د. برهان

جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 151 ريض	الفصل الثاني 1430/1429 الزمن: ثلاث ساعات
الاسم:	الرقم:	رقم الشعبة:

30

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
رمز الجواب	ج	د	ج	د	ب	ب	أ	أ	د	ج	ب	د	أ	أ	ج

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة.

(1) العبارة $(p\to q)\vee(\neg p\to \neg q)$ هي:

أ) مخلوطة ب) تناقض ج) مصدوقة د) لا شيء مما ذكر

(2) العبارة $(p\to \neg q)\to r$ تكافئ العبارة :

أ) $p\vee q\vee r$ ب) $(p\vee q)\wedge(q\vee r)$ ج) $p\vee(q\wedge r)$ د) لاشيء مما ذكر.

(3) المكافئ العكسي للتقرير " إذا كان x عددا موجبا أو سالبا فإن x عدد غير صفري" هو:

أ) إذا كان x عددا ليس موجبا أو ليس سالبا فإن x يساوي الصفر.

ب) إذا كان x عددا ليس موجبا و ليس سالبا فإن x يساوي الصفر.

ج) إذا كان x عدد يساوي الصفر فإن x ليس موجب وليس سالب.

د) إذا كان x عدد يساوي الصفر فإن x ليس موجب أو ليس سالب.

(4) إذا عرفنا علاقة R على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالقاعدة: $xRy \Leftrightarrow x+y$ عدد موجب, فإن R:

أ) علاقة ترتيب جزئي ب) علاقة تكافؤ ج) علاقة تناظرية و متعدية د) علاقة تناظرية و غير متعدية.

(5) إذا كانت S علاقة على $\mathbb{Z}$ معرفة بالقاعدة : $aSb \Leftrightarrow |a| \geq |b|$ فإن S :

أ) إنعكاسية وتخالفية ب) إنعكاسية و غير تخالفية ج) تخالفية وغيرإنعكاسية د) غير إنعكاسية و غير تخالفية.

(6) إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و كانت $\mathrm{T}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ فإن T :

أ) علاقة ترتيب جزئي وعلاقة تكافؤ ب) علاقة تكافؤ ليست علاقة ترتيب جزئي

ج) علاقة ترتيب جزئي ليست علاقة تكافؤ د) ليست علاقة تكافؤ و ليست علاقة ترتيب جزئي.

(7) إذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الكسرية Q معرفة بالقاعدة : $xRy \Leftrightarrow x-y$ عدد صحيح, فإن:

أ) $\frac{7}{2}\in\left[\frac{1}{2}\right]$ ب) $6\notin[-1]$ ج) $\frac{7}{2}\in[1]$ د) لاشيء مما ذكر.

(8) إذا كانت $S=\{(u,w),(v,u),(w,v)\}$ علاقة معرفة على $A=\{u,v,w\}$ فإن $S^3=SoSoS$ هي:

أ) العلاقة القطرية ب) S ج) العلاقة التامة د) لاشيء مما ذكر.

(9) إذا كان B جبرا بوليا و كان $x, y \in B$ بحيث $x + y = x$ فإن:

أ) $x = 1$ ب) $x + y = y$ ج) $y = 0$ د) $xy = y$.

(10) إذا كانت f و g دالتين بوليتين, فإن $(f' + g)(f' + g')$ تساوي:

أ) g ب) 1 ج) f' د) 0.

(11) إذا كانت $f(x, y, z) = yz' + y'z + x$ فإن $CPS(f)$ يساوي :

(أ) $x + y + z'$ (ب) $(x + y' + z')(x + y + z)$

(ج) $(x' + y + z)(x' + y' + z')$ (د) $(x + y' + z)(x' + y + z)$.

(12) شكل MSP للدالة $f(x, y, z) = y + xy'$ هو:

أ) $y + xy'$ ب) $x + y'z$ ج) $xz + xy'$ د) $x + y$.

(13) شكل MPS للدالة $g(x, y, z, w) = xy + y'w' + z'w'$ هو:

(أ) $(x + w')(y + w')(x + y' + z')$ ب) $(x + w')(y + w')$

ج) $(x + w')(x + y' + z')$ د) $(y + w')(x + y' + z')$.

(14) إذا كان G رسما منتظما من النوع r , ذو 6 رؤوس و 12 ضلع . فإن r يساوي:

أ) 4 ب) 2 ج) 6 د) 8.

(15) عدد أضلاع الرسم المتمّم لـ $K_{8,12}$ يساوي:

أ) 190 ب) 96 ج) 94 د) لا شيء مما ذكر.

<u>الجزء الثاني</u> : أجب عن الأسئلة التالية:

(1) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات التالي: لكل $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

نضع $P_n : “ \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} ”$

(1) • الخطوة الأساسية: $n = 1$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$ إذن P_1 صائب

• خطوة الاستقراء: نفترض أن P_k صائب لكل $k \leq n$ ولنثبت أن P_{n+1} صائب.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{n+1}$$

(3) بما أن $\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\geq \frac{1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1 + \sqrt{n^2}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

إذن P_{n+1} صائب

<u>النتيجة</u>: لكل $n \geq 1$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

(2) استخدم مبدأ الترتيب الحسن و البرهان بالتناقض لإثبات أن $n^2 + 9 > 7n$ لكل عدد صحيح $n \geq 6$.

(1) نفترض أنه يوجد $n_0 \geq 6$ بحيث $n_0^2 + 9 \leq 7n_0$.

نضع الآن $A = \{ m \geq 6 \,/\, m^2 + 9 \leq 7m \}$

$A \subseteq \mathbb{N}$ ، $A \neq \emptyset$ بما أن $n_0 \in A$. باستخدام المبدأ

الترتيب الحسن يوجد أصغر عدد $n \in A$ بحيث لدينا:

$$(1) \quad n^2 + 9 \leq 7n$$
$$(2) \quad (n-1)^2 + 9 > 7(n-1) \quad \text{و}$$
$$(3) \quad n \geq 6$$

(3)

$(2) \Rightarrow n^2 - 2n + 1 + 9 > 7n - 7$ يعني $n^2 + 9 > 9n - 8$ وباستخدام (1)

نجد أن $7n \geq n^2 + 9 > 9n - 8$ إذن $8 > 2n \Rightarrow n < 4$

و هذا يناقض مع (3).

(3) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1		
xy'		1	1	
$x'y'$	1	1		
$x'y$		1	1	

(i) اكتب f على شكل MSP.

$$MSP(f) = xyz + xy'w' + x'y'z + x'yw' \qquad (1)$$

(ii) اكتب f على شكل MPS.

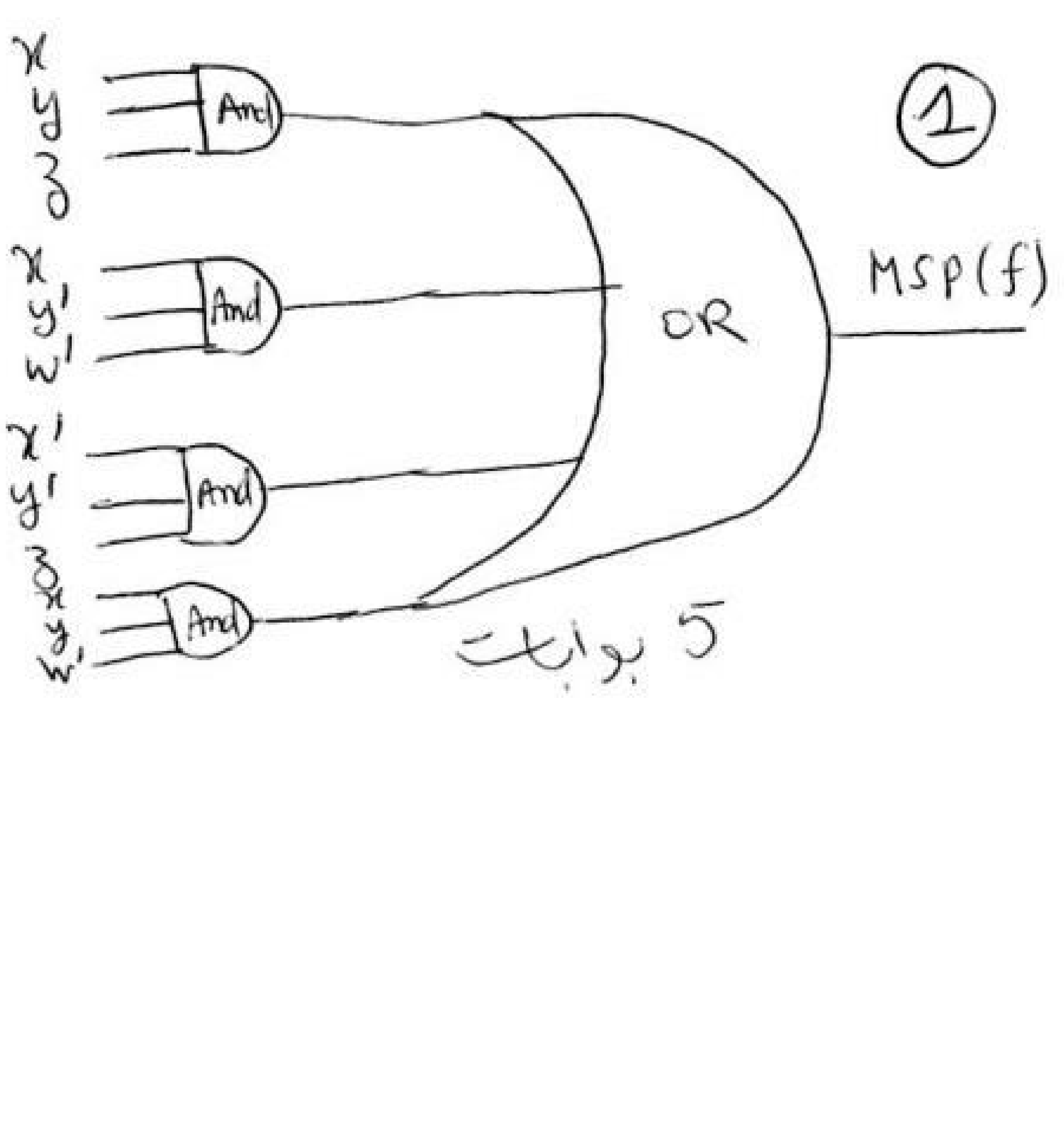
$$MSP(f') = xyz' + xy'w + x'y'z' + x'yw$$

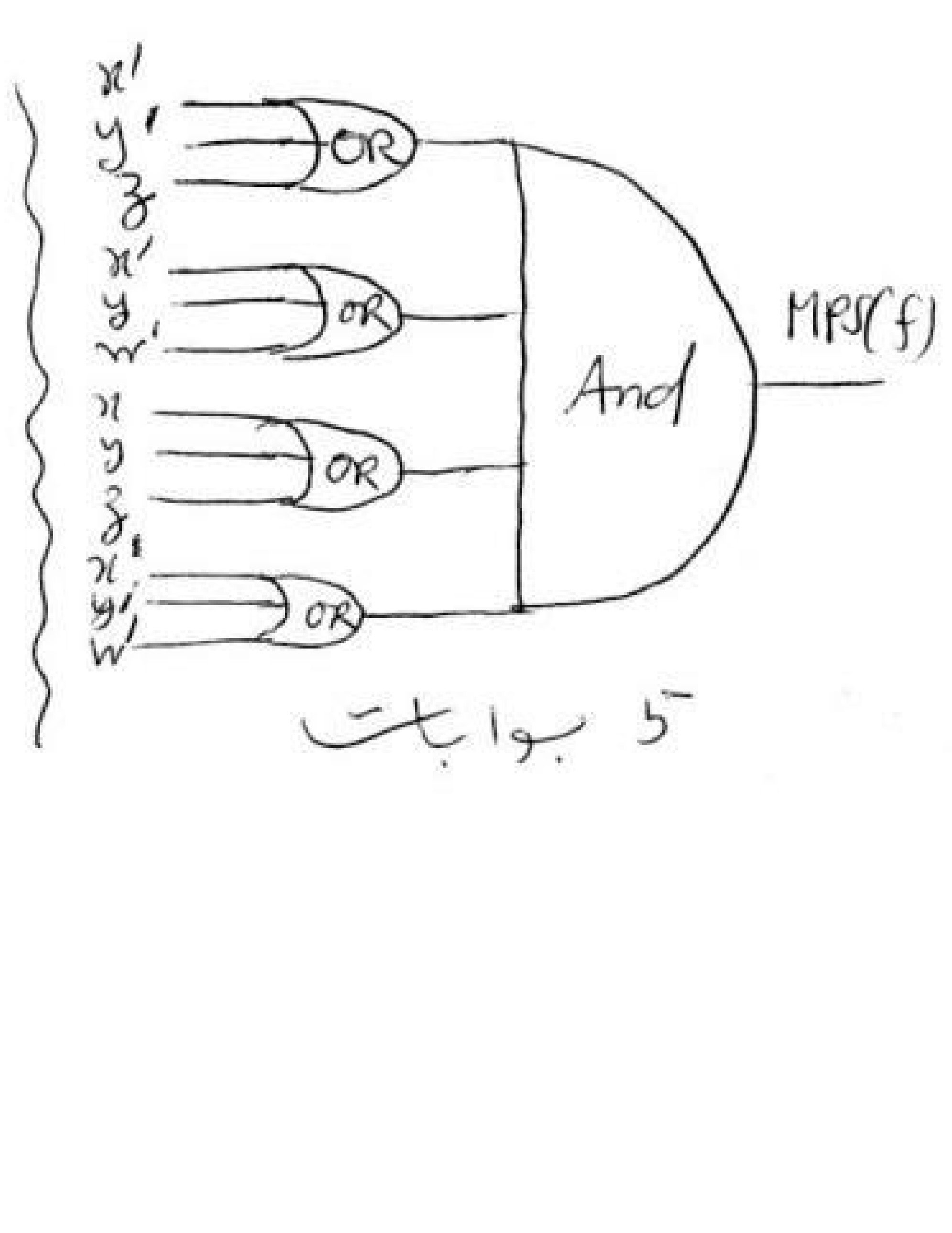
(1)

$$MPS(f) = (MSP(f'))' \quad \text{إذن}$$
$$= (x' + y' + z)\cdot(x' + y + w')\,(x + y + z)\cdot(x + y' + w')$$

(iii) صمم دارة عطف و فصل أصغرية لـ f.

(1)



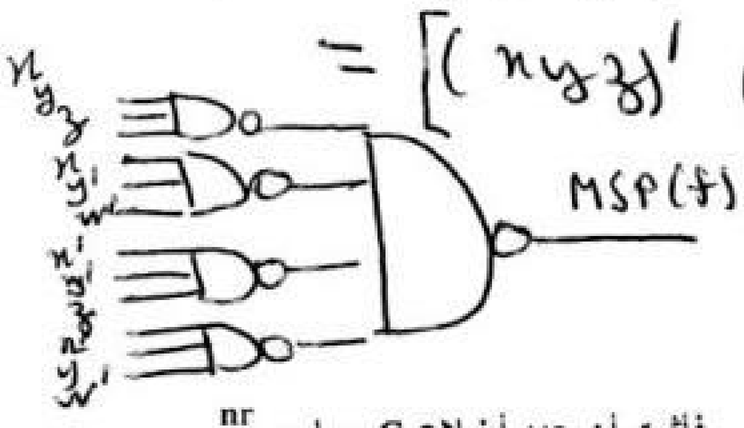


(iv) صمم دارة لـ f باستخدام بوابات نفي العطف فقط.

$$MSP(f) = xyz + xy'w' + x'y'z + x'yw'$$

$$MSP(f) = [(xyz + xy'w' + x'y'z + x'yw')']'$$

$$= [(xyz)'(xy'w')'(x'y'z)'(x'yw')']'$$



1

(4) ليكن G رسما منتظما من النوع r ذو n رأس, فأثبت أن عدد أضلاع G يساوي $\frac{nr}{2}$.

لدينا $\sum_{i=1}^{n} deg(x_i) = 2|E|$

3 بما أن G منتظما فان لكل $1 \le i \le n$, $deg(x_i) = r$

إذن $nr = 2|E|$ وهذا يعني أن $|E| = \frac{nr}{2}$

(مجموع الأضلاع G)

(5) ليكن G رسما بسيطا عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 36. فجد n إذا علمت أن عدد أضلاع متمم G يساوي 42.

نضع $G = (V, E)$ و $\bar{G} = (V, \bar{E})$ (المتمم). لدينا

$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$ وبما أن $|E| = 36$ و $|\bar{E}| = 42$ إذن

3

$42 + 36 = \frac{n(n-1)}{2} \iff n^2 - n - 156 = 0$

المميز $\Delta = 1 + 624 = (25)^2$

$n_1 = \frac{1-25}{2} = -12$ ↯ , إذن $n = \frac{1+25}{2} = 13$

$|V| = n$ (عدد رؤوس)

$|V| = 13$

(6) بيّن ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا ؟

G H

2

لا. هذين الرسمين ليسا متماثلين لأن $deg(x_G) \neq deg(x_H)$

إذن لا يوجد تطبيق تقابلي f بحيث $f(G) = H$.

$G \not\cong H$.