الوحدة الأولى تحليل

المتتاليـــــات

للاستاذ: إيّاد إدريس

(مشرف مادة الرياضيات في ثانويّة السّعادة)

الوحدة الأولى - المتتاليات -

المتتاليات : تابع عددي ، يكون المنطلق هو N المجموعة الأعداد الطبيعية

المتتاليات

تعريف : المتتالية العددية هي تابع من الشكل :

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longrightarrow U_n$$

نرمز للمتتالية بـ $(U_n)_{n\geq 0}$

نسمي U_n الحد العام للمتتالية أو الحد ذي الدليل n

ملاحظة :

التمثيل البياني للمتتالية هو عبارة عن مجموعة من النقاط المنفصلة

طرق كتابة المتتالية

1. الشكل الصريح :

- يمكن التعبير عن المتتالية من خلال حدها العام U_n بدلالة n

مثال : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_n = 3n - 2$

1) أوجد U_0 , U_1 , U_2 , U_3

2) احسب $U_{n+1} - U_n$

1) $U_0 = 3(0) - 2 = -2$ $\quad$ $U_2 = 3(2) - 2 = 4$

$U_1 = 3(1) - 2 = 1$ $\quad$ $U_3 = 3(3) - 2 = 7$

2) $U_{n+1} - U_n = (3n + 3 - 2) - (3n - 2)$

$U_{n+1} - U_n = 3n + 1 - 3n + 2$

$U_{n+1} - U_n = 3$

2) الشكل التدريجي :

يمكن التعبير عن المتتالية بعلاقة تراجعية

مثال : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n^2 \end{cases}$$

احسب U_1 , U_2 , U_3

$U_1 = 3U_0^2 = 3$ $\quad$ $U_2 = 3U_1^2 = 27$ $\quad$ $U_3 = 3U_2^2 = 3(27)^2 = 2187$

2

/ /

اطراد متتالية:

★ المتتالية المطردة: هي متتالية متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.

★ لدراسة اطراد متتالية هنالك ثلاث طرق:

1 ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

2 نحول المتتالية لتابع وندرس اطراده وعندئذ اطراد التابع يؤدي إلى اطراد المتتالية على أن تكون المتتالية معرّفة من خلال حدها العام.

3 نقارن النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع (1) على أن تكون الجميع حدود المتتالية موجبة تماماً (ابتداءً من حد معين).

$\frac{4}{18}$ ادرس اطراد كل من المتتاليات:

1 $U_n=\frac{3}{n^2}$; $n\geq 1$

طريقة أولى:

$U_{n+1}-U_n=\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{3}{n^2}$

علماً أن:

$(n+1)^2>n^2$

فإنّ

$\frac{3}{(n+1)^2}<\frac{3}{n^2}$

ومنه

$U_{n+1}-U_n<0$

فالمتتالية متناقصة تماماً أياً يكن $n\geq 1$

طريقة ثانية:

ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$

$f(x)=\frac{3}{x^2}$

ندرس إطراد التابع f

f اشتقاقي على $[1,+\infty[$

$f'(x)=\frac{-6x}{x^4}=\frac{-6}{x^3}<0$

فالتابع f متناقص تماماً على المجال $[1,+\infty[$

وبما أنّ $U_n=f(n)$

فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n\geq 1$

طريقة ثالثة:

علماً أنّ: $U_n > 0$ فعندئذٍ جميع حدود المتتالية موجبة تماماً أياً يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

لأنّ: $(n < n+1)$

فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 1$

$\boxed{2}$ $U_n = \sqrt{3n+1}$; $n \geq 0$

ليكن التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

وفق: $f(x) = \sqrt{3x+1}$

ندرس اطراد التابع f:

f اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ و $U_n = f(n)$ فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

$\boxed{3}$ $U_n = \frac{3n+1}{n-2}$; $n \geq 3$

ليكن التابع f المعرف على $[3, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

ندرس إطراد f:

f اشتقاقي على $[3, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 3x - 1}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0$$

ومنه التابع f متناقص على المجال $[3, +\infty[$ و $f(n) = U_n$ فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 3$

$\boxed{4}$ $U_n = \frac{2n-1}{n+4}$; $n \geq 0$

ليكن التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

ندرس إطراد التابع f:

f اشتقاقي على المجال $[0, +\infty[$

4

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - 2x+1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x+1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ ودالة $U_n = f(n)$

فإن المتتالية U_n متزايدة أيا يكن $n \geq 0$.

5) $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$; $n \geq 0$

$U_n > 0$: فعندئذ جميع حدود المتتالية موجبة تماما أيا يكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$$

ومنه المتتالية U_n متناقصة أيا يكن $n \geq 0$

6) $U_n = \dfrac{n}{10^n}$; $n \geq 0$

$U_n > 0$ فعندئذ جميع حدود المتتالية موجبة تماما أيا يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n}$$

$$\frac{n+1}{10^n} \times \frac{1}{10} \times \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10n} < 1$$

★ ومنه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة أيا كان $n \geq 1$ (~~[illegible]~~ con)

7) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

$U_{n+1} = U_n - 3 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = -3 \leq 0$

ومنه المتتالية متناقصة أيا يكن $n \geq 0$

8) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases}$

جميع حدود المتتالية موجبة تماما أيا يكن $n \geq 0$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$$

ومنه المتتالية متناقصة أيا يكن $n \geq 0$.

8
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases}$$

جميع حدود المتتالية موجبة تماماً أياً يكن $n \geq 0$

$$U_{n+1} = 2U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$.

5
$U_n = \frac{1}{n^2+1}$; $n \geq 0$

طريقة ثانية:

ليكن التابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

ندرس اطراد التابع f:

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \leq 0$$

f متناقص على المجال $[0,+\infty[$

وبما أنّ $U_n = f(n)$

فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 0$

6
$U_n = \frac{n}{10^n}$, $n \geq 0$

طريقة ثانية

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n}$$
$$\quad\quad (1) \quad\quad (10)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1-10n}{10^{n+1}} = \frac{-9n+1}{10^{n+1}}$$

$-9n+1 < 0$ أياً يكن $n \geq 1$

ومنه $U_{n+1} - U_n < 0$ أياً يكن $n \geq 1$.

فالمتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متناقصة أياً يكن $n \geq 1$.

الشرط الأساسي

10 $U_n = 2^n \quad ; \quad n \geq 0$

جميع حدود المتتالية موجبة تماماً

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2 > 1$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

11 $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad \boxed{n \geq 1} \longrightarrow$ لأن المقام لا يمكن أن ينعدم

عندما n زوجي تكون $U_n > 0$ ،

" فردي تكون $U_n < 0$ ،

فالمتتالية متناوبة وهي غير مطردة .

12 $U_n = \frac{n^2}{n!} \quad ; \quad n \geq 0$

جميع حدود المتتالية موجبة تماماً أياً يكن $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

$n+1 < n^2$ أياً يكن $n \geq 2$

ومنه $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ أياً يكن $n \geq 2 \Leftarrow$ فالمتتالية متناقصة أياً يكن $n \geq 2$

13 $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

لدراسة إطراد متتالية المجاميع نستخدم معيار الفرق حصراً

ملاحظة : في التمرين 13 :

$1 = \frac{1}{2^0}$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 0$

14 $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$\boxed{1 = \frac{1}{1^2}}$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية متزايدة أياً يكن $n \geq 1$

المتتالية الحسابية:

تعريف:

$$\left(U_{n+1} = U_n + r \quad \text{أو} \quad U_{n+1} - U_n = r \right) \Longleftrightarrow \left(\text{المتتالية } (U_n)_{n\geq 0} \text{ حسابية أساسها } r \in \mathbb{R} \right)$$

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرف وفق $U_n = 5n - 4$. أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية.

$$U_{n+1} - U_n = (5n+1) - (5n-4)$$
$$U_{n+1} - U_n = 5n+1 - 5n + 4$$
$$U_{n+1} - U_n = 5 = r$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 5$.

مبرهنات:

1

$$\left(\underset{\text{الحد العام}}{U_n = U_0 + nr} \right) \Longleftrightarrow \left(\text{متتالية } (U_n)_{n\geq 0} \text{ حسابية حدها الأول } U_0 \text{ وأساسها } r \right)$$

2 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r عندئذ أياً كان العددان الطبيعيان n , m فإن:

$$\boxed{U_n - U_m = (n-m)r}$$

ملاحظة:

I) لمعرفة أي حدين من حدود المتتالية الحسابية يمكن إيجاد r ثم إيجاد جميع حدود المتتالية.

II) من أجل $m = 0$ يكون: $U_n = U_0 + nr$

من أجل $m = 1$ يكون: $U_n = U_1 + (n-1)r$

من أجل $m = 2$ يكون: $U_n = U_2 + (n-2)r$

ص 18 **مثال**: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية بحيث $U_2 = 41$ ، $U_5 = -13$ احسب U_{20}

$U_n - U_m = (n-m)r$

$U_5 - U_2 = (5-2)r$

$-13 - 41 = 3r$

$-54 = 3r$

$r = -18$

$U_{20} - U_5 = (20-5)r$

$U_{20} + 13 = (15)(-18)$

$U_{20} + 13 = -270$

$U_{20} = -283$

3) إذا كانت a, b, c حدود متعاقبة من متتالية حسابية نأخذ

$b = \frac{a+c}{2}$ وسط حسابي

مجموع حدود متتالية حسابية "متعاقبة"

$$\boxed{S = \frac{n}{2}(a+l)}$$

n: عدد حدود المجموع.

a: الحد الأول بالمجموع.

l: الحد الأخير بالمجموع.

ص 18 **مثال**: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها (3) وبحيث $U_1 = -2$ احسب U_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين،

$S_1 = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$

$S_2 = U_{30} + U_{31} + U_{32}$

الحل:

$U = U_1 + (n-1)r$

$U_n = -2 + (n-1)(3)$

$U_n = -2 + 3n - 3$

$$\boxed{U_n = 3n-5}$$

$S_1 = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$

$S_1 = \frac{n}{2}\cdot(U_1 + U_{20})$

$n = 20$ ، $U_1 = -2$ ، U_{20}

$S_1 = \frac{20}{2}(-2+55)$ ،

$S_1 = 10(53) = 530$

$S_2 = U_{30} + U_{31} + U_{32}$

$S_2 = \frac{n}{2}\cdot(U_{30} + U_{32})$

$n = 3$ ، $U_{30} = 85$ ، $U_{32} = 91$

$S_2 = \frac{3}{2}\cdot(85+91) = 264$

مثال: أحسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$

U_0 ... U_m

$U_m = U_0 + mr$

$10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m$

$20 = 1 + m$

$m = 19 \Rightarrow$ الحد الأخير U_{19}

بحال أخذ U_1 عند ... يصبح $m = 20$ ، ولكن يبقى عدد الحدود ثابت: $(n) = 20$ حد

S تمثل مجموع 20 حد من متتالية أساسها $(\frac{1}{2})$

$S = \frac{n}{2} \cdot (a + l)$

$S = \frac{20}{2} \cdot (\frac{1}{2} + 10)$

$S = 10 (\frac{21}{2})$

$S = 105$

للتدريب: أحسب $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + 40 \rightarrow U_m$

$U_m = 40$ $U_0 = \frac{1}{4}$ $r = \frac{1}{4}$

$U_m - U_0 = mr$

$U_m = U_0 + mr$

$40 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}m$

$160 = 1 + m \Rightarrow m = 159 \Rightarrow$ الحد الأخير U_{159}

S تمثل مجموع 160 حد من متتالية الهندسية أساسها $(\frac{1}{4})$

$S = \frac{n}{2} \cdot (a + l) = \frac{160}{2} \cdot (\frac{1}{4} + 40)$

$S = 80 (\frac{161}{4}) = 20 \times 161 = 3220$

المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} = qU_n$ أو $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

الشرط

ص18 مثال: ليكن $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم حدد أساسها.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n \cdot 2^1}{3^{n+1} \cdot 3^1} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3} = q$$

(متناقصة)

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ ويمكن حساب الإطراد لأن جميع الحدود موجبة غالباً أياً يكن $n \geq 0$ (من الشرط نعوض ولا يظهر 0 أو عدد سالب)

مبرهنات:

1

$$\left(\begin{array}{c} \text{المتتالية } (U_n)_{n\geq 0} \\ \text{هندسية أساسها } q \\ \text{وحدها الأول } U_0 \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} U_n = U_0 \cdot q^n \\ \text{الحد العام} \end{array} \right)$$

2

إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q عندئذٍ وأياً كان العددان الطبيعيان n, m فإن:

$$\boxed{\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}}$$

ملاحظة:

I) بمعرفة أي حدين من حدود متتالية هندسية يمكن إيجاد q ثم إيجاد جميع حدود المتتالية

II) من أجل $m=0$ يكون: $U_n = U_0 \cdot q^n$

من أجل $m=1$ يكون: $U_n = U_1 \, q^{n-1}$

من أجل $m=2$ يكون: $U_n = U_2 \, q^{n-2}$

مثال: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $U_2 = 4$ ، $U_5 = 32$ احسب U_{10}

الحل:

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m}$$

$$\frac{U_5}{U_2} = q^{5-2}$$

$$\frac{32}{4} = q^3 \Rightarrow 8 = q^3 \Rightarrow \boxed{q = 2}$$

/ /

$$\frac{U_{10}}{U_5} = q^5 \Rightarrow \frac{U_{10}}{32} = 2^5 \Rightarrow U_{10} = 32 \times 32 = 1024$$

3) إذا كانت a ، b ، c حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$\boxed{b^2 = a.c}$ وسط هندسي

مثال: a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية احسب علما أن:

I) $a + b + c = 21$

II) $a.b.c = 216$

نلاحظ أن a ، b ، c حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن

III) $b^2 = a \times c$

* نعوض III في II فنجد: $b^3 = 216$

ومنه $\boxed{b = 6}$

* نعوض في I ، II فنجد:

(1) $a + c = 15$

(2) $a.c = 36$

إما $c = 3$ ، $a = 12$

أو $c = 12$ ، $a = 3$

إذا كانت المتتالية متزايدة نختار
$a = 3$
$b = 6$
$c = 12$

طريقة ثانية:

من (1) $c = 15 - a$

نعوض في (2) $a(15 - a) = 36$

$15a - a^2 = 36$

$a^2 - 15a + 36 = 0$

$(a-12)(a-3) = 0$ ← $a = 12$ أو $a = 3$

$a = 12 \Rightarrow c = 3$

$a = 3 \Rightarrow c = 12$

$\frac{6}{22}$ a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية ، $a \neq 0$ نعلم أن a ، b ، c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q كما نعلم أن $3a$ ، $2b$ ، c هي ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية احسب q

* إذا كان: a , b , c ثلاثة حدود من متتالية هندسية فإن:

$$(I)\begin{cases} b = qa \\ c = qb = q^2a \end{cases}$$

* إذا كان: $3a$, $2b$, c ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية فإن:

$$2b = \frac{3a+c}{2}$$

$$(II)\quad \boxed{4b = 3a+c}$$

إذا كانت المتتالية غير ثابتة نرفض الحل $q=1$

نعوض (I) في (II)

$$4(qa) = 3a + q^2a$$

$$q^2a + 3a = 4qa$$

$$q^2 + 3 = 4q$$: نقسم على $a \neq 0$

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$(q-3)(q-1) = 0$$

إما $q = 1$ أو $q = 3$

مجموع حدود متتالية هندسية متعاقبة:

$$\boxed{S = a.\frac{1-q^n}{1-q}} \quad : q \neq 1$$

a: الحد الأول بالمجموع،
n: عدد حدود المجموع،
q: الأساس.

إذا كانت $q=1$ يكون المتتالية ثابتة ومنه:

$$\boxed{S = a.n}$$

a: الحد الثابت، n: عدد الحدود

مثال: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها (2) وفيها $U_0 = 1$ احسب $S = U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$

$$q = 2 \qquad U_0 = 1$$

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m} \Rightarrow U_n = U_0 . q^n \Rightarrow \boxed{U_n = (2)^n}$$

$$U_3 = 2^3 = 8 \quad , \quad S = U_3 . \frac{1-q^n}{1-q} \quad : \quad n = 8 \quad , \quad q = 2$$

$$S = 8 . \frac{1-2^8}{1-2} = -8(1-2^8) = +2040$$

$\frac{4}{18}$ **مثال هام:** $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها (3)، وفرض $U_1=-2$ احسب بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين:

$S_1 = U_1 + U_2 + \dots + U_7$

$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n}$ ← غير متعاقبة (قفزات منتظمة)

الحل:

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow -2 \cdot (3)^{n-1}$

$U_n = -2 \cdot 3^n \cdot 3^{-1} \Rightarrow \boxed{U_n = -\frac{2}{3} \cdot (3)^n}$

$S_1 = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow$

$S_1 = -2 \cdot \frac{1-(3)^7}{1-3} \Rightarrow S_1 = 1-3^7$

$\boxed{S_1 = -2186}$

$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n}$

$S_2 = V_1 \quad V_2 \quad V_3 + \dots + V_n$

حيث: $V_n = U_{2n} \Rightarrow V_n = -\frac{2}{3} \cdot (3)^{2n}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot (3)^{2n+2}}{-\frac{2}{3} \cdot (3)^{2n}} = 9$ $\quad \boxed{q_1 = 9}$

فالمتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ الهندسية أساسها $q=9$

$S_2 = V_1 \cdot \frac{1-q_1^n}{1-q_1} = -6 \cdot \frac{1-9^n}{1-9}$ $\quad n = n-1+1$

$\boxed{S_2 = \frac{3}{4} \cdot (1-9^n)}$

التدريب: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حيث $q=2$ ، $U_1=-4$ احسب U_n بدلالة n ثم استنتج المجموع

$S = U_4 + U_8 + U_{12} + \dots + U_{4n}$

$S = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

مقدمة:

حيث:

$V_n = U_{4n}$

الحل:

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow -4 \cdot q^{n-1}$

$U_n = -4 \cdot (2)^{n-1} = -4 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} = -4 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot (2)^n \Rightarrow$

$\boxed{U_n = -2 \cdot (2)^n}$

$S = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \Leftarrow S = U_4 + U_8 + U_{12} + \dots + U_{4n}$

حيث:

$v_n = U_{4n} \Rightarrow v_n = -2(2)^{4n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2\cdot(2)^{4n+4}}{-2\cdot(2)^{4n}} = 16$ $\boxed{q = 16}$

ومنه $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 16$

$S = v_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -32 \cdot \frac{1-(16)^n}{1-16} = \frac{32}{15} \cdot 1 - (16)^n$

$\boxed{S = \frac{32}{15} \cdot (1 - 16^n)}$

البرهان بالتراجع (الاستقراء الرياضي)

لبرهان صحة القضية $E(n)$ تتعلق بالعدد الطبيعي n : $(n \geq 0)$

I) نبرهن صحة القضية $E(0)$.

II) نفرض صحة القضية $E(n)$.

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1)$.

لدراسة إطراد متتالية معرفة بعلاقة تدريجية نستخدم البرهان بالتراجع (الحالة العامة)

أثبت أن المتتالية متزايدة $U_{n+1} > U_n$

" " " ثابتة $U_{n+1} = U_n$

مثال: ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \end{cases}$

$U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

$U_2 = \frac{3}{4}U_1 + 2 = \frac{21}{8} + 2 = \frac{37}{8}$

على ما يبدو أن المتتالية متزايدة تماماً.

لنبرهن بالتراجع صحة القضية: $E(n) : U_{n+1} > U_n : n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن: $U_1 > U_0 \Leftarrow \frac{7}{2} > 2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : U_{n+1} > U_n : n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : U_{n+2} > U_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}U_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}U_n + 2$

الاثبات:

من الفرض $U_{n+1} > U_n$

ومنه $\frac{3}{4}U_{n+1} > \frac{3}{4}U_n$

ومنه

$\frac{3}{4}U_{n+1}+2 > \frac{3}{4}U_n+2$

أي $U_{n+2} > U_{n+1}$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$ والمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما.

تمرين: ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n+2 \end{cases}$

$U_1 = \frac{3}{4}U_0+2 = 8$, $U_2 = \frac{3}{4}U_1+2 = 8$

على مايبدو أن المتتالية ثابتة

لنبرهن بالتراجع أن القضية: $E_{(n)} : U_n = 8 : n \geq 0$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأن: $U_0 = 8 \Leftarrow 8 = 8$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n+1)} : U_n = 8$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)} : U_{n+1} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}U_n+2 = 8$

$L_1 = \frac{3}{4}U_n+2 = \frac{3}{4}(8)+2 = 6+2 = 8 = L_2$

أي $U_{n+1} = 8$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$, والمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ ثابتة (طبعا)

$\frac{15}{25}$ $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $U_0 = 1$, $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ عند كل $n \geq 0$

1) أثبت أن $0 \leq U_n \leq 4$ أيا كان العدد الطبيعي n.

2) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما.

1) لنبرهن بالتدرج صحة القضية $E(n) : 0 \leq U_n \leq 4 \quad ; n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$0 \leq U_0 \leq 4 \Rightarrow ; 0 \leq 1 \leq 4$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : 0 \leq U_n \leq 4 \quad ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : 0 \leq U_{n+1} \leq 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2+U_n} \leq 4$

الإثبات: $0 \leq U_n \leq 4$

$2 \leq 2+U_n \leq 6$

$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2+U_n} \leq \sqrt{6} \leq 4$

أي $0 \leq U_{n+1} \leq 4 \Leftarrow 0 \leq \sqrt{2+U_n} \leq 4$

ومنه القضية $E(n+1)$ صحيحة $\Leftarrow$ القضية $E(n)$ صحيحة أيّاً يكن $n \geq 0$

لانقلاب الإشارة لأنّ
تابع الجذر متزايد
تماماً

2) لنبرهن بالتدرج صحة القضية $H(n) : U_{n+1} > U_n \quad , n \geq 0$

I) القضية $H(0)$ صحيحة لأنّ:

$U_1 > U_0 \Rightarrow \sqrt{2+U_0} > U_0 \Rightarrow \sqrt{3} > 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية $H(n) : U_{n+1} > U_n \quad ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : U_{n+2} > U_{n+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+U_{n+1}} > \sqrt{2+U_n}$

الإثبات: $U_{n+1} > U_n$

$2+U_{n+1} > 2+U_n$

$\sqrt{2+U_{n+1}} > \sqrt{2+U_n}$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

ومنه القضية $H(n+1)$ صحيحة $\Leftarrow$ القضية $H(n)$ صحيحة أيّاً يكن $n \geq 0$ فالمتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً.

مثال: $(U_n)_{n \geq 0}$ ، $U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n - 2$ ادرس اطراد المتتالية

$U_1 = \frac{3}{2} U_0 - 2 = \frac{3}{2} \times 2 - 2 = 1$ ، $U_2 = \frac{3}{2} U_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

حدك ما يفيد أنّ المتتالية متناقصة

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E_{(n)}: U_{n+1} < U_n$ أياً يكن $n \geq 0$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأنّ:

$U_1 < U_0 \Rightarrow 1 < 2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: U_{n+1} < U_n \; ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: U_{n+2} < U_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}U_{n+1} - 2 < \frac{3}{2}U_n - 2$

الإثبات: من الفرض: $U_{n+1} < U_n$

$\frac{3}{2}U_{n+1} < \frac{3}{2}U_n$

$\frac{3}{2}U_{n+1} - 2 < \frac{3}{2}U_n - 2$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

ومنه القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة $\Leftarrow$ القضية $E_{(n)}$ صحيحة أياً يكن $n \geq 0$ فالمتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.

$\frac{16}{25}$: $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$ ، $U_0 = 1$ عند كل $n \geq 0$

1) اثبت أنّ التابع $\frac{3x+2}{2x+6}$ ← x متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$ أياً يكن العدد n.

$U_n = f(n)$ ، $U_{n+2} = f(U_{n+1})$

$U_{n+1} = f(U_n)$.

عندما تكون المتتالية معرفة بعلاقة تدريجية ومنه اطراد التابع ليس بالضرورة أن يؤدي إلى اطراد U_n

1) f استمرار على $R / \{-3\}$

$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$

للبرهان بالتدريج صحة القضية:

$E_{(n)}: \frac{1}{2} < U_n \leq 1 \; ; n \geq 0$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأنّ:

$\frac{1}{2} < U_0 \leq 1$.

$\frac{1}{2} < 1 \leq 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: \frac{1}{2} < U_n \leq 1 \; ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: \frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$

الإثبات: من الفرض: $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$.

ومنه $f(\frac{1}{2}) < f(U_n) \leq f(1)$ (كون f متزايد تماماً على $[\frac{1}{2}, 1]$)

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq \frac{5}{8} < 1$$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

أي القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 0$

2) اثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n) : U_{n+1} < U_n \; ; \; n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ: $U_1 < U_0 \Rightarrow$

$$\frac{3U_0+2}{2U_0+6} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} < 1$$ محققة

II) نفرض صحة القضية: $E(n) : U_{n+1} < U_n \; ; \; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية: $E(n+1) : U_{n+2} < U_{n+1}$

الإثبات: من الفرض

$$U_{n+1} < U_n$$

$$f(U_{n+1}) < f(U_n)$$ (كون f متزايد تماماً)

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

عندما يكون التابع $f(n)$ متزايد تماماً نقوم بتصدير القضية $E(n)$ أثناء إثبات صحة العلاقة $E(n+1)$

أي أنّ القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

أياً يكن $n \geq 0 \Leftarrow$ فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

التمرين الثاني ص207 (الجزء الثاني)

$(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2} \; , \; U_0 = 0$ (اثبت التزايد)

لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n) : U_{n+1} > U_n \; ; \; n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأنّ: $U_1 > U_0 \Rightarrow$

$$\sqrt{1+U_0^2} > 0 \Rightarrow 1 > 0$$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : U_{n+1} > U_n \; ; \; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : U_{n+2} > U_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+U_{n+1}^2} > \sqrt{1+U_n^2}$$

السؤال الثاني ص 208 اختبار

الإثبات: من الفرض $U_{n+1} > U_n$

نربع: $U_{n+1}^2 > U_n^2$

نجمع 1: $1+U_{n+1}^2 > 1+U_n^2$

نجذر:

$$\sqrt{1+U_{n+1}^2} > \sqrt{1+U_n^2}$$

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

ومنه القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة $\Leftarrow$ القضية $E_{(n)}$ صحيحة فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً. أيّاً يكن $n \geq 0$

السؤال 12 ص 35: نرمز بالرمز $E_{(n)}$ إلى القضية $3^n \geq (n+2)^2$

1) أتكون القضايا $E_{(0)}$ ، $E_{(1)}$ ، $E_{(3)}$ ، $E_{(4)}$ صحيحة؟

2) أثبت بالتدريج أنّ القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيّاً كان $n \geq 3$

.1 $E_{(0)}: 3^0 \geq 2^2 \Rightarrow 1 \geq 4$ غير صحيحة ، $E_{(1)}: 3^1 \geq 3^2 \Rightarrow 3 \geq 9$ غير صحيحة

$E_{(3)}: 3^3 \geq 5^2 \Rightarrow 27 \geq 25$ صحيحة ، $E_{(4)}: 3^4 \geq 6^2 \Rightarrow 81 \geq 36$ صحيحة

.2 $E_{(n)}: 3^n \geq (n+2)^2 : n \geq 3$

I) القضية $E_{(3)}$ صحيحة لأنّ $3^3 \geq 5^2 \Leftarrow 27 \geq 25$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: 3^n \geq (n+2)^2 : n \geq 3$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: 3^{n+1} \geq (n+3)^2$

الإثبات: من الفرض

$$3^n \geq (n+2)^2$$

وبضرب الطرفين بـ 3

$$3^{n+1} \geq 3(n+2)^2 \geq (n+3)^2 \quad n \geq 3$$

لأنّ: $3(n+2)^2 - (n+3)^2 = 3n^2 + 12n + 12 - n^2 - 6n - 9$ $\quad n-3 \geq$

$$= 2n^2 + 6n + 3 \geq 0$$

ومنه

$$3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيّاً يكن $n \geq 3$

11/26 اثبت أنه أيّاً كان العدد الطبيعي n فإنّ $3 \times n^2 \geq (n+1)^2 ; n \geq 2$

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E_{(n)}: 3n^2 \geq (n+1)^2 : n \geq 2$

I) القضية $E_{(2)}$ صحيحة لأنّ $12 \geq 9$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}$ ، $3n^2 \geq (n+1)^2 : n \geq 2$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: \underbrace{3(n+1)^2}_{3n^2+6n+3} \geq (n+2)^2$

20

الاثبات: من الفرض $3n^2 \geq (n+1)^2$

نضيف إلى الطرفين $(6n+3)$

$3n^2+6n+3 \geq (n+1)^2+6n+3 \geq (n+2)^2$

لأن: $(n+1)^2+6n+3-(n+2)^2 = n^2+2n+1+6n+3-n^2-4n-4$

$= 4n \geq 0$

ومنه $3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة، ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n \geq 2$

قضايا المضاعف:

13/25 اثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية أيا كان العدد الطبيعي n (ابتداءً من 0)

1) 4^n+5 مضاعف للعدد (3)

لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E(n): 4^n+5 = 3K \;:\; K \in \mathbb{N}$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن: $4^0+5 = 6 = 3K \;:\; K=2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): 4^n+5 = 3K \;:\; K \in \mathbb{N}$

$\boxed{4^n = 3K-5}$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1): 4^{n+1}+5 = 3K' \;:\; K' \in \mathbb{N}$

الاثبات: $4^{n+1}+5 = 4 \cdot 4^n + 5$

$= 4(3K-5)+5$

$= 12K-15$

$= 3\underbrace{(4K-5)}_{\text{عدد طبيعي}} = 3K'$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$
$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$ أي 4^n+5 مضاعف للعدد (3).

2) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد (7)

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): 2^{3n}-1 = 7K \;:\; K \in \mathbb{N}$

I) القضية $E(0)$ صحيحة $2^0-1 = 0 = 7K \;:\; K=0$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): 2^{3n}-1 = 7K \;:\; K \in \mathbb{N}$

$2^{3n} = 7K+1$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1): 2^{3n+3}-1 = 7K' \;:\; K' \in \mathbb{N}$

الاثبات:

نفعل ثانيا ــ مع الفرض

$2^{3n+3}-1 = 2^3 \cdot 2^{3n}-1 = 8(7k+1)-1 = 56k+7 = 7(8k+1) = 7k'$

عدد طبيعي ⟸ والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$ أي

$2^{3n}-1$ مضاعف للعدد (7)

2) n^3+2n مضاعف للعدد (3)

لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E_{(n)}: n^3+2n = 3k \; ; k \in \mathbb{N}$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأنه $0 = 3k \; ; k=0$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: n^3+2n = 3k \; ; k \in \mathbb{N}$

$\boxed{n^3 = 3k-2n}$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: (n+1)^3+2(n+1) = 3k' \; ; k' \in \mathbb{N}$

الاثبات:

$(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$= 3k-2n+3n^2+5n+3$

$= 3k+3n^2+3n+3$

$= 3(\underbrace{k+n^2+n+1}_{\text{عدد طبيعي}}) = 3k'$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$ أي أنه n^3+2n مضاعف للعدد (3)

4) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد (7)

لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E_{(n)}: 3^{2n+1}+2^{n+2} = 7k \; ; k \in \mathbb{N}$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأنه $3^1+2^2 = 7 = 7k \; ; k=1$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: 3^{2n+1}+2^{n+2} = 7k \; ; k \in \mathbb{N}$

$3^{2n+1} = 7k-2^{n+2}$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: 3^{2n+3}+2^{n+3} = 7k' \; ; k' \in \mathbb{N}$

الاثبات:

$3^{2n+3}+2^{n+3} = 3^2 \cdot 3^{2n+1}+2^1 \cdot 2^{n+2}$

$= 9(7k-2^{n+2})+2 \cdot 2^{n+2}$

$= 63k-9 \cdot 2^{n+2}+2 \cdot 2^{n+2}$

$= 63k-7 \cdot 2^{n+2}$

$= 7(\underbrace{9k-2^{n+2}}_{\text{عدد طبيعي}}) = 7k'$

* في حالة اثبات ساوات نبدأ من الطرف الأول.
* نفصل على ما يتناسب مع الفرض ولكي نعوض.

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$ أي $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد (7)

تمرين: أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي n فإن العدد 9 يقسم العدد 10^n+8

لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E(n): 10^n+8 = 9K \; ; K\in\mathbb{N}$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأنه: $E(0): 10^0+8 = 9K \Rightarrow 9 = 9K \; ; K=1$

II) نفرض صحة القضية $E(n): 10^n+8 = 9K \; ; K\in\mathbb{N}$

III) نبرهن صحة القضية: $E(n+1): 10^{n+1}+8 = 9K' \; ; K'\in\mathbb{N}$

الإثبات: $10^{n+1}+8 = 10^n.10+8$

$= (9K-8)10+8$

$= 90K-80+8$

$= 90K-72$

$= 9\underbrace{(10K-8)}_{\text{عدد طبيعي}} = 9K'$

ومنه القضية $E(n+1)$ فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان n وقسم العدد 10^n+8

$\frac{1}{21}$ نفرض في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$ المقدار $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

1) احسب S_1 , S_2 , S_3 , ثم احسب S_{n+1} بدلالة S_n و n

2) اثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n\geq 1$ لدينا $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) $S_1 = 1^2 = 1$, $S_2 = 1^2+2^2 = 5$, $S_3 = 1^2+2^2+3^2 = 14$

$S_4 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$

2) لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; ; n\geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأنه:

$L_1 = S_1 = 1$

$L_2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$

$L_1 = L_2$ محقق

II) نفرض صحة القضية

$E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; ; n\geq 1$

III) فبرهن صحة القضية

$E(n+1): S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

الإثبات:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$2n^2+7n+6=0$$

$$n_1 = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$n_2 = \frac{-7-1}{4} = -2$$

نطبق القانون $2(x+\frac{3}{2})(x+2)$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

للتأكد نعكس شرط الفك $(n+2)(2n+3)$ في $2n^2+7n+6$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 1$

مثال ص 20

اثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

نفرض $S_n = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $n \geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = S_1 = 1 \\ L_2 = \frac{1(4)}{4} = 1 \end{array}\right\} L_1 = L_2$$

محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1): S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

الإثبات:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$

$$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$\frac{4}{22}$ 24

$S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 1$

$\frac{4}{22}$ أثبت بالتدريج صحة الخاصتين الآتيتين

① $1 + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n! = (n+1)! - 1$

نفرض $1 + 2\times 2! + \dots + n\times n! = S_n$

-1 لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): S_n = (n+1)! - 1 \quad ; n \geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن:

$L_1 = S_1 = 1$

$L_2 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ $\quad L_1 = L_2 \Rightarrow$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): S_n = (n+1)! - 1 \quad ; n \geq 1$

III) لنبرهن صحة القضية $E(n+1): S_{n+1} = (n+2)! - 1$

الإثبات:

$3! \times 4 = 3\times 2\times 4 = 6$
$4! = 4\times 3\times 2 = 6$
$n!(n+1) = (n+1)!$ ومنه

$S_{n+1} = S_n + (n+1)\times(n+1)!$

$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$

$= (n+1)![1 + n + 1] - 1 = (n+1)!(n+2) - 1$

$= (n+2)! - 1$

ومنه القضية $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 1$

② $n! \geq 2^{n-1}$

لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): n! \geq 2^{n-1} \quad ; n \geq 1, 2, \dots$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن: $1 \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 \geq 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): n! \geq 2^{n-1} \quad ; n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1): (n+1)! \geq 2^n$

الإثبات: من الفرض:

$n! \geq 2^{n-1}$

$(n+1)(n!) \geq 2^{n-1}.(n+1)$

$(n+1)! \geq 2^{n-1}.(n+1)$

$(n+1)! \geq 2^n . 2^{-1}.(n+1)$

$(n+1)! \geq \frac{n+1}{2} . 2^n \geq 2^n \quad ; n \geq 1$

هذا المقدار أكبر أو يساوي الواحد

ومنه $(n+1)! \geq 2^n$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

طريقة ثانية

$(n+1)! \geq (n+1).2^{n-1} \geq 2^n$

لدينا

$n \geq 1$

$n+1 \geq 2$

$(n+1).2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$

$(n+1).2^{n-1} \geq 2^n$

ALADIB

صنو الجهارة

النوع الأول من متتالية

25

5/22 في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$v_n = U_{2n} - U_n$$

أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة تماماً

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

النوع الثاني من متتالية المجاميع

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$\left(\frac{1}{3} > \frac{1}{4}\right)$ الأول أكبر بسط أصغر (لا يمكن أن نقول إنها أكبر من الصفر مباشرة)

نوحد المقامات

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية (v_n) متزايدة تماماً

3/18 $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تراجعياً وفق $v_0 = 1$ ، $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$

① تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية

③ استنتج عبارة v_n بدلالة n

1) لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E(n) : v_n > 0 \; ; \; n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن $v_0 > 0 \Leftarrow 1 > 0$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : v_n > 0 \; ; \; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : v_{n+1} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{v_n}{v_n+1} > 0$$

الإثبات

من الفرض $v_n > 0$ (البسط)

ومنه $1 + v_n > 1 > 0$ (المقام)

ومنه: $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} > 0$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 0$

(2. $U_{n+1}-U_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \Rightarrow U_{n+1}-U_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{v_n}{v_n} = 1 = r$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=1$

حيث : $U_0 = \frac{1}{v_0} = 1$

(3 $U_n = U_0 + nr \Rightarrow \boxed{U_n = 1+n}$

$v_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow v_n = \frac{1}{1+n}$

لاتعتبر جهة المتراجحة

$\frac{2}{21}$ ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n نرمز $E_{(n)}$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$ أثبت أن المتراجحة $E_{(n)}$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n

لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E_{(n)}: (1+x)^n \geq 1+nx \ ; n\geq 0$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأنه $(1+x)^0 \geq 1 \Leftarrow 1\geq 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: (1+x)^n \geq 1+nx \ ; n\geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

الإثبات: من الفرض: $(1+x)^n \geq 1+nx$

بالضرب بـ $(1+x)$ الموجب

$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq \underline{1+x+nx} + \underbrace{nx^2}_{\text{عدد موجب}} \geq 1+x+nx$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx$

أي القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أياً يكن $n\geq 0$

$\frac{15}{24}$ نتأمل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدريج: $\begin{cases} U_0=1 \ , \ U_1=4 \\ U_{n+1}=5U_n-6U_{n-1} \end{cases}$

① لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ $v_n = U_{n+1}-2U_n$، أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها (3)

② لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ $w_n = U_{n+1}-3U_n$، أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها (2)

③ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n بدلالة n

/ /

1) لنبرهن بالتراجع صحة القضية: $E_{(n)}: \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3 \; ; n \geq 0$

$U_2 = 5U_1 - 6U_0 = 20 - 6 = 14$

I) القضية $E_{(0)}$ صحيحة لأن:

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{U_2 - 2U_1}{U_1 - 2U_0} = \frac{14 - 2(4)}{4 - 2(1)}$

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{14-8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{v_1}{v_0} = 3$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E_{(n)}: \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3 \; ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)}: \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} = 3 \; ; n \geq 0$

$v_{n+2} = 3v_{n+1}$

الإثبات:

$v_{n+2} = U_{n+3} - 2U_{n+2} = 5U_{n+2} - 6U_{n+1} - 2U_{n+2}$

$= 3U_{n+2} - 6U_{n+1} = 3(U_{n+2} - 2U_{n+1})$

$v_{n+2} = 3v_{n+1}$

ن القضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية

طريقة ثانية: $v_n = U_{n+1} - 2U_n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{U_{n+2} - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n} = \frac{5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n} = \frac{3U_{n+1} - 6U_n}{U_{n+1} - 2U_n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(U_{n+1} - 2U_n)}{U_{n+1} - 2U_n} = 3 = q$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = 3$

2) $W_n = U_{n+1} - 3U_n$

$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{U_{n+2} - 3U_{n+1}}{U_{n+1} - 3U_n} = \frac{5U_{n+1} - 6U_n - 3U_{n+1}}{U_{n+1} - 3U_n} = \frac{2U_{n+1} - 6U_n}{U_{n+1} - 3U_n}$

$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2(U_{n+1} - 3U_n)}{U_{n+1} - 3U_n} = 2 = q$

فالمتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q' = 2$

3) $v_n = v_0 \cdot q^n \quad , \quad v_0 = U_1 - 2U_0 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow v_n = 2(3)^n$

$W_n = W_0 \cdot q^n \quad , \quad W_0 = U_1 - 3U_0 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow W_n = (2)^n$

الاستنتاج:

$v_n = U_{n+1} - 2U_n$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n$

بالطرح: $v_n - W_n = U_n$

$\Rightarrow U_n = 2(3)^n - (2)^n$

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

28

17/26 : ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ ومنه

$U_0 = 2\cos\theta$, $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

① احسب U_1 , U_0 ② اثبت بالتراجع أن $U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

1.

$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$

2.

لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n): U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) : n\geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن:

$U_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta$ محققة

II) نفرض صحة القضية

$E(n): U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) : n\geq 0$

III) نبرهن صحة القضية

$E(n+1): U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

الإثبات:

$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right))} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2\cdot 2^n}\right)}$

$U_{n+1} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \Longrightarrow 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n\geq 0$

التمرين **9/24** الحل:

1) $f(x) = ax+b$ تابع معرف على $\mathbb{R}$

2) $f(x) = x \Longleftrightarrow ax+b = x$

حل للمعادلة ℓ $\Longleftrightarrow a\ell+b = \ell$

$\Longleftrightarrow \boxed{a\ell - \ell = -b}$ ★

$\Longleftrightarrow \ell(a-1) = -b$

$\Longleftrightarrow \boxed{\ell = \frac{-b}{a-1}}$

ALADIB

3) $U_n = v_n - \ell$ $\Rightarrow$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell}$

$-b = a\ell - \ell$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a v_n + b - \ell}{v_n - \ell} = \frac{a v_n - a\ell + \ell - \ell}{v_n - \ell} = \frac{a(v_n - \ell)}{v_n - \ell} = a = q$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = a$

$U_n = U_0 \cdot q^n$, $U_0 = v_0 - \ell$ $\Rightarrow$ $U_0 = v_0 + \frac{b}{a-1}$

$$\boxed{U_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right) \cdot a^n}$$

$v_n = U_n + \ell$ $\Longrightarrow$ $\boxed{v_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}}$

ملاحظة: لتخمين الحد العام لمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بعلاقة تدريجية من الشكل

$U_{n+1} = aU_n + b$

يمكن الاستفادة من القانون: ~~[illegible]~~ على المسودة

$$\boxed{U_n = \left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}}$$

عند تخمين الحد العام لمتتالية يجب أن نبرهن صحة التخمين عن طريق البرهان بالتراجع

$\frac{7}{23}$ نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا ومن: $U_0 = 7$, $U_{n+1} = 10U_n - 18$

خمن عبارة U_n بدلالة n ثم اثبت صحة التخمين.

$U_1 = 52 = 5\times 10^1 + 2$ $\qquad$ $U_2 = 502 = 5\times 10^2 + 2$

$U_3 = 5002 = 5\times 10^3 + 2$ $\qquad$ $U_4 = 50002 = 5\times 10^4 + 2$

أبسط الصفر

بالتخمين نجد $U_n = 5\times 10^n + 2$

طريقة ثانية على المسودة

$a = 10$, $b = -18$

$U_n = \left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) \cdot a^n - \frac{b}{a-1} = \left(7 - \frac{18}{9}\right) \cdot 10^n + \frac{18}{9}$

$U_n = 5\times 10^n + 2$

3 ص 22 ، ضمنية

30

لنبرهن بالتراجع صحة القضية

$E(n) : U_n = 5\times10^n + 2 \; : n\geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن

$U_0 = 5\times10^0 + 2 = 5+2 = 7$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : 5\times10^n + 2 \; : n\geq 0$

III) نبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n+1) : U_{n+1} = 5\times10^{n+1} + 2$

الإثبات

$U_{n+1} = 10U_n - 18 = 10(5\times10^n + 2) - 18 = 5\times10^{n+1} + 20 - 18 = 5\times10^{n+1} + 2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n\geq 0$

$\frac{3}{22}$ ① $U_1 = 1$, $U_2 = 3$, $U_3 = 1$, $U_4 = 3$

بالتخمين نجد :

$\boxed{U_n = (-1)^n + 2}$

لنبرهن بالتراجع صحة القضية

$E(n) : U_n = (-1)^n + 2 \; : n\geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن $U_0 = (-1)^0 + 2 = 3$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n) : U_n = (-1)^n + 2 \; : n\geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : U_{n+1} = (-1)^{n+1} + 2$

الإثبات

$U_{n+1} = -U_n + 4 = -1((-1)^n + 2) + 4 = (-1)^{n+1} - 2 + 4 = (-1)^{n+1} + 2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n\geq 0$

الوحدة الرابعة تحليل

نهاية متتالية

للاستاذ: إيّاد إدريس

(مشرف مادة الرياضيات في ثانويّة السّعادة)

نهاية متتالية

1) حالة نهاية منتهية (حقيقية).

* إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ قلنا أنّ المتتالية متقاربة من العدد l.

2) حالة النهاية اللانهائية.

* إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ قلنا أنّ المتتالية متباعدة "متباعدة نحو $+\infty$".
* إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ قلنا أنّ المتتالية متباعدة "متباعدة نحو $-\infty$".

$\left(\frac{1}{119}\right.$ التمرين الأول صفحة: المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $U_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ ، جد نهاية $(U_n)_{n\geq1}$

أ) جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق: $U_n \in]-10^{-3},10^{-3}[$ عند كل $n>n_0$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 = c \quad , \quad r=\frac{10^{-3}+10^{-3}}{2}=10^{-3}=\frac{1}{10^3}$$

$$U_n \in]-10^{-3},10^{-3}[\iff |U_n - c| < r$$

$$\iff \left|\frac{1}{n\sqrt{n}}-0\right| < \frac{1}{10^3}$$

$$\overset{n\geq1}{\iff} \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3}$$

$$\iff n\sqrt{n} > 10^3$$

$$\overset{\text{نربع}}{\iff} n^3 > 10^6$$

$$\overset{\text{جذر تكعيبي}}{\iff} n > 10^2 \Rightarrow \boxed{n_0 = 10^2 = 100}$$

$\left(\frac{2}{119}\right.$ المتتالية $(U_n)_{n\geq2}$ معرفة وفق $U_n=\dfrac{3n+1}{n-1}$ جد نهاية المتتالية ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل

$U_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0

32

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 3 = C$$

$$r = \frac{3.02 - 2.98}{2} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$U_n \in]2.98 , 3.02[\iff |U_n - C| < r$$

$$\iff \left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < \frac{1}{50}$$

$$\iff \left|\frac{4}{n-1}\right| < \frac{1}{50}$$

$$\overset{n \geq 2}{\iff} \frac{4}{n-1} < \frac{1}{50}$$

$$\iff \frac{n-1}{4} > 50$$

$$\iff n-1 > 200$$

$$\iff n > 201$$

ومنه $\boxed{n_0 = 201}$

حالة ثانية «حصر» 3/119) المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $U_n = n\sqrt{n}$ حدد نهاية المتتالية ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $U_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

$$U_n > 10^6 \iff n\sqrt{n} > 10^6$$

$$\overset{\text{نربع}}{\iff} n^3 > 10^{12}$$

$$\overset{\text{جذر تكعيبي}}{\iff} n > 10^4$$

ومنه

$$\boxed{n_0 = 10^4 = 10000}$$

إيجاد نهاية متتالية :

3/123) فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

1) $U_n = \frac{2n+3}{3n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3}$$

2) $U_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty + 0 = +\infty$$

3) $U_n = \frac{3n^2-1}{3n+5}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

4) $U_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{4} = 2$$

5) $U_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$$

6) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$

$$U_n = \sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} U_n$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين : عندما $n \to +\infty$ نكتب :

$$U_n = \frac{\left[\sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$U_n = \frac{n^2+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{n^2+n-n^2-n-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

7) $U_n = \dfrac{n!-2}{n!}$

$U_n = \dfrac{n!}{n!} - \dfrac{2}{n!} = 1 - \dfrac{2}{n!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1 - 0 = 1$

8) $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$ توحيد ← ضرب ← إخراج من المقام

$U_n = \dfrac{n\sqrt{n+2} - n\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \dfrac{n\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$U_n = \dfrac{n\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$

$U_n = \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

9) $U_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ؛ عندما $n\to+\infty$ نكتب:

$U_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2} = \dfrac{n\left(\sqrt{n}+1\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

10) $U_n = n^2\left[\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ من الشكل $\infty . 0$ عدم تعيين ؛ عندما $n\to+\infty$ نكتب:

$$U_n = n^2 \frac{\left[\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right]\left[\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}\right]}{\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$U_n = \frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}} \Rightarrow U_n = \frac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{2}}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

III) $U_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

$$U_n = \frac{\left[3n - \sqrt{9n^2+1}\right]\left[3n + \sqrt{9n^2+1}\right]}{\sqrt{n^2+5}\left[3n + \sqrt{9n^2+1}\right]} = \frac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left[3n + \sqrt{9n^2+1}\right]}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

مبرهنة الإحاطة:

$\frac{1}{123}$) المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق: $U_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$

تحقق أنه $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < U_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ أيا يكن $n \geq 1$ ثم استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

نقسم على $\sqrt{2} > 0$: $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

أي:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

بما أن: $\lim_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ، $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

$\frac{2}{123}$) المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة $U_n = n+1-\cos n$ ، أوجد نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

نضرب بـ -1 : $1 \geq -\cos n \geq -1$

نضيف $(n+1)$: $n+2 \geq U_n \geq n$

ومنه

$$n \leq U_n \leq n+2$$

علماً أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2) = +\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

ملاحظة: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $U_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$

جد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

ومنه: $2n-1 \leq 2n+(-1)^n \leq 2n+1$

نقسم على $3n>0$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq U_n \leq \frac{2n+1}{3n}$$

علماً أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}\right) = \frac{2}{3}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n}\right) = \frac{2}{3}$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{137}$) أوجد نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ ، $(y_n)_{n\geq 1}$ ، $(w_n)_{n\geq 1}$ ، $(t_n)_{n\geq 1}$

المعرفة وفق:

$W_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، $y_n = x_n\sqrt{n}$ ، $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ، $t_n = \frac{y_n}{w_n}$

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين : عندما $n\to+\infty$ نكتب :

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0}$$

$$y_n = x_n\sqrt{n}$$

$$y_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\sqrt{n} = \frac{n}{n+1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 1}$$

$$w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0-0=0}$$

$$t_n = \frac{y_n}{w_n} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$t_n = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-n-1}{\sqrt{n}(n+1)}} = \frac{n}{n+1}\times\frac{\sqrt{n}(n+1)}{-1}$$

$t_n = -n\sqrt{n}$; $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty}$

$\left(\frac{1}{137}\right)$: المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $U_n = \frac{1}{n!}$

1) احسب الحدود الستة الأولى منها

2) تحقق أنه $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

1) $U_1 = \frac{1}{1!} = 1$, $U_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$U_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

2) لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E_{(n)} : 0 < U_n \leq \frac{1}{n}$

I) القضية $E_{(1)}$ صحيحة لأن $0 < U_1 \leq 1$

نفرض صحة $0 < 1 \leq 1$ محققة

II) القضية $E_{(n)} : 0 < U_n \leq \frac{1}{n} ; n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية $E_{(n+1)} : 0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

$$0 < \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1}$$

الإثبات: من الفرض $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

نضرب بـ $\frac{1}{n+1}$

$$0 < \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$$

أي: $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

والقضية $E_{(n+1)}$ صحيحة ومنه القضية $E_{(n)}$ صحيحة أياً يكن $n \geq 1$

لدينا: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، $\lim_{n \to +\infty} (0) = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

($\frac{3}{137}$) المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق $U_n = \frac{n^3}{n!}$

1) احسب حدود لها الستة

2) a) أثبت أنه $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ أياً يكن $n \geq 4$

b) استنتج نهاية $(U_n)_{n \geq 1}$

1) $U_1 = 1$

2) a) لنبرهن بالتراجع صحة القضية

$E_{(n)} : n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3) \; ; n \geq 4$

I) القضية $E_{(4)}$ صحيحة لأن

$4! \geq 4(3)(2)(1) \Rightarrow 24 \geq 24$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3) \quad : n \geq 4$

III) نبرهن صحة القضية

$$E(n+1): (n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$$

الإثبات: من الفرض:

$$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$$

نضرب بـ $(n+1)$

$$(n+1)! \geq n(n+1)(n-1)(n-2)\underbrace{(n-3)}_{\text{موجب}} \geq n(n-1)(n+1)(n-2)$$

أي أن:

$$(n+1)! \geq n(n+1)(n-1)(n-2)$$

أي أن القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة آياً تكن $n \geq 4$.

b) وجدنا سابقاً أن

$$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$$

ومنه

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

نضرب بـ $n^3 > 0$

$$0 < \underbrace{\frac{n^3}{n!}}_{\text{موجب}} \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

لكن: $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^3}{\underbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)}_{n^4}}\right] = 0$, $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

للتدريب $\frac{4}{137}$) أدرس تقارب المتتاليات

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{x_n}{n} \quad , \quad w_n = x_n - n \quad , \quad t_n = \frac{y_{n-1}}{w_{n-1}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty}$$

40

$$y_n = \frac{x_n}{n} = \frac{\frac{n^2+1}{n+1}}{n} = \frac{n^2+1}{n+1} \times \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{n^2+1}{n^2+n} \quad , \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 1}$$

$$w_n = x_n - n = \frac{n^2+1}{n+1} - n$$

$$w_n = \frac{n^2+1-n^2-n}{n+1} = \frac{1-n}{n+1} \quad , \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = -1}$$

$$t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1} = \frac{\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1}{\frac{1-n}{n+1} - 1}$$

$$t_n = \frac{\frac{n^2+1-n^2-n}{n^2+n}}{\frac{1-n-n-1}{n+1}} = \frac{\frac{1-n}{n(n+1)}}{\frac{-2n}{n+1}} = \frac{1-n}{n(n+1)} \times \frac{n+1}{-2n}$$

$$t_n = \frac{-(1-n)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n^2} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = 0}$$

6/137 أوجد نهاية كل من : $x_n = \frac{3n^2-4}{n+1}$, $y_n = \frac{x_n}{n}$, $u_n = x_n - 3n$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

$$y_n = \frac{x_n}{n} = \frac{\frac{3n^2-4}{n+1}}{n} = \frac{3n^2-4}{n+1} \times \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{3n^2-4}{n^2+n} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 3}$$

$$u_n = x_n - 3n = \frac{3n^2-4}{n+1} - 3n = \frac{3n^2-4-3n^2-3n}{n+1}$$

$$u_n = \frac{-3n-4}{n+1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -3}$$

حالة متتالية هندسية

ليكن q عدداً حقيقياً:

1) في حالة $-1 < q < 1$ يكون $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

2) في حالة $q > 1$ يكون $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

3) في حالة $q \leq -1$ ليس للمتتالية نهاية

4) في حالة $q = 1$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$

(4/119) احسب نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$

حيث $x_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ ، $y_n = \dfrac{10^n}{(10{,}1)^n}$

الحل:

* $x_n = \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

نلاحظ أن $\dfrac{3}{2} > 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

* $y_n = \left(\dfrac{10}{10.1}\right)^n$

نلاحظ أن $-1 < \dfrac{10}{10.1} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$

(15/142) ادرس تقارب كل من المتتاليتين

$x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ، $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1} = \frac{3^n\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$

$$x_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

نلاحظ أن $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ ، ونلاحظ أن $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

42

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$ فالمتتالية (x_n) متقاربة من (1)

$$y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1} = \frac{10^n\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{10^n\left[1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}$$

$$y_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

فالأن $-1 < \frac{1}{10} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

ومنه المتتالية (y_n) متقاربة من (1)

دورة $\left(\dfrac{6}{119}\right)$ نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق

$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ ، $x_0 = 3$ $\qquad y_n = x_n + 3$

1) a) اثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية

b) احسب y_n و x_n بدلالة n

2) نفرض $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$ ، $S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

a) احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$

1)

a) $$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}(x_n+3)}{x_n+3}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{3} = q$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

صنو الحضارة

ALADDIB

/ /

b)

$$y_0 = x_0 + 3 = 6$$

$$y_n = y_0 \cdot q^n$$

$$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{y_n = \frac{6}{3^n}}$$

$$x_n = y_n - 3 \Rightarrow \boxed{x_n = \frac{6}{3^n} - 3}$$

2) a)

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

S_n تمثل مجموع $(n+1)$ حد من المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $y_0 = 6$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = y_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$\boxed{S_n = 9 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \dots + y_n - 3$$

$$S'_n = \underbrace{y_0 + y_1 + \dots + y_n}_{S_n} - (\underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{3(n+1)})$$

$$S'_n = S_n - 3(n+1)$$

عدد الحدود

$$S'_n = 9 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n - 3$$

$$\boxed{S'_n = 6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n}$$

b) بما أنّ $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

ومنه:

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 9$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$

$\frac{5}{119}$) ليكن $-1 < q < 1$ ولنعرّف المتتالية بالعلاقة $U_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

اعطِ صيغة أخرى تفيد في حساب U_n واستنتج نتيجة $S = \lim_{n\to+\infty} U_n$

U_n تمثّل $(n+1)$ من حدود متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول (1)

$$U_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$U_n = 1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

ملاحظة:
لا يمكن إيجاد نهاية متتالية المجاميع إلا بعد حساب مجموعها

$$U_n = \frac{1-q^n \cdot q}{1-q}$$

بما أنّ $-1 < q < 1$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

مثال: ادرس تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $U_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$

الحل:

$$U_n = 1 - \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right]}$$

نلاحظ أنّ إشارة تخالف باقي الحدود ومنه لا نعتبره حدّاً أول $\left(\frac{1}{2^0}\right)$

تمثل مجموع n حد من المتتالية الهندسية التي أساسها $\left(\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$U_n = 1 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right] = 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

ومحدودية التابع تؤدي إلى اطراد ومحدودية المتتالية.

$U_n = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

بما أنّ $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ فإنّ

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

فالمتتالية متقاربة من (0).

محدودية المتتالية:

تعريف:

يوجد عدد حقيقي M بحيث $U_n \leq M$ نسمي M عنصر راجح	$\Longleftrightarrow$	المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى
يوجد عدد حقيقي m بحيث $U_n \geq m$ نسمي m عنصر قاصر	$\Longleftrightarrow$	المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى
المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى والأعلى معاً	$\Longleftrightarrow$	المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة $m \leq U_n \leq M$

مثال: أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = 3 - 2\cos n$ محدودة.

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

ومنه $2 \geq -2\cos n \geq -2$

ومنه $5 \geq 5 - 2\cos n \geq 1$

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى بالعدد $\underbrace{(1)}_{\text{عنصر قاصر}}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $\underbrace{(5)}_{\text{عنصر راجح}}$ فهي محدودة.

$\frac{10}{138}$ المتتالية $(U_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $U_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$

اثبت أن المتتالية U_n محدودة من الأعلى بالعدد $(\frac{1}{2})$ ← عنصر راجح

ليكن التابع f المعرف على $[4,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$

ندرس تغيرات التابع f.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[4,+\infty[$

$f(4) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ مرفوض ليس ضمن المجال $[4,+\infty[$

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

نحصر بين المستقر العلوي $\Leftarrow$ $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$

أما لو كانت معرفة بالتدريج نستخدم البرهان بالتدريج (لأنها معرفة من خلال الحد العام)

وبما أن $U_n = f(n)$

فإن: $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$ (يمكنك أن تأتي برهان هذه العلاقة لاستخدام التدرج)

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 4}$ محدودة من الأعلى بالعدد $(\frac{1}{2})$ "العدد $\frac{1}{2}$ عنصر راجح على المتتالية"

"وهي محدودة أيضاً من الأدنى بالعدد (0)"

$\frac{3}{128}$ تأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

اثبت أن $1 \leq U_n \leq 3$ أياً يكن العدد الطبيعي n

الحل: ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$[1,3] \cup]1,+\infty[$

مشترك وغير مشترك

47

ندرس تغيرات التابع f :

f معرف واشتقاقي ومستمر على $[0,+\infty[$

$f(0)=1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow -2x^2+2=0$

$\Rightarrow x^2 = 1$: $x=-1$ مرفوض ، $x=1$ مقبول

$f(1)=3$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

ملاحظة: المستقر الفعلي هو اجتماع مجالات يعني المشترك وغير المشترك

$[1,3] \cup]1,3]$

$[1,3]$

$1 \leq f(x) \leq 3$

وبما أنه $U_n = f(n)$ نجد

$1 \leq U_n \leq 3$ أياً يكن العدد الطبيعي n.

$\dfrac{5}{128}$ فيما يأتي بيّن إذا كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة أو محدودة من الأعلى أو محدودة من الأدنى

1) $U_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$

ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

ندرس تغيرات التابع f :

f معرف واشتقاقي ومستمر على $[1,+\infty[$

$f(1)=2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3} < 0$

③ الواحد أصلاً ناتج بعيد المقام

48

/ /

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1

$$1 < f(x) \leq 2$$

وبما أن $V_n = f(n)$ فإنّ

$$1 < V_n \leq 2$$

المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد (2) محدودة من الأدنى بالعدد (1) إذن محدودة

(2) $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$ الواحد لا تعدم المقام

ندرس تغيرات f:

f معرف واشتقاقي ومستمر على $[1,+\infty[$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$\oplus$ $\oplus$

/ /

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1

حد أعلى (أكبر)

حد أدنى (أصغر)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(x) < 1$$

وبما أن $U_n = f(n)$ فإن

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n < 1$$

المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ومحدودة من الأعلى بالعدد (1) فهي محدودة.

$\boxed{\;}$ $U_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$

ليكن التابع f المعرف على $[1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{2x+3}}$$

ندرس تغيرات f:

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[1, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

عادي ⊖ ، x غير عادي ⊖

$$f(1) = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \cdot (-2)}{2x+3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+3)\sqrt{2x+3}} > 0$$

الواحد ما بيعمل

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{-2}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	0

$$\frac{-2}{\sqrt{5}} \leq f(x) < 0$$

ولدينا $U_n = f(n)$ فإنّ

$\frac{-2}{\sqrt5} \leq U_n < 0$

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد $\left(\frac{-2}{\sqrt5}\right)$ ومحدودة من الأعلى بالعدد (0) إذن محدودة.

4) $U_n = n\sqrt3 - 2$

ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق

$f(x) = \sqrt3\, x - 2$

ندرس تغيرات التابع f :

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[1,+\infty[$

$f(1) = \sqrt3 - 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \sqrt3 > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\sqrt3-2$	↗	$+\infty$

$f(x) \geq \sqrt3 - 2$

ولدينا $U_n = f(n)$ فإنّ

$U_n \geq \sqrt3 - 2$

المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ محدودة من الأدنى بالعدد $(\sqrt3-2)$ وغير محدودة من الأعلى، إذن غير محدودة.

5) $U_n = n^2+n-1$

ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق

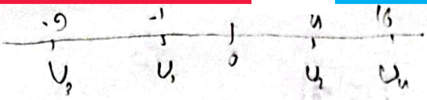
$f(x) = x^2+x-1$

ندرس تغيرات f :

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[1,+\infty[$

$f(1) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x+1 > 0$ في حال كهذه تكون موجبة x من موقعه



$U_n \in]-\infty, +\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) \geq 1$

وبما أن $U_n = f(n)$ فإن

$U_n \geq 1$

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد (1) وغير محدودة من الأعلى فهي غير محدودة

5) $U_n = n + \cos n$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$0 \leq n-1 \leq U_n \leq n+1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

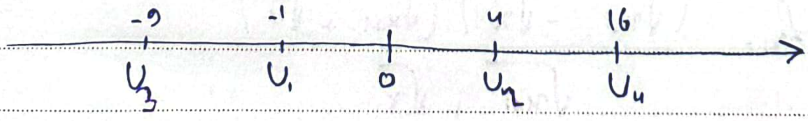
المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأدنى بالعدد (0) وغير محدودة من الأعلى فهي غير محدودة.

7) $U_n = (-1)^n \times n^2$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

ومنه

$-n^2 \leq U_n \leq n^2$



$U_n \in]-\infty, +\infty[$

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ غير محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى فهي غير محدودة.

ملاحظة: بعد حصر المتتالية المثلثية:

① $b \leq U_n \leq a$

ثابت ، ثابت

محددة من الأدنى بالعدد (b) ومن الأعلى بالعدد (a) فهي محددة

② $t(n) \leq U_n \leq f(n)$

$+\infty$ ، ثابتة

غير محددة من الأعلى ولكن محددة من الأدنى (نعوض حد البدء في $t(n)$ لإيجاد العدد القاصر)

③ $t(n) \leq U_n \leq f(n)$

$-\infty$

غير محددة من الأدنى ولكن محددة من الأعلى (نعوض في $f(n)$)

④ $t(n) \leq U_n \leq t(n)$

$-\infty$ ، $+\infty$

عندئذٍ غير محددة $U_n \in]-\infty, +\infty[$

تمرين: اثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ محددة من الأعلى ومحددة من الأدنى.

ليكن التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

ندرس تغيرات f:

f معرف ومستمر على $[0, +\infty[$

$f(0) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين ؛ عندما $x \to +\infty$ نكتب

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

f متناقصة تماما وبالتالي $U_n = f(n)$ فإن U_n متناقصة.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

$0 < f(x) \leq 1$

وبما أن $U_n = f(n)$ فإن

$0 < U_n \leq 1$

المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأدنى بالعدد 0 ومحدودة من الأعلى بالعدد 1

تقارب المتتاليات المحددة.

مبرهنات:

$\boxed{1}$ كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة.

$\boxed{2}$ كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة.

$\boxed{3}$ إذا كانت المتتالية معرفة بعلاقة تدريجية ومتقاربة من العدد l فإن (l) هو حل للمعادلة $f(x) = x$.

تمرين: نتأمل المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$U_n : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \end{cases}$$

1) اثبت أن $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماما.

2) اثبت أن $(U_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأعلى بالعدد (2).

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

1) لنبرهن بالتدرج صحة القضية: $E(n) : U_{n+1} > U_n \quad ; n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأنه:

$E(0) : U_1 > U_0 \Rightarrow \sqrt{2} > 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية: $E(n) : U_{n+1} > U_n \; ; n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $E(n+1) : U_{n+2} > U_{n+1}$

ومنه

$$\Longleftrightarrow \sqrt{1+U_{n+1}} > \sqrt{1+U_n}$$

للمتتالية عدد كبير من الحدود أي يمرر الدليل) إذا صغرنا في النهاية إذا كانت متزايدة
وأكبرنا في النهاية إذا كانت متناقصة.

$\boxed{54}$

الإثبات: من الفرض: $U_{n+1} > U_n$

ومنه

$$1+U_{n+1} > 1+U_{n+2}$$

بجذر

$$\sqrt{1+U_{n+1}} > \sqrt{1+U_n}$$

ومنه

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

أي أن القضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة ومنه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

2) لنبرهن بالتراجع صحة القضية $H(n): U_n \leq 2 : n \geq 0$ نأخذ ن بالحالة العامة {حسب التعريف}

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن $U_0 \leq 2$

$1 \leq 2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $H(n): U_n \leq 2 : n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $H(n+1): U_{n+1} \leq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+U_n} \leq 2$$

الإثبات: من الفرض $U_n \leq 2$

ومنه $1+U_n \leq 3$

بجذر

$$\sqrt{1+U_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$$

أي $U_{n+1} \leq 2$

ومنه القضية $H(n+1)$ صحيحة فالقضية $H(n)$ صحيحة أيا يكن $n \geq 0$

والمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى بالعدد (2)

3) بما أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى بالعدد (2) ومتزايدة فهي متقاربة.

إيجاد النهاية: $U_{n+1} = f(U_n)$

ومنه $f(x) = \sqrt{1+x}$

نحل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x$

نربع بشرط $x \geq 0$

$1+x = x^2$

ومنه $x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5$

مقبول $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، مرفوض $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أصغر راجح

مثال نموذجي:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n \end{cases}$

وليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2) استنتج أن العدد (3) راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ (يمكن أن يأتي السؤال قاصر بدل راجح) هل ممكن ما قاصر

{لا تحكي الاستنتاج من جدول التغيرات مباشرةً لأن $f(n) \neq U_n$ بل $f(U_n) = U_{n+1}$}

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

4) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ ، $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \Rightarrow x = 3$ ، $f(3) = 3$

متزايد $]-\infty, 3]$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

نأخذ القسم الأول من الجدول

1) لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n): U_n \leq 3 \quad : n \geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن $U_0 \leq 3 \iff \frac{1}{2} \leq 3$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): U_n \geq 3 \quad : n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية: $E(n+1): U_{n+1} \leq 3$

الإثبات: من الفرض $U_n \leq 3$

ومنه $f(U_n) \leq f(3)$ (لكون f متزايدة تماما على $]-\infty, 3]$)

ومنه $U_{n+1} \leq 3$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 0$ والعدد (3) راجح على المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ (أي أنها محدودة من الأعلى بالعدد 3)

3) لنبرهن بالتراجع صحة القضية $H(n): U_{n+1} \geq U_n$

I) القضية $H(0)$ صحيحة لأن $U_1 \geq U_0$

$\frac{11}{12} \geq \frac{1}{2}$ محققة

II) نفرض صحة القضية $H(n): U_{n+1} \geq U_n \quad : n \geq 0$

III) نبرهن صحة القضية $H(n): U_{n+2} \geq U_{n+1}$

الإثبات: من الفرض $U_{n+1} \geq U_n$

ومنه $f(U_{n+1}) \geq f(U_n)$ (لكون f متزايدة تماما على $]-\infty, 3]$)

ومنه $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

والقضية $H(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $H(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 0$

والمتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

٢) لما أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة

إيجاد النهاية:

$$f(U_n) = U_{n+1}$$

ومنه

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$$

نحل المعادلة $f(x) = x$ $\Leftarrow$ $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = x$

$$-\frac{1}{3}x^2 + x = 0$$

$$x\left(-\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$$

إما $x = 0$ مرفوض أو $-\frac{1}{3}x + 1 = 0$

ليس حد من حدود المتتالية الحد الأول $\frac{1}{2}$ والمتتالية متزايدة

$\Leftarrow$ $-\frac{1}{3}x = -1$ $\quad x = 3$ مقبول

المتتالية متزايدة لا تأخذ الأكبر حتى لو كان الحلين من حدود المتتالية لا نأخذ سوف تتقارب منه

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 3}$$

ملاحظة:

إذا كانت $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية بجاميع ولسية هندسية وكانت المتتالية $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ الهندسية
وتحقق $U_n \leq \mathcal{V}_n \leq M$ فإن العدد M راجع على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

$\frac{6}{128}$ لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة

$$U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

١) أثبت بالتراجع على العدد n أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n

٢) استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

٣) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

١) لنبرهن بالتراجع صحة القضية $E(n): n \leq 2^n \,;\, n \geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن $1 \leq 2$ محققة

II) نفرض صحة القضية $E(n): n \leq 2^n \quad ; n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية

$$E(n+1): n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات: من الفرض $n \leq 2^n$

نضرب بـ 2 $\quad 2n \leq 2^{n+1}$

$$n+1 \leq n+n \leq 2^{n+1}$$

أي:

والقضية $P(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $P(n)$ صحيحة أيا يكن $n \geq 1$

2) وجدنا سابقا أنه $n \leq 2^n$ أيا يكن $n \geq 1$

$$n=1 \rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2^1}{3}$$

$$n=2 \rightarrow \frac{2}{3^2} \leq \frac{2^2}{3^2}$$

$$n=3 \rightarrow \frac{3}{3^3} \leq \frac{2^3}{3^3}$$

$$\frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n}$$

بالجمع

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

أي أن:

$$U_n \leq \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}}$$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $\left(\frac{2}{3}\right)$

$$U_n \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$U_n \leq 2\left[1-\left[\frac{2}{3}\right]^n\right] \leq 2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{2}$$

$$U_n \leq 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

ALADIN

صنو الحضارة

3) لنبرهن أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

$$U_{n+1} = U_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0$$

* فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

4) وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد (2) فهي متقاربة.

$\left(\frac{17}{143}\right)$ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n\geq 1$ وفق

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

1) أثبت أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) استنتج أنّ العدد (3) راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

3) أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

1) لنبرهن بالتدريج صحة القضية $E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} : n\geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأنّ: محققة $1 \leq 1 \Leftarrow \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

II) نفرض صحة القضية: $E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} : n\geq 1$

III) نبرهن صحة القضية: $E(n+1): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

الإثبات: من الفرض

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب بـ $\frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n \cdot 2^{-1}} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \boxed{\frac{2}{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$$

أصغر أو يساوي 1

$\frac{1}{n+1}$ أكبر أو يساوي

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

ومنه

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

ومنه القضية $E(n+1)$ صحيحة $\Leftarrow$ فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n\geq 1$

60

2) وجدنا سابقاً أنّ $\frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!}$ أيّاً يكن $n \geq 1$

$n=0$ ليس من مجموعة التعريف $\leftarrow$

$n=1 \rightarrow \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} = 1$

$n=2 \rightarrow \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$

$n=3 \rightarrow \frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$

$n=n \rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

بالجمع

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}}_{U_n \text{ لا تشير}} = 1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

نضيف للطرفين (1)

$$U_n \leq 1+\underbrace{\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]}$$

تمثل مجموع n حد من متتالية هندسية

أساسها $\left(\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول (1)

$$U_n \leq 1+1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$U_n \leq 1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$U_n \leq 1+2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 3$$

دائماً

أي $U_n \leq 3$ فالعدد (3) راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

3) لنبرهن أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة.

متتاليات متجاورة

تعريف:

نقول أن المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقارب المتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq 0}$ من الصفر.

لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $\frac{1}{132}$

$S_n = \frac{1}{n+1}$ ؛ $t_n = -\frac{1}{2n+4}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

$S_{n+1} - S_n < 0$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .... (I

$t_{n+1} - t_n = -\frac{1}{2n+6} + \frac{1}{2n+4} = \frac{-2n-4+2n+6}{(2n+4)(2n+6)}$

$t_{n+1} - t_n = \frac{2}{(2n+4)(2n+6)} \Rightarrow t_{n+1} - t_n > 0$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .... (II

$S_n - t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$

$\lim_{n \to +\infty} (S_n - t_n) = 0 + 0 = 0$

فالمتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر .... (III

من I) و II) و III) نجد أن المتتاليتان متجاورتان

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} t_n = 0$$

2/137) لتكن $(t_n)_{n\geq 1}$ و $(S_n)_{n\geq 1}$ المتتاليتان المعرفتان وفق

$$S_n = 1 + \frac{1}{n^2} \qquad , \qquad t_n = \frac{n-1}{n}$$

أثبت أنها متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة

ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

ندرس اطراد التابع f:

f اشتقاقي على $[1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$$

فالتابع f متناقص تماماً ومنه أن $S_n = f(n)$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ---- I)

ليكن التابع g المعرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{x-1}{x}$$

ندرس إطراد التابع g:

g اشتقاقي على $[1,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

فالتابع g متزايد تماماً ومنه أن $t_n = g(n)$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ---- II)

$$S_n - t_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n - t_n) = 1 + 0 - 1 = 0$$

ومنه المتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر

من I) و II) و III) نجد أن المتتاليتان متجاورتان

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} t_n = 1$$

1) $y_n = x_n + \frac{1}{4n}$, $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ $\left(\frac{3}{13}\right.$

* $x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$

ومنه المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ...... (I

* $y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{4n+4} - x_n - \frac{1}{4n}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{4n}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{4n-4n-4}{4n(4n+4)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{-4}{4n(4n+4)}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{-4}{8n(2n+2)} = \frac{8n-8n-4}{8n(2n+2)(2n+1)}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{-4}{8n(2n+2)(2n+1)} < 0$

ومنه المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ...... (II

* $y_n = x_n + \frac{1}{4n} \Rightarrow y_n - x_n = \frac{1}{4n}$

$\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$

ومنه المتتالية $(y_n - x_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر ...... (III

من (I و (II و III نجد أن المتتاليتان متجاورتان

6-

2 $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$,

$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$,

* $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ------ (I

من الطلب 1

* $x_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}}$

$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n}_{(1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}_{(2)}$

$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2n}_{(2n+1)} + \frac{1}{2n+1}_{(2n)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ------ (II

$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$

$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$

$y_n - x_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{2n}$, $\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$

فالمتتالية $(y_n - x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من الصفر ------ (III

من (I ، (II ، (III نجد أن المتتاليتين متجاورتان.

3 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$,

$y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ----- (I

$y_n = x_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ----- (II

$y_n - x_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$

ومنه المتتالية $(y_n - x_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر ----- (III

من (I و (II و (III نجد أن المتتاليتين متجاورتان

$\boxed{4}$ $y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$, $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

$y_{n+1} = 2 + \frac{1}{(n+1)^2}$

$y_{n+1} - y_n = 2 + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ----- (I

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ------ (II

$$y_n - x_n = 2 + \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$y_n - x_n = \frac{n+1}{n^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$$

ومنه المتتالية $(y_n - x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من الصفر ------ (III

من (I ، (II ، (III نجد أن المتتاليتين متجاورتان.

(26/144) بين أن المتتاليتين متجاورتان $(x_n)_{n\geq 1}$ $(y_n)_{n\geq 1}$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}_{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}_{\left(\sqrt{n+1}\right)} \rightarrow$$ بعد الضرب بالمرافق

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ------ (I

67

$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

$y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \qquad (\sqrt{n+1})$

$y_{n+1} - y_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$

ومنه المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ——— (II

$x_n - y_n = -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = -2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$x_n - y_n = \frac{-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{-2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$

فالمتتالية $(x_n - y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من الصفر ——— (III

من (I و (II و (III نجد أن المتتاليتين متجاورتان.

$\frac{21}{144}$) المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

2) أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أنه $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أياً يكن $n \geq 1$

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

صنع الكهارة

ALADIB

1) $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

2) $E(n): U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \; ; n \geq 1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن: $U_1 \leq 2 - 1$

$\frac{1}{1^2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$ محققة

II) نفرض صحة القضية

$$E(n): U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \; ; n \geq 1$$

III) نبرهن صحة القضية

$$E(n+1): U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

الإثبات:

من الفرض: $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

نضيف للطرفين: $\frac{1}{(n+1)^2}$

$$U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

لأن:

$$\cancel{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} - \cancel{2} + \frac{1}{n+1} = \frac{\cancel{-n^2} - 2n - 1 + n + \cancel{n^2} + n}{n(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 + \frac{1}{n+1}}_{\text{الفرق}} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$$

ومنه $U_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة، ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \geq 1$

3) وجدنا سابقاً أن:

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

ومنه

$U_n \leq 2$ أياً يكن $n \geq 1$

فالعدد (2) راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد (2) وبما أنها متزايدة فهي متقاربة.

تمرين: ($\frac{23}{144}$) لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماما n

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

2) اكتب $U_{2n} - U_n$ واستنتج أن

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$$

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$U_{2n} - U_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{الأكبر}} + \frac{1}{n+2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{الأصغر}}$$

n+n

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

أيا يكن $n \geq 1$

ومنه:

$$n \cdot \frac{1}{2n} \leq U_{2n} - U_n \leq n \cdot \frac{1}{n+1}$$

ومنه:

$$\frac{1}{2} \leq U_{2n} - U_n \leq \frac{n}{n+1}$$

أي

$$\boxed{U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}}$$

أيا $n \geq 1$

3) أثبت أن $U_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ مستعملا البرهان بالتراجع أيا يكن العدد الطبيعي n غير معدوم

لنبرهن بالتراجع صحة القضية:

$$E(n) : U_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن

$$U_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$$ محققة

II) نفرض صحة القضية:

$$E(n) : U_{2^n} \geq \frac{n}{2} \; ; \; n \geq 1$$

III) نبرهن صحة القضية

$$E(n+1) : U_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$$

نستفيد من المتراجحة - نستفيد من الفرض

الإثبات:

لدينا: $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2} \; : n \geq 1$ من المتراجحة

$U_{2^n \cdot 2} - U_{2^n} \geq \frac{1}{2} \; : n \geq 1$ نريد الوصول إلى $U_{2^{n+1}}$

فإن:

$$U_{2^{n+1}} \geq U_{2^n} + \frac{1}{2}$$

من الفرض

$$U_{2^{n+1}} \geq \boxed{U_{2^n}} + \frac{1}{2} \geq \boxed{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}$$

أي $U_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا يكن $n \geq 1$

4) هل للمتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ نهاية حقيقية؟

لدينا $U_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2}\right) = +\infty$ إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{n\to+\infty} U_{2^n} = +\infty$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

ليس للمتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ نهاية حقيقية.

ملاحظة: حصر متتالية الجامع بين ~~مجموعين~~ مجموعين

الأكبر × عدد الحدود $\geq S_n \geq$ الأصغر × عدد الحدود

24/144) المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل $n\geq1$ وفق:

$$U_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$$

صغير

1) اثبت أنّ $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ أيا يكن $n\geq1$

2) استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$

1)

$$\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\dots+\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$$

$$\leq \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{n^2+1}$$

أيا يكن $n\geq1$

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq n\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

أيا يكن $n\geq1$

لكن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة

25/144) المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n\geq1$ وفق:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) اثبت أنّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ أيا يكن $n\geq1$

2) استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ وما نهايتها

1)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

أيا يكن $n\geq1$

$f'(x) = 2x-2$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{71}$

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

أياً يكن $n \ge 1$

* $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

* $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) = 1$$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

ومنه المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ متقاربة.

$\frac{16}{142}$) المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق: $U_0 = \frac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

1) الطريقة هذه فقط إذا كدرجة ثانية

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 1 - 1 + 2$

$U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$

$E(n): 1 \le U_n \le 2 \quad : n \ge 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن

$1 \le U_0 \le 2$

$1 \le \frac{3}{2} \le 2$

أثناء الإثبات بالإضافة ما بتزبط (U_n) بالطرفين
طريقة ثانية (...)
عكس أخذ تابع
والتصوير
كون التابع
متزايد تماماً

II) نفرض صحة القضية $E(n): 1 \le U_n \le 2 \quad : n \ge 0$

III) نبرهن صحة القضية:

$E(n+1): 1 \le U_{n+1} \le 2$

$\Longleftrightarrow 1 \le (U_n - 1)^2 + 1 \le 2$

الإثبات: من الفرض $1 \le U_n \le 2$

ومنه: $0 \le U_n - 1 \le 1$

نربع: $0 \le (U_n-1)^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \ge 0$

2) a أثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$

$= U_n^2 - 3U_n + 2$

$= (U_n - 2)(U_n - 1)$

b) استنتج أن المتتالية U_n متناقصة

وجدنا سابقاً $U_n \le 2$

ومنه $U_n - 2 \le 0$

ووجدنا أيضاً $U_n \ge 1$

ومنه $U_n - 1 \ge 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n = \underset{-}{(U_n-2)}\,\underset{+}{(U_n-1)} \le 0$

فالمتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ متناقصة

3) هل متقاربة؟ علماً أن المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة

إيجاد النهاية

$U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$f(x) = x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = x$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0$

إما $x = 1$ مقبول أو $x = 2$

(الحلول ضمن المجال $1 \le U_n \le 2$ ولكن للمتتالية متناقصة

و $U_0 = \frac{3}{2}$) $\Leftarrow$ نختار الأصغر

لو كان الحلان $\boxed{1}$ ، $\boxed{-2}$ مرفوض لعدم ضمن المجال

α

$f(n)-y_n = \frac{\sin x+1}{x^2} \geq 0$

$\boxed{72}$

27/145

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $U_0=3$ وعند كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{2}{U_n+1}$

1) أثبت أنه $U_n>0$ أياً يكن n

2) المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $t_n=\frac{U_n-1}{U_n+2}$ أثبت أنها هندسية

3) أكتب t_n و U_n بدلالة n احسب نهايتيهما

1) لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E(n): U_n>0 \; ; n\geq 0$

I) القضية $E(0)$ صحيحة لأن $U_0>0 \Rightarrow 3>0$ محققة

II) نفرض صحة القضية: $E(n): U_n>0 \; ; n\geq 0$

III) نبرهن صحة القضية: $E(n+1): U_{n+1}>0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{U_n+1}>0$ المطلوب

الإثبات: من الفرض: $U_n>0$

ومنه $U_n+1>1>0$

ومنه $U_n+1>0$ (المقام)

ولكن $2>0$ (البسط)

ومنه $\frac{2}{U_n+1}>0$

$\Rightarrow U_{n+1}>0$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ صحيحة ومنه $U_n>0$ أياً يكن $n\geq 0$

2)

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}\cdot\frac{U_n+2}{U_n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{2}{U_n+1}-1}{\frac{2}{U_n+1}+2}\cdot\frac{U_n+2}{U_n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{2-U_n-1}{U_n+1}}{\frac{2+2U_n+2}{U_n+1}}\cdot\frac{U_n+2}{U_n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{-U_n+1}{2U_n+4}\cdot\frac{U_n+2}{U_n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{-(U_n-1)}{2(U_n+2)}\cdot\frac{U_n+2}{U_n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = -\frac{1}{2} = q$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=-\frac{1}{2}$

3)

$t_n = t_0\, q^n \; ; \; t_0=\frac{2}{5}$

$$\boxed{t_n=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$t_n=\frac{U_n-1}{U_n+2}$$

$$t_nU_n+2t_n=U_n-1$$

$$-U_n+t_nU_n=-2t_n-1$$

$$U_n(t_n-1)=-2t_n-1$$

$$U_n=\frac{-2t_n-1}{t_n-1}$$

$$\boxed{U_n=\frac{-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}}$$

$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$ لأن $-1<-\frac{1}{2}<1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

مستبعد $\frac{7}{137}$ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) أثبت أنه $0 < U_n \leq 1$ أياً يكن n

المتتالية ليست معرفة بالتدريج بل من خلال الحد العام بدلالة الدليل

2) ⓐ أثبت أنه إذا كان $n > 10^4$ كان $0 < U_n \leq 10^{-2}$

ⓑ أثبت أنه إذا كان $n > 10^8$ كان $0 < U_n < 10^{-4}$

ⓒ كيف نختار n كي نحصل على $U_n < 10^{-8}$

3) حاذا تمثل $(U_n)_{n\geq 0}$

1) ليكن التابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

f معرف ومستمر على $[0,+\infty[$

$f(0) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لبعد الصفر

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$0 < f(x) \leq 1$

وبما أن $U_n = f(n)$

$0 < U_n \leq 1$ أياً يكن n

2) ⓐ $n > 10^4$

ومنه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > 10^2$

ومنه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 10^2$

ومنه $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 10^{-2}$

$$\boxed{0 < U_n < 10^{-2}}$$

ⓑ $n > 10^8$

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > 10^4$

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 10^4$

$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 10^{-4}$

$$\boxed{0 < U_n < 10^{-4}}$$

ⓒ $U_n < 10^{-8}$ الهدف الحصول على n

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 10^{-8}$

مشان أقدر ربّع

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 10^8$

$2\sqrt{n+1} > 10^8$

$\sqrt{n+1} > \frac{10^8}{2}$

نربع

$n+1 > \frac{10^{16}}{4}$

$n > \frac{10^{16}}{4} - 1$

$n_0 = \frac{10^{16}}{4} - 1$

عندما $n > n_0$ يكون $U_n < 10^{-8}$

3) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

13

هام $\left(\frac{22}{144}\right)$ ليكن عن كل عدد طبيعي n

$$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1) أوجد b, a تحققان

$$U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

(استنتج 2) ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

1)

$$U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$U_n = \frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2an+a+2bn-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$U_n = \frac{(2a+2b)n+a-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

بالمطابقة نجد:

$2a+2b=0$

ومنه $a+b=0$ (1)

وأيضاً $a-b=1$ (2)

بالجمع نجد: $2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

ومنه $b=-\frac{1}{2}$

$$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

نستخدم التابع لأنها معرفة من خلال حدها العام

2)

$$U_0 = \frac{\frac{1}{2}}{-1} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{1}}$$

$$U_1 = \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{1}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}}$$

$$U_2 = \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{5}}$$

$$U_3 = \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{5}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{7}}$$

$\vdots$

$$U_{n-1} = \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{2n-3}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}}$$

$$U_n = \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

بالجمع نجد

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{2}$$

$\left(\frac{8}{138}\right)$ المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}$ معرفتان وفق

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad y_n = \frac{1}{n}$$

1) اثبت أن العدد (1) راجح على المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$

2) اثبت أنه $x_n < y_n$ أياً يكن $n\geq1$

1) ليكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ندرس تغيرات f:

f معرف واشتقاقي ومستمر على $[1,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

جديد $y \leftarrow f$ — بعد أن يتم اسقاطه من C_f

مكرر $x \leftarrow$ منصف — يتكرر الحد بعد أن يتم اسقاطه من المنصف إلى محور (x)

75 — 13 — / /

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$$ (ينعدم عند صفر والصفر خارج المجال)

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt2}$	$\searrow$	0

$0 < f(x) \leq \frac{1}{\sqrt2} < 1$

بما أن $x_n = f(n)$

فإن: $0 < x_n < 1$

فالعدد (1) راجح على المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$

2) أياً يكن $n \geq 1$: $\sqrt{n^2+1} \geq n$ من الطلب

ومنه أياً يكن $n\geq1$: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n}$

أي: أياً يكن $n\geq1$: $x_n \leq y_n$

$\frac{9}{138}$: $y_n = 5n$ ، $x_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$

أثبت أن أياً يكن $n\geq1$: $x_n \geq \frac15 y_n$

$$x_n - \frac15 y_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1} - n$$

$$x_n - \frac15 y_n = \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1} \geq 0$$

أياً يكن $n\geq1$: $x_n \geq \frac15 y_n$

التمثيل البياني لحدود متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

1) نرسم الخط البياني للتابع

2) نرسم منصف الربعين الأول والثاني

3) نعين U_0 ثم نسحب U_0 على التابع ثم على المحور yy' فنحصل على U_1 على المنصف ثم على المحور $x'x$ ونكرر

$\frac{1}{138}$: في كل من الحالات الآتية مثّل هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ ثم خمّن جهة اطرادها إذا كانت مطردة ونهايتها المحتملة

1) $U_{n+1} = \frac12 U_n - 3$ ، $U_0 = 2$

$f(x) = \frac12 x - 3$

x	0	-6
y	-3	-6

$y = x$

x	0	-6
y	0	-6

مسودة:

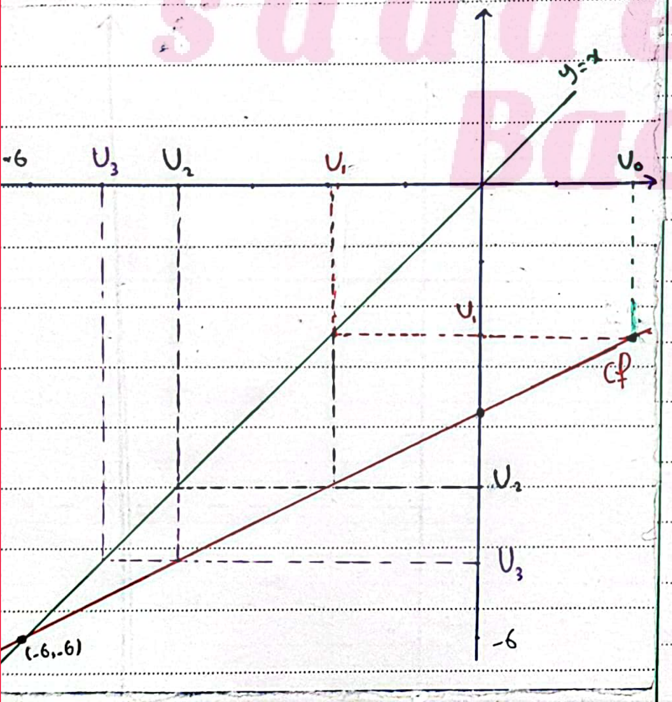
$f(x) = x$

$\frac12 x - 3 = x$

$-\frac12 x = 3$

$x = -6$

$f(-6) = -6$



ومنه المتتالية متناقصة

ونهايتها (-6)

76

2) $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n \quad , \quad U_0 = 1$

$f(x) = -\frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	-1

مسودة

$f(x) = x$

$-\frac{1}{2}x = x$

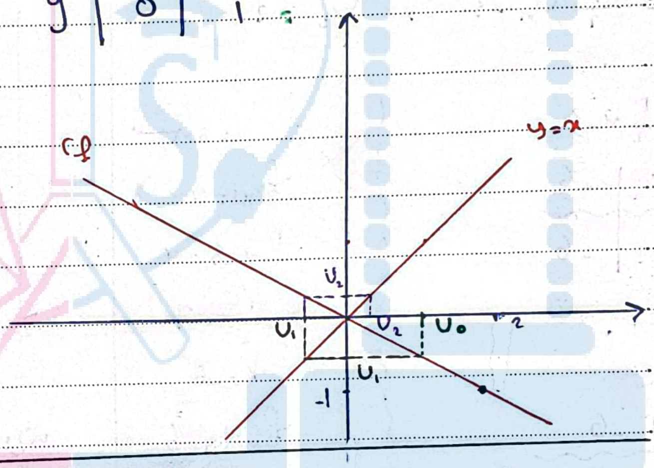
$-\frac{3}{2}x = 0$

$x = 0$

$f(0) = 0$

$y = x$

x	0	1
y	0	1



المتتالية غير
مطردة
طبيعي (0)

3) $U_{n+1} = U_n + 2 \quad , \quad U_0 = 1$

$f(x) = x + 2$

x	0	1
y	2	3

مسودة

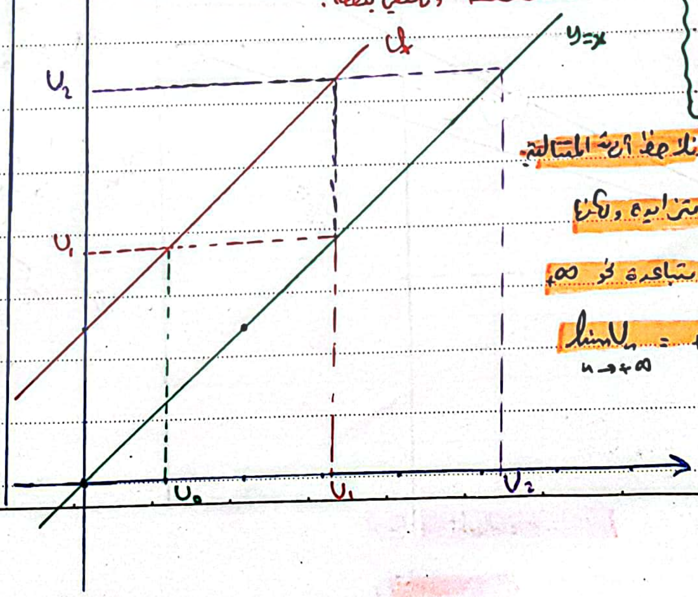
$f(x) = x$

$x + 2 = x$

مستحيلة

أو لأن $y = x$ d: يوازي C_f
ونكتفي بنقطة.

ملاحظة: عندما
... لا حل C_f
و $y = x$ تكون
المتتالية متباعدة
المعادلة
$f(x) = x$
مستحيلة



نلاحظ أن المتتالية
متزايدة وتكون
متباعدة نحو $+\infty$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

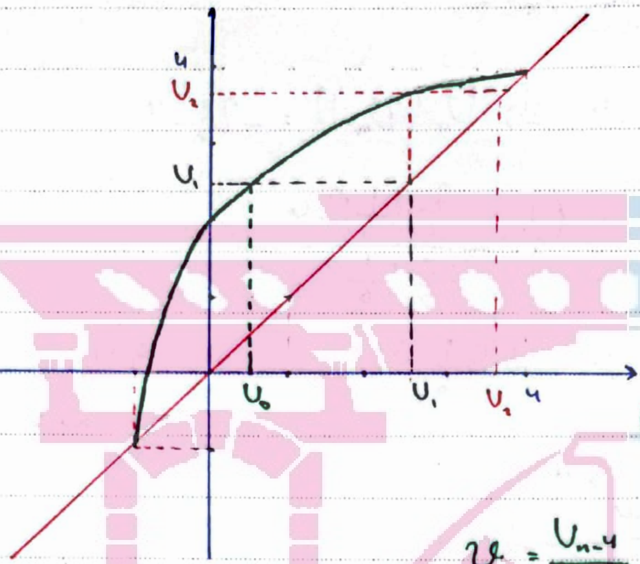
صنو الحضارة

ALADIB

التمرين الثالث «« اختبار 4 »»

نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي

$$U_{n+1} = \frac{5U_n+4}{U_n+2} \quad , U_0 = \frac{1}{2}$$



1) باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل دون حساب الحدود U_0, U_1, U_2

2) ضع تخمينا حول اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها

3) نعرف المتتالية (V_n) بالعلاقة $V_n = \frac{U_n-4}{U_n+1}$

1) بين أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول

2) اكتب عبارة V_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

1) على الرسم

2) المتتالية متزايدة ومتقاربة من (4)

(3

①

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1}-4}{U_{n+1}+1} \cdot \frac{U_n+1}{U_n-4} = \frac{\frac{5U_n+4}{U_n+2}-4}{\frac{5U_n+4}{U_n+2}+1} \cdot \frac{U_n+1}{U_n-4}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{5U_n+4-4U_n-8}{U_n+2}}{\frac{5U_n+4+U_n+2}{U_n+2}} \cdot \frac{U_n+1}{U_n-4} = \frac{U_n-4}{6U_n+6} \cdot \frac{U_n+1}{U_n-4}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_n-4}{6(U_n+1)} \cdot \frac{U_n+1}{U_n-4} = \frac{1}{6} = q$$

فالمتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

$$V_0 = \frac{U_0-4}{U_0+1} = -\frac{7}{3}$$ حدها الأول

②

$$V_n = V_0 \cdot q^n \Rightarrow \boxed{V_n = -\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

1+6

$$v_n = \frac{U_n - 4}{U_n + 1} \Rightarrow v_n U_n + v_n = U_n - 4$$

$$v_n U_n - U_n = -v_n - 4 \Rightarrow U_n(v_n - 1) = -v_n - 4$$

$$U_n = \frac{-v_n - 4}{v_n - 1} \Rightarrow U_n = \frac{\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 4}{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1}$$

بما أنّ $-1 < \frac{1}{6} < 1$ فإنّ $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$$

للتدريب: مثال محلول ص 130

لدينا المتتاليتين $(t_n)_{n \geq 0}$ ، $(S_n)_{n \geq 0}$ المعرّفتين تدريجيًا:

- $t_0 = 1$ ، $S_0 = 12$
- $t_{n+1} = \frac{t_n + 2S_n}{3}$ ، $S_{n+1} = \frac{t_n + 3S_n}{4}$

(1) أثبت أنّ المتتالية $(S_n - t_n)_{n \geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها.

لتكن $h_n = S_n - t_n$

$$h_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{3t_n + 9S_n}{12} - \frac{4t_n + 8S_n}{12}$$

$$h_{n+1} = \frac{S_n - t_n}{12} = \frac{1}{12}(S_n - t_n)$$

$$\Rightarrow h_{n+1} = \frac{1}{12} h_n \Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{12}$$

ومنه المتتالية $(h_n = S_n - t_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

بما أنّ $-1 < q = \frac{1}{12} < 1$ إذًا المتتالية متقاربة ونهايتها (0)

$$h_n = S_n - t_n$$

$$h_0 = S_0 - t_0 = 12 - 1 = 11 > 0 \Rightarrow S_n - t_n > 0$$

في حالة متتالية هندسية فإنّ نهاية الأساس q تحل نهاية المتتالية
أي تساوي (0)

$$h_n = 11 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

2) أثبت أنّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

$$S_{n+1}-S_n=\frac{t_n+3S_n}{4}-S_n=\frac{t_n+3S_n-4S_n}{4}$$

$$S_{n+1}-S_n=\frac{t_n-S_n}{4}=-\frac{1}{4}\underbrace{(S_n-t_n)}_{>0}<0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما ـــــ (I

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2S_n}{3}-t_n=\frac{t_n+2S_n-3t_n}{3}$$

$$t_{n+1}-t_n=\frac{2S_n-2t_n}{3}=\frac{2}{3}\underbrace{(S_n-t_n)}_{>0}>0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ~~...~~ متزايدة تماما ـــــ (II

من I و II ومن الطلب (1) نجد أنّ المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين.

3) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ ثابتة، المعرفة وفق: $U_n=3t_n+8S_n$:

$$U_{n+1}-U_n=3t_{n+1}+8S_{n+1}-3t_n-8S_n$$
$$=3(t_{n+1}-t_n)+8(S_{n+1}-S_n)$$
$$=3\left[\frac{2}{3}(S_n-t_n)\right]+8\left[-\frac{1}{4}(S_n-t_n)\right]$$
$$=2(S_n-t_n)-2(S_n-t_n)=0 \Rightarrow U_{n+1}-U_n=0$$

ومنه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ ثابتة

لإيجاد قيمة الثابت U_n

$U_0=3t_0+8S_0$

$=3(1)+8(12)$

$=99$

$\Rightarrow U_n=99$

المتتالية ثابتة فهي متقاربة من نفس حدها الثابت

4) أوجد نهاية كل من المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$

المتتاليات $(t_n)_{n\geq 0}$ ، $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(U_n)_{n\geq 0}$ جميعها متقاربة ?

لدينا $U_n=3t_n+8S_n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=3\lim_{n\to+\infty}t_n+8\lim_{n\to+\infty}S_n$$

$$99=3\ell+8\ell=11\ell \Rightarrow \ell=9$$

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=9$$

كل متتاليتان ~~...~~ متجاورتان متقاربتان من العدد الحقيقي نفسه