x-1}$

3 استنتج مشتق التابع $f(\ln x)$ واستنتج مشتق التابع $h(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$

السؤال السابع: 1 حل في R جملة المعادلتين:

$$x - 3y = 2\ln 2$$
$$x + y = 4\ln 2$$

2 إذا كان $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$, $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ احسب $I-3J$, $J+I$ واستنتج قيمة كل من I, J

السؤال الثامن: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{-2, 2\}$ وفق $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2-4}$ والمطلوب:

1 ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الكبرى محلياً، وأوجد معادلة كل مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور xx' أو يوازي المحور yy'

2 ارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C

3 احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور xx' والمستقيمين $x = -1$, $x = 1$

السؤال التاسع: ليكن f التابع المعرف على المجال $]2, +\infty[$ وفق $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

1 ادرس تغيرات f على المجال $]2, +\infty[$ ونظم جدولاً بها

2 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

3 اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

السؤال العاشر: أثبت أن $\ln x \le x - 1$ لأجل $x > 0$ باعتبار $x = e^{1/3}$ و $x = e^{-1/3}$ استنتج أن ... العدد e.

السؤال الحادي عشر: أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$، ثم أعط عدداً حقيقياً α يحقق الشرط إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9 , 3.1[$

السؤال الثاني عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه.
2. ارسم كل مقارب وجدته، وارسم C

السؤال الثالث عشر:

أثبت أن للمعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أن $\alpha \in]-1 , 0[$

السؤال الرابع عشر:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x e^{-x}$ والمطلوب:

1. احسب: $\int_{1}^{\ln 3} f(x)\,dx$
2. أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

السؤال الخامس عشر: حل المعادلة

$$4^x = 5^{x+1}$$

السؤال السادس عشر:

ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x+1}$$

1. جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D
2. احسب $\int_{0}^{2} f(x)\,dx =$

السؤال 21: ليكن التابع $f(x) = e^x - 1$

1. حل المتراجحة $f(x) \le 0$
2. احسب: $\int_{0}^{\ln 2} f(x)\,dx$

السؤال السابع عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

1. ما نهاية التابع f عند $-\infty$
2. ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة للمماس من اليمين للخط البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

السؤال الثامن عشر:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

السؤال التاسع عشر:

إذا كان $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} + \dfrac{1}{2}$ أياً يكن x من $\mathbb{R}^*$، أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

السؤال العشرون: أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = e^x + 2 - x$، ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$،

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$$

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس ...

جلسة لمراجعة المتتاليات

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n=3n+1$

1- أثبت أنها حسابية وعين أساسها ثم احسب المجموع $U_0+U_1+U_2+\dots+U_{10}$

2- برهن أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما.

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة : $U_{n+1}=2U_n-3$ و $U_0=2$

نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ حيث : $V_n=\dfrac{1}{U_n-3}$

1- أثبت (V_n) هندسية ثم عين أساسها وحدها الأول.

2- اكتب U_n بدلالة n.

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $U_{n+1}=\dfrac{2U_n}{U_n+1}$ و $U_0=2$

1- أثبت أن $U_n\geq U_{n+1}\geq1$

2- استنتج أن (U_n) متناقصة.

التمرين الرابع :

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية منها $U_1=6$ و $U_0=-2$

1- أوجد أساس المتتالية ثم اكتب U_n بدلالة n

2- احسب المجموع $S=U_1+U_2+\dots+U_{10}$

التمرين الخامس :

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية منها $q=2$ و $U_0=-2$

1- احسب U_5

2- احسب المجموع $S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين السادس :

لتكن المتتاليات $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفتان كما يلي :

$$V_n=U_n+\frac{1}{4n}$$

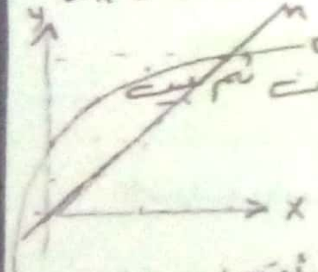
$$U_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

• أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

التمرين السابع :

لتكن المتتاليات المعرفتان وفق :

$t_n=1-\dfrac{1}{n}$ و $U_n=1+\dfrac{1}{n^2}$



• أثبت أنهما متجاورتان ثم بين نهايتهما المشتركة .

التمرين الثامن :

نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ كما يأتي :

$U_0=\dfrac{1}{2}$ و $U_{n+1}=\dfrac{3U_n+4}{U_n+2}$

1- باستعمال الرسم ومثل على محور الفواصل دون حساب الحدود U_0, U_1, U_2, U_3

2- ضع تخمينا حول اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ وتقاربها

التمرين التاسع :

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما .

2- أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$ ، ثم استنتج عنصرا راجحا على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبين أنها متقاربة .

Scanned by CamScanner

خلاصة بحث الأشعة في الفراغ

1) لإثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة تطبق ما يلي :

★ نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين .

★ نثبت أن شعاعين مرسومين منهما مرتبطان خطياً .

2) لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد نثبت ما يلي :

★ ثلاث أشعة مرسومة منها مرتبطة خطياً . ★ نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد لبقية النقاط

3) معادلة كرة مركزها (x_0 , y_0 , z_0) ونصف قطرها R هي :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

4) معادلة كرة مركزها $O\,(0,0,0)$ ونصف قطرها R هي :

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

5) معادلة مخروط :

★ رأسه O ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته دائرة مركزها $(h,0,0)$ ونصف قطرها r هي :

$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0 \;\; ; 0\le x\le h$$

★ رأسه O ومحوره $(o,\vec{j})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0,h,0)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0 ; \;\; 0\le y\le h$$

★ رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0,0,h)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0 \;\; ; 0\le z\le h$$

6) معادلة الأسطوانة :

★ محورها $(o,\vec{i})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(a,0,0)$, $(b,0,0)$ هي :

$$y^2+z^2=r^2 : a\le x\le b$$

★ محورها $(o,\vec{j})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(0,a,0)$, $(0,b,0)$ هي :

$$x^2+z^2=r^2 : a\le y\le b$$

★ محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(0,0,a)$, $(0,0,b)$ هي :

$$y^2+x^2=r^2 \;: a\le z\le b$$

7) إثبات توازي مستقيمين :

نفحص الارتباط الخطي لشعاع توجيه للمستقيم الأول مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني .

8) إثبات تقاطع مستقيمين :

① نبرهن أن شعاع توجيه للمستقيم الأول غير مرتبط خطيا مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني .

② نبرهن أن المستقيمين يقعان في مستو واحد .

9) فائدة الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

① إثبات انتماء اربع نقاط على مستو واحد .

② إثبات توازي مستويين .

③ إثبات توازي مستقيم ومستو .

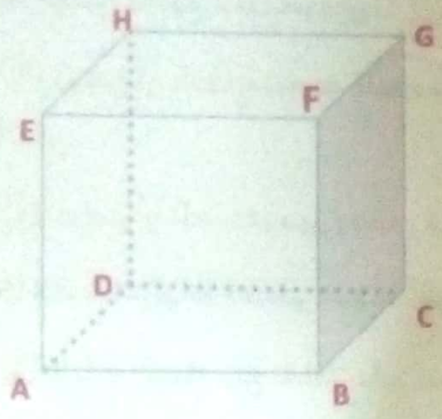
④ إثبات وقوع ثلاثة أشعة في مستوٍ واحد .

10) فائدة مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ :

① إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة .

② إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد .

③ إثبات تقاطع مستقيمات .



طول ضلعه (*) ABCDEFGH مكعب ▯

لدينا معلم $\left(A, \frac{1}{\ast}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\ast}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{\ast}\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0, 0, 0)$

$B(\ast, 0, 0)$

$D(0, \ast, 0)$

$E(0, 0, \ast)$

$C(\ast, \ast, 0)$

$F(\ast, 0, \ast)$

$H(0, \ast, \ast)$

$G(\ast, \ast, \ast)$

فاصلة، ترتيب، راقم

نتائج:

① كل نقاط المستوي الأرضي A , B , C , D راقمها (0)

② كل نقاط المستوى الخلفي A , B , E , F ترتيبها (0)

③ كل نقاط المستوى اليساري A , D , E , H فاصلتها (0)

④ كل نقاط المستوي اليميني (المظلل) F , G , C , B فاصلتها (*)

⑤ كل نقاط المستوي العلوي E , F , G , H راقمها (*)

⑥ كل نقاط المستوي الأمامي D , C , H , G ترتيبها (*)

ملاحظات :

- يمكن ترميز المعلم السابق كما يلي $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ بحيث $\left(\ast\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \ast\vec{j} = \overrightarrow{AD}, \ast\vec{K} = \overrightarrow{AE}\right)$
- إذا كان طول ضلع (حرف) المكعب يساوي (2) مثلاً ..فإننا نضع عوضاً عن (*) في الإحداثيات السابقة العدد (2)
- إذا كان طول الضلع يساوي (2) نرمز للمعلم بالشكل $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ أو كما يلي :

$$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K}) \text{ حيث } \overrightarrow{AB} = 2\vec{i}, \quad \overrightarrow{AD} = 2\vec{j}, \quad \overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$$

الارتباط الخطي لشعاعين :

شرطه هو: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ حيث λ عدد حقيقي

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ المركبات متناسبة.

نتـائـج:

1- الارتباط الخطي لشعاعين : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

يعني أن المستقيمان (CD) و (AB) متوازيان

2- الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A,B,C على استقامة واحدة.

مثال امتحاني: ليكن لدينا النقاط:.

$$A(2, 1, 0), B(3, 2, -1), C(0, 2, -5)$$

هل النقاط A, B, C على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \neq 1$$

المركبات غير متناسبة فالنقاط ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستو

نتيجة هامة:

3 نقاط ليست على استقامة واحدة .. تعين مستو.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

لاثبات أن ثلاثة اشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً نثبت أنه يوجد

عددان حقيقيان α , β يحققان العلاقة : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

تمرين امتحاني

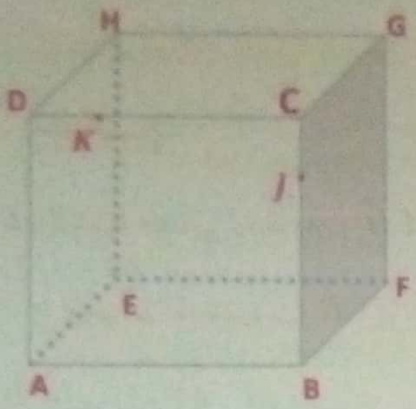
$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة $J\in BC$ بحيث: $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

المطلوب: 1) جد إحداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً.

4) استنتج أن المستقيم HK يوازي (EGJ).



الحل:

1) $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$ $\quad H(0,1,1)$

$K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$ $\quad E(0,1,0)$ $\quad G(1,1,1)$

2) $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$, $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{0}{-1}=\frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$1\neq 0$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

*طريقة لإيجاد حداثيات K: نفرض $K(x,y,z)$

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$(x-0, y-0, Z-1)=\frac{1}{4}(1,0,0)$$

$$(x,y,Z-1)=\left(\frac{1}{4},0,0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ y=0 \\ Z-1=0\Rightarrow Z=1 \end{array}\right\} K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$$

3) $\overrightarrow{HK}=\propto\overrightarrow{EJ}+\beta\overrightarrow{EG}$

ونحسب $\beta, \propto$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=\propto\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)+\beta(1,0,1)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=\left(\propto,\propto,\frac{3}{4}\propto\right)+(\beta,0,\beta)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=\left(\propto+\beta,-\propto+0,\frac{3}{4}\propto+\beta\right)$$

$$\propto+\beta=\frac{1}{4} \quad ①$$

$-\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1$ ②

$\frac{3}{4}\alpha + \beta = 0$ ③

من العلاقات ② نعوض في ①، $1 + \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{4}$

نعوض في ③

$$\frac{3}{4}(1) + \left(\frac{-3}{4}\right) = 0$$

محقق $0=0$

$\overrightarrow{HK} = 1\overrightarrow{EJ} - \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ فالاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

4) من الطلب السابق: لدينا الاشعة $\overrightarrow{EG}$ و$\overrightarrow{EJ}$ و$\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً وفيه المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) أي:

$(HK) \parallel (EGJ)$

معادلة المستوي

المستوي

ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ ← → نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

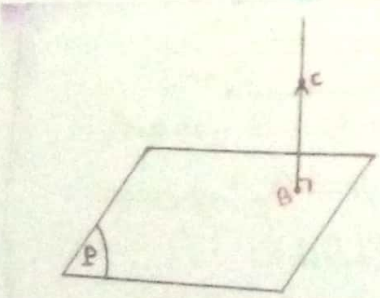
النقطة

حالات معادلة المستوي

1) معادلة مستوٍ يمر من نقطة و ناظمه معلوم (يعامد شعاع معلوم):

نعوض مباشرة في معادلة المستوي

مثال: عيّن مستوٍ يمر بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{BC}$ ناظماً ، حيث $C(-1,2,1)$ ، $B(+2,-1,0)$



$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-3,3,1)$$

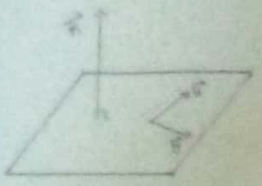
$$\Rightarrow a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$\Rightarrow -3(x - 2) + 3(y + 1) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 3y + 6 + 3 + z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: -3x + 3y + z + 9 = 0}$$

2) معادلة مستوي p من ثلاث نقاط أو (علم شعاعا توجيهه $\vec{v}, \vec{u}$ ويمر بنقطة) :



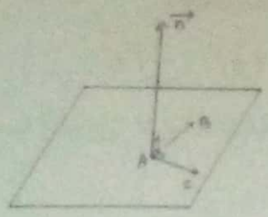
1) نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم.

2) $\vec{n} \perp \vec{u} \Leftarrow ax_1 + by_1 + z_1 = 0$ *

3) $\vec{n} \perp \vec{v} \Leftarrow ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$ **

4) نفرض عدد = c ونعوض في * و ** ونحل حل مشترك فنحسب a, b ثم نعوض في معادلة المستوي .

مثال



ليكن لدينا النقاط التالية:

$A(1,2,3)$, $B(2,1,2)$, $C(3,3,1)$

المطلوب:

1) اثبت أن النقاط C ,B,A تعين مستو.
2) عين شعاع ناظم على المستوي (ABC).
3) أكتب معادلة للمستوي (ABC).

الحل: $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (2, 1, -2)$

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq -1$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط C ,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستو

2- شعاعا توجيه المستوي هما:

$\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC}(2,1,-2)$

نفرض الناظم $\vec{n}\,(a, b, c)$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a - b - c = 0} \; *$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\boxed{2a + b - 2c = 0} \; **$$

نفرض $c = 1 \Leftarrow$ نعوض في * :

$$\boxed{a - b - 1 = 0} \; *$$

$$\boxed{2a + b - 2 = 0} \; **$$

بالجمع نجد : $3a - 3 = 0 \Rightarrow 3a = 3$ فإن $a = 1$

نعوض في * : $1 - b - 1 = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow \vec{n} = (1,0,1)$$

$\Leftarrow$ معادلة المستوي :

$$\Rightarrow 1(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 + z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: x + z - 4 = 0}$$

هام جداً :

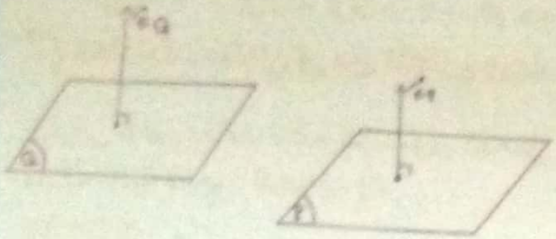
راجع نوطة النماذج 25 الشاملة النهائية لمركز أونلاين يمكن طلبها من مكتبة الأمل 0959458194

ملاحظة هامة :

لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين نوجد نقطة من أحدهما ثم نحسب بعدها عن المستوي الآخر

وظيفة

أوجد معادلة مستوي مار بالنقطة $A(2,0,1)$ ويقبل $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,-2,1)$ شعاعي توجيه لها



3) معادلة مستوي P من نقطة ويوازي مستو معلوم :

نعتبر ناظم المستوي المعلوم هو ناظم المستوي المطلوب

لأن (المستويان المتوازيان ناظماهما مرتبطان خطيا)

ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي ثم ننشر

مثال

اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويوازي المستوي $Q: 2x+y+8z-4=0$

الحل : لدينا $P \parallel Q$ اذا $\vec{n}_Q = \vec{n}_p = (2,1,8)$

$$\Rightarrow 2(x-1)+(y+1)+8(z-2)=0$$

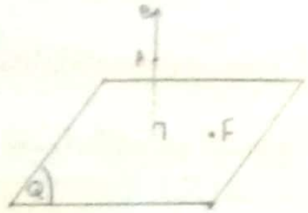
$$\Rightarrow P: 2x+y+8z-17=0$$

4) معادلة مستوي P من A ويعامد مستقيم (BC) :

نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم أي : $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$ ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي

مثال

اكتب معادلة مستوي Q يمر بالنقطة $F(1,-2,4)$ و يعامد المستقيم (AB) حيث $A(3,0,-3)$ و $B(-1,-3,2)$



الحل : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-4,-3,5)$

$$\Rightarrow Q: -4(x-1)-3(y+2)+5(z-4)=0$$

$$\Rightarrow Q: -4x-3y+5z-22=0$$

5) معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$

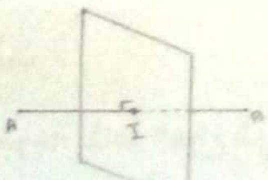
نعتبر الناظم $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ و النقطة هي I منتصف القطعة $[AB]$

مثال

أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث : $A(1,1,2)$ و $B(3,-1,4)$

الحل : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,,y_B-y_A\,,z_B-z_A) \quad \Rightarrow \vec{n}\,(2,-2,2)$

النقطة التي يمر منها المستوي هي I منتصف $[AB]$



$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right) \Rightarrow I(2,0,3)$$

$$2(x-2)-2(y-0)+2(z-3)=0$$

$$\Rightarrow 2x-2y+2z-10=0 \Rightarrow x-y+z-5=0$$

6) معادلة مستوي P من نقطة و يعامد مستويين P, Q :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون: $\vec{n}\perp\vec{n_P}$ و $\vec{n}\perp\vec{n_Q}$ فنعود للحالة (2)

مثال

أوجد معادلة المستوي R المار بالنقطة $A(1,1,3)$ والذي يعامد المستويين Q, P حيث:

$$Q: x-y+2z+3=0 \quad , \quad P: 2x+z-1=0$$

الحل : نفرض $\vec{n_R}(a,b,c)$ فيكون :

$$\vec{n_R}\perp\vec{n_P} \Longrightarrow \vec{n_R}\cdot\vec{n_P}=0 \Longrightarrow 2a+c=0 \quad ①$$

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_R} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \quad ②$$

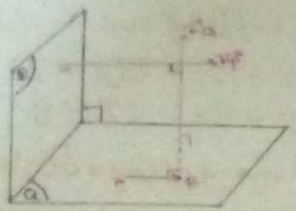
بفرض $c = 1$ نحل المعادلتين فينتج $a = \frac{-1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Rightarrow R: -x + 3y + 2z - 7 = 0$$

7) معادلة مستوي يمر من نقطتين ويعامد مستوي :

نفرض ناظم يعامد ناظم المستوي المعطى فتنتج علاقة و يعامد الشعاع المار من النقطتين فتنتج علاقة ثانية فنعود للحالة(2)

مثال اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ عموديا على المستوي P حيث : $P: 2x - 3y + z - 5 = 0$



الحل : $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$ و $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ فيكون :

$$n_Q \perp n_P \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow 2a - 3b + c = 0 \quad ②$$

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -3a + 4b + 5c = 0 \quad ①$$

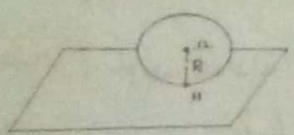
بفرض $c = 1$ فيكون $a = 19$, $b = 13 \Leftarrow Q: 19x + 13y + z - 25 = 0$

8) معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها :

نعتبرالناظم هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الكرة والنقطة هي نفسها نقطة التماس

مثال لتكن لدينا الكرة S التي معادلتها $S: x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$
اكتب معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة $A(1,1,0)$

الحل : مركز الكرة $\Omega(0,-2,-1)$, ونقطة التماس $A(1,1,0)$



$\overrightarrow{\Omega A}(1,3,1)$

$$\Rightarrow (x-1) + 3(y-1) + (z-0) = 0 \Rightarrow x + 3y + z - 4 = 0$$

الكرة

هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة

النقطة الثابتة : مركز الكرة **البعد الثابت :** نصف القطر

معادلة الكرة : $(x - x_{\text{المركز}})^2 + (y - y_{\text{المركز}})^2 + (z - z_{\text{المركز}})^2 = R^2$

9) معادلة مستوي يمر من أربع نقاط A, B, C, D:

نوجد معادلة المستوي المار من النقاط A, B, C ثم نبرهن أن D تنتمي للمستوي (نعوض)

أشكال معادلة الكرة

1) كرة علم مركزها ونصف قطرها :

نعوض في المعادلة مباشرة دون فك الأقواس

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $(1,0,-2)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{3}$

الحل : نعوض في المعادلة : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$$

2) كرة علم مركزها وتمر بنقطة :

نحسب نصف القطر وهو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة المعطاة و مركز الكرة

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $(1,0,-2)$ Ω وتمر بالنقطة $A(-2,1,1)$

الحل : $R=\Omega A=\sqrt{(-2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}$

$$R=\sqrt{9+1+9}$$

ومنه $R=\sqrt{19}$ نعوض في المعادلة : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=19$$

3) كرة علم طرفا قطرها :

نحسب نصف القطر $R=(\frac{\text{طول القطر}}{2})$ ونحسب احداثيات المركز من قانون احداثيات منتصف قطعة مستقيمة (منتصف طرفا القطر)

مثال اكتب معادلة كرة طرفا قطرها $B(1,0,-2)$ و $A(2,1,1)$

الحل : $R=\frac{BA}{2}=\frac{\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}}{2}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{1+1+9}}{2}$

ومنه $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$ و احداثيات المركز Ω هي $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$

نعوض في المعادلة : $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{11}{4}$

هام جداً : لبرهان كرة تمس مستوي نثبت أن بعد مركز الكرة عن المستوي يساوي نصف القطر

4) كرة علم مركزها وتمس مستوي في نقطة :

R هو البعد بين مركز الكرة والمستوي

مثال لتكن النقطة $A(2,1,0)$ والمستوي P الذي معادلته :

$P: 3x-y+2z-1=0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس P

الحل : $R=dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\vec{n}(3,-1,2)$ و $d=-1$

$$\Rightarrow R=\frac{|(3)(2)+(-1)(1)+(2)(0)-1|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{16}{14}$$

مثال

ليكن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ ماطبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{15}$

الحل : بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ فإن :

$$\|\overrightarrow{3MH}\|=\sqrt{15}\Rightarrow\|\overrightarrow{MH}\|=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

ومنه مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة H بعدا ثابتا $\frac{\sqrt{15}}{3}$ في تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{15}}{3}$

ملاحظة : ممكن فرض مركز أبعاد متناسبة للنقاط في حال لم يرد ذلك في طلبات سابقة

وظيفة

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC..جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

مسألة امتحانية شاملة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0)$, $B(4,3,-3)$, $C(-1,1,2)$, $D(0,0,1)$

المطلوب :

1. أثبت أن $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ..وهل النقاط A,B,C على استقامة واحدة
2. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$
3. جد احداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة I
4. جد احداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
5. هل المثلث ABC قائم ..فسر ذلك .
6. هل النقطة $F(2,3,-1)$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$
7. أوجد معادلة كرة مركزها A و تمر من D
8. جد على محور التراتيب نقطة M' متساوية البعد عن D,B
9. أوجد النقطة $K(x,y,z)$ بحيث يكون $ABCK$ متوازي اضلاع
10. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا .
11. استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أن α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها
12. هل تقع E,D,C,B على كرة واحدة مركزها A؟؟
13. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق احداثياتها العلاقات $2\le z\le 5, x^2+y^2=16$
14. $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD
أثبت أن النقاط C,A,K تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$

الحل :

1. $\overrightarrow{AB} = (3,3,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)$ فالشعاعان غير مرتبطان لعدم تناسب المركبات

2. $I(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2})$

3. $\frac{5}{2} = \frac{1+x_E}{2} \Rightarrow x_E = 4$

$$\Rightarrow y_E = 3 \ , \ z_E = -3$$

4. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$x-4=7 \Rightarrow x=11 \ , y-3=1 \Rightarrow y=4 \ , z+3=-7 \Rightarrow z=-10$$

$$M(11,4,-10)$$

5. حسب عكس فيثاغورث المثلث قائم

6. الشرط $[FA] = [FB] \Leftarrow \sqrt{11} \neq \sqrt{8}$ لا تنتمي إلى المستوي المحوري

7. $(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2$

8. نفرض $M'(0,y,0) \Rightarrow BM' = DM'$

$$\sqrt{16+(y-3)^2+9} = \sqrt{y^2+1} \Rightarrow y = 5.5$$

9. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow K(-4,-2,5)$

10. فالأشعة مرتبطة خطياً $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

11. $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow -7\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = 0$$

12. الشرط $AE = AD = AC = AB$

13. مجموعة النقاط تمثل أسطوانة محورها $(\overline{OK})$ ونصف قطرها $r = 4$ و مركزي قاعدتيها $(0,0,2)$, $(0,0,5)$

14. راجع كتاب الأشعة صـ29

المستقيم في الفراغ

المعادلات الوسيطية للمستقيم

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\} t \in R$$

نحتاج

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$

تطبيق: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 1, 0)$ ويقبل $\vec{u}(3, -2, 1)$ شعاع توجيه.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \Rightarrow x = 2 + 3t \\ y &= y_0 + bt \Rightarrow y = 1 - 2t \\ z &= z_0 + ct \Rightarrow z = t \end{aligned}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم (AB):

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in [0, +\infty[$$

دورة: أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB)

حيث $B(-2, 3, 2)$ و $A(2, -1, 0)$

الحل:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4, 4, 2)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \Rightarrow x = 2 - 4t \\ y &= y_0 + bt \Rightarrow y = -1 + 4t \\ z &= z_0 + ct \Rightarrow z = 2t \end{aligned}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a, b, c)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in [0, 1]$$

مستويان

- **متعامدان** ← الناظمان متعامدان
- **متقاطعان** ← الناظمان غير مرتبطان خطياً
- **متوازيان** ← الناظمان مرتبطان خطياً

مستقيم ومستوي

- **المستقيم // المستوي**: شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم
- **المستقيم $\perp$ المستوي**: شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع الناظم
- **المستقيم يقطع المستوى**: الشرط : شعاع توجيه المستقيم لا يعامد الناظم
  1) نوجد معادلات المستقيم.
  2) نعوض في المستوي.
  3) نحسب t.
  4) نعوض مرة أخرى في معادلات المستقيم.
  5) نوجد نقطة التقاطع.
  * إذا كانت الجملة مستحيلة فإن مستقيم لا يقطع المستوي.
  ** إذا حصلنا على المساواة 0=0 فالمستقيم محتوي في المستوى.

شرط آخر لتعامد مستقيم مع مستو :

أن يعامد مستقيمين متقاطعين في المستوي.

نتيجة : برهان $\vec{n}$ ناظم على المستوى يجب أن يعامد شعاعين غير مرتبطين في المستوي :

$$\left.\begin{matrix}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\,(\text{ناظم})$$

تمرين هام : أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي D في نقطة يطلب تعينها $A(3,1,-2)$ و $B(0,2,1)$

$$P: 2x - y + z - 2 = 0$$

الحل : شرط التقاطع $\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$$
$$\vec{n} = (2,-1,1)$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ لا يعامد الناظم $\vec{n}$

$\Leftarrow$ المستقيم (AB) يقطع المستوي D

$$\left.\begin{matrix}x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct\end{matrix}\right\} t \in R$$

$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$\left.\begin{matrix}x = 3 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 3t\end{matrix}\right\} t \in R$$

نعوض معادلات المستقيم في المستوي P: $t = \frac{1}{4}$

نعوض t في معادلات المستقيم: نقطة التقاطع $\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-5}{4}\right)$

الوضع النسبي لمستقيمين :

- **شعاعا التوجيه**
  - **مرتبطان خطياً**
    - **المستقيمان متوازيان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ مساواة خاطئة
    - **المستقيمان منطبقان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ $0 = 0$
  - **غير مرتبطان خطياً**
    - **المستقيمان متقاطعان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ عدد $= s$ أو t
      - ⇐ نعوض فنتنج نقطة التقاطع
    - **المستقيمان متخالفان**
      - بالحل المشترك
      - ⇐ المساواة خاطئة

الحالات الثلاثة الأولى : المستقيمان يقعان في مستو واحد

في حالة متخالفان : المستقيمان لايقعان في مستو واحد

مثال : ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين : (هل يقع المستقيمان في مستو واحد)

$$L_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 3s \end{cases} ;s \in R \quad \text{و} \quad L_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ;t \in R$$

الحل :

المستقيمان غير متوازيين لأن شعاعي التوجيه لهما غير مرتبطين خطياً (تحقق من ذلك) ؛ لذا نحل معادلاتهما حلاً مشتركاً لدراسة تقاطعهما .

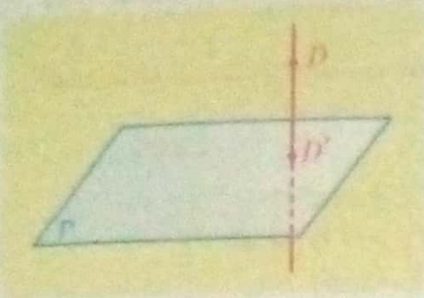
وجود نقطة مشتركة يعني وجود عددين حقيقيين و يحققان :

$$2 + 2t = 2 + s$$
$$2 + t = -1 - s$$
$$1 + 2t = 3s$$

بحل المعادلتين الأولى و الثانية نجد : $t = -1$ و $s = -2$

ولكن هذا لا يمثّل حلاً للمعادلة الثالثة ، فجملة المعادلات متناقضة ، ولا حل مشتركاً لها ، والمستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستو واحد .

مسقط نقطة D على مستوي P (بطريقة امتحانية سهلة) :



1. نوجد معادلة للمستوي P
2. نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D و الذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P ونحسب t ثم نعوض في المعادلات الوسيطية فينتج المسقط القائم للنقطة D على المستوي P وهو D'

تطبيق

أوجد مسقط النقطة $D(1,0,1)$ على المستوي $P: x+y+z+1=0$

الحل: نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D والذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= t \\ z &= 1+t \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P

$$1+t+t+1+t+1=0$$

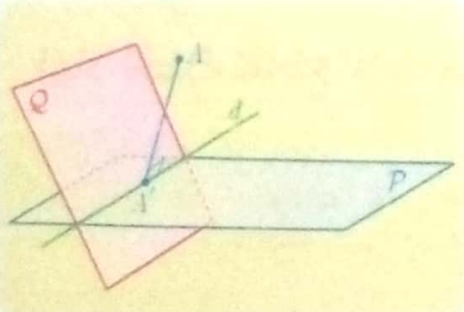
$$3t+3=0 \quad \Rightarrow t=-1$$

نعوض t في المعادلات الوسيطية فنجد : $z=0 \ , \ y=-1 \ , \ x=0$

$$\Rightarrow D'(0,-1,0)$$

إيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ

(إيجاد بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين P , Q)



1. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (للفصل المشترك)وليكن d
2. نوجد معادلة المستوي المار من النقطة A و العمودي على المستقيم (نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم) وليكن T
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي T فتنتج t ثم نعوض مرة أخرى في المعادلات الوسيطية ل d فنجد مسقط النقطة A على المستقيم d و ليكن A'
4. نوجد البعد بين A و مسقطها A' بقانون المسافة بين نقطتين بالفراغ و هو نفسه بعد النقطة A عن الفصل المشترك

$$AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2}$$

ملاحظة : يوجد طرق أخرى ..

تطبيق

لتكن النقطة $A(3,-1,2)$ و المستويان P, Q : $\begin{cases} P: 2x-y+z-4=0 \\ Q: x+y+2z-5=0 \end{cases}$

أثبت تقاطع المستويين واحسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك .

الحل :

1. نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك (d) :

نفرض $x=0$ و نعوض في معادلتي المستويين P, Q وبالحل المشترك نجد $z=3$, $y=-1$

$F(0,-1,3)$ نقطة من الفصل المشترك

نفرض $y=0$ ونعوض في معادلتي المستويين و بالحل المشترك نجد : $z=2$, $x=1$

$F'(1,0,2)$ نقطة ثانية من الفصل المشترك

شعاع توجيه الفصل المشترك هو $\overrightarrow{FF'}=(1,1,-1)$ وباختيار النقطة F نجد

المعادلات الوسيطية : $d: \begin{cases} x=0+t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases} \; ; t\in R$

2. نوجد معادلة المستوي Q المار بالنقطة A و ناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{FF'}=(1,1,-1)$

$Q: x+y-z=0 \Leftarrow Q: x-3+y+1-z+2=0$

3. نعوض معادلات d في Q فنجد : $t=\frac{4}{3}$

نعوض في d فنجد المسقط $A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

$$AA'=\sqrt{(3-\frac{4}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2+(2-\frac{5}{3})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

إيجاد نقطة تقاطع ثلاث مستويات :

1. نوجد الفصل المشترك لمستويين منهما
2. نوجد نقطة تقاطع الفصل المشترك مع المستوي الثالث

ملاحظة : يمكن استخدام طريقة غاوس .

تطبيق دورة 2018

ماهي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P_1, P_2, P_3 حيث : $\begin{cases} P_1: 2x+3y-2z-5=0 \\ P_2: x+2y-z-4=0 \\ P_3: x+3y-3z-4=0 \end{cases}$

الحل :

* نوجد الفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 : (نترك الطريقة للطالب)

وليكن $d: \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \; ; t\in R$

** نعوض معادلات d في المستوي الثالث ونحسب t فنجد : $t=\frac{3}{2}$

ثم نعوض قيمة t في معادلات d : فنجد نقطة التقاطع $(\frac{-1}{2}, 3, \frac{3}{2})$

بنك الأسئلة الهامة

السؤال الأول : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(3,-1,2)$ و المستويان : $\begin{cases} Q: x+y+2z-5=0 \\ P: x-2y+z-4=0 \end{cases}$

1) أثبت تقاطع المستويين Q و P وتحقق من تعامدهما ثم اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك
2) أعط معادلة المستوي W الذي يعامد المستقيم d (أي يعامد كل من المستويين Q و P) ويمر من A
3) احسب إحداثيات A' نقطة تقاطع d والمستوي W ثم استنتج مسقط A على d واحسب بعد A عن d .
4) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .
5) أثبت أن مركبات ناظم المستوي W المعامد للمستوي P تؤلف حدود متتالية حسابية

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CG]$.

1) في المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ احسب DJ و IJ و ID ثم أوجد $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ ثم احسب مساحة المثلث (DIJ) .
2) أعط معادلة للمستوي (DIJ) ثم احسب بعد H عن المستوي (DIJ) واستنتج حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$.
3) أعط معادلة للمستوي (HDI) ثم احسب بعد النقطة J عن المستوي (HDI) واحسب بعد J عن المستقيم IH
4) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من J و يعامد (HDI) ثم استنتج إحداثيات J' نقطة تقاطع d و (HDI)

السؤال الثالث : ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه 2 النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC')

..في المعلم المتجانس $(D',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{D'C'}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{D'A'}=2K$ و $\overrightarrow{D'D}=2\vec{i}$:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب ثم أعط تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AC']$.
2) أعط معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (AC') و يمرمن A' ثم استنتج إحداثيات H نقطة تقاطع (AC') و P
3) أثبت أن المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها .
4) أوجد معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[B'C']$

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $D(1,0,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $A(3,0,3)$

1) احسب $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .
2) أثبت أن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .
3) أوجد معادلة المستوي BCD .
4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

هام جداً : لا تنس حلمك ..نحن ناظرين نجاحك ..والنجاح بدو عزيمة ..والعزيمة بدها تفوق ...لا تيأس لسا الوقت كافي لتحقيق الحلم ...

السؤال الخامس : لتكن النقاط : $D(0,1,2)$ ، $C(-1,2,1)$ ، $B(1,0,0)$ ، $A(0,1,1)$

بين أن هذه النقاط تقع في المستوي نفسه ، ثم اكتب معادلة هذا المستوي .

السؤال السادس : لتكن النقاط : $C(3,-1,1)$ ، $B(2,1,0)$ ، $A(1,0,1)$

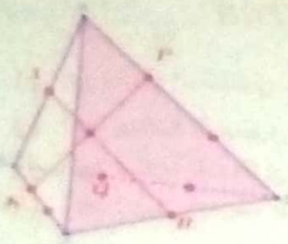
1) احسب مساحة المثلث ABC
2) أوجد معادلة المستوي ABC

السؤال السابع : لتكن النقطتان : $A(-3,2,1)$ و $B(9,4,3)$.
أوجد معادلة المستوي العمودي على القطعة المستقيمة AB في منتصفها .

السؤال الثامن : لتكن النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي المعطى بالمعادلة $P:\ 5x-y+z+6=0$
بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(-1,1,0)$

السؤال التاسع : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين P_1 و P_2 حيث :
$P_1:\ 2x+z-1=0$ و $P_2:\ x-y+2z+3=0$

السؤال العاشر : $ABCD$ رباعي وجوه النقاط P,Q,R,K,I تحقق :



$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ $\quad$ R منتصف $[CD]$ $\quad$ $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ $\quad$ I منتصف $[AB]$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2),(B;2),(C;1),(D;1)$ .. المطلوب :

1) أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان .
2) عيّن موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A;2),(C;1)$.
3) عيّن المجموعة نقاط M التي تحقق : $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|=\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$

السؤال الحادي عشر : نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$A\left(-\frac{1}{2},3,1\right)$ $\quad$ $B(-1,0,2)$ $\quad$ $C(2,1,1)$ $\quad$ $D(-3,3,-1)$

① a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثّل مستوٍ أوجد معادلته .
b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته .
② a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)
b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)
③ احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$
④ a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A
b) احسب نصف قطر الكرة السابقة واكتب معادلتها

السؤال الثاني عشر : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) إذا علمت أن $A(3,2,1)$ و $B(0,1,0)$ ثم أعط تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$

السؤال الثالث عشر : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط : $A(1,-1,-2)$ $\quad B(1,-2,-3)$ $\quad C(2,0,0)$
① برهن أن النقاط A و B و C تعين مستوٍ ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي : $x+y-z-2=0$
② ليكن المستويان P و Q معادلتهما $P:\ x-y-2z=0$, $Q:\ 3x+2y-z+10=0$
ادرس تقاطع المستويات (ABC) و Q و P

الاعداد العقدية :

*العدد التخيلي (i): نتخيل أن جذر العدد -1 هو العدد i أي : $i^2 = -1$

قوى العدد i الطبيعية:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = i.i = -1$$
$$i^3 = i^2.i^1 = (-1)(i) = -i$$
$$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4.i^1 = (1)(i) = i$$
$$i^6 = i^3.i^3 = (-i)(-i) = -1$$
$$i^7 = i^6.i^1 = (-1)(i) = -i$$
$$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$$
$$i^9 = i^5.i^4 = i.1 = i$$
$$i^{10} = i^4.i^6 = 1.-1 = -1$$

نتيجة ~

قوى العدد i الطبيعية محصورة بالمجموعة $\{\mp 1, \pm i\}$

العدد العقدي

الشكل الجبري: $z = x + iy$

الشكل المثلثي: $z = r[\cos\theta + \sin\theta]$

الشكل الأسي: $z = re^{i\theta}$

قواعد هامة

1) مرافق $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - yi$

2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $z.\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

4) $z + \bar{z} = 2x$

5) $z - \bar{z} = 2yi$

مثال: ليكن لدينا : $z_1 = 3 + 2i$ ، $z_2 = 4 - 5i$

الحل: $z_1 + z_2 = (3 + 4) + (2 - 5)i$

$$= 7 - 3i$$

$$z_1.z_2 = (3 + 2i)(4 - 5i)$$
$$= 12 - 15i + 8i - 10i^2$$
$$= 22 - 7i$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام: $\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-5i}$

$$= \frac{(3 + 2i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

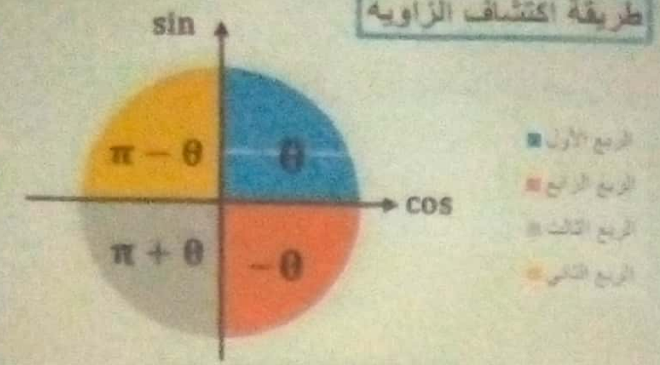
التحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

طريقة اكتشاف الزاوية



مثال

حول العدد العقدي التالي إلى الشكل المثلثي ثم الأسي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 1\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

فالشكل الأسي: $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

دستورا اويلر:

سؤال دورة : ليكن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *

المطلوب: أوجد $e^{-i\theta}$ ثم استنتج دستورا أويلر.

الحل: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ **

بالجمع بين العلاقتين * و **:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح بين * و **

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تطبيق هام جدا : اكتب $\cos^3 x$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \; dx$

دستور دوموافر:

$$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال: احسب مايلي:

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{24}$$

الحل: نحوله إلى الشكل المثلثي:

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= -\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{24} = \left[\cos -\frac{\pi}{6} + i\sin -\frac{\pi}{6}\right]^{24}$$

$$= \cos(-24)\frac{\pi}{6} + i\sin 24\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos 4\pi - i\sin 4\pi$$

$$= 1 - i(0) = 1$$

تحليل ثلاثي الحدود:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

حلول المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0$$

مثال: حل المعادلة التالية في C : $z^2 + 4z + 29 = 0$

الحل:

$$\Delta = 16 - 4(1)(29) = 16 - 116 = -100$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -2 - 5i$$

مثال حلل ما يلي: $z^2 + 4z + 29$

القاعدة: $a(z - z_1)(z - z_2)$

نوجد جذور للمعادلة:

$$\boxed{z^2 + 4z + 29 = 0}$$

$z_1 = -2 + 5i$ ‎ ‎ ‎ $z_2 = -2 - 5i$

$$\Rightarrow z^2 + 4z + 29$$
$$= 1[z - (-2 + 5i)][z - (-2 - 5i)]$$
$$= (z + 2 - 5i)(z + 2 + 5i)$$

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$\boxed{z = a + bi}$$

نتبع ما يلي:

نفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي لـ z $\Leftarrow$

① $x^2 - y^2 = a$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

③ $x.y = \frac{b}{2}$

تطبيق هام أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$z = 3 + 4i$$

الحل: بفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي للعدد z

① $x^2 - y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{19 + 6} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$

③ $x.y = 2$

②.①$\Rightarrow$ $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

$$\Rightarrow x = \mp 2$$

من اجل: $x_1 = 2 \Rightarrow$ ③ نعوض في $\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 + i$$

$x_2 = -2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$$\Rightarrow \omega_2 = -2 - i$$

مثال امتحاني هام

ليكن لدينا: $z = 1+\sqrt{3}i$ أكتب العدد z بالشكل المثلثي ، وأثبت أن z^6 عدد حقيقي.

الحل: $r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

إثبات أن z^6 عدد حقيقي:

$$z^6 = \left[2\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^6$$

$$\Rightarrow 2^6[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$$

$$= 2^6[1+0] = 2^6 \in R.$$

مثال

ليكن لدينا: $z_1 = 1+\sqrt{3}i$

$z_2 = 1+i$

1) اكتب بالشكل المثلثي z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$

الحل: $z_1 \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\[2mm] \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

(قواعد هامة)

$$a = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad b = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w} \quad , \quad \overline{zw} = \bar{z}\times\bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}\ ; w \neq 0 \quad , \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$|zz'| = |z|\times|z'|\ , arg(zz') = arg\ z + arg\ z' \quad (2\pi)$$

$$\arg(z^n) = n\arg z \quad (2\pi) \quad , \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)\ , \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w\ (2\pi)\ \ ; w \neq 0, |z+z'| \leq |z|+|z'|$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad , \quad re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r=r', \theta=\theta'(2\pi))\ , \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad , \quad z\bar{z} = |z|^2$$

$$z+\bar{z} = 2Re(z) \quad , \quad z-\bar{z} = 2i\,Im(z)$$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$
$$=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الشعاع بعدد عقدي :

إذا كان A , B نقطتين فإن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

مثال: ليكن لدينا النقاط:

$A(2,3)$, $B(-1,4)$ مثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بعدد عقدي

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(-1+4i)-(2+3i)$$
$$=-1+4i-2-3i=-3+i$$

العدد العقدي الممثل لمركز الأبعاد المتناسبة

لتكن النقاط) , $(A,\alpha)(C,\lambda)$, (B,β) الممثلة لاعداد عقدية z_A, z_B, z_C فإن مركزالأبعاد لهذه النقاط G والعدد العقدي الموافق له يعطى بالقانون:

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\alpha+\beta+\lambda}$$

العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة $[AB]$:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

ملاحظة : لإثبات وقوع 3 نقاط على استقامة واحدة هندسياً دون استعمال الاعداد العقدية..نوجد شعاعين ونبرهن ارتباطهما خطياً.

مثال امتحاني هام

في مستو عقدي لدينا النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد:

$$a = 6 - i, \quad b = -6 + 3i, \quad C = -18 + 7i$$

بالترتيب و المطلوب : اثبت وقوع النقاط A , B ,C على استقامة واحدة.

الحل

ط1) $A(6,-1), B(-6,3), C(-18,7)$

$$\overrightarrow{AB} = (-12,4) \quad \overrightarrow{AC} = (-24,8)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

فالشعاعين مرتبطين⟸ النقاط على استقامة واحدة

ط2) $z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = (-6+3i) - (6-i)$

$$= -12 + 4i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = (-18+7i) - (6-i)$$

$$= -24 + 8i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 2z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

فالشعاعان مرتبطان⟸ النقاط على استقامة واحدة

المسافة التي تمثلها نقطتان بالشكل العقدي :

لتكن النقطة A الممثلة للعدد العقدي z_A والنقطة B الممثلة للعدد العقدي z_B عندها يكون البعد (المسافة) بين A , B بالعلاقة :

$$AB = |z_B - z_A|$$

تطبيق : في المثال السابق احسب المسافة بين النقطتين A, B

$$AB = |b - a| = |-12 + 4i|$$
$$= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

زاوية شعاع مع محور الفواصل :

$$(\vec{U}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

قياس الزاوية الموجهة بين شعاعين $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

(قواعد هامة)

لإثبات أن Z حقيقي نبرهن :

$\bar{z} = z$, $Im\, z = 0$ أو $\arg z = \pi$ أو $\arg z = 0$

لإثبات أن Z تخيلي بحت نبرهن :

$Re z = 0$ أو $\bar{z} = -z$ أو $\arg z = \frac{\pi}{2}$ أو $\arg z = \frac{-\pi}{2}$

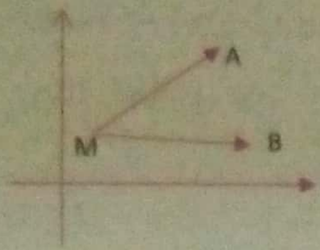
إذا كانت الأمثال غير حقيقية في معادلة الدرجة الثانية و Z_1 , Z_2 جذران نذكر القانونين :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$

حالة خاصة :

إذا كان الشعاعان لهما نفس البداية

$$(\overrightarrow{MA}\ ,\overrightarrow{MB}) = arg\left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\right)$$

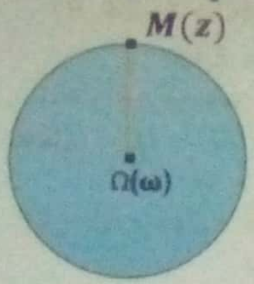


تمثيل مجموعات النقاط

الدائرة: نقول عن مجموعة النقاط (Γ) المكونه من النقاط $M(z)$ والتي تحقق الشرط :

$$|z-\omega| = r$$

أنها دائرة ومركزها $\Omega(\omega)$ونصف قطرها r



$$|z - \omega| = r$$

نصف قطر

عدد عقدي

عدد عقدي

مثال

ليكن لدينا: $|z-2| = 4$

ماذا تمثل مجموعة النقاط؟؟

تمثل دائرة مركزها $\Omega\ (2,0)$ ونصف قطرها 4

مثال

ماذا تمثل مجموعة النقاط: $|z-3-2i| = 3$

الحـل:

$$|z-(3+2i)| = 3$$

مجموعة النقاط دائرة مركزها $(3,2)$ونصف قطرها 3.

محور القطعة المستقيمة $[AB]$:

هي مجموعة النقاط M التي تحقق $MA = MB$

أي : $|z-a| = |z-b|$

*.كيف نثبت ارتباط شعاعين بالاستفادة من العدد العقدي؟

او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

الشرط:

$$z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \text{عدد حقيقي} \Rightarrow \arg(z) = 0\,,\pi$$

عندها نقول أنّ الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً والنقاط الثلاثة على استقامة واحدة :

.كيف نثبت تعامد شعاعين $\overrightarrow{DC}$ و$\overrightarrow{BA}$

يجب ان يكون : $z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \text{عدد تخيلي} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

إذا كان لدينا: $arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}$

⇐الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{DC}$ متعامدان.

هام جداً نستفيد من القاعدة الأخيرة في برهان مثلث قائم

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

1- الصيغة العقدية للانسحاب $\mathcal{T}$

الصيغة العقدية هي: $\acute{z}=z+b$

عدد عقدي شعاعه $\overrightarrow{w}$

و $\mathcal{T}$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{\omega}$

مثال M نقطة يمثلها العدد العقدي:

$z=1+i$

أوجد $\acute{z}$ التي تمثل النقطة $\acute{M}$ صورة M وفق انسحاب $\mathcal{T}$ شعاعه $\overrightarrow{\omega}=-2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$

الحل: $b=-2+3i$

$$\acute{z}=z+b$$

$$\Rightarrow \acute{z}=1+i+(-2+3i)$$

$$\Rightarrow \acute{z}=-1+4i$$

أي $\acute{M}(-1,4)$ هي صورة $M(1,1)$

مثال عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A حيث B تمثل العدد العقدي b و A تمثل العدد العقدي a

$b=a-1+3i$

الحل: B هي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{\omega}=-1\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ أي $B=\mathcal{T}_{\overrightarrow{\omega}}(A)$

2- الصيغة العقدية للتحاكي ($\mathcal{H}$):

الصيغة العقدية له هو:

$$\acute{z}-\omega=k(z-\omega)$$

المركز (نقطة)

نسبة لتحاكي

مثال أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (o) ونسبته 4 حيث $z=(1+i)$

الحل: $\acute{z}-(0+0i)=4(z-(0+0i))$

$$\Rightarrow \acute{z}=4z$$

$$\acute{z}=4(1+i)=4+4i$$

مثال

عيّن طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

الحل: $b - (0 + 0i) = 2(a - (0 + 0i))$

المركز (0) نسبة التحاكي (2)

طبيعة التحويل الهندسي هو (تحاكي).

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة:

$(b - 1) = -(a - 1)$

طبيعة التحويل الهندسي هو تحاكي مركزه $(1, 0)$ ونسبته $k = -1$

3- الصيغة العقدية للدوران (R):

$$\acute{z} - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

المركز زاوية الدوران

مثال

R دوران مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ حيث $z = 1 + iz$ أوجد $\acute{z}$ صورة z

هام جداً :

الحل

$$\acute{z} - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (2 - i))$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (1 + i - 2 + i)$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (-1 + 2i)$$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي:

الحل

① $b - 1 = e^{\pi i}(a - 1)$

دوران مركزه $(1, 0)$ وزاويته π.

② $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

$b - (-1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

B صورة A وفق دوران مركزه $(-1, 1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

4- الصيغة العقدية التناظر المحوري:

لدينا حالتين:

1- حالة أولى ، محور التناظر (ox) عندها يكون : $\acute{z} = \bar{z}$

2- حالة ثانية ، محور التناظر (oy) عندها يكون :

$\acute{z} = -Re(z) + img(z) = -\bar{z}$

مثال عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره ox حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر ox $\Leftarrow$ $\acute{z} = 1 - i$

مثال عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره oy حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر oy $\Leftarrow$ $\acute{z} = -1 + i$

مثال عين طبيعة التحويل الهندسي:

$b = \bar{a}$

الحل: طبيعة التحويل الهندسي تناظر محوري.

B في صورة A وفق تناظر محوره (ox).

5- الصيغة العقدية للتناظر المركزي:

$$\acute{z} = 2\omega - z$$

مثال عين $\acute{z}$ صورة z وفق S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$ حيث $z = 1 + i$.

الحل: $\acute{z} = 2(1 - 3i) - (1 + i)$

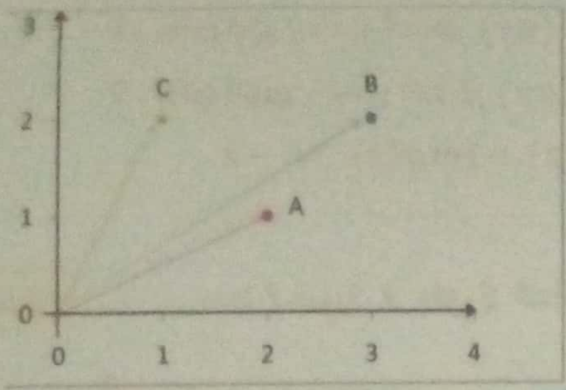
$= 2 - 6i - 1 - i$

$= 1 - 7i$

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

بنك الأسئلة الهامة

السؤال الأول : في مستو محدث بمعلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$



1. أوجد الأعداد المركبة الآتية : z_3, z_2, z_1 إذا علمت أنها ممثلة بالنقاط C, B, A بالترتيب .
2. أثبت أن المثلث ABC قائم في A .

السؤال الثاني : عيّن العددين العقديين z_1, z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_2 - z_1 + 3 = 0 \\ \bar{z}_2 + 2\bar{z}_1 + 3 = 2\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : تحقّق أنّ $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر للمعادلة $z^2+z+1=0$ ،ثم أوجد الجذر الآخر z_2

السؤال الخامس : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 4 - 2\sqrt{5}i$.

السؤال السادس : حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

أ $z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$

ب $z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$

السؤال السابع : اكتب العدد العقدي z بالشكل الأسّي :

$$z = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

السؤال الثامن : اكتب العدد المركب $z = 1 + e^{2i\theta}$ بالشكل الأسّي حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

السؤال التاسع : أوجد معادلة من الشكل : $az^2+bz+c=0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية والعدد z_1 جذر لها حيث $z_1 = 2 + i$.

السؤال العاشر : إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z . عيّن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق :

$$|z-1+2i| = |z-3-5i|$$

السؤال الحادي عشر : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3}+i\,, z_B = \sqrt{3}-i\,, z_C = 3\sqrt{3}+i$.

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .
3. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

السؤال الثاني عشر : ليكن العددان المركبان : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$

1. اكتب كلاً من z_1 , z_2 بالشكل الأسي .
2. اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم أوجد $(z)^{48}$

السؤال الثالث عشر : نتأمل النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد العقدية $a = -1$, $b = 2 + i\sqrt{3}$, $c = 2 - i\sqrt{3}$, $d = 3$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. ارسم النقاط A, B, C, D ، ثم احسب AB, BC, AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عيّن $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .
3. اثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.

السؤال الرابع عشر : لدينا في مجموعة الأعداد العقدية C كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي : $P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$

1) بيّن أنه إذا كان a جذراً لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضاً
2) تحقق أن $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ واستنتج جذراً آخر له ثم اكتب هذا الجذر بالشكل الجبري .
3) اكتب الجذرين السابقين بالشكل الأسي .
4) لتكن الأعداد العقدية التالية : $a = 1 + i$, $b = -1 + i$, $c = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$, $d = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

ولتكن النقاط الممثلة لها في معلم متجانس A, B, C, D حيث m عدد حقيقي، عيّن m حتى يكون الرباعي ABCD مربع

السؤال الخامس عشر : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1 + i$ والمطلوب :

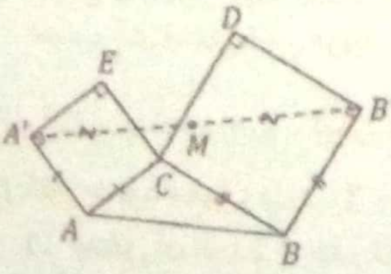
1. أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً
2. جد العدد z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق تحاكي مركزه $A(1 + i)$ نسبته 3

السؤال السادس عشر : لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

1. اكتب بالشكل الأسي كل من z_1 , z_2 , z_3 , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 . z_2$
2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 . z_2$ استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$ و $(z_3)^{24}$
3. أوجد الجذرين التربيعيين لـ z_2 بالشكل الجبري
4. حل المعادلة التالية بالمجهول z في $\mathbb{C}$: $z^3 + 6z^2 = -29z + 2z^2$

السؤال السابع عشر : ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $CBB'D, ACEA'$ كما في الشكل المجاور .

لتكن الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'



1. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b , c
2. أثبت أن $a' = i(c - a) + a$
3. عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$
4. كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي

السؤال الثامن عشر :

نتأمل النقاط D , C , B , A الممثلة للأعداد العقدية

$$d = 3 \ , c = 2 - i\sqrt{3} \ , \ b = 2 + i\sqrt{3}, \ a = -1$$

1. ارسم النقاط A , B , C , D ثم احسب AC , BC , AB' واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عين $arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,2) , (B,2), (A,-1)$

السؤال التاسع عشر : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O \ ; \vec{u}, \vec{v})$نتأمل النقاط C, B, A الممثلة للأعداد العقدية : $a = \sqrt{3} + i$, $b = (1+i)a$, $c = ia$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب b بالشكل الجبري ثم احسب $|b|$ و $\arg b$ ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ ثم أكتب c بالشكل الجبري
2. برهن أن المثلث AOC قائم و متساوي الساقين ثم بين أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{OC}$
3. استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع

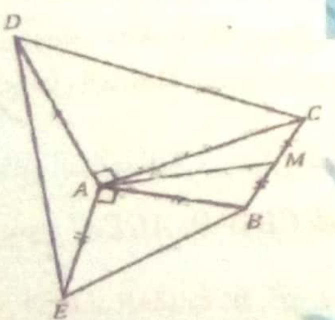
السؤال العشرون : لتكن النقطتان A, B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية

$$z_A = -1 + i \ , \ z_B = -3i \text{ وليكن } P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$$

1. أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة
2. جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3. اكتب z_A بالشكل الأسي

السؤال الواحد و العشرون : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[AC]$ وليكن AEB , ACD مثلثين قائمين في A متساوي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A

و نرمز بالرمزين b , c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B , C



1. احسب بدلالة b , c الأعداد العقدية e , d, m الممثل للنقاط E , C , M بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1), (C,1), (E,3), (D,2)$ ، احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال الثاني و العشرون : ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و z عدد عقدي

و $f(z)$ كثير حدود معرف ب : $f(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1. تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(z)$
2. عين العددين العقديين a , b بحيث $f(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$
3. حل في C المعادلة $f(z) = 0$

السؤال الثالث و العشرون : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$, $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a=1$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب c بالشكل الأسي و اكتب d بالشكل الجبري
2. وضع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس
3. أثبت أن الرباعي $OACB$ معين

السؤال الرابع و العشرون : ليكن لدينا كثير الحدود $p(z)=z^3-3z^2+3z+7$ .... والمطلوب :

1. أثبت أن $p(-1)=0$
2. اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z)=(z+1)Q(z)$
3. حل المعادلة $p(z)=0$
4. A , B , C ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

السؤال الخامس و العشرون :

ليكن لدينا كثير الحدود $p(z)=z^4-19z^2+52z-40$ والمطلوب :

1. عين عددين حقيقيين a , b يحققان : $p(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$
2. حل في C المعادلة $p(z)=0$

السؤال السادس و العشرون : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$Z_A=3$, $Z_B=1+2i$, $Z_Q=-1+2i$

1. مثل هذه الأعداد في مستو عقدي
2. جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع
4. أثبت تعامد المستقيمين OR , AB و أثبت أن $OR=\frac{1}{2}AB$

السؤال السابع و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$a=1+\frac{3}{4}i$, $b=2-\frac{5}{4}i$, $c=3+\frac{7}{4}i$

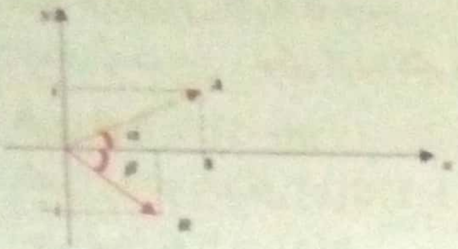
1. وضع النقاط A , B , C في شكل وما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$
2. استنتج أن المثلث (ABC) قائم ومتساوي الساقين
3. احسب العدد العقدي $Z_{A'}$ ليكون الشكل $ABA'C$ مربعا

السؤال الثامن و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 2 - 2i , b = -1 + 7i , c = 4 + 2i \ , d = -4 - 2i \ , \omega = -1 + 2i$$

أثبت وقوع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

السؤال التاسع و العشرون : ليكن العددان العقديان z_A ، z_B حيث $arg(z_A) = \alpha$ و $arg(z_B) = -\beta$ كما بالشكل :



1. اكتب z_A ، z_B بالشكل الجبري
2. اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي
3. استنتج قيمة $\alpha + \beta$

السؤال الثلاثون :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 1 - i \quad , b = -1 + i \ , c = \sqrt{3}(1 + i)$ بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب a ، b ، c بالشكل الأسي
2. احسب arg و طويلة العدد العقدي $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بيّن نوع المثلث ABC
3. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معين
4. احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة النقطة C وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

السؤال الواحد و الثلاثون : ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب :

1. بين أن $|w| = 1$ ، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي
2. ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

جلسة امتحانية لمراجعة العقدية

السؤال الأول: ليكن العددان العقديان

$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ ، $z_2 = 1+i$

والمطلوب:

1) اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد z_1 ، z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

السؤال الثاني: لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1+i$ والمطلوب:

1) أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً

2) جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي

السؤال الثالث:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A , B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان: $z_A = 4$ ،

$z_B = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$

ولتكن I منتصف $[AB]$ ، والمطلوب:

1) مثّل النقطتين A ، B في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ واكتب z_B بالشكل الأسي.

2) بيّن طبيعة المثلث OAB ، وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

3) اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

4) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي:

$z = -8+8\sqrt{3}\,i$

السؤال الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A , B , C , M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a=-i$ ، $b=1-i$ ، $d=2i$ ، $m=-1+i$ والمطلوب:

1) مثّل الأعداد $a=-i$ ، $b=1-i$ ، $d=2i$ ، $m=-1+i$ في المستوي.

2) احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) أثبت أن النقاط M ، O ، B تقع على استقامة واحدة.

4) احسب $\arg\frac{d-c}{m}$ واستنتج أن (OM) و (OC) متعامدان.

5) حلّل في C ما يلي إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى: z^3+4z^2+29z

6) عيّن العددين العقديين z ، w المحققين لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2z - w = -3 \\ 2\bar{z} + \bar{w} = -3 + 2\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

7) أوجد e صورة m وفق تحاكٍ مركزه b ونسبته -3

التحليل التوافقي والاحتمالات

المبدأ الأساسي في العد: تجربة تمر بمرحلتين أو (طريقتين) m و n فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة هي: $m \times n$

مثال: حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة؟

الحل: عدد طرق الدخول: 4

عدد طرق الخروج: 3

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$12 = 3 \times 4$ طريقة

قانون العاملي: $n! = n(n-1)(n-2)\ \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

خواصه:

- $n! = n(n-1)!$

  $5! = 5 \times 4!$

  $5! = 5 \times 4 \times 3!$

- $(n+1)! = (n+1)n!$

مثال: اختصر: $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

- $0! = 1$
- $1! = 1$

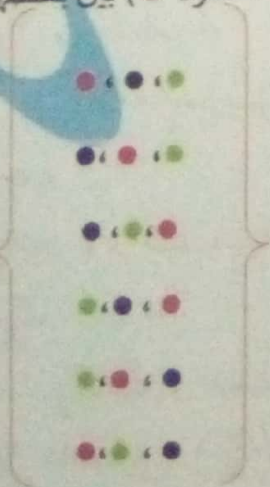
سؤال: متى نستخدم العاملي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض. (نبادل عناصر المجموعة في أماكن تساوي عددها)

مثال: نبادل ثلاث كرات مختلفة الألوان (اخضر ●، احمر ●، أسود ●) بين بعضها البعض. بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ طرق

ماهي هذه الطرق؟



6 طرق

مثال

لدينا بطاقتان مرقمتان $[1, 2]$ بكم طريقة يمكن تبديلها

الحل: طريقة $2! = 1 \times 2 = 2$

الترتيب: (القوائم دون تكرار)

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء عندها نستخدم التراتيب.. أو هو ترتيب r عنصر من مجموعة فيها n عنصر.

القانون:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$$

مثال: $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار ثلاث أشخاص من أجل تشكيل لجنة مكونة من (مدير ، نائب مدير ، أمين سر) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: نلاحظ ان الجزء الذي سنختاره من المجموعة يساوي عدد الأماكن ، لذلك نستخدم قانون التراتيب.

$P_{10}^3 = 8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

طريقة أخرى : عدد طرق اختيار المدير 10

عدد طرق اختيار نائب المدير 9

عدد طرق اختيار أمين السر 8

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

التوافيق : هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية. أو التوفيق هو مجموعة جزئية من مجموعة منتهية.

سؤال: متى نستخدم قانون التوافيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة.

القانون: $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ أو $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: $\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ أو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = \frac{20}{2} = 10$

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 4 = 576$$ طريقة

② عدد طرق اختيار الكتاب الأول 1

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 6

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 5

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

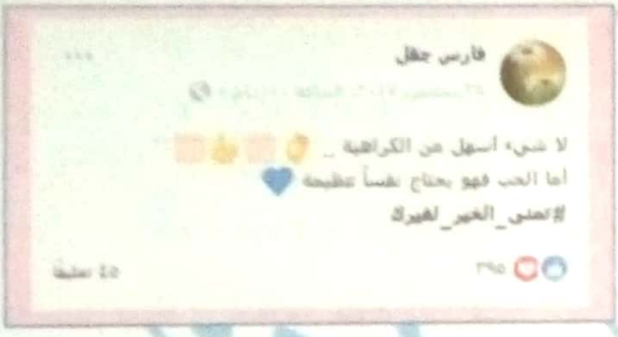
عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$ طريقة

هام: مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة [نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل] على الفيس بوك

تجربة برنولي



نستخدم تجربة برنولية عندما نقوم باختبار ما:

يكون عدد مرات تكرار التجربة n مرة ((على نحو مستقل)).

ونهتم بوقوع حدث محدد احتمال وقوعه (p) واحتمال عدم وقوعه q

ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً k من المرات .

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات ، احسب احتمال الحصول على الوجه H مرتين.

الحل:

$$n = 3\ ,\quad K = 2\ ,\quad P = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= 3 . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

قانون برنولي: (القانون الحداني)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^{k} q^{n-k}$$

$$q = 1 - p$$

مثال دورة 2017 الأولى

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$. والمطلوب:

ما هي قيم المتغير العشوائي، نظم جدولاً بها، وأحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$$n=3\ ,\quad k=0\ ,\quad P=\frac{1}{3}\ ,\quad q=\frac{2}{3}$$

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=1.1\frac{8}{27}=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=3.\frac{1}{3}\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=3.\frac{1}{9}\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{1}{27}$$

$$E(X)=\sum_{1}^{n} r_i.P(X=r_i)$$

$$=0+\frac{12}{27}+\frac{12}{27}+\frac{3}{27}=\frac{27}{27}=1$$

r_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$P(x=r_i)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

أو طريقة ثانية حسب برنولي:

$$E(X)=n.P=3.\frac{1}{3}=1 \qquad v(X)=n.p.q=3.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

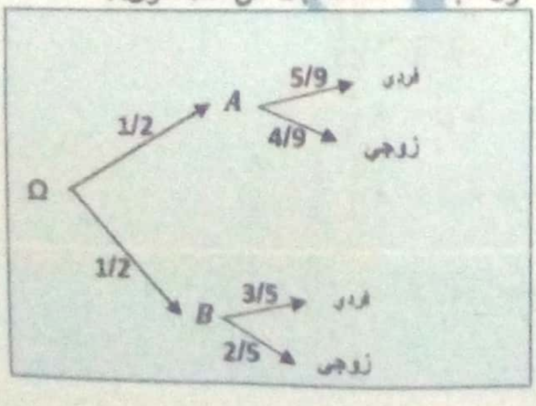
ملاحظة هامة:

عندما يكون في التجربة صندوقين متماثلين ونختار احدهما فإننا نعطي لكل صندوق احتمال $\frac{1}{2}$ وننظم مخطط...

مثال امتحاني

لدينا صندوقان B, A :

يحوي الصندوق A بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 و يحوي الصندوق B بطاقات مرقمة من 1 إلى 5 ..نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه بطاقة فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجي ، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من الصندوق A.



بفرض C حدث البطاقة المسحوبة زوجي.

بفرض A حدث البطاقة من A.

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(c)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}.\frac{4}{9}+\frac{1}{2}.\frac{2}{5}}=\cdots$$

أحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة فردية.

بفرض E حدث ظهور بطاقات فردية.

$$P(E)=\frac{1}{2}.\frac{5}{9}+\frac{1}{2}.\frac{3}{5}=$$

ما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من B علما أنها تحمل رقم فردي.

بفرض B حدث البطاقة المسحوبة من B.

بفرض E حدث البطاقة تحمل رقم فردي.

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}=\cdots$$

قانون الاحتمال الشرطي:

$$P((A|B))=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مسألة امتحانية متوقعة

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية والمطلوب:

1. ما عدد الاختبارات في هذه التجربة.
2. أكمل الجدول المجاور.
3. أحسب التوقع والتباين و الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X.

K	0	1	2	3	$\overset{n}{4}$
$P(x=k)$					$\frac{16}{81}$

الحـــل:

1. عدد الاختبارات : $n=4$
2. نحتاج P: $P(X=4)=\binom{4}{4}P^4(1-P)^0$

$$\frac{16}{81}=1.P^4\Rightarrow P^4=\frac{16}{81}\Rightarrow P=\frac{2}{3}$$

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0.\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=1.1.\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$=4.\frac{2}{3}.\frac{1}{27}=\frac{8}{81}$$

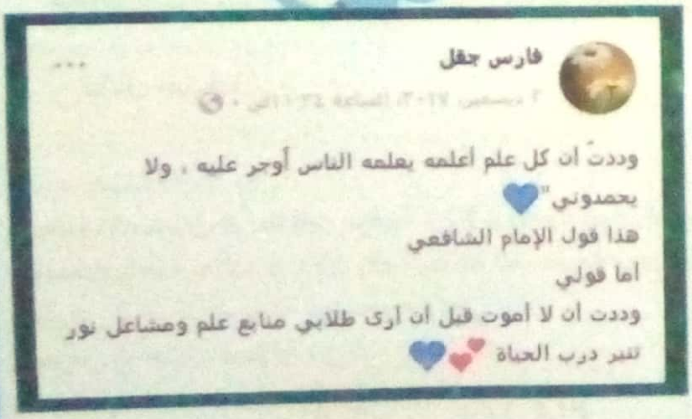
$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$=4.\frac{8}{27}.\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$$

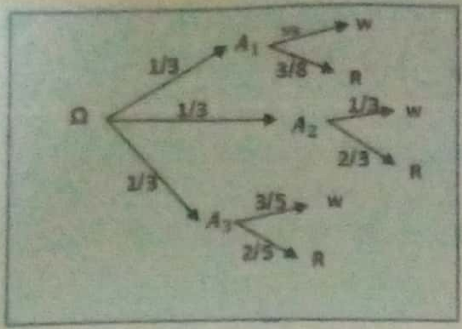
$$E(X)=n.p=4.\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$v(X)=n.p.q=4\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



مثال



في المخطط الشجري المرسوم جانباً:

الرمز w يدل على عدد الكرات البيضاء.

والرمز R يدل على عدد الكرات الحمراء.

نختار عشوائياً كرة واحدة ، والمطلوب:

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل :

① $P(R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$

$= \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15}$

② $P(A_1|R) = \frac{P(A_1 \cap R)}{P(R)}$

منشور ذي الحدين

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}(a)^n(b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

مثال: تطبيق امتحاني. انشر $(x+2)^5$

$$= \binom{5}{0}(x)^5(2)^0 + \binom{5}{1}(x)^4(2)^1 + \binom{5}{2}(x)^3(2)^2 + \binom{5}{3}(x)^2(2)^3$$
$$+ \binom{5}{4}(x)^1(2)^4 + \binom{5}{5}(x)^0(2)^5$$
$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

مثال هام

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}(x)^{-r}$$

قانون الحد العام

$$T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$=\binom{6}{r}(x)^{12-3r}$$

من اجل أكد المستقل عن x يكون:

$$12-3r=0 \Rightarrow r=4$$

$$T_4=\binom{6}{4}(x^2)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4=15$$

الحد الخامس

الاستقلال الاحتمالي

شرط الاستقلال الاحتمالي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

مثال: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود متوازنة معاً . إذا كان الحدث **A** ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث **B** ظهور كتابتين فقط هل الحدثان **A** ، **B** مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\\(T,T,T)\end{matrix}\right\}$$

$$A=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$B=\{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T)\}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B)=\frac{3}{8}$$

نعوض في الشرط : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \neq \frac{3}{16}$$

المساواة خاطئة فالحدثان غير مستقلان احتمالياً

تمرين دورة 2017

تلقى قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$.

نعرف X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار.

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$X(\Omega) = \{0 , 1 , 2,3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(T,T,T)

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3}\right) . 3 = \frac{12}{27}$$

$(H,T,T)(T,H,T),(T,T,H)$

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{3} . \frac{2}{3} . \frac{1}{3}\right) . 3 = \frac{6}{27}$$

$(H,T,H) \times 3$

$$P(X = 3) = \frac{1}{3} . \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(H,H,H)

r_i	0	1	2	3
$P(X = r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
r_i^2	0	1	4	9

التوقع:

$$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r_i \, . P(X = r_i)$$

$$= 0.\frac{8}{27} + 1.\frac{12}{27} + 2.\frac{6}{27} + 3.\frac{1}{27}$$

$$= \frac{27}{27} = 1$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مسألة امتحانية

يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $(0,0,0,0,0,1,1,1,1)$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة ، اكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$(0.0.0)$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{2}.\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$$

$(0.0.1)$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{1}.\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84}$$

$(0.1.1)$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84}$$

$(1.1.1)$

التوقع الرياضي:

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X) = \sum_{r=1}^{r} r_i . P(X = r_i)$$

$$E(X) = 0.\frac{10}{84} + 1.\frac{40}{84} + 2.\frac{30}{84} + 3.\frac{4}{84}$$

$$= \frac{40+60+12}{84} = \frac{112}{84}$$

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = \frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}$$

$(0,0,0)$

$$P(X=1) = \left(\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7}\right) \times 3$$

$(0,0,1) \times 3$

$$P(X=2) = \left(\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{5}{7}\right) \times 3$$

$(1,1,0) \times 3$

$$P(X=3) = \frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}$$

$(1,1,1)$

تمرين هام يحوي فيع امتحاني: يحوي مغلف اربع بطاقات مرقمة بالأرقام 0, 1, 1, 1 نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموعهما. أكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$(0,0)$

$$P(X = 1) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{6}{16}$$

$(1,0) \times 2$

$$P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$(1,1)$

وننظم جدول.....

مثـــال: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يلي: 3 ,3 ,3 ,3 ,2 ,2 ,0 ,0نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة.

1- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟

الحل :

بفرض A حدث البطاقتان تحملان الرقم ذاته

بفرض B حدث أن يكون هذا الرقم هو 3

$$P((B|A)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$A = \{(0,0), (2,2), (3,3)\}$$

$$= \frac{\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}} = \dots \dots \dots$$

2-إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان مختلفتان فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجي؟

بفرض C حدث البطاقتان المسحوبتان مختلفتان

بفرض D حدث أن يكون مجموعهما زوجي

الحل:

$$P((D|C)) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$C = \{(0,2), (0,3), (2,3)\}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7}\right)}{2\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{8}\right) + 2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right)}$$

بنك المسائل الهامة

السؤال الأول : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. احسب احتمال ظهور الوجه H مرتين على الأقل .

السؤال الثاني : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً ..وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع و التباين . .

السؤال الثالث : ليكن X متغيرعشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، أكمل الجدول التالي :

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

1) ما عدد النجاحات ؟
2) ما التوقع الرياضي للمتحول ؟
3) أوجد التباين و الانحراف .

السؤال الرابع : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	

أكمل الجدول المجاور و احسب التوقع و التباين .

السؤال الخامس : صندوق يحوي 4 كرات زرقاء و 3 خضراء و 1 صفراء ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً على التتالي دون إعادة ..وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء بين الكرات المسحوبة .

أعد المسألة السابقة في حال السحب معاً و على التتالي مع إعادة .

السؤال السادس : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء و 1 سوداء ، نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه .

أعد المسألة السابقة في حال السحب دون إعادة و في حال السحب معاً .

السؤال السابع : لدينا 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين ؟؟

السؤال الثامن : لدينا الأعداد {0,2,3,4,5,6} بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من ثلاث أرقام على أن يكون من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500؟؟

السؤال التاسع : يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفي الكرات البيضاء

1. نسحب عشوائياً كرة ..ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟
2. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة .. ونعرف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . عيّن قيم X و اكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال العاشر : يشتري أحد المحلات 80% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A و يشتري الباقي منها من المصنع B ..نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% .. نختار عشوائياً قطعة غيار من المحل

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة .
2. إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون من انتاج المصنع B

السؤال الحادي عشر : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة 1,2,3 و الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة 1,2 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين من الصندوقين ..

اكتب مجموعة قيم X وعين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال الثاني عشر : X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول غير المكتمل المجاور ل X.

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$		

1. ماعدد الاختبارات في التجربة ؟ واكمل الجدول .
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟وما تباين المتحول العشوائي X

السؤال الثالث عشر : أوجد الحد الذي يحوي x^3 في منشور ذي الحدين $(x^2+\frac{1}{x})^9$

و الحد المستقل عن x في منشور $(x-\frac{1}{x^2})^{12}$

السؤال الرابع عشر : ماهي أمثال الحد x^2y في منشور $(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y})^8$

السؤال الخامس عشر : نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 3 ,2 ,1 و يحوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 5 ,4 ,3 ,2 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار
2. ليكن A الحدث : (إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3)
   وليكن B الحدث : (مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من 5)
   هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا ؟ علل اجابتك
3. نعرف متحولا عشوائيا X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
   اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي و تباينه

السؤال السادس عشر : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

1. ماعدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2. ماعدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 50

السؤال السابع عشر : يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء ، إذا صدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 وليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)

1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A'_1)$
2. استنتج أن $P(A_2) = 0.74$
3. نعرف $P_n = P(A_2)$:
   1) برهن أن $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$
   2) لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $u_n = P_n - 0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 0.2
   واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n$

السؤال الثامن عشر : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون أعادة ..ما احتمال ان يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط

السؤال التاسع عشر : لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء . نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n نرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1. احسب $P(R_1)$
2. أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$
3. أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$
4. نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$
   1) أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k\geq 1}$ هندسية . عيّن أساسها و حدها الأول
   2) أكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k

السؤال العشرون : يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام $0, 1, 2$ وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام $0, 1$ نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق

1. الحدث A : " الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $P(A)$
2. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الواحد و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء احتمال تسجيل الأولى $\frac{8}{10}$ إذا سجل الأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$. بفرض A التسجيل ، B الإخفاق ..المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال تسجيل الركلة الثانية
3. إذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال التسجيل في الأولى

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ و إذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب :

1. ارسم مخططا شجريا
2. احسب احتمال نجاحها في الحلقة الثانية
3. اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون : I صندوق أول يحوي 3 كرات حمراء R و واحدة زرقاء B و II صندوق ثاني يحوي كرتين حمراء R وواحدة زرقاء B ، نسحب كرة من الصندوق الأول و نضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء

السؤال الرابع و العشرون : نلقي قطعة نقود C_1 متوازنة ثم نلقي قطعة نقود C_2 غير متوازنة . احتمال ظهور الشعار $\frac{2}{3}$ و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب $E(X), V(X)$

السؤال الخامس و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء على هدف . احتمال تسجيل الهدف في الضربة الأولى A يساوي $\frac{3}{5}$ و في الثانية B يساوي $\frac{4}{5}$ والمطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف . احسب $E(X)$

السؤال السادس و العشرون : يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من خمس أدوار يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال $\frac{2}{3}$ و يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال فوز B

السؤال السابع و العشرون : صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معا . X متحول عشوائي يأخذ القيمة 5 عند ظهور ثلاث كرات حمراء و يأخذ القيمة 3 عند ظهور كرتين حمراء و كرة خضراء و يأخذ القيمة 0 فيما عدا ذلك .احسب $E(X)$

السؤال الثامن و العشرون : في مدرستنا يمارس 30% لعبة التنس نسبة الذكور 60% و 55% لايمارسون التنس . ما احتمال اختيار طالبة لاتمارس التنس

السؤال التاسع و العشرون : يحوي صندوق كرتين حمراء R وكرتين بيضاء W نسحب كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات منها ثم نسحب كرة ثانية و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. اذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى حمراء

السؤال الثلاثون : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال الواحد و الثلاثون : يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة و التي تشمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثاني و الثلاثون : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أيا من القيم : 0, 1, 2, 3, 4, 5

1. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

مخطّط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) هي نفسها(3 ،2)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدا الأساسي $\frac{\ }{5} \times \frac{\ }{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفةعن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{\ }{5} \times \frac{\ }{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

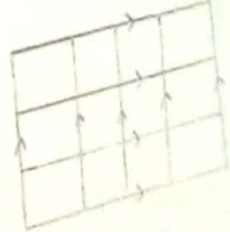
جلسة مراجعة [تحليل توافقي + احتمالات]

السؤال الأول: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال ، كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة .

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة: [1] بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟!
[2] بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟!

السؤال الثالث: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال ، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر؟!

السؤال الرابع: في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة



السؤال الخامس: صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء، و(5) كرات حمراء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك والمطلوب:

[1] نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه والانحراف المعياري
[2] أجب المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة .
[3] أجب المسألة السابقة في حال السحب على التتالي دون إعادة .

السؤال السادس: عين في منشور $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ الحد الذي يحوي x^{9} والحد المستقل عن x .

السؤال السابع: نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية تساوي $\frac{1}{3}$ ، نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .
اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

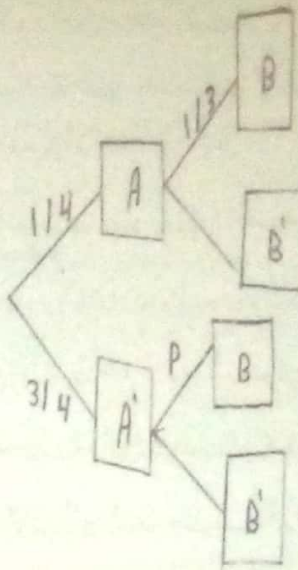
السؤال الثامن: صندوق يحوي 11 كرة متماثلة فيها 7 كرات خضراء وواحدة بيضاء و3 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة ونتأمل المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة والمطلوب عين قيم المتحول العشوائي X ثم نظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي .

السؤال التاسع: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1.2.3 . 4 . 5 . 6 نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة . ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين والمطلوب :
[1] عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي
[2] احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

السؤال العاشر: أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج من المتحولات العشوائية (X , Y) علماً أن المتحولين العشوائيين X , Y مستقلان احتمالياً .

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				
قانون Y	0.3			

السؤال الحادي عشر: ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية موضحة بالمخطط الشجري المجاور. كم قيمة P حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتماليًا.



السؤال الثاني عشر: تشتري أحد المحلات 70 % من قطع الغيار التي تبيعها من المصنع A وتشتري الباقي منها من المصنع B. نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5 % وفي المصنع B هي 8 %

نختار عشوائيًا قطعة غيار من المحل والمطلوب:

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة
2. إذا كانت القطعة معيبة، فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B.

السؤال الثالث عشر: نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربع وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر نلقي الحجر خمس مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يقرن بنتيجة التجربة عدد الوجوه السوداء

والمطلوب: 1. اكتب مجموعة قيم المتغير X.

2. احسب قانون X الاحتمالي ونظم جدولًا به.

السؤال الرابع عشر: يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام. عندما ورد طلب عدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنعت الورشة A منها 600 قلمًا وصنعت البقية الورشة B. هناك نسبة 5 % من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2 % من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال. نسحب عشوائيًا قلمًا من الطلب. نرمز بالرمز A إلى الحدث « القلم مصنوع في الورشة A » وبالرمز B إلى الحدث « القلم مصنوع في الورشة B » وبالرمز D إلى الحدث « القلم غير صالح للاستعمال »، والمطلوب:

1. أعط تمثيلًا شجريًا للتجربة.
2. احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال.
3. إذا كان القلم صالحًا للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعًا في الورشة A
4. نسحب عشوائيًا من الورشة A قلمين معًا وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال، احسب $P(X=0)$

السؤال الخامس عشر: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الحدود غير المكتمل المار وهو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات وإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ و

$$P(X=0)=\frac{1}{27}\quad P(X=1)=\frac{6}{27}$$

1. جد $P(X=2)$ و $P(X=3)$.
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟
3. ما تباين المتحول العشوائي X؟

K	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	...

نوع السحب	الترتيب	القانون	التمام	العكس
السحب معًا	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) نفسها (2,3)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{\ }{5}\cdot\frac{\ }{4}$ الكسور حسب عدد الأشياء المسحوبة	تباديل	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{\ }{5}\cdot\frac{\ }{5}$ الكسور حسب عدد الأشياء المسحوبة	لا تباديل	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

ملحق تدريبي .. الجزء الثاني

المسألة الأولى :

ليكن العدد المركب $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$. اكتب z بالشكل الأسي ثم أوجد كلا من جذريه التربيعيين بالشكل الأسي

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

المسألة الثانية :

لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) اكتب بالشكل الأسي كل من z_1 , z_2 , z_3 , $z_1 \cdot z_2 , \frac{z_1}{z_2}$

2) اكتب بالشكل الجبري , $z_1 \cdot z_2 , \frac{z_1}{z_2}$ استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$

المسألة الثالثة :

مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام $1, 1, 0, 0, -1, -1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع الإعادة :

1) إذا كان الحدث A الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما 0 والحدث B الحصول على بطاقتين جداء رقميهما (0)

هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا؟

2) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0 فما احتمال أن يكون جداء رقميهما 0

3) نعتبر X متغيرا عشوائيا يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين . أوجد مجموعة قيم X واكتب جدول التوزيع الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

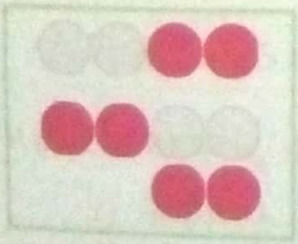
المسألة الرابعة :

ليكن n عددا طبيعيا $2 \le n \le 8$

1) يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة و لنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء و الحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد بحيث $P(A|B) = \frac{2}{3}$ والمطلوب احسب قيمة n

2) بفرض أن $n = 4$ ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

المسألة الخامسة :



يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 بيضاء و 6 حمراء

1) نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كرات في آن واحد
   أ. احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء
   ب. احسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، نظم جدول القانون الاحتمالي لـ X، واحسب توقعه الرياضي

3) نسحب من الصندوق في أن واحد 3 كرات خمس مرات على التتالي مع الإعادة ، أحسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط

المسألة السادسة :

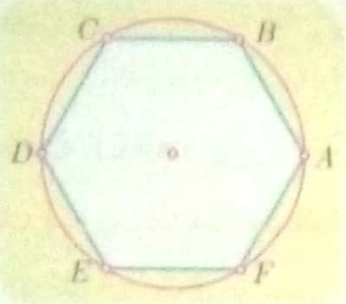
يحوي صندوق(9) كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التالي مع إعادة :

1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .

2) نسحب كرة واحدة ..نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) و الكرة الزرقاء القيمة (2) . نعرف متغيرا عشوائيا X يدل على رقم الكرة المسحوبة..اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي .

المسألة السابعة :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1 + ax)^5(1 + bx)^4$ حيث a, b عددان طبيعيان فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a + b$ ؟



المسألة الثامنة :

في الشكل المرسوم جانبا لدينا ست نقاط A, B, C, D, E, F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية :

نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :

1) ماعدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

المسألة التاسعة :

$ABCDE$هرم قاعدته مربع $ABCD$ و (EA) يعامد القاعدة ..نفرض المعلم $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

أوجد $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{ED} . \overrightarrow{EB}$ ، ثم استنتج $\cos(BED)$ ،ثم عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 4)$

المسألة العاشرة :

النجاح يأتي بقولك أستطيع

الفشل يأتي بقولك لا أستطيع

I Can

$ABCDEFGH$مكعب . I , J , K , L هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$

ولتكن Mالنقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

جد إحداثيات جميع النقاط ثم أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ} , \overrightarrow{LM}$مرتبطة خطياً .

المسألة الحادية عشر :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[FH]$

1) جد إحداثيات الرؤوس وأثبت أن المثلث ABG قائم واحسب مساحة المثلث ABG

2) جد معادلة المستوي (ABG) واحسب بعد F عن (ABG) واستنتج حجم $ABGF$

3) أعط تمثيلا وسيطيا لكل من (IK) و (FJ) وهل تقع النقاط I , J , K , F في مستو واحد .

المسألة الثانية عشر :

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم و P و Q و R و S وفق :

$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

1) أثبت أن P هو مركز الأبعاد للنقطتين $(B,4)$, $(C,1)$ و أن Q هو مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$, $(D,3)$
2) ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,4)$, $(C,1)$, $(D,3)$ بين أن G تقع على (PQ)
3) أثبت أن G تقع أيضا على (RS) ثم استنتج كون المستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعين
4) إذا كان طول حرف رباعي الوجوه (2) ..احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ واستنتج تعامد المستقيمين (AB) و (CD)

المسألة الثالثة عشر :

لتكن النقاط : $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

1) هل C, D, E تقع على استقامة واحدة..أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (CD) و المستقيم المار من E و يعامد (CD) ثم جد نقطة التقاطع
2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على (CDE) ثم جد معادلة (CDE) و استنتج المسقط القائم ل A على (CDE)
3) أوجد عددين a , b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ..هل A , B , C , D تقع في مستو واحد
4) جد معادلة المستوي العمودي على (CDE) ويمر من A و B و جد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$
5) عين إحداثيات S منتصف $[AB]$ و S' نظيرة S بالنسبة إلى C

المسألة الرابعة عشر :

لدينا الشعاعان $\vec{u}(2,1,-1)$, $\vec{v}(1,3,2)$ و النقطة $A(1,-1,3)$, $B(1,0,-1)$

1) بين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المار من A و الموجه بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
2) أوجد معادلة المستوي Q المار من B الموازي للمستوي P ثم أوجد البعد بين P و Q و اوجد مجموعة النقاط التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

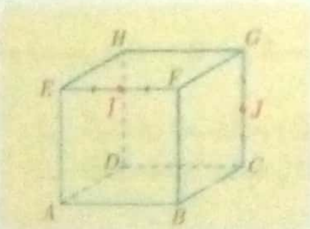
المسألة الخامسة عشر :

① نتأمل هرماً $S - ABCD$ قاعدته مربع و رأسه S و طول كل حرف من حروفه و أضلاع قاعدته يساوي a

احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

② $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$ احسب

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$



المسألة السادسة عشر :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط

$A(-1,2,1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,-1,2)$ ولتكن (P) مجموعة النقاط M من الفضاء بحيث $AM = BM$

1) بين أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$
2) عين معادلة المستوي (Q) الذي يمر من A و يوازي (P)
3) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر من C و يعامد (P)
   ب- عين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)
   ج- احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)
4) عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

المسألة السابعة عشر :

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات : $\begin{cases} P: 2x-y+2z-2=0 \\ Q: x+y+z-1=0 \\ R: x-z-1=0 \end{cases}$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ اكتب تمثيلا وسيطيا له
2. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
3. أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

المسألة الثامنة عشر :

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ، تكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X
واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X و احسب توقعه الرياضي

المسألة التاسعة عشر :

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية : $c =$
$-18+7i$, $b=-6+3i$, $a=6-i$ بالترتيب و المطلوب :

1. أحسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و استنتج أن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة
2. بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته ⎕ أحسب ⎕
3. جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

المسألة العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$

و المستوي $P: 3x-y-3z-8=0$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

المسألة الواحدة والعشرون :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1), B(0,1,1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A و يقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.
2. أثبت أن المستقيمين d ,(AB) متعامدان .

المسألة الثانية و العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D
2. اكتب معادلة للمستوي (ACH)
3. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: \ -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)
4. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة
5. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسألة الثالثة والعشرون :

جد مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق :

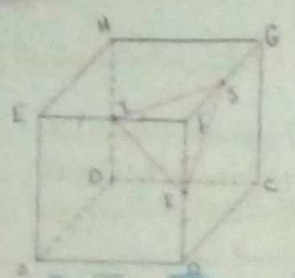
$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

المسألة الرابعة و العشرون :

عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

المسألة الخامسة و العشرون : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K

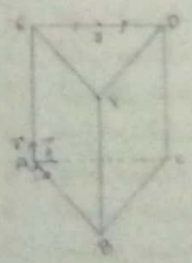


منتصفات الأحرف $[FE], [FG], [FB]$ على الترتيب

نختار معلماً متجانساً $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ والمطلوب :

1. أوجد احداثيات رؤوس المكعب و النقاط I, J, K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عمودياً على (IJK)
4. استنتج احداثيات N المسقط القائم ل F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}$

المسألة السادسة و العشرون : $ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A . النقطة J



منتصف $[ED]$ نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{Ac} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$

1. جد احداثيات النقاط J, E, D, C, B
2. جد معادلة المستوي (JBC)
3. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (JC)
4. احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)
5. عيّن احداثيات النقطة K (م.ا.م)للنقاط المثقلة $(J, 2), (B, 1), (C, 2)$

المسألة السابعة و العشرون :

في معلم متجانس لدينا النقاط $A(1, 2, 4)$, $B(1, 0, 2), C(2, 2, 5), M(2, 2, -1)$

1. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ و النقطة D نظيرة I بالنسبة ل C
2. عيّن α, β إذا علمت أن $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$
3. تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستوياً P أوجد معادلته
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من M و يعامد المستوي P
5. عيّن احداثيات النقطة M' المسقط القائم ل M على المستوي P

المسألة الثامنة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(0,-1,-2)\,,B(1,2,-1)\,,C(1,1,-2)$

1. اثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن $\vec{n}(2,-1,1)$ ناظم على المستوي (ABC) و اكتب معادلة المستوي (ABC)
3. لتكن G (م.ا.م) للنقاط $(A,1),(B,-1),(C,2)$ اكتب احداثيات النقطة G
4. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CG)
5. جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12$

المسألة التاسعة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة : $A(6,1,1)$ و المستويان : $P_2: y+z=4$, $P_1: x-2y=5$

1. أثبت أن المستويين متقاطعين
2. جد تمثيلا وسيطيا للفصل المشترك لهما Δ
3. اكتب معادلة المستوي Q المار من A و يعامد الفصل المشترك
4. أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ
5. احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

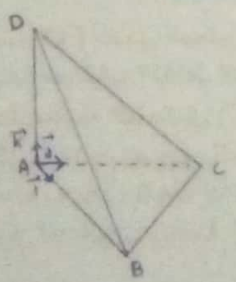
المسألة الثلاثون :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,0,0)\,,B(0,2,0)\,,C(0,0,2)$

1. اكتب معادلة المستوي (ABC)
2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من (O) و يعامد المستوي (ABC)
3. عيّن احداثيات النقطة H نقطة تقاطع Δ مع (ABC)
4. احسب الجداءات السلمية $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC

المسألة الواحدة و الثلاثون :

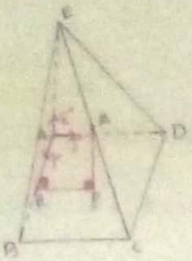
ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين و $DA \perp (ABC)$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$
بفرض لدينا معلم متجانس مبدأه A



1. عيّن احداثيات الرؤوس $ABCD$
2. اكتب معادلة المستوي (BCD)
3. اثبت ان مسقط A على المستوي (BCD) و ليكن J هو مركز ثقل المثلث BCD
4. عين احداثيات G (م.ا.م) للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1)$
5. اوجد معادلة لكرة التي مركزها J وتمر D
6. احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. استنتج مساحة المثلث BCD
8. عين احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع

المسألة الثانية و الثلاثون :

$E-ABCD$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ فيه EA عمودي على مستو القاعدة $ABCD$
و فيه $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}\ ,\overrightarrow{AD}=3\vec{j}\ ,\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$



1. اوجد احداثيات رؤوس الهرم
2. اوجد احداثيات مركز ثقل BDE
3. احسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}$ و ماذا تستنتج ؟
4. اوجد معادلة المستوي EBD
5. اوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم EC
6. لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ ولتكن P المسقط القائم ل M على مستوي القاعدة $ABCD$ و لتكن H المسقط القائم ل P على AB ..احسب $[MH]$

المسألة الثالثة والثلاثون : في معلم متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا مجموعة النقاط :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+\frac{5}{2}=0$$ والمطلوب :

1) عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ
2) ليكن لدينا المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,1)$ والذي يقبل $\vec{u}(2,0,-2)$ شعاع موجه له . ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الكرة S
3) أثبت أن المستوي $P: 3x+2y=7$ يقطع الكرة S وأوجد مركز الدائرة الناتجة ونصف قطرها

المسألة الرابعة و الثلاثون : عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{n+3}=\binom{15}{2n}$

المسألة الخامسة والثلاثون : المستقيمان $d\ ,d'$ معرفان وسيطيا وفق :

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}\ ;t\in R\quad ,\quad d':\begin{cases}x=2s-1\\y=s-2\\z=3s-2\end{cases}\ ;s\in R$$

1. أثبت أن $d\ ,d'$ متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d,d'

المسألة السادسة و الثلاثون : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ و النقطة $A(1,1,-2)$. المطلوب :

1. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي
2. اكتب معادلة للمستوي Q المار من A و الموازي للمستوي P

تم بعون الله ... أتمنى لكم التوفيق
... دعواتكم لمن ساهم بنجاح
هذه النوطة ..

جلسة امتحانية لمراجعة الهندسة

السؤال الأول:

1) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

2) تحقق أن المستوي P الذي معادلته:

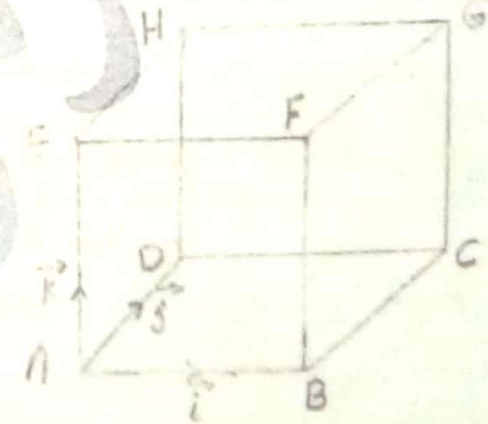
$$P : x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S

السؤال الثاني: في الشكل المجاور:

ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2 نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و

$$\vec{AE} = 2\vec{k} \ , \ \vec{AD} = 2\vec{j} \ , \ \vec{AB} = 2\vec{i}$$



1) اكتب معادلة المستوي (GBD) .

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .

3) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD) .

4) جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EC}$$

5) أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

السؤال الثالث: اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d':

$$d : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} \quad t \in R \qquad \text{و} \qquad d' : \begin{cases} x = s \\ y = 3s-3 \\ z = -s+1 \end{cases} \quad s \in R$$

وهل المستقيمان d و d' يقعان في مستوٍ واحد؟ علل إجابتك.

السؤال الرابع: نتأمل في المعلم المتجانس

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

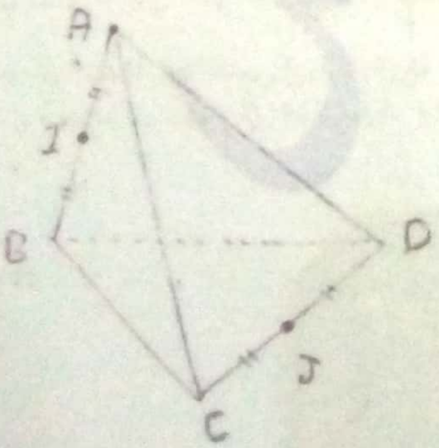
اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB] .

السؤال الخامس:

ABCD رباعي وجوه و a عدد حقيقي. I و J هما بالترتيب منتصفا [AB] و [CD] و E و F نقطتان تحققان العلاقتين:

$$\vec{AE} = a\vec{AD} \ , \ \vec{BF} = a\vec{BC}$$

وأخيراً H هي منتصف [EF] أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة .

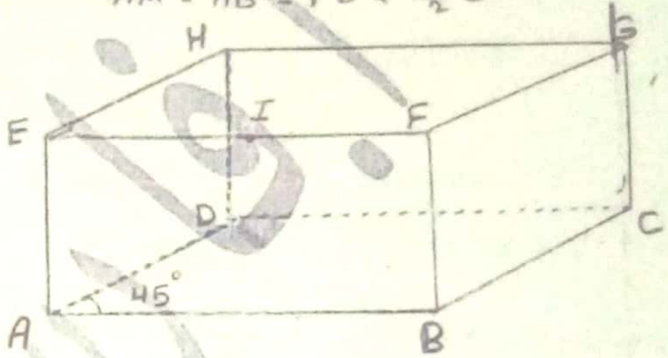


السؤال السادس:

متوازي سطوح $ABCDEFGH$ فيه $BC = GC = 1$ ، $AB = 2$ وقياس الزاوية $D\hat{A}B$ يساوي 45° والنقطة I منتصف $[EF]$ المطلوب:

1. احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
2. عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$$



السؤال السابع:

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2, 1, 3)$ ، $B(1, 0, -1)$ ، $C(4, 0, 0)$ ، $D(0, 4, 0)$ ، $E(1, -1, 1)$

1. جد $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ ، $\vec{CE}$
2. أثبت أن النقاط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة.
3. أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)
4. اكتب معادلة المستوي (CDE).
5. احسب بعد B عن المستوي (CDE)
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

السؤال الثامن:

نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(0, 2, -2)$ ، $B(-1, 2, -1)$

$C(-2, 1, 1)$ ، $D(0, 3, -3)$

1. أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.
2. أثبت أن النقاط D, C, B تقع على استقامة واحدة.

السؤال التاسع:

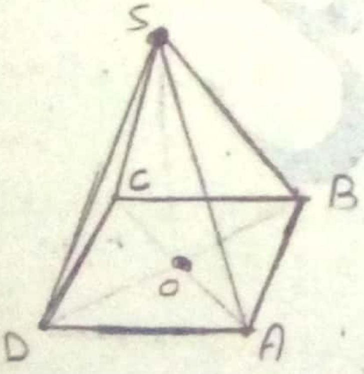
عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

السؤال العاشر:

ليكن $S-ABCD$ هرم قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 5 وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 5 ولتكن O مرتسم S القائم على القاعدة - والمطلوب:

1. احسب $\vec{SD} \cdot \vec{SC}$
2. احسب طول القطر BD ثم احسب $\vec{DB} \cdot \vec{DS}$
3. عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(S, 1)$ ، $(C, 3)$ ، $(D, 2)$



السؤال الحادي عشر:

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $A(2, 1, -2)$ ، $B(7, -2, 0)$ والشعاعان $\vec{u}(2, -1, 0)$ ، $\vec{v}(-3, 1, 2)$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ مرتبطة خطياً.
2. اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{AB}$ ، $\vec{v}$ شعاعي توجيه له ويمر بـ A

السؤال الحادي عشر:

لتكن النقاط: $A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$
$C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

بيّن مع التعليل صحة أو خطأ المقولات الآتية:

1. المثلث ABC قائم.
2. النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة
3. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

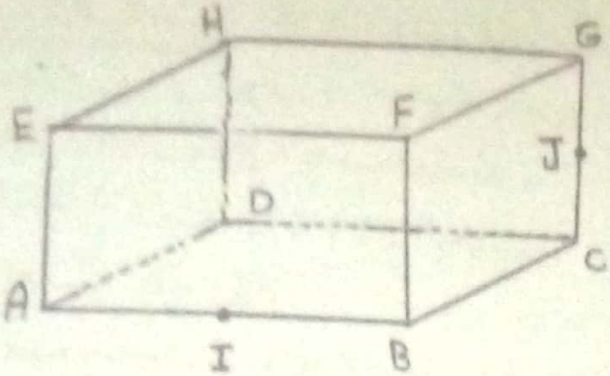
السؤال الثاني عشر:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و $BC = 2$, $CG = 2$ والنقطة I هي منتصف AB والنقطة J منتصف CG ولدينا المعلم المتجانس:

$$\left(A , \frac{1}{4}\vec{AB} , \frac{1}{2}\vec{AD} , \frac{1}{2}\vec{AE}\right)$$

المطلوب:

1. اكتب معادلة المستوي (IFH)
2. هل المستقيمان (IJ) و (DJ) متعامدان ... احسب $\cos I\hat{J}D$
3. برهن أن الأشعة $\vec{DB} , \vec{AH} , \vec{AF}$ مرتبطة خطياً.
4. جد إحداثيات M التي تحقق: $\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EC}$
5. احسب بعد G عن المستوي (IFH) ثم أوجد مسقطه القائم على المستوي (IFH)
6.



التمرين الثالث عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$
$C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته
2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم للمستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).
3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

التمرين الرابع عشر:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(4,0,0)$ المطلوب:

1. أثبت أن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3. ليكن المستويان P , Q معادلتاهما:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d ذي التمثيلات الوسيطية التالية:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

4. ماهي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC)
5. احسب بعد A عن المستقيم d.

دعواتكم للأستاذ المبدع فارس حمل.

ودعواتكم لِلي صورها ♡