الجبـــــر

الصف العاشر

إعداد المدرس
نـزارعبـد الحميد القـادري

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية وخواصها

1- مجموعات الأعداد :

①- **مجموعة الأعداد الطبيعية** : رمزها ($\mathbb{N}$) وهي تشمل :

$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

②- **مجموعة الأعداد الصحيحة** : رمزها ($\mathbb{Z}$) وهي تشمل :

$\{\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

المجموعات الجزئية الشهيرة للأعداد الصحيحة:

- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة :
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة :
- مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية :
- مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية :

③- **مجموعة الأعداد العشرية** : رمزها ($\mathbb{D}$) :

مثل : $\{ \ldots\ldots ، 8,5 ، \frac{2}{5} ، \frac{3}{2} \}$ وهي الأعداد التي تنتج

من قسمة $\frac{p}{10^n}$ (بحيث p عدد صحيح و n عدد طبيعي)

④- **مجموعة الأعداد العادية** : رمزها ($\mathbb{Q}$) :

مثل : $\{ \ldots\ldots ، \frac{-3}{14} ، \frac{5}{11} ، \frac{2}{3} ، \frac{1}{3} \}$ وهي الأعداد التي تنتج من

قسمة $\frac{a}{b}$ (بحيث a عدد صحيح و n عدد طبيعي ماعدا الصفر)

وتشمل الكسور العشرية المنتهية والغير منتهية والدورية

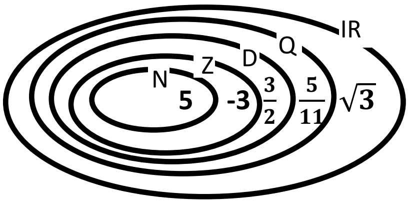
⑤- **مجموعة الأعداد الحقيقية** : رمزها ($\mathbb{R}$) وهي تشمل :

الأعداد العادية والغير عادية مثل : $\{\sqrt{2}, \pi, \cos 11 ، \ldots\}$

2- العلاقة بين المجموعات العددية المختلفة :

- كل عدد عادي هو عدد حقيقي　　أي أن　　$Q \subset IR$
- كل عدد عشري هوعدد عادي　　أي أن　　$ID \subset Q$
- كل عدد صحيح هو كسر عشري　　أي أن　　$Z \subset ID$
- كل عدد طبيعي هو عدد صحيح　　أي أن　　$N \subset Z$

أي أن : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



- **لتعيين طبيعة عدد** : نبحث عن أصغر مجموعة ينتمي اليها هذا العدد :

تمرين :

عين طبيعة كل من الأعداد : $\sqrt{2}$ ، π ، $\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3}$ ، $\frac{32}{4}$ ، $\frac{5}{3}$ ، $\frac{2}{5}$

الحل :

$\frac{2}{5} = 0,4 \in D$　فهو عدد عشري

$\frac{5}{3} = 1,6666\ldots \in Q$　فهو عدد عادي

$\frac{32}{4} = 8 \in N$　فهو عدد طبيعي

$\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3} = \frac{7-16}{3} = -3 \in Z$　فهو عدد صحيح

$\pi = \frac{22}{7} = 3.14159265 \in IR$　فهو عدد حقيقي

$\sqrt{2} = 1.4142135 \in IR$　فهو عدد حقيقي

تدريب $\left[\frac{2+1}{11}\right]$

3- العبارة الجبرية :

- خاصية النشر : $a(b+c) = a.b + a.c$

مثال : انشر : $x(2x+1) = 2x^2 + x$

مثال : انشر : $(x+1)(3-x) = -x^2 + 2x + 3$

- التحليل بإخراج العامل المشترك : $a.b + a.c = a(b+c)$

مثال : حلل : $4x^2 - 2x = 2x(2x-1)$

- التحليل بإستخدام المتطابقة التربيعية : $a^2 - b^2 \; (a+b)(a-b)$

مثال : حلل : $9x^2 - 25 = (3x+5)(3x-5)$

4- المتطابقات الشهيرة :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a.b + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a.b + b^2)$

☠ **تمرين :**

-● انشر : $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

-● حلل : $(x^2+2x+1) - 3(x+1) = (x+1)(x-2)$

تدريب $\left[\frac{\text{من } 1 \text{ الى } 6}{13}\right]$

6- المعادلات الجبرية :

☠ **تمرين :**

حل المعادلة : $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x2 - 5x + 6)$

$= X(x-2)(x-3)$

مجموعة الحلول $S = \{0, 2, 3\}$

تدريب $\left[\frac{1+2+3}{15}\right]$

6- الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية :

● تعاريف :

$X < 0$	$X > 0$	$X \leqslant 0$	$X \geqslant 0$	$a \leqslant X \leqslant b$
أصغر تماما من 0	أكبر تماما من 0	أصغر أو مساويا 0	أكبر أو مساويا 0	أكبرأويساوي a وأصغرأويساوي b معاً

● خاصة 1 : يكون $a > b$ اذا كان $a - b > 0$

تستخدم هذه الخاصة للمقارنة بين العددين a , b

● خاصة 2 : ايا كان العدد الحقيقي a فإن $a^2 \geqslant 0$

☠ **تمرين :**

قارن بين العددين : $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{7}{5}$

الحل : $a - b = \sqrt{2} - \frac{7}{5} = \frac{5\sqrt{2}-7}{5} = \frac{5\sqrt{2}-7}{5} \times \frac{5\sqrt{2}+7}{2\sqrt{5}+7} =$

$= \frac{50-49}{5(5\sqrt{2}+7)} = \frac{1}{5(5\sqrt{2}+7)} > 0$

ومنه : $a > b \rightarrow \sqrt{2} > \frac{7}{5}$

☠ **تمرين :**

قارن بين العددين : $a = x + \frac{1}{2}$, $b = 2$

الحل : $a - b = x + \; - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

ومنه : $a \geq b \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

7- المتراجحات والعمليات عليها :

①- اذا أضفنا الى طرفي متراجحة أو طرحنا من طرفيها العدد الحقيقي (c) ذاته لا تتغير جهة المتراجحة

اذا كان $\left\{\begin{array}{l} a < b \\ c \in IR \end{array}\right\}$ فإن $\boxed{\begin{array}{l} a+c < b+c \\ \text{و } a-c < b-c \end{array}}$

②- اذا ضربنا أو قسمنا طرفي متراجحة بعدد موجب لاتتغير جهة المتراجحة

اذا كان $\left\{\begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array}\right\}$ فإن $\boxed{\begin{array}{l} a.c > b.c \\ \text{و } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{array}}$

③- اذا ضربنا أو قسمنا طرفي متراجحة بعدد سالب تتغير جهة المتراجحة

اذا كان $\left\{\begin{array}{l} a > b \\ c < 0 \end{array}\right\}$ فإن $\boxed{\begin{array}{l} a.c < b.c \\ \text{و } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{array}}$

④-اذا جمعنا طرفاً الى طرف لمتراجحتين لهما الإتجاه ذاته فإننا نحصل على متراجحة جديدة لها الإتجاه ذاته

اذا كان $\left\{\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\}$ فإن $\boxed{a+c < b+d}$

⑤- اذا ضربنا طرفا بطرف متراجحتين تربطان أعداد موجبة ولها الإتجاه ذاته نحصل على متراجحة لها الإتجاه ذاته .

أي أن :

اذا كانت a , b , c , d أعداداً حقيقية موجبة
وكان $a < b$
و $c < d$
فإن $\boxed{a.c < b.d}$

⑥- اذا كان العددان a , b موجبين و $a < b$ فإن $\boxed{a^2 < b^2}$

⑦- اذا كان العددان a , b موجبين و $a < b$ فإن $\boxed{\sqrt{a} < \sqrt{b}}$

⑧- اذا كان العددان a , b موجبين و $a < b$ فإن $\boxed{\frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$

تمرين :

ليكن العددين الحقيقين $2 \le X \le 3$ ، $1 \le y \le 2$

احصر المقدار : $A = X.y$

الحل :

$2 \times 1 \le x.y \le 3 \times 2$ ومنه $2 \le x.y \le 6$

تمرين :

ليكن العدد x يحقق : $-1 < X < 2$ احصر المقدار $B = -2x - 3$

الحل :

$+2 > -2x > -4$ ومنه $+2 - 3 > -2x - 3 > -4 - 3$

اذا : $-1 > B > -7$ بشكل آخر: $-7 < B < -1$

تمرين :

ليكن العدد x يحقق : $2 < X < 5$ احصر المقدار $A = x + \frac{1}{x}$

الحل :

$\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ نجمع المتراجحتين $2 + \frac{1}{5} < x + \frac{1}{x} < 5 + \frac{1}{2}$

ومنه : $\frac{11}{5} < A < \frac{11}{2}$

تدريب :

أثبت صحة كلا من : $\sqrt{2} < \frac{17}{12}$ ، $\frac{41}{29} < \sqrt{2}$

الحل :

لأن $(\sqrt{2})^2 < (\frac{17}{12})^2$ ، $2 < \frac{289}{144}$ منه $\sqrt{2} < \frac{17}{12}$

وبالمثل نجد الثانية :

[تدريب $\frac{1-5}{20}$]

⑧- القيم المطلقة :

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x نرمز له بالشكل : $|x|$

اذا كانت $x \geqslant 0$ فإن $|x| = x$

اذا كانت $x < 0$ فإن $|x| = -x$

اذا القيمة المطلقة لعدد x هو عدد موجب : $|+x| = |-x| = x$

القيمة المطلقة $|x|$ تقيس المسافة بين نقطتين على مستقيم الأعداد .

⑨- خواص القيمة المطلقة :

①- $|+x| = |-x|$

②- $|x| = \sqrt{x^2}$

③- $|x + y| \le |x| + |y|$ ايا كان العددان x , y

④- $|x| = |a| \iff (x = +a$ أو $x = -a)$

⑩- المجالات في مجموعة الأعداد الحقيقية :

المجالات المحدودة

①- $[a , b]$ $a \leqslant X \leqslant b$

②- $]a , b[$ $a < X < b$

③- $]a , b]$ $a < X \leqslant b$

④- $[a , b[$ $a \le X < b$

المجالات الغير محدودة

⑤- $[a , \infty+[$ $a \leqslant X < +\infty$

⑥- $]a , +\infty[$ $a < X < +\infty$

⑦- $]a , +b]$ $-\infty < X \leqslant b$

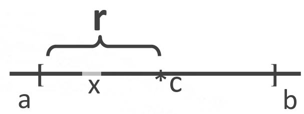
⑧- $]-\infty , b[$ $-\infty < X < b$

⑨- $]-\infty , +\infty[$ $-\infty < X < +\infty$

11- المجال ومركزه ونصف قطره وطوله :

لتكن المجالات : $[a,b]$ ، $]a,b[$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ بسمي :

- مركز المجال $c = \frac{a+b}{2}$
- نصف قطر المجال $r = \frac{b-a}{2}$
- تنتمي x الى المجال $[a\,,b]$ اذا تحقق الشرط :



$|x-c| \le r$

12- العمليات على المجالات : (اجتماع أو تقاطع مجالين)

- مثال : ليكن : $I=[-3,5]$ ، $J=\,]2,7[$ ، $k=[6,+\infty[$

أوجد : $I \cap J$ ، $I \cup J$ ، $I \cap K$ ، $I \cup K$

الحل :

$I \cap J = \,]2,5]$

$I \cup J = [-3,7[$

$I \cap K = \emptyset$

$I \cup K = [-3,5] \cup [6,+\infty[$

تدريب $\left[\frac{1+2+3}{23}\right]$:

13- دراسة اشارة المقدار $ax+b$ وحل المتراجحة :

لدراسة اشارة المقدار $ax+b$ نعدم المقدار $ax+b=0$

X	- ∞	$-\frac{a}{b}$	+ ∞
ax+b	تخالف اشارة a	0	توافق اشارة a

تمرين : ادرس اشارة كلا من المقادير :

$4-2x$, $2x+6$, $(4-2x)(2x+6)$, $\frac{4-2x}{2x+6}$

الحل :

المقدار : 4 – 3x

X	- ∞		2		+ ∞
4 – 2x		+	0	-	

المقدار : 5x + 2

X	- ∞		-3		+ ∞
2x + 6		-	0	+	

المقدار : A(X) = (4 – 2x)(2x + 6)

X	- ∞		-3		+2		+ ∞
4 –2x		+		+	0	-	
2x+6		-	0	+		+	
A(X)		-	0	+	0	-	

المقدار : $B(X) = \frac{4-2x}{2x+6}$

X	- ∞		-3		+2		+ ∞
4 –2x		+		+	0	-	
2x+6		-	0	+		+	
B(X)		-	||	+	0	-	

تدريب $\left[\frac{1+2}{26}\right]$

﴿ تمرينات الوحدة الأولى ﴾

الوحدة الثانية : مفهوم التابع

1- تعريف التابع العددي :

ليكن D مجالا أو اجتماع مجالات من $\mathbb{R}$

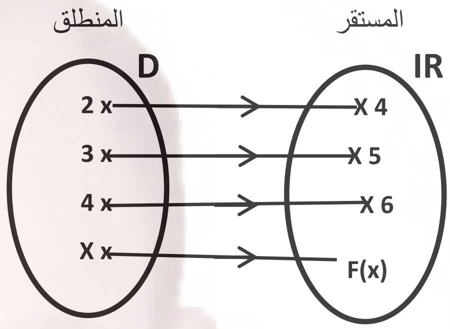
نقول أن f تابع من D الى IR اذا كان كل عدد x من D يرتبط بعدد وحيداً من $y = f(x)$ من $\mathbb{R}$ ونكتب التابع بالشكل :

$$f : D \to \mathbb{R} \ , \ x \to f(x)$$

⊙- نسمي : D منطلق التابع (وهي مجموعة تعريف التابع)

$\mathbb{R}$ مستقر التابع

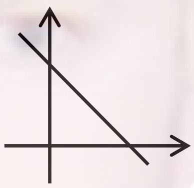
العدد x متغير ، f(x) صورة x ، y= f(x) علاقة الربط



● مثال (1): التابع التآلفي :

قاعدة ربطه : $f(x) = ax+b$

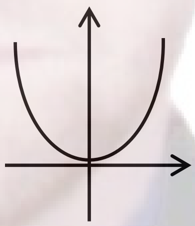
خطه البياني : مستقيم



● مثال (2) : التابع التربيعي :

قاعدة ربطه : $g(x) = x^2$

خطه البياني : قطع مكافئ



2- مجموعة تعريف التابع :

① - التابع الصحيح : معرف على IR

② - التابع الكسري : معرف على $\mathbb{R}/$ { قيم x التي تعدم المقام }

③ - التابع الجذري : $f(x) = \sqrt{g(x)}$ معرف على $g(x) \geqslant 0$

☠ تمرين :

أوجد مجموعة التعريف كل من التوابع :

$f_1(x) = 3x^2 - 5$ الحل : $D_{f1} = IR = \ ]-\infty \ , \ +\infty[$

$f_2(x) = \frac{x^2}{x+3}$ الحل : $D_{f2} = \ ]-\infty, -3[\ \cup \ ]-3, \infty +[$

$f_3(x) = \sqrt{2-x}$ الحل : $D_{f3} = \ [+2, +\infty[$

$f_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ الحل : $D_{f4} = \ [0, +1[\ \cup \ ]+1, +\infty[$

☠ تمرين :

ليكن : $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ أوجد الأعداد التي صورها وفق f يساوي (1)

الحل :

$\frac{5}{x^2+1} = 1$ ومنه $x^2 = 4$ ومنه $x = \{ +2 , -2 \}$

$$\left[\frac{2+3}{39} \text{تدريب}\right]$$

3- الخط البياني وقراءة التمثيل البياني :

●- الشرط اللازم والكافي لكي تنتمي النقطة $A(a , b)$ الى الخط البياني C هو أن يكون : $b = f(a)$

●- المستقر الفعلي لتابع f : هو مجموعة صور الأعداد التي تنتمي الى المنطلق D للتابع f

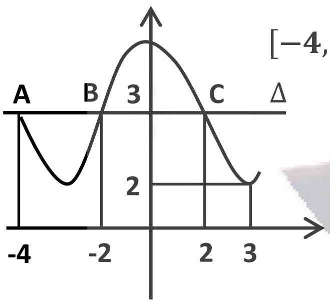
☠- تمرين :

تأمل C خط بياني لـ f معرف على $[-4, 3]$

① حل بيانيا المعادلة : $F(x) = 3$

② حل بيانيا المتراجحة : $F(x) < 3$

الحل :



①- نرسم المستقيم $y = 3$ فنلاحظ أنه يلاقي C في ثلاثة نقط :

ومنه الحلول : $x = -4$, $x = -2$, $x = 3$

②- حلول المتراجحة هي مجموعة النقط التي صورها أصغر من 3 وهي :

$$]-4 , -2 [\cup] \ 2 , 3 [$$

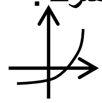
$$\left[\frac{1+2+3+4}{44} \text{تدريب}\right]$$

❹- التابع المتزايد والتابع المتناقص :

⊙- ليكن f تابعاً ، وليكن I مجالاً من مجموعة تعريف التابع f

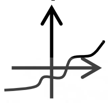
أيا كان العددان $u\,,v$ من I وكان $u < v$ فإنه :

• يكون التابع متزايد تماماً على المجال I اذا تحقق الشرط :



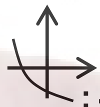
$$u < v \longrightarrow f(u) < f(v)$$

• يكون التابع متزايد على المجال I اذا تحقق الشرط :



$$u < v \longrightarrow f(u) \leqslant f(v)$$

• يكون التابع متناقص تماما على المجال I اذا تحقق الشرط :

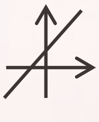


$$u < v \longrightarrow f(u) > f(v)$$

• يكون التابع متناقص على المجال I اذا تحقق الشرط :

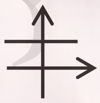
$$u < v \longrightarrow f(u) \geqslant f(v)$$

⊙- في حالة التابع التآلفي : $f(x) = ax + b$



• اذا كان : $a > 0$ كان التابع متزايد في IR

• اذا كان : $a < 0$ كان التابع متناقص في IR



• اذا كان : $x = 0$ كان التابع ثابتا في IR

تمرين :

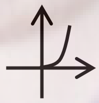
ليكن التابعين : $f : [0,+\infty[\;\to IR \;,\; f(x) = x^2$

$g :]-\infty,0] \;\to IR \;,\; g(x) = x^2$

①- أثبت أن التابع f متزايد تماماً .

②- أثبت أن التابع g متناقص تماماً .

الحل :



①- ليكن العددين $u\,,v$ بحيث : $0 \leq u < v$

علينا اثبات $f(u) < f(v)$ بالمقارنة بين $f(u)\,,f(v)$ أي بين $u^2\,,v^2$

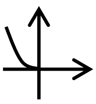
نربع وطرح : $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$

بما أن $u < v$ فإن $(u-v) < 0$ ، ولدينا $(u+v) > 0$

فإن : $(u-v)(u+v) < 0$ أي أن $u^2 - v^2 < 0$

إذا $u^2 < v^2$ ومنه $f(u) < f(v)$

فالتابع متزايد تماما مهما يكن u و v من المجال $[\;,+\infty[$



②- ليكن العددين $u\,,v$ بحيث : $u < v \leq 0$

علينا اثبات $g(u) > g(v)$ بالمقارنة بين $g(u)\,,g(v)$ أي بين $u^2\,,v^2$

نربع وطرح : $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$

بما أن $u < v$ فإن $(u-v) < 0$ ، ولدينا $(u+v) < 0$

فإن : $(u-v)(u+v) > 0$ أي أن $u^2 - v^2 > 0$

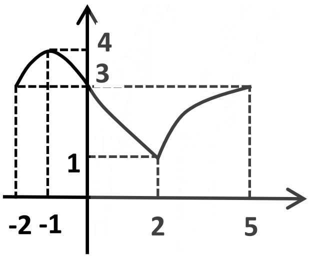
إذا $v^2 > u^2$ ومنه $f(v) > f(u)$

فالتابع متناقص تماما مهما يكن u و v من المجال $]-\infty\,,0]$

$$\left[\text{تدريب}\;\frac{1+2+3+4+5}{49}\right]$$

❺- جدول اطراد التابع :

⊙- التابع المطرد على مجال : هو تابع متزايد تماماً على هذا المجال **أو** متناقص تماماً على هذا المجال أو ثابتاً . نلخص دراسة اطراد **التابع في** جدول يسمى جدول اطراد التابع .



تمرين:

تأمل الشكل المقابل ، ثم ادرس اطراد التابع f على المجال $[-2,5]$

الحل :

التابع متزايد تماماً على المجال $[-2,-1]$ | ومتناقص تماماً على المجال $[-1,2]$ | ومتزايد **تماماً** على المجال $[2,5]$

جدول اطراد التابع f

X	-2		-1		2		5
F(x)	3	↗	4	↘	1	↗	3

⊙- أصغر وأكبر قيم التابع :

ليكن لدينا التابع $f : D \longrightarrow R$ ، ومجالا I محتوى في D

• نقول أن M هي أكبر قيم التابع f على المجال I اذا تحقق الشرطان :

- ايا كانت قيمة x من المجال I فإن : $f(x) \leqslant M$
- يوجد عدد a من المجال I يحقق $f(a) = M$

• نقول أن m هي أصغر قيم التابع f على المجال I اذا تحقق الشرطان :

- ايا كانت قيمة x من المجال I فإن : $f(x) \geqslant m$
- يوجد عدد b من المجال I يحقق $f(b) = m$

تمرين :

تامل جدول اطراد f

X	-5		-1		3		4
F(x)	3	↘	0	↗	4	↘	0

① - عين مجموعة تعريف التابع f

② - عين نقاط مميزة يمر بها الخط البياني للتابع f

③ - ادرس اطراد التابع f

④ - عين أكبر وأصغر قيمة للتابع f

⑤ - ارسم الخط البياني للتابع f

⑥ - هل صحيح أن $f(x) \leq 5$ أيا كان x من $[-5,4]$

⑦ - هل صحيح أن $(x) \geq -1$ أيا كان x من $[-5,4]$

الحل :

① - التابع معرف على المجال : $[-5,4]$

② - $(4,0)$, $(3,4)$, $(-1,0)$, $(-5,3)$

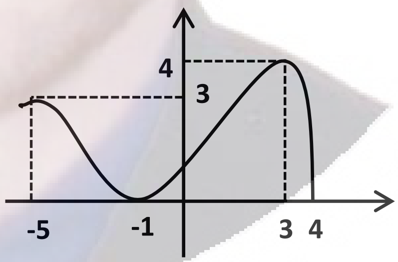
③ - متناقص على المجال : $[-5, -1]$

- متزايد على المجال : $[-1, 3]$
- متناقص على المجال : $[3, 4]$

④ - أصغر قيم التابع على المجال هي : 0 عندما $x=-1$, $x=4$

- أكبر قيم التابع على المجال هي : 4 عندما $x=3$

⑤ - الرسم :



⑥ - الصحيح هو $f(x) \leq 4$

⑦ - الصحيح هو $f(x) \geq 0$

$\left[\text{تدريب}\ \frac{1}{53}\right]$

﴿ تمرينات الوحدة الثانية ﴾

الوحدة الثالثة : المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1- تعريف :

- يسمى كل تابع من الشكل : $f(x) = ax^2+bx+c$ بثلاثي حدود من الدرجة الثانية ، حيث : a , b , c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

- كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يسمى جذراً للمعادلة

4- الصيغة القانونية لثلاثي الحدود من الدرجة الثانية :

لكتابة ثلاثي الحدود ax^2+bx+c بالصيغة القانونية نتبع مايلي :

- نخرج a عامل مشترك خارج قوسين $a(x^2+\frac{\ }{a}x+\frac{c}{a})$
- نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x نجد $a(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a})$
- نجعل أول ثلاثة حدود متطابقة ونجمع الحدين الأخيرين : $a(x+e)^2+d$
- تكون النقطة ($f(-e) = d$) أصغر أو أكبر قيم التابع حسب المتراجحة

مثال :

أكتب ثلاثي الحدود $P(X) = 2X^2 + X + 1$ بالصيغة القانونية

ثم عين أصغر قيم التابع P

الحل :

$$P(X) = 2(X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2})$$

$$= 2(X^2+\frac{1}{2}X+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2})$$

الصيغة القانونية $P(X) = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$

نلاحظ أنه مهما يكن X فإن : $2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$

$$2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

$$P(X) \geq \frac{7}{8} = P(-\frac{1}{4})$$

اذا اصغر قيم التابع هي $\frac{7}{8}$

تدريب $\left[\frac{1+2+3}{62}\right]$

4- حل المعادلة من الدرجة الثانية : $ax^2+bx+c = 0$

①- طريقة المميز : نحسب المميز (الدلتا) $\triangle = b^2 - 4a.c$

- $\triangle > 0$ للمعادلة جذران : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$
- $\triangle = 0$ للمعادلة جذر مضاعف : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- $\triangle < 0$ المعادلة مستحيلة الحل

②- طريقة التحليل :

- عندما $\triangle = 0$ فإن $ax^2+bx+c = a(x+x_1)(x+x_2)$
- عندما $\triangle > 0$ فإن $ax^2+bx+c = a(x+x_1)^2$
- عندما $\triangle < 0$ لايمكن التحليل
- تذكر تحليل المتطابقة : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- تذكر التحليل بإخراج العامل المشترك : $ax^2 + bx = x(ax+b)$

تمرين :

حل كلا من المعادلات الآتية :

①- $X^2 - 3X + 4 = 0$

الحل : $\triangle < 0$ ليس للمعادلة حلولاً

②- $3X^2 - 12X + 12 = 0$

الحل : $\triangle = 0$ للمعادلة جذراً مضاعف $X = -\frac{b}{2a} = 2$

③- $3X^2 - X - 4 = 0$

الحل : $\triangle > 0$ للمعادلة جذرين : $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$

④- $4X^2 - 5 = 0$

الحل : نحلل : $(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}) = 0$

حلول المعادلة $x_1 = +\frac{\sqrt{5}}{\ }$, $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

⑤- $7X^2 + 3X = 0$

الحل : نحلل : $x(7x+3) = 0$

حلول المعادلة : $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{7}$

⑥- $X^2 - 7x + 10 = 0$

الحل : نحلل : $(x-5)(x-2) = 0$

حلول المعادلة : $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{7}$

تدريب $\left[\frac{1+2+3+4}{65}\right]$

❹ - اشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f(x) = ax^2+bx+c$

عندما $\triangle > 0$

X	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		توافق a	0	تخالف a	0	توافق a	

عندما $\triangle = 0$

X	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		توافق a	0	توافق a	

عندما $\triangle < 0$

X	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		توافق a	

تمرين :

حل ثم ادرس اشارة ثلاثي الحدود $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

الحل : $\Delta = 9$ *ومنه* للمعادلة جذران: $x_2 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$

التحليل : $2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	

اذا p(x) سالب تماماً على المجال : $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$

وموجب تماما على كل من المجالين : $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, $]2, +\infty[$

تمرين :

حل المتراجحة : $x^2 + x - 20 \le 0$

الحل :

للمعادلة جذران: $x_2 = 3$, $x_1 = -1$

X	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	
$f(x) \ge 0$		///////////		محققة		///////////////	

مجموعة الحلول : $[-5, 4]$

تمرين :

حل المتراجحة : $-x^2 + 2x + 3 < 0$

الحل :

للمعادلة جذران : $x_2 = 3$, $x_1 = -1$

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	
$f(x) < 0$		محققة		/////////		محققة	

مجموعة الحلول : $]-\infty, -1[\ \cup \ ]3, +\infty[$

$\left[\text{تدريب}\frac{1+2+3}{68}\right]$

❹- مجموع وجداء جذري معادلة من الدرجة الثانية :

اذا كان: $\triangle > 0$ أو $\triangle = 0$ فإن :

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

تمرين :

- توثق أن العدد (2) حلاً للمعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$
- أوجد مجموع وجداء الجذرين ، ثم استنتج الجذرين

الحل :

العدد 2 حلاً لأنه يحقق المعادلة : $(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5$

الجذران : $x_2 = 2$, $x_1 = 3$

$\left[\text{تدريب}\frac{1+2+3+4+5}{70}\right]$

❹- حل معادلات ومتراجحات مضاعفة التربيع (من الدرجة الرابعة)

لحل المعادلة : $ax^4 + bx^2 + c = 0$

نفرض مجهولاً مساعدا $t = x^2$

تؤول المعادلة الى : $at^2 + bt + c = 0$

تمرين :

حل المعادلة : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

الحل :

بفرض: $(x^2 = t)$ تؤول المعادلة الى : $t^2 - 5t + 6 = 0$

اما $t = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow (x_1 = +\sqrt{3} \; , \; x_2 = -\sqrt{3})$

أو $t = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow (x_1 = +\sqrt{2} \; , \; x_2 = -\sqrt{2})$

حلول المعادلة = $\{ +\sqrt{2} \; , \; -\sqrt{2} \; , \; -\sqrt{3} \; , \; +\sqrt{3} \}$

تدريب $\left[\frac{2}{73}\right]$ **حل المتراجحة :** $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$

الحل :

بفرض: $(x^2 = t)$ تؤول المعادلة الى : $t^2 - 5t + 6 = 0$

اما $t = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow (x_1 = +\sqrt{3} \; , \; x_2 = -\sqrt{3})$

أو $t = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x^2 - 2 = 0 \rightarrow (x_1 = +\sqrt{2} \; , \; x_2 = -\sqrt{2})$

X	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad +\infty$
$X^2 - 2$	+ 0 - - - 0 +
$x^2 - 3$	+ + 0 - 0 + +
$f(x) = 0$	+ 0 - 0 + 0 - 0 +
$f(x) > 0$	محققة | ////////// | محققة | ////////// | محققة

❺- **حل معادلة من النمط :** $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- **حل معادلة من النمط :** $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

●- **لحل كلتا المعادلتين نتبع مايلي :**

①- **شرط الحل :** $f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$

مجموعة التعريف : $D = D_1 \cap D_2$

②- **نربع الطرفين ونحل المعادلة ونقبل الحل الذي ينتمي الى** D

تمرين $\left[\frac{12 + 13}{77}\right]$

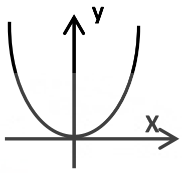
﴿ تمرينات الوحدة الثالثة ﴾

الوحدة الرابعة : التوابع المألوفة

1- التابع التربيعي :

①- التابع التربيعي : $f : x \to x^2$

- التابع معرف على : $]-\infty \ , \ +\infty[= IR$
- دراسة اطراد التابع تعني :
  - التابع متناقص على المجال : $]-\infty \ , \ 0]$
  - التابع متزايد على المجال : $[0 \ , \ +\infty[$



- جدول اطراد التابع :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

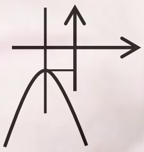
- يبلغ التابع أصغر قيمة له O وهي $f(0) = 0$ و تسمى الذروة
- نسمي الخط البياني p الممثل للتابع (قطع مكافئ)
- نسمي محور التراتيب محور التناظر

②- التابع من الدرجة الثانية : $f : IR \to IR : f(X) = ax^2 + bx + c$

- في حالة $a > 0$ تكون فتحة القطع نحو الأعلى ويبلغ f أصغر قيمة له

X	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
F(x)	$+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

- في حالة $a < 0$ تكون فتحة القطع نحو الأسفل ويبلغ f أكبر قيمة له



X	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
F(x)	$+\infty$	↗	M	↘	$+\infty$

- في كلا الحالتين يبلغ التابع ذروة القطع فاصلتها $x = -\frac{b}{2a}$
- المستقيم المار بالذروة موازيا لمحور التراتيب هو (محورتناظرللقطع)
- لرسم الخط البياني p نستعين بنقاط التقاطع مع محوري التراتيب والفواصل

مثال :

ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$: $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

اكتب جدول اطراد التابع ، وبين فيما اذا كان يبلغ أكبر أو أصغر قيمة له ،

عين محور تناظر القطع ، ارسم خطه البياني .

الحل :

بما أن $a = -2 < 0$ فإن فتحة القطع من الأسفل

يكتب بالصيغة : $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$

ذروته : $S(-1 , 5)$

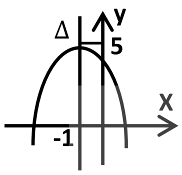
محور التناظر يمر بالذرة موازيا y`y معادلته : $x = -1$

جدول الإطراد

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

التابع يبلغ اكبر قيمة $y = 5$ عندما $x = -1$

الرسم :



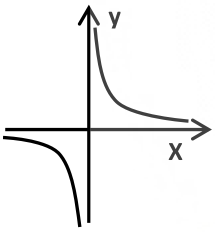
تدريب $\frac{1+4}{85}$

2- تابع المقلوب : $f : x \to \frac{1}{x}$

- التابع معرف على : $IR^* =]-\infty \ , \ 0[\cup]0 \ , \ +\infty[$
- يسمى الخط البياني للتابع بـ (قطع زائد) نرمزله بـ H
- الخط البياني لا يقطع أياً من المحورين الإحداثيين .
- الخط البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

☼- عندما : $a > 0$

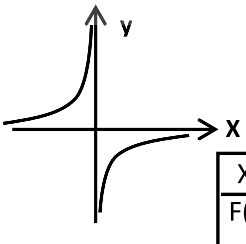
- يقع الخط البياني في الربعين الأول والثالث اذا كان : $a > 0$
- التابع متناقص على كل من المجالين : $]-\infty \ , \ 0[\ ، \ ]0 \ , \ +\infty[$
- جدول الإطراد : عندما $a > 0$



X	$-\infty$		0		$+\infty$
F(x)	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

☼- عندما : $a < 0$

- يقع الخط البياني في الربعين الثاني والرابع اذا كان : $a < 0$
- التابع متناقص على كل من المجالين : $]-\infty \ , \ 0[\ ، \ ]0 \ , \ +\infty[$
- جدول الإطراد : عندما $a < 0$



X	$-\infty$		0		$+\infty$
F(x)	0 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

تمرين :

ادرس اطراد التابع $f(x) = -\frac{2}{x}$ المعرف على $\mathbb{R}$

وارسم خطه البياني .

الحل :

نعلم أن التابع $x \to \frac{1}{x}$ متناقص تماماً على المجال : $]0,+\infty[$

وأياً كان u , v الموجبان تماماً ، و كان $u < v$ فإن $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

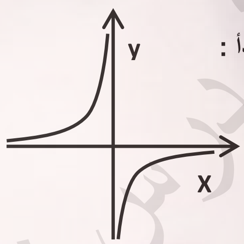
نظرب بـ (-2) نجد $\frac{-2}{u} < \frac{-2}{v}$ فالتابع متزايد تماما على $]0,+\infty[$

وبالمثل نجد أن التابع متزايد ايضا على المجال $]-\infty , 0[$

جدول الإطراد :

X	$-\infty$	0	$+\infty$
F(x)	0 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 0

للرسم : نأخذ نقاط مساعدة ونظائرها بالنسبة للمبدأ :



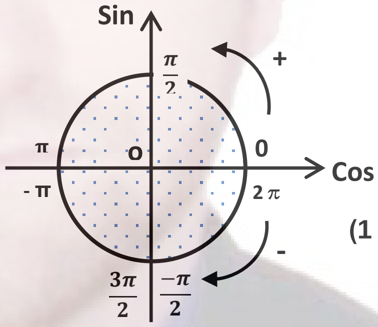
$\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ ، $\left(\frac{1}{2},-4\right)$

$(1,-2)$ ، $(2,-1)$

$\left[\text{تدريب} \frac{1+2+3}{88}\right]$

3- الدائرة المثلثية :

هي دائرة نصف قطرها (1 cm)



4- الراديان : هو قياس زاوية مركزية في دائرة تقابل قوساً طوله نصف قطر الدائرة .

العلاقة بين الراديان والدرجات :

$$\boxed{\frac{180}{\pi} = \frac{d}{\propto}}$$

حيث : $\propto$ قياس لزاوية بالراديان

d قياس الزاوية بالدرجات

مثال :

اذا كان $d = 20°$ أوجد α

الحل : $\propto = \frac{20 . \pi}{180} = \frac{\pi}{9}$

مثال :

اذا كان $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ أوجد d

الحل : $d = \frac{180\times\frac{2\pi}{3}}{\pi} = 120$

- **الزوايا الشهيرة :**

d	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\propto$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- **طول القوس:**

طول قوس من دائرة نصف قطرها r تقابل زاوية مركزية $\propto$ راديان

$$\boxed{\ell = \propto . r}$$

مثال :

اوجد طول القوس من دائرة $r = 10\text{ cm}$ يقابل زاوية : 90 و $\frac{\pi}{6}$

الحل :

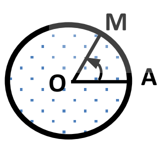
$\square = \frac{\pi}{6}(10) = \frac{5\pi}{3}$

$\square = \frac{\pi}{2}(10) = 5\pi$

مثال :

عين على الدائرة المثلثية نقطة M الممثلة للعدد $X = \frac{49\pi}{3}$

الحل :

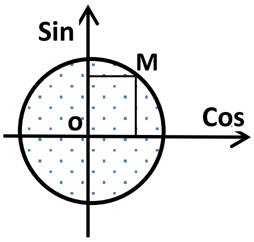


$X = 16\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\left[\text{تدريب} \frac{1+2}{93}\right]$

⑤- النسب المثلثية :

●- لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية نعرف :



Cos x : تجب x او جيب تمام x بفاصلة النقطة M على محور الفواصل

Sin x : جيب x بترتيب النقطة M على محور التراتيب :

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$
$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

فيكون حسب فيثاغورث :

●- مبرهنة : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ومنه نستنتج : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

۞- خواص :

● ايا كان العدد x فإن :

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$
$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

● $\sin(x+2\pi) = \sin x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

● $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

● $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

● $\sin(-x) = \sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

● $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

● $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\left[\text{تدريب } \frac{1+2}{96}\right]$

⑤- التابعان : sin , cos

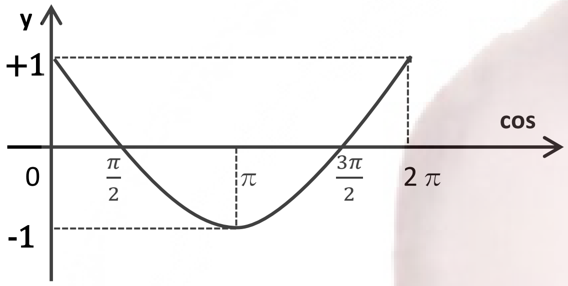
رأينا أن كل قيمة لـ x تنتمي الى IR تقابلها قيمة لكل من التابعين :

sin x و cos x تنتميان الى المجال $[-1, +1]$

ولكل منهما جدول اطراد في المجال $[0, 2\pi]$

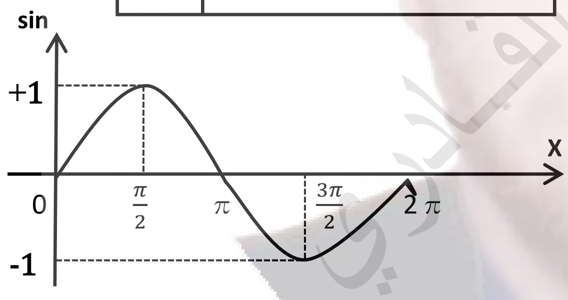
①- جدول اطراد التابع cos وخطه البياني :

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
COS X	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



②- جدول اطراد التابع Sin وخطه البياني :

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin X	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

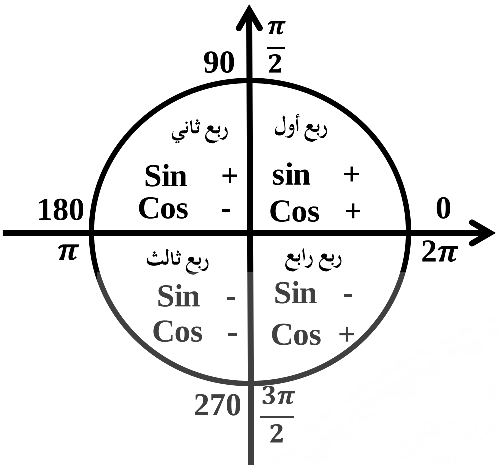


●- ملاحظة : ان الخط البياني لكل من التابعين ينتج أحدهما عن الأخر بإنسحاب موازٍ لمحور الفواصل `xx بمقدار 2π

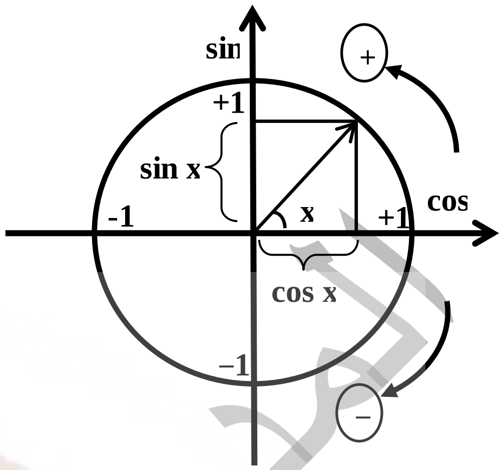
﴿ تمرينات الوحدة الرابعة ﴾

النسب المثلثية (الوحدة الرابعة)

المادة رياضيات الصف العاشر



$$-1 \le \text{Sin } x \le +1$$
$$-1 \le \cos x \le +1$$
$$\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

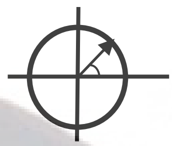
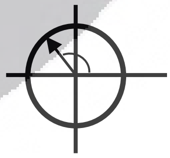
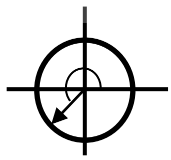
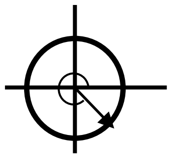


الربع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
	كل	جبار	ظالم	تجنبوا
Sin	+	+	−	−
Cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
Cot	+	−	+	−

x	0	30	45	60	90	180	270	360
$\propto$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/////	0	// ////	0
Cot	// ///	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	//////	0	///////

طول قوس يقابل زاوية المركزية $\propto$: $l = \propto . R$

للتحويل من الدرجات ⟷ الراديان : $\frac{180}{\pi} = \frac{d}{\propto}$

$\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\text{con } x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\sin x$	$\text{Sin}(2\pi + x) = +\text{Sin } x$ $\cos(2\pi + x) = +\cos x$	 الربع الأول
$\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = +\text{con } x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\text{Sin}(\pi - x) = +\text{Sin } x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$	 الربع الثاني
$\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{con } x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$	$\text{Sin}(\pi + x) = -\text{Sin } x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$	 الربع الثالث
$\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\text{con } x$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = +\sin x$	$\text{Sin}(-x) = -\text{Sin } x$ $\cos(-x) = +\cos x$	 الربع الرابع

المدرس نزار القادري

الوحدة الخامسة : مبادئ في الاحتمالات

❶- تعاريف :

①- التجربة العشوائية :

هي تجربة نعلم مسبقاً جميع نتائجها الممكنة ولكن لانعلم النتيجة التي سنحصل عليها عند اجرائها ٠

②- فضاء العينة :

هي مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ونرمز له Ω (اوميكا)

مثال : القاء حجر نرد رباعي الوجوه مرقم نهتم بالرقم السفل :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

مثال : القاء حجر نرد مكعب : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال : القاء قطعة نقود ثلاثة مرات :

$\Omega = \{ (T,T,T) , (H,H,H) , (T,H,H) , (H,T,H)$
$(H,H,T) , (H,T,T) , (T,H,T) , (T,T,H) \}$

③- الحدث :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .

مثال : في تجربة رمي حجر نرد رباعي ، الحصول على رقمين مجموعهما يساوي 4 هو حدث : $\{ (1,3) ، (2,2) \}$

④- الحدث البسيط :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة مؤلفة من عنصر واحد

⑤- الحدث المستحيل :

هو الحدث الذي لايمكن وقوعه ويرمزله بـ $\emptyset$

⑥- الحدث الأكيد :

هو الحدث الذي يمكن وقوعه دوماً وهو فضاء العنية : Ω

$\left[\text{تدريب}\ \dfrac{1+2}{113}\right]$

⑦- اذا كنت $\Omega = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots\ a_n \}$ نرمز لإحتمال وقوع الحدث a_1 بالرمز p_1 وهكذا ..... P_2 , P_3 .

ويكون جميع الاحتمالات ... P1 , P2 , P3 الى المجال [0 , 1]

ويكون مجموعها : $P_1+P_2+P_3 + \dots P_n = 1$

⑧- نقول أن التجربة متساوية الإحتمال : إذا كان للنتائج الممكنة كلها لها الإحتمال ذاته أي : $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = P$

مثال : نسحب ورقة تقويم ميلادي غير الكبيسة مااحتمال أن تكون الورقة ليوم 20 تشرين الثاني .

الحل : لجميع أوراق التقويم الإحتمال ذاته وهو : $p(A) = \frac{1}{265}$

⑨- قانون احتمال وقوع الحدث A :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}}$$

تمرين :

نسحب ورقة تقويم ميلادي غير كبيسة ، مااحتمال أن تكون الورقة ليوم في شهر شباط .

الحل : $p(A) = \frac{28}{265}$

تمرين :

القاء حجر نرد رباعي الوجوه مرقم { 1,2,3,4 } مرتين متتاليتين حيث نهتم بمجموع الرقمين الناتجين .

①- اكتب فضاء العينة .

الحل : $\Omega = \{ 2,3,4,5,6,7,8 \}$

②- ماحتمال وقوع الحدث $S = \{ 3 , 5 , 7 \}$

الحل : $P(S) = p(3) + p(5) + p(7) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

③- ماحتمال وعوع الحدث $T = \{ 6,7,8 \}$

الحل : $P(T) = P(6) + p(7) + p(8) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

﴾ تمرينات الوحدة الخامسة ﴿