

تمارين و حلول لرفع التحدي

# أولمبياد الرياضيات

الجزء الأول

الأستاذ عبد الرحيم اسطيظ

# بسم الله الرحمن الرحيم

## مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسول الله سيدنا محمد وعلى آله وصحبه.

يحتوي هذا الكتاب الذي نضعه بين يديك عزيزي القارئ على تمارين و حلول لأولمبياد الرياضيات، الهدف منه هو إكساب المتعلم منهجية فعالة وطريقة جيدة لحل التمارين والمسائل الرياضية.

لبلوغ الغايات المرجوة أنصحك عزيزي القارئ بالبحث الشخصي عن الحل الواضح والمقنع، لأن قراءتك للحل المقترح لن تفيدك بشيء بل مجهودك وبحثك هو الأهم قبل اطلاعك على الجواب.

وأملنا كبير أن يحقق هذا الكتاب الغاية التي ألف من أجلها، وأن يسهم في مساعدة التلاميذ على تجاوز الصعوبات التي تعترضهم، وأن يساهم في إثراء مراجع الأستاذ.

والله ولي التوفيق

اسطيط عبدالرحيم

# الفهرس

6.....	أولمبياد الأول
7.....	حل أولمبياد الأول
10.....	أولمبياد الثاني
11.....	حل أولمبياد الثاني
15.....	أولمبياد الثالث
16.....	حل أولمبياد الثالث
19.....	أولمبياد الرابع
20.....	حل أولمبياد الرابع
23.....	أولمبياد الخامس
24.....	حل أولمبياد الخامس
27.....	أولمبياد السادس
28.....	حل أولمبياد السادس
31.....	أولمبياد السابع
32.....	حل أولمبياد السابع
34.....	أولمبياد الثامن
35.....	حل أولمبياد الثامن
38.....	أولمبياد التاسع
39.....	حل أولمبياد التاسع
42.....	أولمبياد العاشر
43.....	حل أولمبياد العاشر
46.....	أولمبياد الحادي عشر

- 47..... حل أولمبياد الحادي عشر
- 50..... أولمبياد الثاني عشر
- 51..... حل أولمبياد الثاني عشر
- 53..... أولمبياد الثالث عشر
- 54..... حل أولمبياد الثالث عشر
- 57..... أولمبياد الرابع عشر
- 58..... حل أولمبياد الرابع عشر
- 61..... أولمبياد الخامس عشر
- 62..... حل أولمبياد الخامس عشر
- 65..... أولمبياد السادس عشر
- 66..... حل أولمبياد السادس عشر
- 70..... أولمبياد السابع عشر
- 71..... حل أولمبياد السابع عشر
- 74..... أولمبياد الثامن عشر
- 75..... حل أولمبياد الثامن عشر
- 80..... أولمبياد التاسع عشر
- 81..... حل أولمبياد التاسع عشر
- 84..... أولمبياد العشرون
- 85..... حل أولمبياد العشرون
- 88..... أولمبياد الواحد والعشرون
- 89..... حل أولمبياد الواحد والعشرون
- 92..... أولمبياد الثاني والعشرون
- 93..... حل أولمبياد الثاني والعشرون

95	أولمبياد الثالث والعشرون
96	حل أولمبياد الثالث والعشرون
100	أولمبياد الرابع والعشرون
101	حل أولمبياد الرابع والعشرون
104	أولمبياد الخامس والعشرون
105	حل أولمبياد الخامس والعشرون
108	أولمبياد السادس والعشرون
109	حل أولمبياد السادس والعشرون
112	أولمبياد السابع والعشرون
113	أولمبياد السابع والعشرون
116	أولمبياد الثامن والعشرون
117	حل أولمبياد الثامن والعشرون

## أولمبياد الأول

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

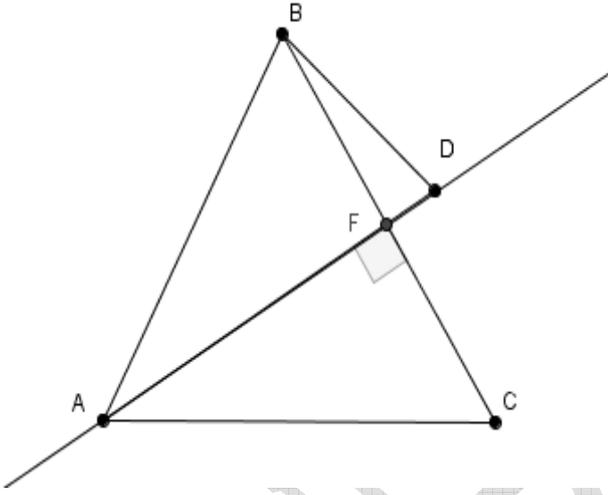
$$\text{بين أن : } \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$$

### تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث :  $BA = BC$

و  $BA = AD$  و  $(AD) \perp (BC)$

احسب :  $\hat{B}AC + \hat{A}DB$



### تمرين 3

$EFG$  مثلث متساوي الأضلاع والنقطة  $P$  داخله

ارتفاع المثلث  $EFG$  المار من  $E$  يقطع  $(FG)$  في النقطة  $D$

$$\text{بين أن : } PB + PC + PA = ED$$

### تمرين 4

$x$  و  $y$  و  $z$  و  $w$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{w}$

$$\text{بين أن : } \sqrt{\frac{x^5 + y^2 z^2 + x^3 z^2}{y^4 z + w^4 + y^2 z w^2}} = \frac{x}{w}$$

## حل أولمبياد الأول

### تمرين 1

لدينا :  $(x-y)^2 \geq 0$

يعني :  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$  يعني :  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  يعني :  $\frac{x^2 + y^2}{y} \geq \frac{2xy}{y}$

إذن :  $\frac{x^2}{y} + y \geq 2x$  ( 1 )

وبنفس الطريقة نبين أن :  $\frac{y^2}{z} + z \geq 2y$  ( 2 )

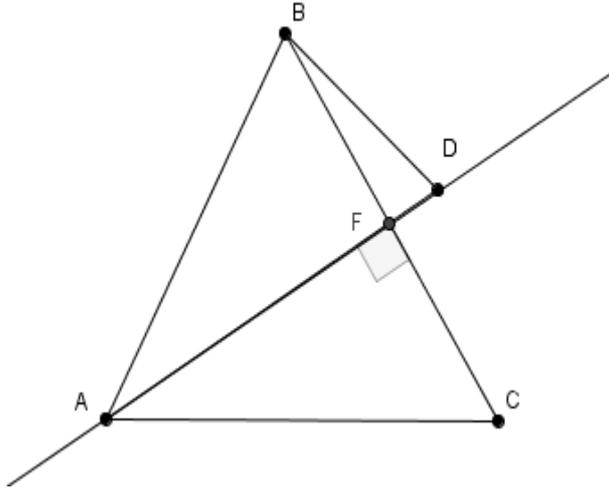
و  $\frac{z^2}{x} + x \geq 2z$  ( 3 )

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :  $\frac{x^2}{y} + y + \frac{y^2}{z} + z + \frac{z^2}{x} + x \geq 2x + 2y + 2z$

أي :  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + (x+y+z) - (x+y+z) \geq 2(x+y+z) - (x+y+z)$

وبالتالي :  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x+y+z$

### تمرين 2



لدينا :  $BA = AD$  و  $BA = BC$

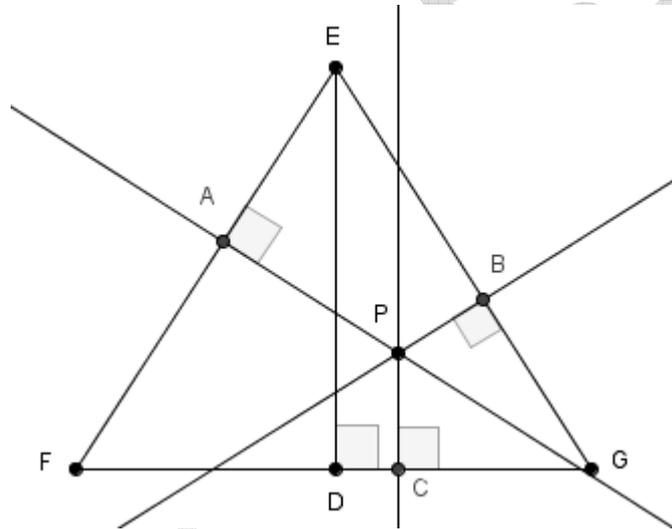
إذن المثلثان  $ABC$  و  $ABD$  متساويا الساقين في  $B$  و  $A$  على التوالي

ومنه  $B\hat{A}C = B\hat{C}A$  و  $B\hat{A}D = A\hat{D}B$

بما أن المثلثات  $BAF$  و  $AFC$  و  $BFD$  هي قائمة الزاوية كلها في  $F$

فإن :  $F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ$  و  $B\hat{A}F + A\hat{B}C = 90^\circ$  و  $F\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^\circ$   
 نجمع المتساويات الثلاثة طرف طرف :  $F\hat{A}C + A\hat{C}B + B\hat{A}F + A\hat{B}C + F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$   
 أي :  $(F\hat{A}C + B\hat{A}F) + A\hat{C}B + (A\hat{B}C + F\hat{B}D) + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$   
 نعلم أن :  $A\hat{B}D = A\hat{B}C + F\hat{B}D$  و  $B\hat{A}C = F\hat{A}C + B\hat{A}F$   
 أي :  $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$   
 أي :  $2B\hat{A}C + 2B\hat{D}A = 270^\circ$  لأن  $B\hat{A}C = B\hat{C}A$  و  $A\hat{B}D = A\hat{D}B$   
 أي :  $2(B\hat{A}C + B\hat{D}A) = 270^\circ$   
 وبالتالي :  $B\hat{A}C + B\hat{D}A = 135^\circ$

### تمرين 3



نحسب مساحة المثلث  $EFG$  بطريقتين مختلفتين :

$$(1) \quad S_{EFG} = \frac{ED \times FG}{2} \quad \text{الطريقة الأولى}$$

الطريقة الثانية :

لدينا :

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= S_{PEG} + S_{PFG} + S_{PEF} \\ &= \frac{PB \times EG}{2} + \frac{PC \times FG}{2} + \frac{PA \times EF}{2} \\ &= \frac{PB \times EG + PC \times FG + PA \times EF}{2} \end{aligned}$$

نعلم أن  $FG = EG = EF$

$$S_{EFG} = \frac{PB \times FG + PC \times FG + PA \times FG}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \quad S_{EFG} = \frac{FG(PB + PC + PA)}{2} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{FG(PB + PC + PA)}{2} = \frac{ED \times FG}{2} \quad \text{من 1 و 2 نستنتج أن :}$$

$$\frac{2}{FG} \times \frac{FG(PB + PC + PA)}{2} = \frac{2}{FG} \times \frac{ED \times FG}{2} \quad \text{أي :}$$

$$PB + PC + PA = ED \quad \text{وبالتالي :}$$

#### تمرين 4

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{w} = k \quad \text{نضع :}$$

$$x = yk \quad \text{و} \quad y = zk \quad \text{و} \quad z = kw \quad \text{يعني :}$$

$$x = yk \quad \text{و} \quad y = (kw)k \quad \text{و} \quad z = kw \quad \text{يعني :}$$

$$x = (wk^2)k = k^3w \quad \text{و} \quad y = wk^2 \quad \text{و} \quad z = kw \quad \text{إذن :}$$

$$\sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} - \frac{x}{w} = 0 \quad \text{لنبين أن :}$$

$$\sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} - \frac{x}{w} = \sqrt{\frac{(k^3w)^5 + (wk^2)^2(kw)^2 + (k^3w)^3(kw)^2}{(wk^2)^4(kw) + w^4 + (wk^2)^2(kw)w^2}} - \frac{wk^3}{w}$$

$$= \sqrt{\frac{k^{15}w^5 + k^4w^2k^2w^2 + k^9w^3k^2w^2}{k^8w^4kw + w^4 + k^4w^2kw^2}} - k^3$$

$$= \sqrt{\frac{k^{15}w^5 + k^6w^4 + k^{11}w^5}{k^9w^5 + w^4 + k^5w^5}} - k^3$$

$$= \sqrt{\frac{k^6w^4(k^9w + 1 + k^5w)}{w^4(k^9w + 1 + k^5w)}} - k^3$$

$$= \sqrt{k^6} - k^3 = \sqrt{(k^3)^2} - k^3 = k^3 - k^3 = 0$$

$$\sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} = \frac{x}{w} \quad \text{وبالتالي :}$$

## أولمبياد الثاني

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $x+y+z=3$   
بين أن :  $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

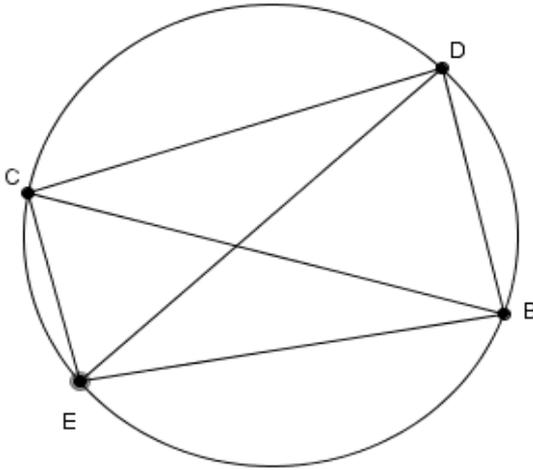
### تمرين 2

$EFG$  مثلث متساوي الساقين في  $E$  و  $A$  نقطة من  $[FG]$   
و  $[FD]$  الإرتفاع الموافق للضلع  $[EG]$   
و النقطتان  $B$  و  $C$  هما المسقطان العموديان للنقطة  $A$  على  $(EF)$  و  $(EG)$  على التوالي  
بين أن :  $FD = AB + AC$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$   
بين أن :  $xyz = 1$

### تمرين 4



$ECDB$  رباعي محاط بدائرة  
( أنظر الشكل جانبه )

بين أن :  $EC \times DB + DC \times EB = BC \times ED$

## حل أولمبياد الثاني

### تمرين 1

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\sqrt{x}-1)^2 \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \times (-\sqrt{x}-2) \quad ( -\sqrt{x}-2 \leq 0 )$$

$$\text{يعني : } (x-2\sqrt{x}+1) \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0$$

$$\text{يعني : } -x\sqrt{x}-2x+2x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$$

$$\text{يعني : } -x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$$

$$\text{يعني : } \sqrt{x}(3-x) \leq 2$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \frac{1}{2} \quad ( 3-x=y+z > 0 )$$

$$\text{يعني : } (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2}$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

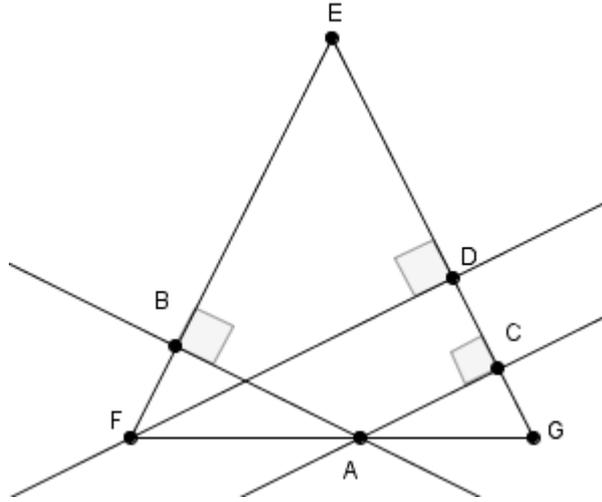
$$(3) \quad \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2} \quad \text{و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

$$\text{أي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

### تمرين 2



لدينا :  $S_{EFG} = S_{EFA} + S_{EAG}$

(  $S_{EFG}$  : مساحة مثلث  $EFG$  ، ،  $S_{EFA}$  : مساحة مثلث  $EFA$  ، ،  $S_{EAG}$  : مساحة مثلث  $EAG$  )

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EG}{2} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني}$$

(  $EF = EG$  لأن المثلث  $EFG$  متساوي الساقين في  $E$  )  $\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EG + AC \times EG}{2}$  : يعني

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{EG(AB + AC)}{2} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG} \times FD}{\cancel{EG}} = \frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG}(AB + AC)}{\cancel{EG}} \quad \text{يعني}$$

إذن :  $FD = AB + AC$

### تمرين 3

لدينا :  $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \quad \text{يعني} \quad x - y = \frac{y - z}{zy} \quad \text{يعني} \quad zy = \frac{y - z}{x - y}$$

$$(1) \quad xyz = \frac{x(y - z)}{x - y} \quad \text{إذن}$$

لدينا :  $y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \quad \text{يعني} \quad y - z = \frac{z - x}{xz} \quad \text{يعني} \quad xz = \frac{z - x}{y - z}$$

$$( 2 ) \quad xyz = \frac{y(z-x)}{y-z} : \text{إذن}$$

$$x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} : \text{لدينا}$$

$$z-x = \frac{x-y}{xy} : \text{يعني} \quad z-x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} : \text{يعني}$$

$$( 3 ) \quad xy = \frac{x-y}{z-x} : \text{إذن}$$

$$(xyz) \times (xyz) = \frac{x(\cancel{y-z})}{x-y} \times \frac{y(z-x)}{\cancel{y-z}} : \text{نضرب المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف}$$

$$( 4 ) \quad (xyz)^2 = \frac{xy(z-x)}{x-y} : \text{ومنه}$$

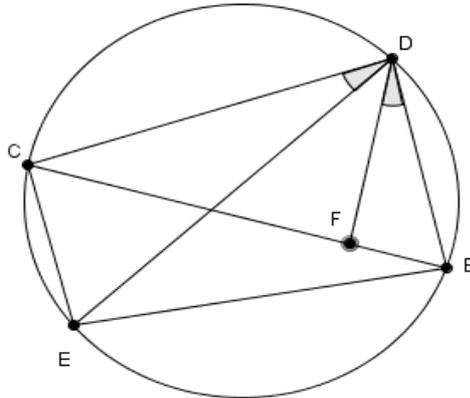
$$(xyz)^2 = \frac{\left(\frac{x-y}{z-x}\right)(z-x)}{x-y} : \text{من 3 و 4 نستنتج أن}$$

$$(xyz)^2 = \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{z-x}} \times \frac{\cancel{z-x}}{\cancel{x-y}} = 1 : \text{أي}$$

بما أن  $x > 0$  و  $y > 0$  و  $z > 0$  أعداد حقيقية موجبة فإن  $xyz > 0$

وبالتالي  $xyz = 1$

#### تمرين 4



( 1 )  $\hat{CDE} = \hat{DBF}$  : نضع النقطة  $F$  على  $[BC]$  بحيث

بما أن  $\hat{DÊC}$  و  $\hat{DÊF}$  زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

( 2 )  $\hat{DBF} = \hat{DÊC}$  : فإن

من 1 و 2 نستنتج أن المثلثان  $DBF$  و  $CEB$  متشابهان

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BF}{CE} \text{ أي}$$

$$( 3 ) \quad DB \times CE = BF \times DE \text{ ومنه}$$

$$C\hat{D}E = B\hat{D}F : \text{ لدينا}$$

$$C\hat{D}E + E\hat{D}F = B\hat{D}F + E\hat{D}F : \text{ يعني}$$

$$( 4 ) \quad C\hat{D}F = E\hat{D}B : \text{ إذن}$$

بما أن  $D\hat{E}B$  و  $D\hat{C}F$  زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$( 5 ) \quad D\hat{C}F = D\hat{E}B : \text{ فإن}$$

من 4 و 5 نستنتج أن المثلثان  $DFC$  و  $DBE$  متشابهان

$$\text{أي : } \frac{DC}{DE} = \frac{CF}{BE}$$

$$( 6 ) \quad DC \times BE = CF \times DE : \text{ ومنه}$$

$$DB \times CE + DC \times BE = BF \times DE + CF \times DE : \text{ نجمع المتساويتين 6 و 3 طرف بطرف}$$

$$DB \times CE + DC \times BE = DE(BF + CF) : \text{ أي}$$

$$EC \times DB + DC \times EB = BC \times ED : \text{ وبالتالي}$$

## أولمبياد الثالث

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن } \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$$

### تمرين 2

$AHB$  مثلث بحيث :  $\hat{ABH} = 120^\circ$

و  $[BC]$  هو منتصف الزاوية  $\hat{ABH}$  ( $C \in [HA]$ )

المستقيم المار من  $H$  والموازي للمستقيم  $(CB)$  يقطع المستقيم  $(AB)$  في النقطة  $D$ .

$$\text{بين أن : } \frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}$$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

### تمرين 4

$ABC$  مثلث و النقطة  $D$  منتصف  $[BC]$

و  $(AE)$  الإرتفاع الموافق للضلع  $[BC]$  ( $E \in (BC)$ )

و النقطتان  $F$  و  $G$  هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين  $B$  و  $C$  على  $(AD)$

$$\text{بين أن } CG = BF$$

## حل أولمبياد الثالث

### تمرين 1

لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية موجبة قطاعا بحيث:  $a = xy$  و  $b = yz$  و  $c = xz$

لدينا :  $(a-b)^2 \geq 0$  و  $(b-c)^2$  و  $(c-a)^2 \geq 0$

أي :  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$  أي :  $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$

أي :  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$  أي :  $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$

أي :  $\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(ab + bc + ac)$

أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{ab}{\sqrt{abc}} + \frac{bc}{\sqrt{abc}} + \frac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

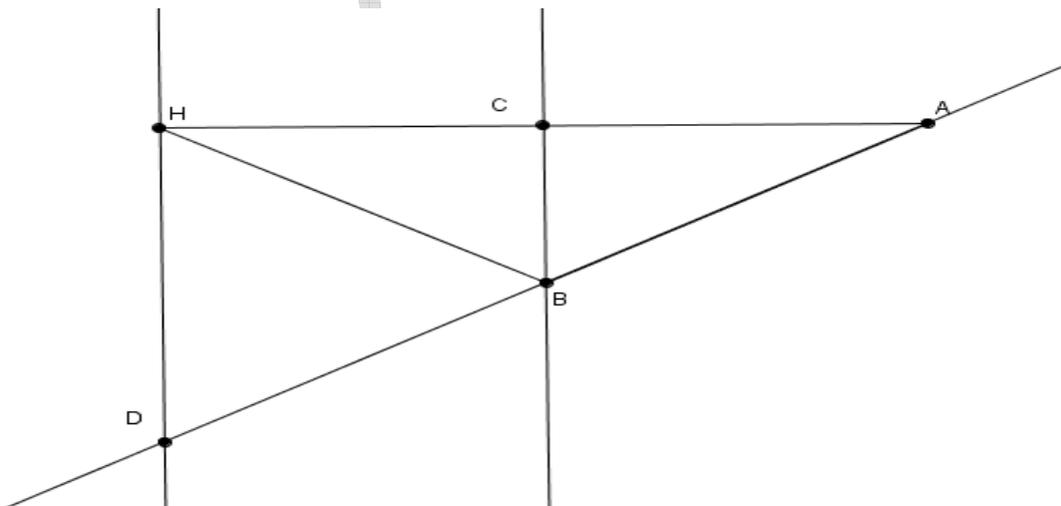
أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}}$

أي :  $\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\frac{xy^2z}{xz}} + \sqrt{\frac{yz^2x}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2yz}{yz}}$

أي :  $\frac{x^2y^2}{xyz} + \frac{y^2z^2}{xyz} + \frac{x^2z^2}{xyz} \geq \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} + \sqrt{x^2}$

وبالتالي :  $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq y + z + x$

### تمرين 2



بما أن  $[BC]$  هو منصف الزاوية  $\widehat{ABH}$

$$\widehat{ABC} = \widehat{HBC} = \frac{\widehat{ABH}}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ : فإن}$$

$$D\widehat{BA} = H\widehat{BD} + A\widehat{BH} \text{ ولدينا}$$

$$(1) \quad H\widehat{BD} = D\widehat{BA} - A\widehat{BH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ إذن}$$

بما أن المستقيمان  $(CB)$  و  $(HD)$  متوازيان و  $(HB)$  قاطع لهما

$$(2) \quad B\widehat{HD} = H\widehat{BC} = 60^\circ \text{ فإن}$$

$$H\widehat{DB} + D\widehat{HB} + H\widehat{BD} = 180 \text{ ولدينا}$$

$$\text{أي } H\widehat{DB} = 180 - (D\widehat{HB} + H\widehat{BD})$$

$$(3) \quad H\widehat{DB} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ ومنه}$$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث  $HDB$  متساوي الأضلاع

$$\text{ومنه } HD = HB = DB$$

لدينا  $(HD) \parallel (CB)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BD}{AB} = \frac{BH}{CB} \text{ ( } AD = AB + BD \text{ و } HD = HB = DB \text{ )}$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AB}{AB \times BH} + \frac{BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}$$

### تمرين 3

$$\text{لدينا : } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

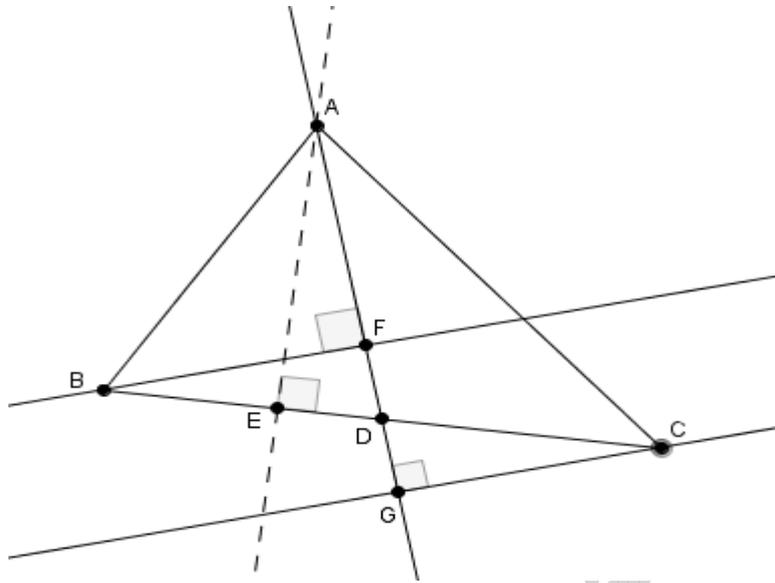
$$\text{أي : } x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } 2xy + 2(x + y)z = 0 \text{ أي } 2(xy + xz + yz) = 0$$

$$\text{أي : } \frac{1}{xyz} \times (xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz} \text{ أي } \frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0$$

وبالتالي :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

**تمرين 4**



نحسب مساحة المثلثين  $ABD$  و  $ACD$  بطريقتين مختلفتين

الطريقة الأولى :

لدينا :  $S_{ACD} = \frac{AE \times CD}{2}$  و  $S_{ABD} = \frac{AE \times BD}{2}$

(  $S_{ABD}$  هي مساحة المثلث  $ABD$  و  $S_{ACD}$  هي مساحة المثلث  $ACD$  )

نعلم أن  $BD = CD$

إذن  $S_{ABD} = S_{ACD}$

الطريقة الثانية :

لدينا :  $S_{ACD} = \frac{AD \times CG}{2}$  و  $S_{ABD} = \frac{AD \times BF}{2}$

بما أن  $S_{ABD} = S_{ACD}$

فإن :  $\frac{AD \times BF}{2} = \frac{AD \times CG}{2}$

يعني :  $\frac{\cancel{AD} \times BF}{\cancel{AD}} = \frac{\cancel{AD} \times CG}{\cancel{AD}}$

وبالتالي :  $BF = CG$

## أولمبياد الرابع

### تمرين 1

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان موجبان قطعاً

$$\text{بين أن } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

### تمرين 2

$ABC$  مثلث والنقط  $D$  و  $E$  و  $F$  هي على التوالي

منتصفات القطع  $[BC]$  و  $[AC]$  و  $[AB]$

$$\text{بين أن : } \frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC$$

### تمرين 3

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$

$$\text{بين أن : } EF^4 + EG^4 < FG^4$$

### تمرين 4

$$\text{بين ان : } \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \frac{1}{\sqrt{2016}}$$

## حل أولمبياد الرابع

### تمرين 1

لدينا :  $(x^2 + y)^2 \geq 0$

$$\text{أي : } x^4 - 2x^2y + y^2 \geq 0 \quad \text{أي : } x^4 + y^2 \geq 2x^2y \quad \text{أي : } \frac{1}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2x^2y} \quad \text{أي : } \frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{x}{2x^2y}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$$

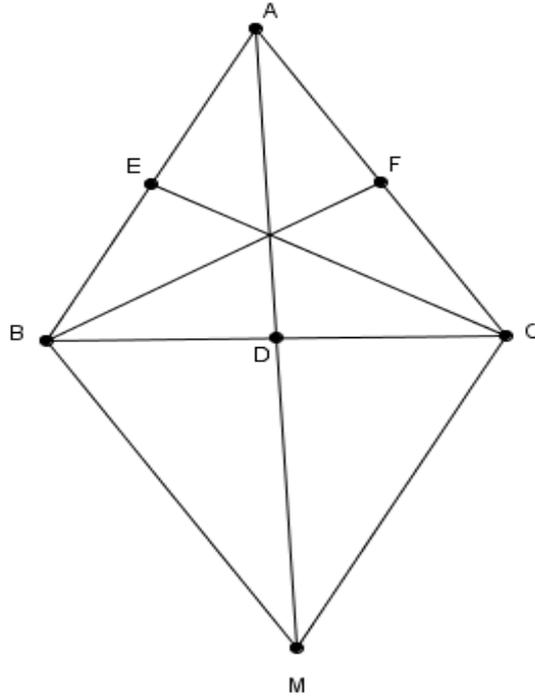
$$(2) \quad \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2yx} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yx}$$

$$\text{ومنه : } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy} \quad \text{وبالتالي : } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

### تمرين 2

لتكن  $M$  ممتالة  $A$  بالنسبة للنقطة  $D$



لدينا  $D$  منتصف  $[BC]$

إذن  $C$  هي ممائلة  $B$  بالنسبة للنقطة  $D$

بما أن  $C$  و  $M$  هما ممائلتا  $A$  و  $B$  على التوالي بالنسبة للنقطة  $D$

فإن :  $AB = CM$  ( 1 )

في المثلث  $ACM$  لدينا :  $AM < AC + CM$  ( 2 )

من 1 و 2 نستنتج أن :  $AM < AC + AB$

نعلم أن  $AM = 2AD$  ( لأن  $M$  ممائلة  $A$  بالنسبة للنقطة  $D$  يعني  $D$  منتصف  $[AM]$  )

أي  $2AD < AC + AB$  ( 3 )

في المثلثان  $ADC$  و  $ADB$  لدينا :  $AC < AD + DC$  ( 4 )

و  $AB < AD + DB$  ( 5 )

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف :  $AC + AB < AD + DC + AD + DB$

نعلم أن :  $BC = BD + DC$

أي :  $AC + AB < 2AD + BC$

إذن :  $AC + AB - BC < 2AD$  ( 6 )

من 3 و 6 نستنتج أن :  $AC + AB - BC < 2AD < AC + AB$  ( 7 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $AC + BC - AB < 2CE < AC + BC$  ( 8 )

و  $AB + BC - AC < 2BF < AB + BC$  ( 9 )

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$AC + AB - BC + AC + BC - AB + AB + BC - AC < 2AD + 2CE + 2BF < AC + AB + AC + BC + AB + BC$   
أي :

$$AC + \cancel{AB} - \cancel{BC} + \cancel{AC} + \cancel{BC} - \cancel{AB} + AB + BC - \cancel{AC} < 2(AD + CE + BF) < 2AC + 2AB + 2BC$$

$$\frac{1}{2} \times (AB + AC + BC) < \frac{1}{2} \times \cancel{2} (AD + CE + BF) < \frac{1}{2} \times \cancel{2} (AC + AB + BC) \text{ : أي}$$

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC \text{ : وبالتالي}$$

### تمرين 3

لدينا  $EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$

إذن :  $EF^2 + EG^2 = FG^2$

لنحدد إشارة الفرق  $(EF^4 + EG^4) - FG^4$

$$\begin{aligned} FG^4 - EF^4 - EG^4 &= (FG^2)^2 - EF^4 - EG^4 = (EF^2 + EG^2)^2 - EF^4 - EG^4 \\ &= (EF^2)^2 + 2EF^2 \times EG^2 + (EG^2)^2 - EF^4 - EG^4 \\ &= \cancel{EF^4} + 2EF^2 \times EG^2 + \cancel{EG^4} - \cancel{EF^4} - \cancel{EG^4} \\ &= 2EF^2 \times EG^2 > 0 \end{aligned}$$

وبالتالي :  $EF^4 + EG^4 < FG^4$

تمرين 4

نضع :  $Y = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2013}{2014} \times \frac{2015}{2016}$  و  $X = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015}$

لدينا :

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

⋮

$$\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$$

$$\frac{2014}{2015} < \frac{2015}{2016}$$

يعني :  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2013}{2014} \times \frac{2015}{2016}$

يعني :  $X < Y$

يعني :  $X^2 < XY$

يعني :  $\sqrt{X^2} = X < \sqrt{XY}$

لنحسب  $\sqrt{XY}$

لدينا :  $XY = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2013}{2014} \times \frac{2014}{2015} \times \frac{2015}{2016} = \frac{1}{2016}$

إذن :  $\sqrt{XY} = \sqrt{\frac{1}{2016}} = \frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي :  $X = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \sqrt{XY} = \frac{1}{\sqrt{2016}}$

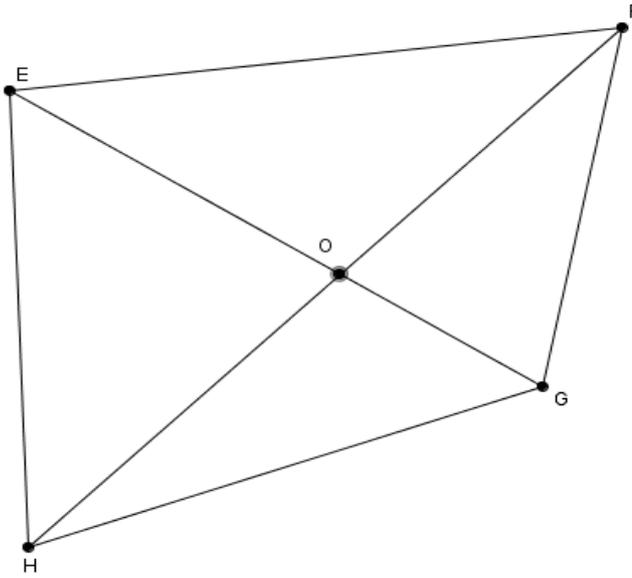
## أولمبياد الخامس

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن : } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$

### تمرين 2



رباعي محدب قطراه  $EFGH$

$[EG]$  و  $[FH]$  يتقاطعان

في النقطة  $O$  كما هو مبين

في الشكل جانبه

$P$  : محيط الرباعي  $EFGH$

$$\text{بين أن : } \frac{1}{2}P < EG + FH < P$$

### تمرين 3

$$\text{احسب } \frac{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}}{\frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51}}$$

### تمرين 4

أنشئ قطعة طولها  $\sqrt{10}$  ( تبرير الإنشاء )

## حل أولمبياد الخامس

### تمرين 1

نحدد إشارة الفرق  $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9$  :

لدينا :

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9 &= \frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-9 \\ &= 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1-9 \\ &= \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-6 \\ &= \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2 \\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+\frac{y^2+z^2-2zy}{zy}+\frac{x^2+z^2-2xz}{xz} \\ &= \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz} \end{aligned}$$

نعلم أن  $(z-y)^2 \geq 0$  و  $(x-y)^2 \geq 0$  و  $(x-z)^2 \geq 0$

بما أن  $x > 0$  و  $y > 0$  و  $z > 0$  فإن  $xy > 0$  و  $zy > 0$  و  $xz > 0$

$$\text{إذن : } (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9 = \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0$$

وبالتالي :  $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

### تمرين 2

محيط الرباعي  $EFGH$  هو :

$$P = EF + FG + GH + HE$$

في المثلثين  $EFG$  و  $EHG$  لدينا :  $EG < EF + FG$  و  $EG < EH + HG$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف :  $EG + EG < EF + FG + EH + HG$

أي :  $2EG < P$

$$( 1 ) \quad EG < \frac{P}{2} \quad \text{إذن}$$

في المثلثين  $EHF$  و  $HGF$  لدينا :  $FH < GF + HG$  و  $FH < EF + EH$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف :  $FH + FH < EF + EH + GF + HG$

$$2FH < P \quad \text{أي}$$

$$( 2 ) \quad FH < \frac{P}{2} \quad \text{إذن}$$

من 1 و 2 نستنتج أن :  $EG + FH < P$  ( 3 )

في المثلثات  $EFO$  و  $FOG$  و  $HGO$  و  $EOH$  لدينا :  $EF < EO + OF$

و  $EH < OH + OE$  و  $HG < OG + OH$  و  $FG < OF + OG$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف :  $EF + FG + HG + EH < EO + OF + OF + OG + OG + OH + OH + OE$

$$\text{أي : } P < 2(EO + OG) + 2(OH + OE) \quad \text{أي : } P < 2EG + 2FH$$

$$( 4 ) \quad \frac{P}{2} < EG + FH \quad \text{أي : } P < 2(EG + FH)$$

من 3 و 4 نستنتج أن :  $\frac{1}{2}P < EG + FH < P$

### تمرين 3

$$\text{نضع : } X = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$\text{و } Y = \frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51}$$

$$\text{لدينا : } X = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$\text{يعني : } X = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$\text{يعني : } X = \left(1 + \left(\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{4}\right)\right) + \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6}\right)\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} + \left(\frac{1}{100} - 2 \times \frac{1}{100}\right)\right)$$

$$\text{يعني : } X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$\text{يعني : } X = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

$$\text{يعني : } X = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$$

$$\text{يعني : } X + X = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$$

$$2X = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{98}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{52}\right) + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{51}\right) : \text{يعني}$$

$$2X = \frac{151}{51 \times 100} + \frac{151}{52 \times 99} + \frac{151}{53 \times 98} + \dots + \frac{151}{99 \times 52} + \frac{151}{100 \times 51} : \text{يعني}$$

$$2X = 151 \left( \frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \dots + \frac{1}{99 \times 52} + \frac{1}{100 \times 51} \right) : \text{يعني}$$

$$2X = 151Y : \text{يعني}$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{151}{2} : \text{وبالتالي}$$

#### تمرين 4

##### المرحلة الأولى :

ننشئ المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $B$  بحيث :

$$AB = BC = 1$$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{2} : \text{يعني} : AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

##### المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة  $D$  بحيث المثلث  $ADC$  قائم الزاوية في

$$C : \text{بحيث} : DC = 2$$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$AD^2 = AC^2 + DC^2$$

$$AD = \sqrt{6} : \text{يعني} : AD^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

##### المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة  $A'$  بحيث المثلث  $ADA'$  قائم الزاوية في  $D$  بحيث :

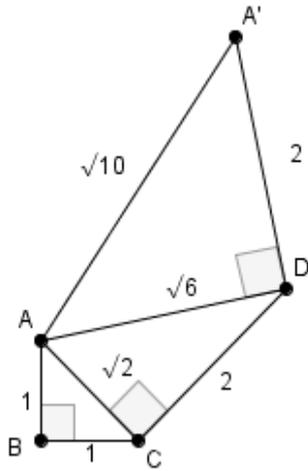
$$DA' = 2$$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$AA'^2 = DA'^2 + AD^2$$

$$AA'^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 = 4 + 6 = 10 : \text{يعني}$$

$$AA' = \sqrt{10} : \text{ومنه}$$



## أولمبياد السادس

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة ( $x > 0$  و  $y > 0$  و  $z > 0$ )

1- بين أن  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

2- استنتج أن :  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$

### تمرين 2

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية بحيث :

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

بين أن :  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

### تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

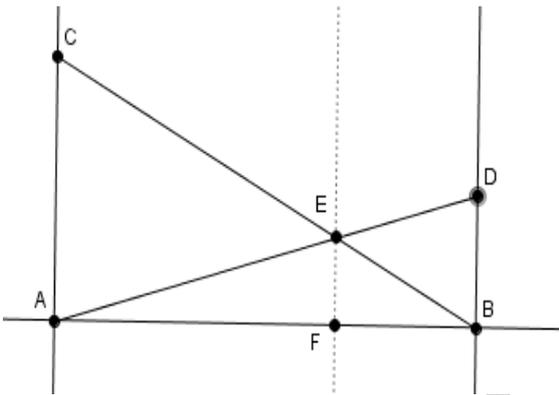
$AC = 8$  و  $(AC) \parallel (BD)$

و  $BD = 4$  و  $E$  نقطة

تقاطع  $(AD)$  و  $(BC)$

و  $F$  نقطة من القطعة  $[AB]$  بحيث  $(EF) \parallel (BD)$

احسب  $EF$



### تمرين 4

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعا و  $m$  عدد حقيقي

بحيث :  $xyz = 1$  و  $\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1$

بين أن :  $m = \frac{1}{2}$

## حل أولمبياد السادس

### تمرين 1

$$1 - \text{ لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2}{xy} - 2 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

( لأن  $(x-y)^2 \geq 0$  و  $xy > 0$  )

$$\text{إذن : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$2 - \text{ حسب السؤال السابق لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2 \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{أي : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{إذن : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$$

### تمرين 2

$$\begin{cases} x-7y+8z=4 & (1) \\ 8x+4y-z=7 & (2) \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times 2) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 1) \end{cases} \quad \text{نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 :}$$

$$\begin{cases} 2x-14y+16z=8 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف :  $2x-14y+16z+8x+4y-z=8+7$

يعني :  $10x - 10y + 15z = 15$

يعني :  $10(x - y) = 15(1 - z)$

إذن :  $(3) \quad x - y = \frac{15}{10}(1 - z) = \frac{3}{2}(1 - z)$

نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2 :  $\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 & (\times(-1)) \\ 8x + 4y - z = 7 & (\times 2) \end{cases}$

أي :  $\begin{cases} -x + 7y - 8z = -4 \\ 16x + 8y - 2z = 14 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف :  $-x + 7y - 8z + 16x + 8y - 2z = -4 + 14$

يعني :  $15x + 15y - 10z = 10$

يعني :  $15(x + y) = 10(1 + z)$

إذن :  $(4) \quad x + y = \frac{10}{15}(1 + z) = \frac{2}{3}(1 + z)$

نضرب المتساويتان 3 و 4 بطرف :  $(x - y) \times (x + y) = \frac{\beta}{\gamma}(1 - z) \times \frac{\gamma}{\beta}(1 + z)$

يعني :  $x^2 - y^2 = 1 - z^2$

وبالتالي :  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

### تمرين 3

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

(1)  $\frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC}$  ومنه  $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{EF}{AC}$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

(2)  $\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{DB}$  ومنه  $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{EF}{DB}$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA} + \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{AC} + \frac{EF}{DB}$$

يعني :  $EF \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} \right) = \frac{BF + AF}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$

إذن :  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} = \frac{1}{EF}$

التطبيق العددي :

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4+8}{32} = \frac{12}{32}$$

$$EF = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

#### تمرين 4

بما أن  $xyz=1$  فإن  $yz = \frac{1}{x}$  و  $xz = \frac{1}{y}$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1} + \frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{1+xy+x} + \frac{2zm}{1+yz+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+yz+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+xy+x} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2xyzm}{1+xy+x} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm + 2xym + 2 \times 1 \times m}{xy+x+1} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2m(x+xy+1)}{\cancel{xy+x+1}} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$2m = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي :}$$

## أولمبياد السابع

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$-1 \text{ بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

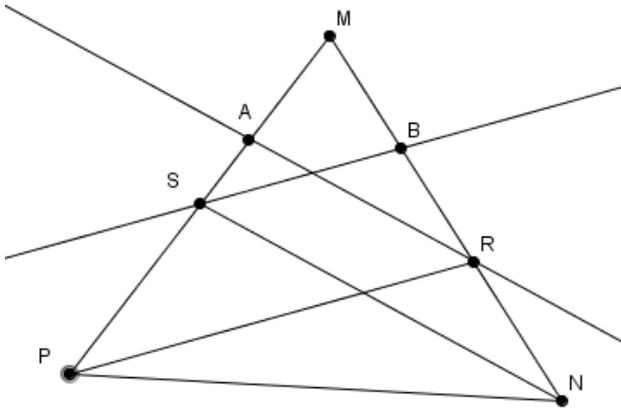
$$-2 \text{ استنتج أن : } \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

### تمرين 2

في الشكل جانبه لدينا :  $R \in [NM]$  و  $S \in [PM]$

و  $(PR) \parallel (BS)$  و  $(AR) \parallel (NS)$

$$\text{بين أن : } \frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN}$$



### تمرين 3

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$

بين أن :  $BC^K > AB^K + AC^K$  ( $K > 2$ )

### تمرين 4

$x$  و  $y$  و  $z$  و  $x'$  و  $y'$  و  $z'$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = m$

$$\text{بين أن : } \sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} = \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$$

## حل أولمبياد السابع

### تمرين 1

$$-1 \text{ لدينا : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{y+x}{xy} - \frac{4}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \geq 0$$

( لأن :  $(x-y)^2 \geq 0$  و لدينا  $x > 0$  و  $y > 0$  يعني  $xy(x+y) \geq 0$  )

$$\text{إذن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$-2 \text{ حسب السؤال السابق لدينا : } (1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$(2) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z} \text{ بنفس الطريقة نبين أن :}$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z} \text{ و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{x+z}$$

$$\text{أي : } \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq 4 \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\text{أي : } \frac{1}{4} \times 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{4} \times 4 \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\text{أي : } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

### تمرين 2

في المثلث  $MSN$  لدينا :  $(AR) // (NS)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{MA}{MS} = \frac{MR}{MN} = \frac{AR}{SN} \text{ ومنه } \frac{MA}{MS} = \frac{MR}{MN}$$

$$(1) \quad MS \times MR = MA \times MN \text{ أي}$$

في المثلث  $MRP$  لدينا :  $(PR) // (BS)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{MB}{MR} = \frac{MS}{MP} = \frac{BS}{PR} \text{ ومنه } \frac{MB}{MR} = \frac{MS}{MP}$$

$$(2) \quad MS \times MR = MB \times MP \text{ أي}$$

من 1 و 2 نستنتج أن  $MA \times MN = MB \times MP$

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN}$$

### تمرين 3

لدينا  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{إذن}$$

نضرب طرفي المتساوية في  $BC^{K-2}$  فنحصل على :  $BC^2 \times BC^{K-2} = AB^2 \times BC^{K-2} + AC^2 \times BC^{K-2}$

$$(1) \quad BC^K = AB^2 \times BC^{K-2} + AC^2 \times BC^{K-2} \quad \text{يعني}$$

لدينا  $BC > AB$  و  $BC > AC$  يعني  $BC^{K-2} > AB^{K-2}$  و  $BC^{K-2} > AC^{K-2}$

يعني  $BC^{K-2} \times AC^2 > AC^{K-2} \times AC^2$  و  $BC^{K-2} \times AB^2 > AB^{K-2} \times AB^2$

$$(2) \quad BC^{K-2} \times AC^2 > AC^K \quad \text{و} \quad BC^{K-2} \times AB^2 > AB^K$$

من 1 و 2 نستنتج أن  $BC^K > AB^K + AC^K$

### تمرين 4

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = m \quad \text{لدينا}$$

$$z = mz' \quad \text{و} \quad y = my' \quad \text{و} \quad x = mx'$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} &= \sqrt{mx'x'} + \sqrt{my'y'} + \sqrt{mz'z'} \\ &= \sqrt{mx'^2} + \sqrt{my'^2} + \sqrt{mz'^2} \\ &= x'\sqrt{m} + y'\sqrt{m} + z'\sqrt{m} \\ &= \sqrt{m}(x' + y' + z') \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')} &= \sqrt{(mx'+my'+mz')(x'+y'+z')} \\ &= \sqrt{m(x'+y'+z')(x'+y'+z')} \\ &= \sqrt{m}(x'+y'+z') \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} = \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}} \quad \text{إذن}$$

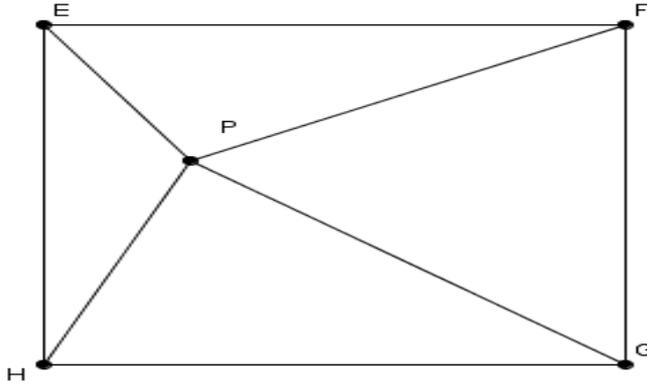
## أولمبياد الثامن

### تمرين 1

$x$  و  $y$  عددان موجبان قطعاً

بين أن :  $\frac{x+y}{xy+x+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

### تمرين 2



مربع  $EFGH$

و النقطة  $P$  توجد في داخله

كما هو مبين في الشكل جانبه

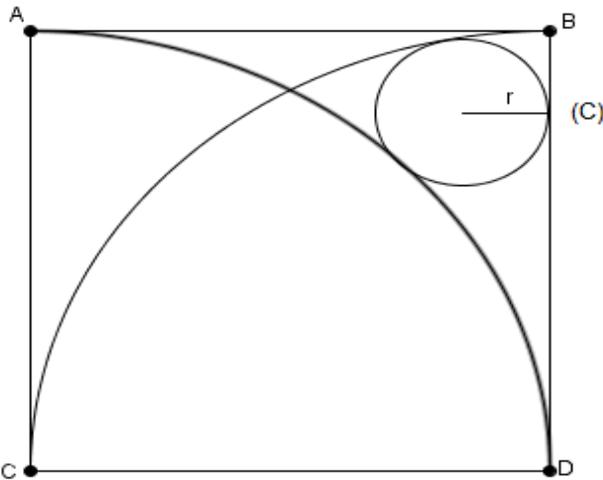
بين أن :  $GP^2 + EP^2 = HP^2 + FP^2$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين مختلفين غير منعدمين بحيث :  $(x-y)(3x-2y) = xy$

احسب  $\frac{x+y}{x-y}$

### تمرين 4



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

مربع  $ABDC$  و  $BD = 6cm$  و  $r$  هو

شعاع الدائرة  $(C)$

بين أن :  $r = 1cm$

## حل أولمبياد الثامن

### تمرين 1

لدينا :  $x > 0$  و  $y > 0$

يعني :  $x + y \geq x$  يعني :  $x + y + 1 \geq x + 1$  يعني :  $\frac{1}{x + y + 1} \leq \frac{1}{x + 1}$

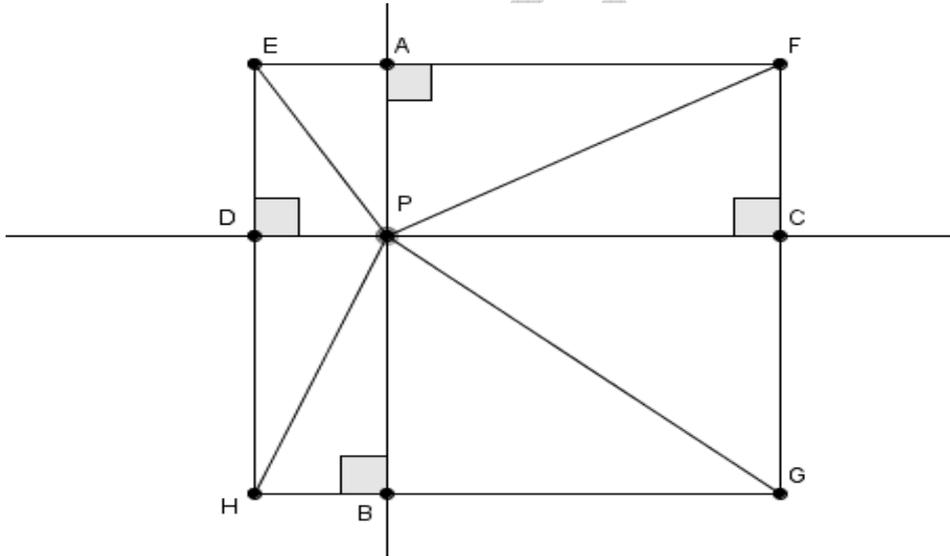
إذن :  $(1) \quad \frac{x}{x + y + 1} \leq \frac{x}{x + 1}$

بنفس الطريقة نبين أن :  $(2) \quad \frac{y}{y + x + 1} \leq \frac{y}{y + 1}$

من 1 و 2 نستنتج أن :  $\frac{x}{x + y + 1} + \frac{y}{y + x + 1} \leq \frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1}$

وبالتالي :  $\frac{x + y}{x + y + 1} \leq \frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1}$

### تمرين 2



تعتبر النقطة A المسقط العمودي للنقطة P على [EF]

و النقطة C المسقط العمودي للنقطة P على [FG]

و النقطة B المسقط العمودي للنقطة P على [GH]

و النقطة  $D$  المسقط العمودي للنقطة  $P$  على  $[EH]$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات  $AEP$  و  $AFP$  و  $PCG$  و  $PHB$  :

$$\left( \begin{array}{l} HB = DP \text{ و } AF = PC \text{ و } CG = PB \text{ و } AE = DP \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} EP^2 = AP^2 + AE^2 = AP^2 + DP^2 \\ PG^2 = PC^2 + CG^2 = PC^2 + PB^2 \\ PF^2 = AP^2 + AF^2 = AP^2 + PC^2 \\ PH^2 = PB^2 + HB^2 = PB^2 + DP^2 \end{array} \right.$$

إذن :

$$\begin{aligned} PG^2 + EP^2 &= PC^2 + PB^2 + AP^2 + DP^2 \\ &= PB^2 + DP^2 + AP^2 + PC^2 \\ &= PH^2 + PF^2 \end{aligned}$$

### تمرين 3

لدينا :  $(x-y)(3x-2y) = xy$  يعني :  $3x^2 - 2xy - 3xy + 2y^2 - xy = 0$

يعني :  $3x^2 - 6xy + 2y^2 = 0$  يعني :  $3\left(x^2 - 2xy + \frac{2y^2}{3}\right) = 0$

يعني :  $\left(x^2 - 2xy + y^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$  يعني :  $\left((x-y)^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$

يعني :  $\left(x-y + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)\left(x-y - \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = 0$

يعني :  $x-y + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$  و  $x-y - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

يعني :  $x = y + \frac{y}{\sqrt{3}}$  و  $x = y - \frac{y}{\sqrt{3}}$

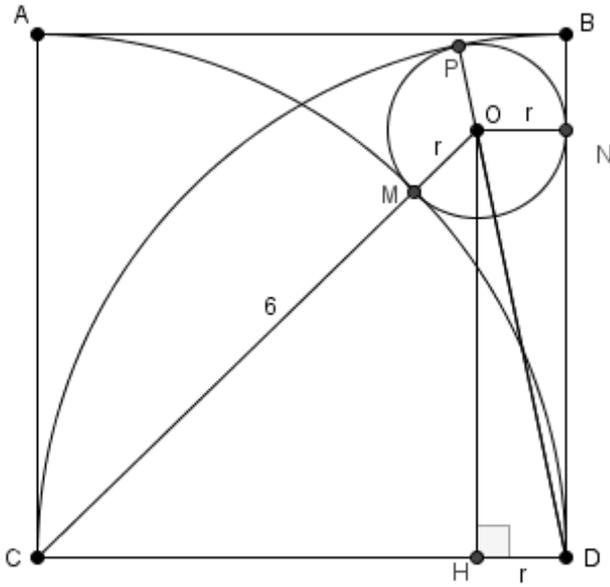
إذن :

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y - \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y - \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y - \frac{y}{\sqrt{3}}}{-\frac{y}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{-1} = 1 - 2\sqrt{3}$$

أو

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y + \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y + \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y + \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{y}{\sqrt{3}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$

تمرين 4



نعتبر النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة

$O$  على  $(CD)$

إذن :  $O\hat{H}D = 90^\circ$

بما أن  $(DN)$  مماسا للدائرة  $(C)$  في

النقطة  $N$

فإن :  $(DN) \perp (ON)$  ومنه  $D\hat{N}O = 90^\circ$

لدينا :  $H\hat{O}N = 360 - D\hat{N}O - O\hat{H}D - H\hat{D}N$

يعني :  $H\hat{O}N = 360 - 90 - 90 - 90 = 90^\circ$

بما أن  $H\hat{O}N = D\hat{N}O = O\hat{H}D = H\hat{D}N = 90^\circ$

فإن الرباعي  $ONDH$  مستطيل

ومنه :  $OH = ND$

ونعلم أن :  $DO = DP - PO$  و  $CO = CM + MO$  و  $CH = CD - HD$

يعني :  $DO = 6 - r$  و  $CO = 6 + r$  و  $CH = 6 - r$

حساب  $OH$  :

لدينا المثلث  $OHC$  قائم الزاوية في  $H$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $CO^2 = CH^2 + OH^2$

أي :  $OH^2 = CO^2 - CH^2$  أي :  $OH^2 = (6+r)^2 - (6-r)^2$

أي :  $OH^2 = 36 + 12r + r^2 - 36 + 12r - r^2$  ومنه :  $OH = \sqrt{24r}$

حساب  $r$  :

لدينا المثلث  $ODN$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $OD^2 = ON^2 + DN^2$

أي :  $(6-r)^2 = r^2 + (\sqrt{24r})^2$  (  $OH = ND$  و  $DO = 6 - r$  )

أي :  $36 - 12r + r^2 = r^2 + 24r$  أي :  $36r = 36$

وبالتالي :  $r = 1$

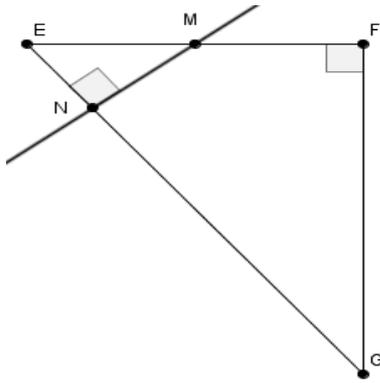
## أولمبياد التاسع

### تمرين 1

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين بحيث :  $x > 1$  و  $y > 1$

$$\text{بين أن : } \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$$

### تمرين 2



$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $F$  بحيث :  $EF < FG$

النقطة  $M$  منتصف  $[EF]$

النقطة  $N$  هي المسقط العمودي للنقطة

$M$  على  $(EG)$

$$\text{بين أن : } GN^2 - EN^2 = FG^2$$

### تمرين 3

$m$  عدد حقيقي موجب قطعاً قطعاً

$$-1 \text{ بين أن } m + \frac{1}{m} \geq 2$$

2-  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن : } (x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$$

### تمرين 4

$ABCD$  متوازي الأضلاع و  $M$  و  $N$  منتصفا  $[BC]$  و  $[AD]$  على التوالي

في المثلث  $AMD$  الإرتفاع المار من  $D$  يقطع  $(AM)$  في  $E$

$$\text{بين أن : } CE = CD$$

## حل أولمبياد التاسع

### تمرين 1

لدينا :  $x > 1$  و  $y > 1$

يعني :  $x-1 > 0$  و  $y-1 > 0$

نضع :  $a = x-1$  و  $b = y-1$

يعني :  $x = a+1$  و  $y = b+1$

إذن :  $x^2 = (a+1)^2$  و  $y^2 = (b+1)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} &= \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \\ &= \frac{a^2+2a+1}{b} + \frac{b^2+2b+1}{a} \\ &= \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

لدينا :  $(a+b)^2 \geq 0$

يعني :  $a^2+2ab+b^2 \geq 0$  يعني  $a^2+b^2 \geq 2ab$

يعني :  $\frac{1}{ab} \times (a^2+b^2) \geq \frac{1}{ab} \times 2ab$  يعني  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

إذن :  $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$  ( 1 )

لدينا :  $(a-1)^2 \geq 0$

يعني :  $a^2-2a+1 \geq 0$  يعني  $a^2+1 \geq 2a$  يعني  $\frac{1}{b} \times (a^2+1) \geq \frac{1}{b} \times 2a$

إذن :  $\frac{a^2+1}{b} \geq \frac{2a}{b}$  ( 2 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $\frac{b^2+1}{a} \geq \frac{2b}{a}$  ( 3 )

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$$

$$\text{أي : } \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$(4) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) : \text{ومنه}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} = \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4+4 : \text{من 1 و 4 نستنتج أن}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8 : \text{وبالتالي}$$

## تمرين 2

لدينا المثلثان  $MEN$  و  $MNG$  قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $ME^2 = MN^2 + EN^2$  و  $MG^2 = MN^2 + GN^2$

$$\text{ومنه : } EN^2 = ME^2 - MN^2 \quad \text{و} \quad GN^2 = MG^2 - MN^2$$

$$\text{ومنه : } GN^2 - EN^2 = MG^2 - MN^2 - (ME^2 - MN^2)$$

$$\text{ومنه : } GN^2 - EN^2 = MG^2 - ME^2$$

$$(1) \quad GN^2 - EN^2 = MG^2 - MF^2 : \text{ومنه}$$

$$( [EF] \text{ منتصف } M \text{ لأن النقطة } M \text{ منتصف } [EF] )$$

لدينا المثلثان  $MGF$  قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $MG^2 = MF^2 + FG^2$

$$(2) \quad FG^2 = MG^2 - MF^2 : \text{ومنه}$$

$$\text{من 1 و 2 نستنتج أن : } GN^2 - EN^2 = FG^2$$

## تمرين 3

$$-1 \text{ لدينا : } m + \frac{1}{m} - 2 = \frac{m^2+1}{m} - 2 = \frac{m^2+1-2m}{m} = \frac{(m-1)^2}{m} \geq 0 \quad \text{إذن : } m + \frac{1}{m} \geq 2$$

-2 لدينا :

$$\begin{aligned} (x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1 \\ &= \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left( \frac{y}{t} + \frac{t}{y} \right) + \left( \frac{z}{t} + \frac{t}{z} \right) + 4 \end{aligned}$$

$$\text{حسب السؤال 1 لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad \text{و} \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 \quad \text{و} \quad \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \geq 2$$

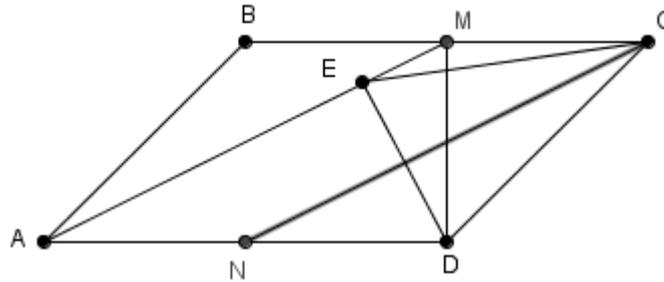
$$\frac{z}{t} + \frac{t}{z} \geq 2 \quad \text{و} \quad \frac{y}{t} + \frac{t}{y} \geq 2 \quad \text{و} \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$$

إذن :

$$\begin{aligned} (x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1 \\ &= \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left( \frac{y}{t} + \frac{t}{y} \right) + \left( \frac{z}{t} + \frac{t}{z} \right) + 4 \\ &\geq 2+2+2+2+2+2+4 \end{aligned}$$

$$(x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16 \quad \text{وبالتالي :}$$

تمرين 4



لدينا  $ABCD$  متوازي الأضلاع و  $M$  و  $N$  منتصفا  $[BC]$  و  $[AD]$  على التوالي

إذن :  $(MC) \parallel (AN)$  و  $MC = AN$

ومنه : الرباعي  $ANCM$  متوازي الأضلاع

ومنه :  $(AM) \parallel (NC)$

ومنه :  $(CN) \perp (DE)$  ( 1 ) لأن  $(AM) \perp (DE)$

في المثلث  $ADE$  لدينا  $N$  منتصف  $[AD]$  و  $(CN) \parallel (AE)$

إذن  $(CN)$  يمر من منتصف  $(DE)$  ( 2 )

من 1 و 2 نستنتج أن  $(CN)$  هو واسط القطعة  $[DE]$

وبالتالي :  $CE = CD$

## أولمبياد العاشر

### تمرين 1

$x, y, z$  و  $t$  أعداد حقيقية موجبة بحيث :  $x+y+z=1$

$$-1 \text{ بين أن : } \sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$$

$$-1 \text{ استنتج أن : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq 4$$

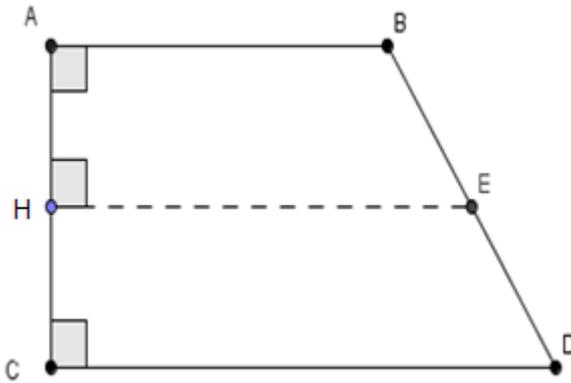
### تمرين 2

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$

النقطة  $M$  المسقط العمودي للنقطة  $E$  على المستقيم  $(FG)$

$$\text{بين أن : } EF + EG < EM + FG$$

### تمرين 3



$ABCD$  رباعي بحيث :  $(AB) \perp (AC)$

و  $(DC) \perp (AC)$  والنقطة  $E$  منتصف  $[BD]$

النقطة  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة

$E$  على  $(AC)$

$$\text{بين أن } 2EH = AB + DC$$

### تمرين 4

احسب :

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}$$

## حل أولمبياد العاشر

### تمرين 1

$$-1 \text{ لدينا : } (\sqrt{t}-1)^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\sqrt{t}-1)^2 = t - 2\sqrt{t} + 1 \geq 0 \text{ يعني : } -2\sqrt{t} \geq -t - 1 \text{ يعني : } 2\sqrt{t} \leq t + 1$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{2} \times 2\sqrt{t} \leq \frac{1}{2}(t+1)$$

$$\text{إذن : } \sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$$

$$-2 \text{ حسب السؤال 1 لدينا : } \sqrt{2x+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}$$

$$\sqrt{2y+1} \leq \frac{(2y+1)+1}{2} \text{ و}$$

$$\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2z+1)+1}{2} \text{ و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات طرف بطرف : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2} + \frac{(2y+1)+1}{2} + \frac{(2z+1)+1}{2}$$

$$\text{يعني : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2x+2y+2z+6}{2}$$

$$\text{يعني : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{2}$$

$$\text{يعني : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2 \times 1 + 6}{2} \text{ يعني : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{8}{2}$$

$$\text{إذن : } \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq 4$$

### تمرين 2

لدينا :

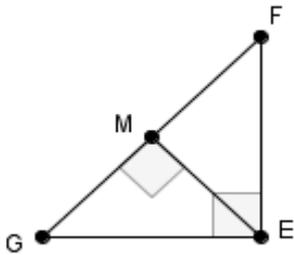
$$(EM + FG)^2 = EM^2 + 2EM \times FG + FG^2$$

$$= EM^2 + 4 \left( \frac{EM \times FG}{2} \right) + FG^2$$

$$\text{نعلم أن : } S_{EFG} = \frac{EM \times FG}{2} = \frac{EF \times EG}{2}$$

$$(S_{EFG} : \text{مساحة المثلث } EFG)$$

$$\text{إذن : } (EM + FG)^2 = EM^2 + 4S_{EFG} + FG^2 \quad (1)$$



لدينا :

$$(EF + EG)^2 = EF^2 + 2EF \times EG + EG^2$$

$$= EF^2 + EG^2 + 4\left(\frac{EF \times EG}{2}\right)$$

$$(FG^2 = EF^2 + EG^2) \text{ لأن المثلث } EFG \text{ قائم الزاوية في } E$$

$$(2) \quad (EF + EG)^2 = FG^2 + 4S_{EFG}$$

نقوم بطرح المتساويتين 1 و 2 طرف بطرف :

$$(EF + EG)^2 - (EM + FG)^2 = FG^2 + 4S_{ABC} - (EM^2 + 4S_{ABC} + FG^2)$$

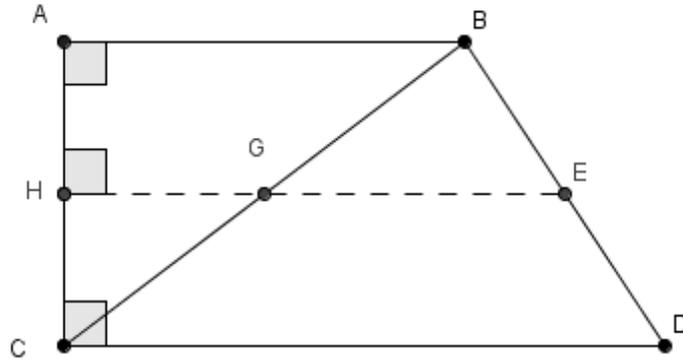
$$= \cancel{FG^2} + \cancel{4S_{ABC}} - EM^2 - \cancel{4S_{ABC}} - \cancel{FG^2}$$

$$= -EM^2 < 0$$

$$(EF + EG)^2 < (EM + FG)^2 \text{ إذن}$$

$$EF + EG < EM + FG \text{ وبالتالي}$$

تمرين 3



$$\frac{BG}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{GE}{CD} \quad ; \text{ بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث } BCD$$

$$\text{يعني:} \quad \frac{GE}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{2BE} = \frac{1}{2} \quad ( \text{لأن } E \text{ منتصف } [BD] )$$

$$\text{إذن } (1) \quad GE = \frac{1}{2} CD$$

لدينا في المثلث BCD النقطة E منتصف [BD] و (GE) // (CD)

إذن G منتصف [BC]

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{HG}{AB} : \text{بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث } ABC$$

$$\text{ومنه } (G \text{ منتصف } [BC]) \quad \frac{HG}{AB} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } (2) \quad HG = \frac{1}{2}AB$$

$$\text{من 1 و 2 نستنتج أن : } 2EH = 2(HG + GE) = 2\left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD\right) = AB + CD$$

تمرين 4

لدينا :

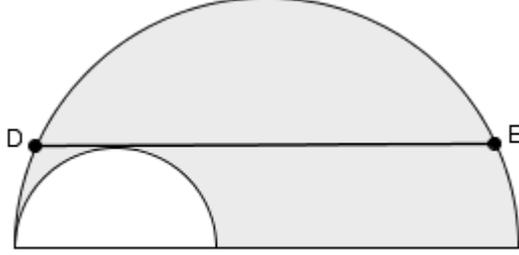
$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} &= \frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} \times \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^2(x-1) - (x-1)^2 \times x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^3 - x^2 - x(x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 - x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^2 - x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x(x-1)} \\ &= \frac{\cancel{x}\sqrt{x-1} - (\cancel{x-1})\sqrt{x}}{\cancel{x}(x-1) - \cancel{x}(x-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1000\sqrt{999} + 999\sqrt{1000}} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{999}}{999} - \frac{\sqrt{1000}}{1000} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{1000}}{1000} = 1 - \frac{10\sqrt{10}}{1000} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{100} \end{aligned}$$

## أولمبياد الحادي عشر

### تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :  
المستقيم (DE) مماس للدائرة الصغيرة

$$DE = 8\text{cm} \text{ و}$$

احسب  $S'$  مساحة المنطقة المظللة

### تمرين 2

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $x + \frac{1}{y} = 10$  و  $y + \frac{1}{z} = 11$  و  $z + \frac{1}{x} = 12$

$$\text{بين أن : } xyz + \frac{1}{xyz} = 1287$$

### تمرين 3

$EFG$  مثلث متساوي الساقين في  $E$  و  $A$  نقطة من  $[FG]$

و  $[FD]$  الإرتفاع الموافق للضلع  $[EG]$

و النقطتان  $B$  و  $C$  هما المسقطان العموديان للنقطة  $A$  على  $(EF)$  و  $(EG)$  على التوالي

$$\text{بين أن : } FD = AB + AC$$

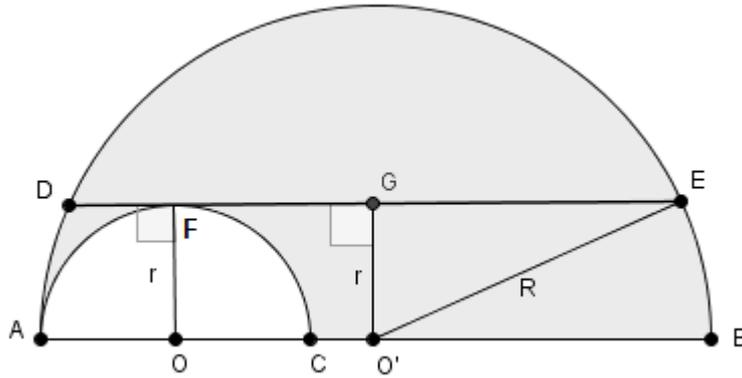
### تمرين 4

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين

$$\text{بين أن : } (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)$$

# حل أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر النقطة  $O'$  مركز الدائرة الكبيرة التي شعاعها  $R$   
و النقطة  $O$  مركز الدائرة الصغيرة التي شعاعها  $r$

لدينا :  $O'E = O'D = R$

إذن  $(O'G)$  واسط القطعة  $[DE]$

ومنه النقطة  $G$  منتصف  $[DE]$

أي  $GE = GD = 4\text{cm}$

لدينا المثلث  $O'GE$  قائم الزاوية في  $G$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $O'E^2 = O'G^2 + GE^2$

أي :  $R^2 = r^2 + 16$

مساحة المنطقة المظللة ( $S'$ ) = مساحة نصف الدائرة الكبيرة - مساحة نصف الدائرة الصغيرة

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(r^2 + 16)}{2} - \frac{\pi r^2}{2} \\ &= \frac{\pi 16}{2} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

## تمرين 2

لدينا :  $x + \frac{1}{y} = 10$  و  $y + \frac{1}{z} = 11$  و  $z + \frac{1}{x} = 12$

نجمع المتساويات طرف بطرف إذن :  $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 33$

نضرب المتساويات طرف بطرف :  $\left(x + \frac{1}{y}\right) \times \left(y + \frac{1}{z}\right) \times \left(z + \frac{1}{x}\right) = 1320$

يعني :  $\left(xy + \frac{x}{z} + 1 + \frac{1}{yz}\right) \times \left(z + \frac{1}{x}\right) = 1320$

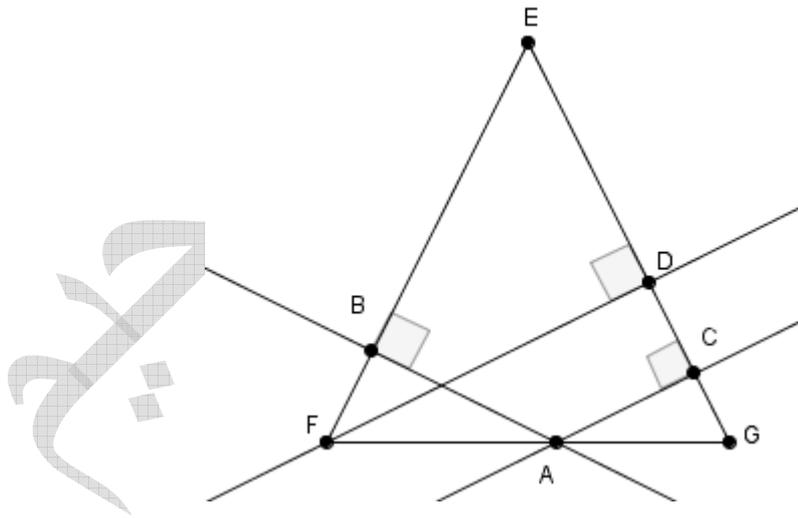
يعني :  $xyz + y + x + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xyz} = 1320$

يعني :  $\left(xyz + \frac{1}{xyz}\right) + \left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1320$

يعني :  $\left(xyz + \frac{1}{xyz}\right) + 33 = 1320$

وبالتالي :  $xyz + \frac{1}{xyz} = 1287$

## تمرين 3



لدينا :  $S_{EFG} = S_{EFA} + S_{EAG}$

(  $S_{EFG}$  : مساحة مثلث  $EFG$  ، ،  $S_{EFA}$  : مساحة مثلث  $EFA$  ، ،  $S_{EAG}$  : مساحة مثلث  $EAG$  )

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$( EF = EG \text{ لأن المثلث } EFG \text{ متساوي الساقين في } E ) \quad \frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EG + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{EG(AB + AC)}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG} \times FD}{\cancel{EG}} = \frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG}(AB + AC)}{\cancel{EG}} \quad \text{يعني :}$$

$$FD = AB + AC \quad \text{إذن :}$$

#### تمرين 4

$$\text{لدينا : } (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \geq 0 \quad \text{و} \quad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{يعني : } y^2 + 1 \geq 2y \quad \text{و} \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\text{يعني : } \frac{y^2 + 1}{2} \geq y \quad \text{و} \quad \frac{x^2 + 1}{2} \geq x$$

$$\text{يعني : } \frac{(y^2 + 1)}{2}(x^2 + 1) \geq y(x^2 + 1) \quad \text{و} \quad \frac{(x^2 + 1)}{2}(y^2 + 1) \geq x(y^2 + 1)$$

$$\text{نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : } \frac{(x^2 + 1)}{2}(y^2 + 1) + \frac{y^2 + 1}{2}(x^2 + 1) \geq x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)$$

$$\text{يعني : } \frac{2(x^2 + 1)}{2} \times (y^2 + 1) \geq x \times (y^2 + 1) + y \times (x^2 + 1)$$

$$\text{إذن : } (x^2 + 1) \times (y^2 + 1) \geq x \times (y^2 + 1) + y \times (x^2 + 1)$$

## أولمبياد الثاني عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعدادا حقيقية غير منعدمة بحيث :  $xz + yz + xy = 0$   
بين أن :  $\frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{zc} = 0$

### تمرين 2

$ABC$  مثلث بحيث :  $AB^4 - AC^4 = BC^2 (AB^2 - AC^2)$  و  $AB \neq AC$   
بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية

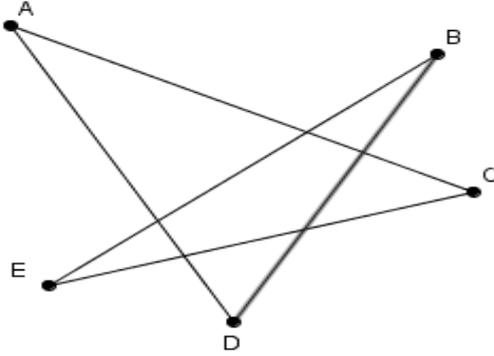
### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعدادا حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث :  $x < y + z$   
بين أن :  $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$

### تمرين 4

نعتبر الشكل جانبه

بين أن  $\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ$



## حل أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{xc} &= \frac{z}{z} \times \frac{x+y}{xy} + \frac{x}{x} \times \frac{y+z}{yz} + \frac{y}{y} \times \frac{z+x}{xz} \\
 &= \frac{xz+yz}{xyz} + \frac{xy+xz}{xyz} + \frac{yz+xy}{xyz} \\
 &= \frac{xz+yz+xy+xz+yz+xy}{xyz} \\
 &= \frac{2xz+2yz+2xy}{xyz} \\
 &= \frac{2(xz+yz+xy)}{xyz} \\
 &= \frac{2 \times 0}{xyz} = 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{xc} = 0} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 2

$$AB^4 - AC^4 = BC^2 (AB^2 - AC^2) \quad \text{لدينا}$$

$$AB^4 - AC^4 = BC^2 \times AB^2 - BC^2 \times AC^2 \quad \text{يعني}$$

$$AB^4 - AC^4 - BC^2 \times AB^2 + BC^2 \times AC^2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(AB^2 - AC^2)(AB^2 + AC^2) - BC^2(AB^2 - AC^2) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(AB^2 - AC^2)(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0 \quad \text{أو} \quad AB^2 - AC^2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{أو} \quad AB^2 = AC^2 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{أو} \quad AB = AC \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{إذن} \quad AB \neq AC$$

حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$

### تمرين 3

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} - \left( \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right) &= \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z} \\ &= \frac{x(1+y)(1+z) - y(1+x)(1+z) - z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x + \cancel{xz} + \cancel{xy} + \cancel{xyz} - y - yz - \cancel{xy} - \cancel{xyz} - z - yz - \cancel{xz} - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x - y - z - 2yz - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \end{aligned}$$

لدينا :  $x > 0$  و  $y > 0$  و  $z > 0$  و  $x < y + z$

إذن  $(1+x)(1+y)(1+z) > 0$  و  $-2yz - xyz < 0$  و  $x - y - z < 0$

ومنه :  $\frac{x - y - z - 2yz - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} < 0$

وبالتالي :  $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$

### تمرين 4

نضع النقطة  $F$  تقاطع المستقيمين  $(AD)$  و  $(EB)$

و نضع النقطة  $I$  تقاطع المستقيمين  $(AC)$  و  $(EB)$

لدينا :  $\hat{A}IF + \hat{C}IE = 180$  و  $\hat{A}FI + \hat{B}FD = 180$

إذن :  $\hat{C}IE = 180 - \hat{A}IF$  و  $\hat{B}FD = 180 - \hat{A}FI$

في المثلث  $DFB$  لدينا :  $\hat{B}FD + \hat{D} + \hat{B} = 180$

يعني :  $(\hat{B}FD = 180 - \hat{A}FI) \quad 180 - \hat{A}FI + \hat{D} + \hat{B} = 180$

إذن :  $(1) \quad \hat{A}FI = \hat{D} + \hat{B}$

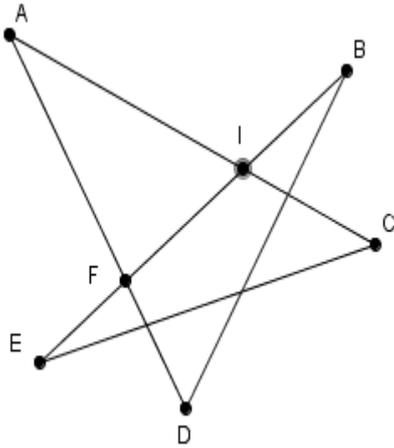
في المثلث  $CEI$  لدينا :  $\hat{C}IE + \hat{E} + \hat{C} = 180$

يعني :  $(\hat{C}IE = 180 - \hat{A}IF) \quad 180 - \hat{A}IF + \hat{E} + \hat{C} = 180$

إذن :  $(2) \quad \hat{A}IF = \hat{E} + \hat{C}$

في المثلث  $AFI$  لدينا :  $(3) \quad \hat{A} + \hat{A}FI + \hat{A}IF = 180^\circ$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن :  $\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ$

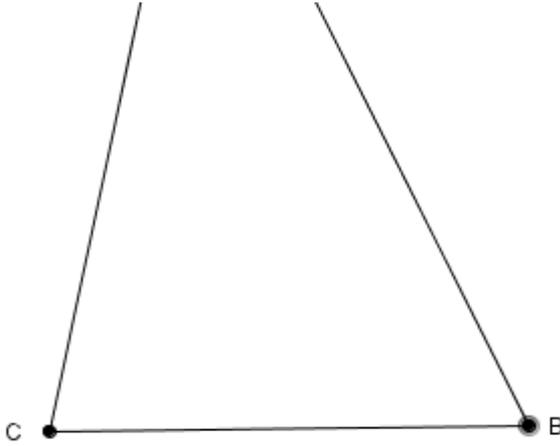


## أولمبياد الثالث عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان مختلفان (  $x \neq y$  ) و موجبان قطعاً بحيث :  $x+2y=3\sqrt{xy}$   
احسب  $\frac{x}{y}$

### تمرين 2



أراد محمد أن يرسم مثلثا  $ABC$  لكن لاحظ أن الرأس  $A$  يوجد خارج الورقة كما هو مبين في الشكل جانبه  
ساعد محمد على رسم المتوسط الموافق للضلع  $[BC]$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$1 - \text{بين أن } \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

$$2 - \text{أستنتج أن } \frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

### تمرين 4

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $F$

$$\text{بين أن : } EF + FG \leq \sqrt{2}EG$$

## حل أولمبياد الثالث عشر

### تمرين 1

$$x + 2y = 3\sqrt{xy} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{x + 2y}{y} = \frac{3\sqrt{xy}}{y} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x}{y} + 2 = 3\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x}{y} + 2 = 3\sqrt{\frac{xy}{y^2}} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x}{y} + 2 = 3\sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x}{y} - 3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right) - \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 1\right) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} - 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \quad \text{أو} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \quad \text{يعني}$$

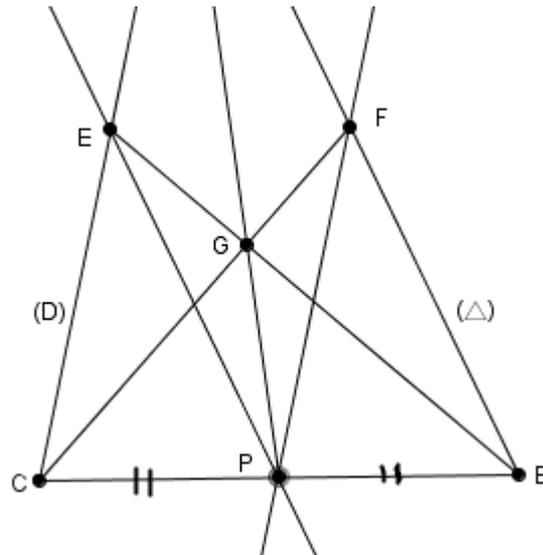
$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 = 1^2 \quad \text{أو} \quad \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 = 2^2 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x}{y} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{x}{y} = 4 \quad \text{يعني}$$

ونعلم أن  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان مختلفان إذن  $\frac{x}{y} \neq 1$

$$\text{وبالتالي : } \frac{x}{y} = 4$$

تمرين 2



- ننشئ النقطة  $P$  منتصف  $[BC]$
- ننشئ المستقيم المار من  $P$  والموازي للمستقيم  $(\Delta)$  ويقطع المستقيم  $(D)$  في النقطة  $E$
- ننشئ المستقيم المار من  $P$  والموازي للمستقيم  $(D)$  ويقطع المستقيم  $(\Delta)$  في النقطة  $F$
- لدينا في المثلث  $ABC$  المستقيم  $(PE)$  يمر من  $P$  منتصف القطعة  $[BC]$  ويوازي  $(\Delta) = (AB)$  ويقطع  $(AC) = (D)$  في النقطة  $E$
- إذن النقطة  $E$  هي منتصف القطعة  $[AC]$
- ومنه المستقيم  $(BE)$  هو متوسط المثلث  $ABC$  ( 1 )
- لدينا في المثلث  $ABC$  المستقيم  $(PF)$  يمر من  $P$  منتصف القطعة  $[BC]$  ويوازي  $(\Delta) = (AC)$  ويقطع  $(AB) = (\Delta)$  في النقطة  $F$
- إذن النقطة  $F$  هي منتصف القطعة  $[AB]$
- ومنه المستقيم  $(CF)$  هو متوسط المثلث  $ABC$  ( 2 )
- من 1 و 2 نستنتج أن النقطة  $G$  هي مركز ثقل المثلث  $ABC$
- وبالتالي المستقيم  $(PG)$  هو المتوسط الموافق للضلع  $[BC]$  المار من النقطة  $A$

تمرين 3

1- لدينا :

$$\frac{xy}{x+y} - \frac{x+y}{4} = \frac{4xy - (x+y)^2}{4(x+y)} = \frac{4xy - x^2 - 2xy - y^2}{4(x+y)} = \frac{2xy - x^2 - y^2}{4(x+y)} = \frac{-(x-y)^2}{4(x+y)} \geq 0$$

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{z+y}{4} \quad \text{يكافئ :} \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \\ \frac{zy}{z+y} \leq \frac{z+y}{4} \\ \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4} \end{array} \right. \quad \text{2- حسب السؤال 1 لدينا :}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{4} \quad \text{يكافئ :} \quad \frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{2x+2y+2z}{4}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 4

لدينا  $EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $F$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $EG^2 = EF^2 + FG^2$

لنحدد إشارة الفرق  $(EF + FG)^2 - (\sqrt{2}EG)^2$  :

$$\begin{aligned} (EF + FG)^2 - (\sqrt{2}EG)^2 &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EG^2 \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EG^2 \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2(EF^2 + FG^2) \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EF^2 - 2FG^2 \\ &= 2EF \times FG - EF^2 - FG^2 \\ &= -(EF^2 - 2EF \times FG + FG^2) \\ &= -(EF - FG)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$(EF + FG)^2 \leq (\sqrt{2}EG)^2 \quad \text{إذن :}$$

$$EF + FG \leq \sqrt{2}EG \quad \text{ومنه :}$$

## أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين موجبين. بين أن :  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}$

تمرين 2

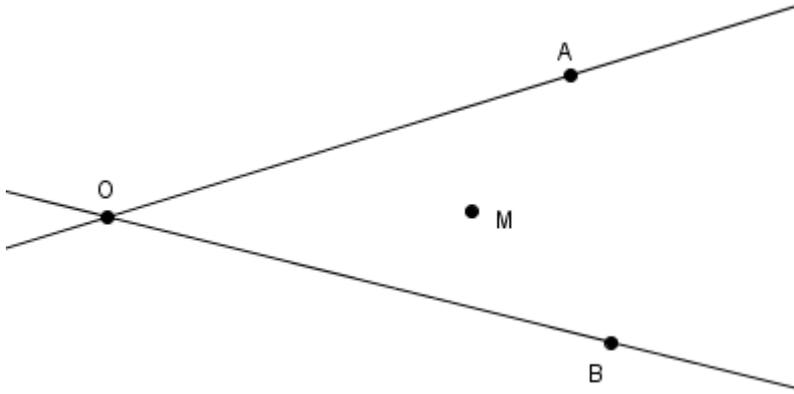
نعتبر الشكل جانبه :

حدد نقطتين  $O'$  و  $N$  من

المستقيمين  $(OA)$  و  $(OB)$  على

التوالي بحيث تكون النقطة  $M$

منتصف  $[NO']$



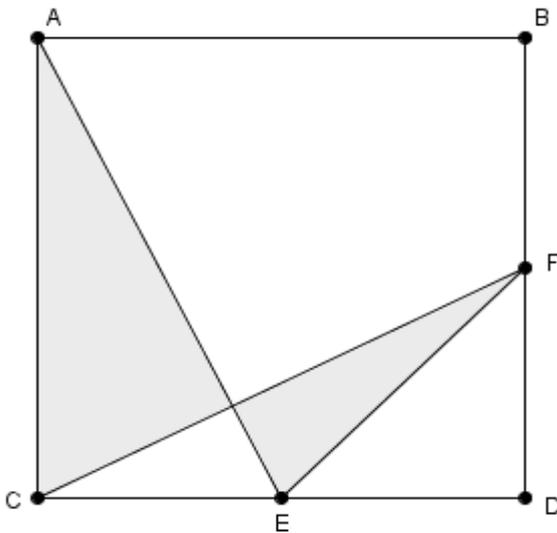
تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $xy + yz + zx = 0$

بين أن :  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} = -3$

تمرين 4

احسب  $S$  مساحة المنطقة المظللة



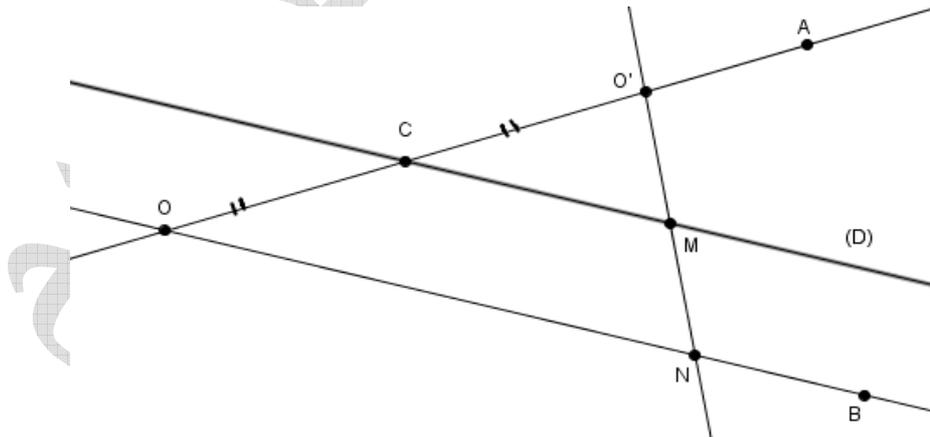
## حل أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 - \frac{x^3+y^3}{2} &= \frac{(x+y)^3}{2^3} - \frac{x^3+y^3}{2} = \frac{(x+y)^2(x+y)}{2^3} - \frac{4(x^3+y^3)}{4 \times 2} \\ &= \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8} - \frac{4x^3+4y^3}{8} \\ &= \frac{-3x^3+3x^2y+3xy^2-3y^3}{8} \\ &= \frac{-3(x^3-x^2y-xy^2+y^3)}{8} \\ &= \frac{-3(x^2(x-y)-y^2(x-y))}{8} \\ &= \frac{-3(x-y)(x^2-y^2)}{8} \\ &= \frac{-3(x-y)(x-y)(x+y)}{8} \\ &= \frac{-3(x-y)^2(x+y)}{8} \leq 0 \end{aligned}$$

( لأن  $x+y \geq 0$  و  $(x-y)^2 \geq 0$  )

تمرين 2



المرحلة الأولى :

ننشئ المستقيم (D) الموازي للمستقيم (OB) ويقطع المستقيم (OA) في النقطة C

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة  $O'$  مائلة النقطة  $O$  بالنسبة للنقطة  $C$   
المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة  $N$  تقاطع المستقيمين  $(O'M)$  و  $(OB)$   
لدينا في المثلث  $O'ON$  المستقيم المستقيم  $(D)$  يمر من  $C$  منتصف القطعة  $[OO']$  ويوازي  $(ON)$   
ويقطع  $[NO']$  في النقطة  $M$   
إذن النقطة  $M$  هي منتصف القطعة  $[NO']$

### تمرين 3

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} &= \frac{xy(x+y) + yz(y+z) + xz(z+x)}{xyz} \\ &= \frac{xy(x+y) + xyz - xyz + yz(y+z) + xyz - xyz + xz(z+x) + xyz - xyz}{xyz} \\ &= \frac{xy(x+y+z) - xyz + yz(y+z+x) - xyz + xz(z+x+y) - xyz}{xyz} \\ &= \frac{xy \times 0 - xyz + yz \times 0 - xyz + xz \times 0 - xyz}{xyz} \\ &= \frac{-xyz - xyz - xyz}{xyz} \\ &= \frac{-3xyz}{xyz} \\ &= -3 \end{aligned}$$

### تمرين 4

لدينا المثلث  $ACE$  قائم الزاوية في  $C$   
حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AE^2 = AC^2 + CE^2$

$$\text{ومنه : } AE^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\text{أي : } AE = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} AC = DC \\ CE = DF \\ \hat{ACE} = \hat{FDC} \end{cases} \text{ ولدينا :}$$

إذن المثلثان  $ACE$  و  $FDC$  متقايسان

ومنه :  $AE = CF = \sqrt{5}$  و  $\hat{CAE} = \hat{FCD}$

لدينا :  $\hat{HCE} + \hat{HEC} = \hat{CAE} + \hat{HEC} = 180^\circ - \hat{ACE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

إذن :  $\hat{CHE} = 180^\circ - (\hat{HCE} + \hat{HEC}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ومنه المثلثان  $AHC$  و  $FHE$  قائما الزاوية في  $H$

أي :  $S = \frac{AH \times CH}{2} + \frac{EH \times FH}{2}$  (مساحة المنطقة المضللة)

حساب  $AH$  و  $CH$  و  $EH$  و  $FH$  :

لدينا :  $\sin \hat{CAE} = \frac{CE}{AE} = \frac{CH}{AC}$

و  $\cos \hat{CAE} = \frac{CA}{AE} = \frac{AH}{AC}$

و  $\sin \hat{FCD} = \frac{FD}{FC} = \frac{EH}{EC}$

يعني :  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{CH}{2}$

و  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AH}{2}$

و  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EH}{1}$

إذن :  $CH = \frac{2}{\sqrt{5}}$

و  $AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$

و  $EH = \frac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا :  $FH = FC - CH = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

## أولمبياد الخامس عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً  
بين أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}$

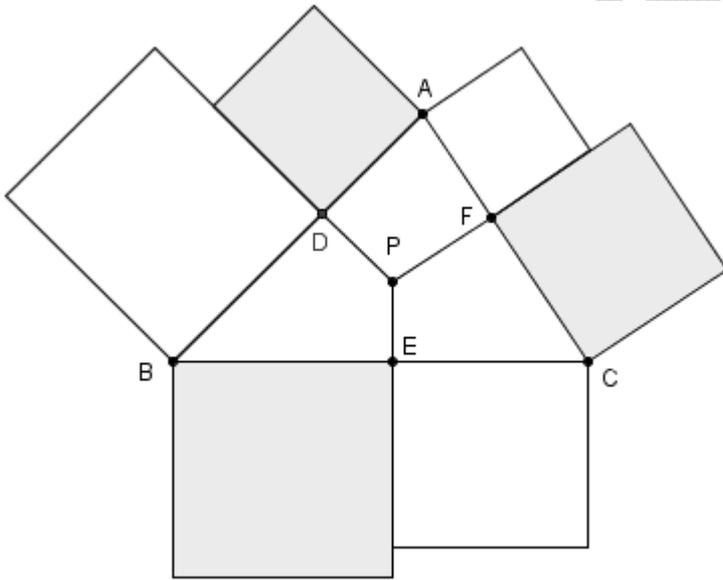
### تمرين 2

$ABC$  مثلث  
بين أن  $S_{ABC} = \frac{r}{2} p$  (حيث  $S_{ABC}$  هي مساحة المثلث  $ABC$  و  $r$  هو شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث  
 $ABC$  و  $p$  هو محيط المثلث  $ABC$ )

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداداً حقيقية موجبة بحيث :  $2(z^2 - y^2) = 3x^2$   
حدد أكبر هذه الأعداد

### تمرين 4



$ABC$  مثلث جميع زواياه حادة و النقطة  $P$  داخله .  
النقط  $D$  و  $E$  و  $F$  هي المساط  
العمودية للنقطة  $P$  على  $[AB]$  و  $[BC]$  و  $[CA]$  على التوالي.  
ننشئ 6 مربعات خارج المثلث  $ABC$  كما  
هو مبين في الشكل جانبه

بين أن مجموع مساحات المربعات الرمادية يساوي مجموع مساحات المربعات البيضاء

## حل أولمبياد الخامس عشر

### تمرين 1

لدينا :  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 0$

يعني :  $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$

إذن :  $(1) \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$

لدينا :  $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2 \geq 0$

يعني :  $\frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{xy}} + \frac{1}{y} \geq 0$

إذن :  $(2) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

نضرب المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف :  $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

يعني :  $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2 \times 2 \sqrt{xy} \times \frac{1}{\sqrt{xy}}$

يعني :  $\frac{1}{x+y} \times (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \times \frac{1}{x+y}$

إذن :  $(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

بنفس الطريقة نبين أن :  $(4) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$

و  $(5) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z}$

نجمع المتفاوتات 3 و 4 و 5 طرف بطرف :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{x+z}$

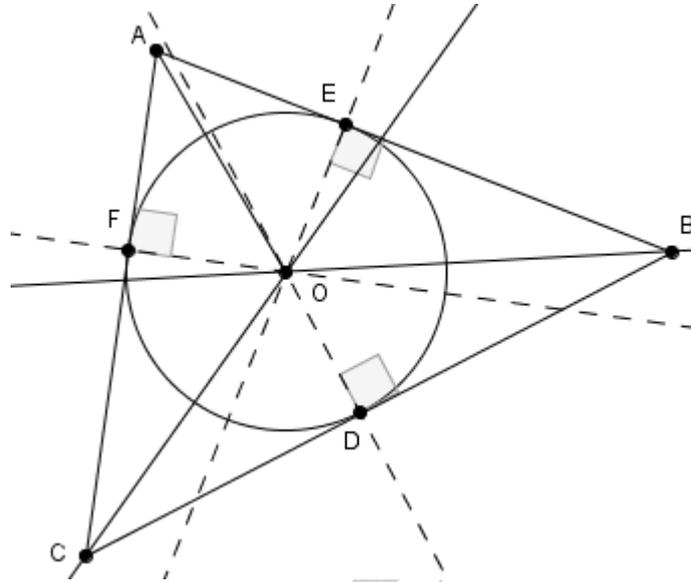
يعني :  $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{2 \times 2}{x+y} + \frac{2 \times 2}{y+z} + \frac{2 \times 2}{x+z}$

يعني :  $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}\right)$

$$\frac{1}{z} \times z \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{z} \times z \left( \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right) \text{ : يعني}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} \text{ : وبالتالي}$$

## تمرين 2



لدينا النقطة  $O$  هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث  $ABC$  و  $r$  شعاعها  
و النقط  $D$  و  $E$  و  $F$  هي المساط العمودية للنقطة  $O$  على  $[BC]$  و  $[AB]$  و  $[AC]$  على التوالي  
إذن :  $OF = OE = OD = r$   
لدينا :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOC} + S_{ABO} + S_{OBC} \\ &= \frac{AC \times OF}{2} + \frac{AB \times OE}{2} + \frac{BC \times OD}{2} \\ &= \frac{AC \times r}{2} + \frac{AB \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} \\ &= \frac{r}{2} (AC + AB + BC) \end{aligned}$$

نعلم أن محيط المثلث  $ABC$  هو :  $p = AC + AB + BC$

$$\text{إذن : } S_{ABC} = \frac{r}{2} (AC + AB + BC) = \frac{r}{2} p$$

## تمرين 3

$$2(z^2 - y^2) = 3x^2 \geq 0 \text{ : لدينا}$$

$$z^2 - y^2 \geq 0 \text{ : يعني}$$

إذن :  $z \geq y$  ( 1 ) ( لأن  $y \geq 0$  و  $z \geq 0$  )

$$\text{لدينا : } 2z^2 - 2y^2 = 2x^2 + x^2$$

$$\text{يعني : } 2z^2 - 2x^2 = 2(z^2 - x^2) = 2y^2 + x^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } z^2 - x^2 \geq 0 \text{ يعني : } z^2 \geq x^2$$

إذن :  $z \geq x$  ( 2 ) ( لأن  $x \geq 0$  و  $z \geq 0$  )

من 1 و 2 نستنتج أن  $z$  هو أكبر هذه الأعداد

#### تمرين 4

- مساحات المربعات الزمادية هي :  $AF^2 + CE^2 + BD^2$

- مساحات المربعات المخدشة هي :  $FC^2 + BE^2 + DA^2$

$$\text{لنبين أن : } AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات  $APD$  و  $PCF$  و  $PBE$  و  $PCE$  و  $PBD$  و  $PAF$  :

$$\begin{cases} PA^2 = AD^2 + PD^2 \\ PC^2 = CF^2 + PF^2 \\ PB^2 = BE^2 + PE^2 \\ PC^2 = EC^2 + PE^2 \\ PB^2 = DB^2 + PD^2 \\ PA^2 = FA^2 + PF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 = PA^2 - PD^2 \\ CF^2 = PC^2 - PF^2 \\ BE^2 = PB^2 - PE^2 \\ EC^2 = PC^2 - PE^2 \\ DB^2 = PB^2 - PD^2 \\ FA^2 = PA^2 - PF^2 \end{cases}$$

يعني :

إذن :

$$\begin{aligned} FA^2 + EC^2 + DB^2 &= PA^2 - PF^2 + PC^2 - PE^2 + PB^2 - PD^2 \\ &= PA^2 - PD^2 + PC^2 - PF^2 + PB^2 - PE^2 \\ &= AD^2 + CF^2 + BE^2 \end{aligned}$$

## أولمبياد السادس عشر

### تمرين 1

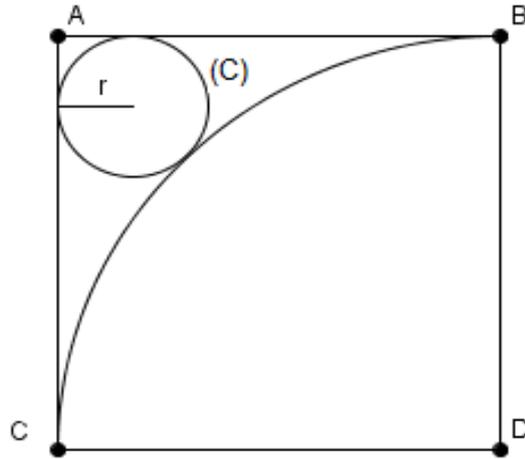
$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث :  $x+y+z=1$

$$\text{بين أن : } \frac{x(1-x)}{yz} + \frac{y(1-y)}{xz} + \frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$$

### تمرين 2

نعتبر الشكل أسفله بحيث :  $ABDC$  مربع و  $BD=R$  و  $r$  هو شعاع الدائرة (C)

$$\text{بين أن : } r = R(3-2\sqrt{2})$$



### تمرين 3

$$\text{حل المعادلة : } \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2+\sqrt{x}}} = 8$$

### تمرين 4

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان موجبان غير منعدمان

$$\text{بين أن : } \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

## حل أولمبياد السادس عشر

### تمرين 1

لدينا :  $(x-y)^2 \geq 0$

يعني :  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

يعني :  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

يعني :  $z \times (x^2 + y^2) \geq z \times 2xy$

إذن :  $(1) \quad z(x^2 + y^2) \geq 2xyz$

بنفس الطريقة نبين أن :  $(2) \quad y(x^2 + z^2) \geq 2xyz$

و  $(3) \quad x(y^2 + z^2) \geq 2xyz$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$z(x^2 + y^2) + y(x^2 + z^2) + x(y^2 + z^2) \geq 2xyz + 2xyz + 2xyz$$

أي :  $zx^2 + zy^2 + yx^2 + yz^2 + xy^2 + xz^2 \geq 6xyz$

أي :  $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(y+x) \geq 6xyz$

ونعلم أن :  $x+y+z=1$  يعني :  $x+y=1-z$  و  $x+z=1-y$  و  $y+z=1-x$

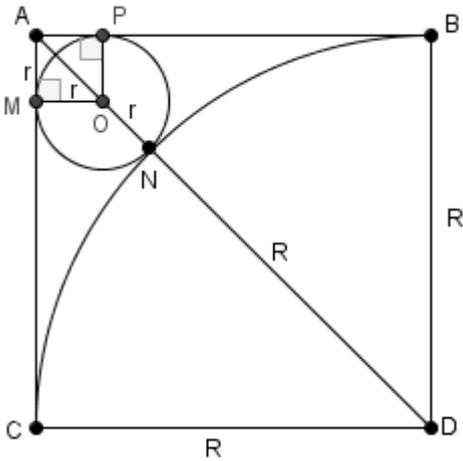
أي :  $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(y+x) = x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) \geq 6xyz$

أي :  $\frac{1}{xyz} \times (x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z)) \geq \frac{1}{xyz} \times 6xyz$

أي :  $\frac{x^2(1-x)}{xyz} + \frac{y^2(1-y)}{xyz} + \frac{z^2(1-z)}{xyz} \geq 6$

وبالتالي :  $\frac{x(1-x)}{yz} + \frac{y(1-y)}{xz} + \frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$

## تمرين 2



لدينا  $(AM)$  و  $(AP)$  مماسا للدائرة  $(C)$

إذن :  $(AM) \perp (OM)$  و  $(AP) \perp (OP)$

ومنه  $\hat{AMO} = \hat{APO} = 90^\circ$

لدينا :  $\hat{POM} = 360 - \hat{AMO} - \hat{APO} - \hat{MAP}$

إذن :  $\hat{POM} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن  $OP = OM$  و  $\hat{POM} = \hat{AMO} = \hat{APO} = \hat{MAP} = 90^\circ$

فإن الرباعي  $AMOP$  مربع

حساب  $AO$

لدينا المثلث  $AMO$  قائم الزاوية في  $M$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AO^2 = AM^2 + MO^2$

أي :  $AO^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

ومنه :  $AO = \sqrt{r^2 2} = r\sqrt{2}$

حساب  $AD$

لدينا المثلث  $ABD$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AD^2 = AB^2 + BD^2$

أي :  $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

ومنه :  $AD = \sqrt{R^2 2} = R\sqrt{2}$

حساب  $r$

لدينا :  $AD = AO + ON + ND$

يعني :  $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$

يعني :  $R\sqrt{2} - R = r\sqrt{2} + r$

يعني :  $R(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} + 1)$

يعني :  $r = \frac{R(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1}$

يعني :

$$\begin{aligned} r &= \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{R(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\ &= \frac{R(2-2\sqrt{2}+1)}{1} \\ &= R(3-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

وبالتالي :  $r = R(3-2\sqrt{2})$

تمرين 3

لدينا :  $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 8$

يعني :  $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = 8$

يعني :  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x} = 8$

يعني :  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} = 8$

يعني :  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2} = 8$

يعني :  $-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2} = 8$

يعني :  $(-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})^2 = 8^2$

يعني :  $x-2-2\sqrt{(x-2)(x+2)}+x+2=64$

يعني :  $2x-2\sqrt{x^2-4}=64$

يعني :  $2(x-\sqrt{x^2-4})=64$

يعني :  $x-\sqrt{x^2-4}=32$

يعني :  $-\sqrt{x^2-4}=32-x$

يعني :  $(-\sqrt{x^2-4})^2=(32-x)^2$

$$x^2 - 4 = 1024 - 64x + x^2 \quad \text{يعني}$$

$$64x = 4 + 1024 \quad \text{يعني}$$

$$64x = 1028 \quad \text{يعني}$$

$$x = \frac{1028}{64} = \frac{257}{16} \quad \text{وبالتالي}$$

**تمرين 4**

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= \frac{x^2 + y^2}{y^2 x^2} - \frac{y + x}{xy} \\ &= \frac{x^3 + y^3}{y^2 x^2} - \frac{xy}{xy} \times \frac{y + x}{xy} \\ &= \frac{x^3 + y^3}{y^2 x^2} - \frac{xy^2 + x^2 y}{x^2 y^2} \\ &= \frac{x^3 + y^3 - xy^2 - x^2 y}{x^2 y^2} \\ &= \frac{x^2(x - y) - y^2(x - y)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)(x - y)(x + y)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x - y)^2 (x + y)}{x^2 y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

لأن  $(x - y)^2 \geq 0$  و  $(x + y) > 0$  و  $x^2 y^2 > 0$  و  $x > 0$  و  $y > 0$

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{إذن}$$

## أولمبياد السابع عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  عدنان صحيحان طبيعيين متتابعان (  $y > x$  )

$$\text{بين أن : } x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$$

### تمرين 2

$x > 1$  و  $y > 1$  عدنان حقيقيان بحيث :

$$\text{بين أن : } y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq xy$$

### تمرين 3

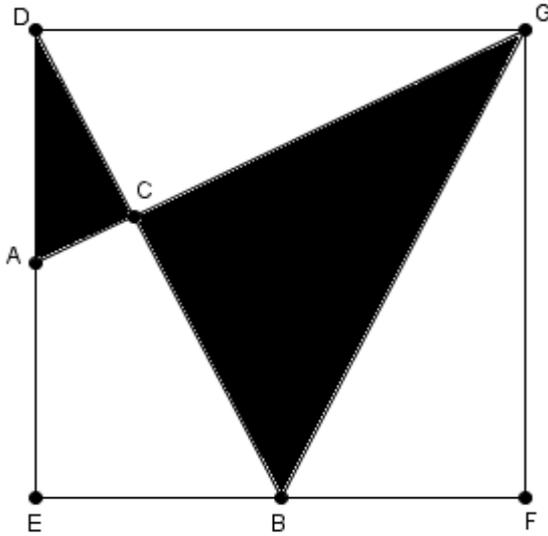
نعتبر النقطتين  $A$  و  $O$  من المستوى

$A \bullet$

$O \bullet$

أنشئ النقطة  $H$  مماثلة  $A$  بالنسبة للنقطة  $O$  و النقطة  $F$  مماثلة  $O$  بالنسبة للنقطة  $A$   
بواسطة البركار فقط ( تبرير الإنشاء )

### تمرين 4



$DG = 8\text{cm}$  مربع بحيث :

النقطتان  $A$  و  $B$  هما على التوالي

منتصفا  $[DE]$  و  $[EF]$

احسب مساحة المنطقة المظلمة

## حل أولمبياد السابع عشر

### تمرين 1

بما أن  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان طبيعيان متتابعان و  $y > x$

فإن  $y = x + 1$

لدينا :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (xy)^2 &= x^2 + y^2 + (x(x+1))^2 = x^2 + y^2 + x^2(x+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^2(x^2 + 2x + 1) \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^3 + x^2 \\ &= x^4 + y^2 + 2x^2 + 2x^3 \\ &= x^4 + y^2 + 2x^2(1+x) \\ &= (x^2)^2 + y^2 + 2x^2y \end{aligned}$$

نعلم أن  $(x^2 + y)^2 = (x^2)^2 + y^2 + 2x^2y$

وبالتالي :  $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

### تمرين 2

بما أن  $x > 1$  فإن  $x - 1 > 0$

لدينا :  $(\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0$

يعني :  $(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 0$  يعني  $x - 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 0$

يعني :  $-2\sqrt{x-1} \geq -x$  يعني  $\frac{-1}{2} \times (-2\sqrt{x-1}) \leq \frac{-1}{2} \times (-x)$  يعني  $\sqrt{x-1} \leq \frac{x}{2}$

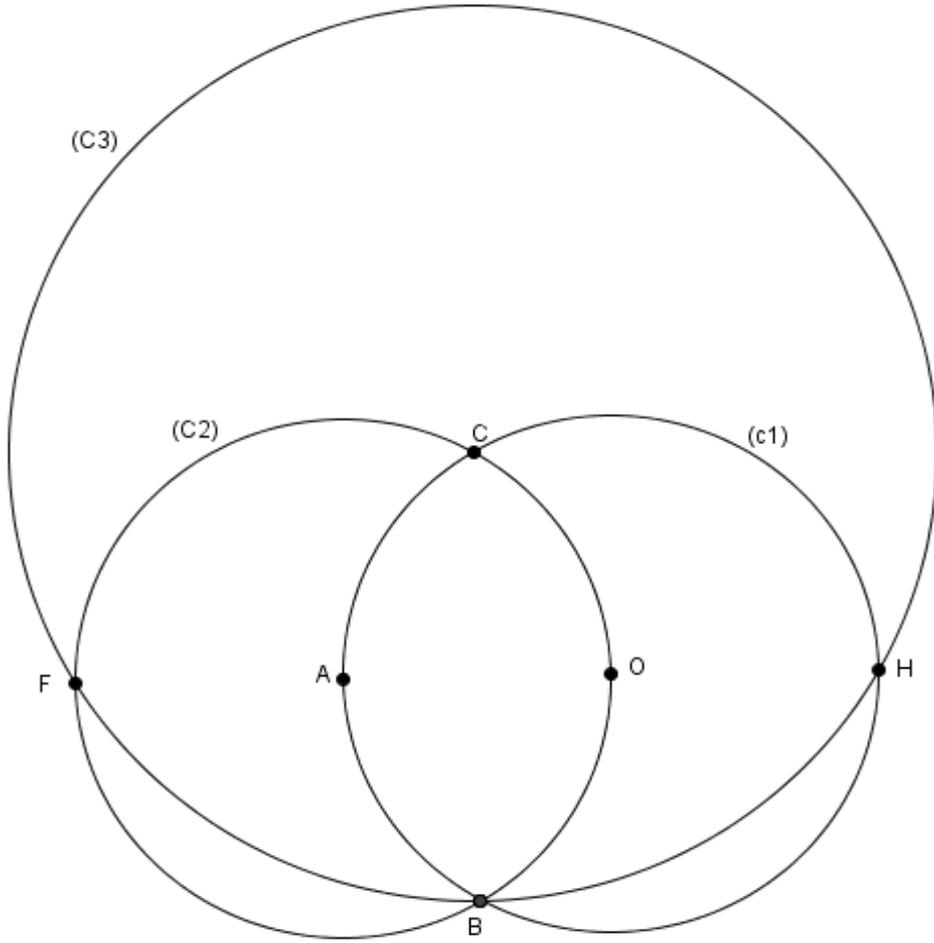
إذن :  $y\sqrt{x-1} \leq \frac{xy}{2}$  ( 1 )  $( y > 1 )$

وبنفس الطريقة نبين أن :  $x\sqrt{y-1} \leq \frac{xy}{2}$  ( 2 )

نجمع طرفي المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف :  $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq \frac{2xy}{2}$

وبالتالي :  $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq xy$

### تمرين 3



- نرسم الدائرة  $(C_1)$  التي مركزها  $O$  وشعاعها  $OA$
- نرسم الدائرة  $(C_2)$  التي مركزها  $A$  وشعاعها  $OA$
- الدائرتان  $(C_1)$  و  $(C_2)$  تتقاطعان في النقطتين  $B$  و  $C$
- نرسم الدائرة  $(C_3)$  التي مركزها  $C$  وشعاعها  $CB$
- الدائرة  $(C_3)$  تتقاطع مع  $(C_1)$  و  $(C_2)$  على التوالي في النقطتين  $H$  و  $F$  وبالتالي النقطة  $H$  هي ماثلة  $A$  بالنسبة للنقطة  $O$  والنقطة  $F$  هي ماثلة  $O$  بالنسبة للنقطة  $A$

تمرين 4

حساب  $S_{ADC}$  مساحة المثلث  $ADC$  :

لدينا :  $\begin{cases} DG = DE \\ AD = EB \\ \hat{A}DG = \hat{D}EB \end{cases}$  إذن المثلثان  $DGA$  و  $DEB$  متقايسان

$$\hat{D}AG = \hat{D}BE \text{ أي}$$

بما أن  $\begin{cases} \hat{D}AG = \hat{D}AC = \hat{D}BE \\ \hat{A}DC = \hat{E}DB \end{cases}$  فإن المثلثان  $DAC$  و  $DEB$  متشابهان

ومنه  $\hat{D}CA = \hat{D}EB = 90^\circ$  المثلث  $DAC$  قائم الزاوية في  $C$  إذن  $(DC) \perp (AG)$

باستعمال العلاقات المترية في المثلث  $DGA$  القائم الزاوية :

$$DA^2 = AC \times AG \text{ و } DC \times AG = DA \times DG$$

$$\text{أي : } AC = \frac{DA^2}{AG} \text{ و } DC = \frac{DA \times DG}{AG}$$

$$\text{لدينا } S_{ADC} = \frac{DC \times AC}{2} \text{ يعني } S_{ADC} = \frac{DA \times DG \times DA^2}{2 \times AG} \text{ يعني } S_{ADC} = \frac{DA^3 \times DG}{2AG^2}$$

بما أن المثلث  $ADG$  قائم الزاوية في  $D$  فإن  $AG^2 = AD^2 + DG^2$

$$\text{أي : } S_{ADC} = \frac{DA^3 \times DG}{2(AD^2 + DG^2)} \text{ أي } S_{ADC} = \frac{4^3 \times 8}{2(4^2 + 8^2)} \text{ أي } S_{ADC} = \frac{64 \times 4}{2(16 + 64)}$$

$$\text{يعني : } S_{ADC} = \frac{512}{160} = 3.2$$

حساب  $S_{BCG}$  مساحة المثلث  $BCG$  :

$$\text{لدينا : } S_{DBG} = S_{BCG} + S_{DCG} \text{ و } S_{DAG} = S_{DAC} + S_{DCG}$$

$$\text{نطرح المتساويتان طرف بطرف : } S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} + S_{DCG} - S_{BCG} - S_{DCG}$$

$$\text{أي : } S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} - S_{BCG} \text{ أي } S_{BCG} = S_{DAC} + S_{DBG} - S_{DAG}$$

$$\text{أي : } S_{BCG} = 5 + \frac{8 \times 8}{2} - \frac{4 \times 8}{2} \text{ أي } S_{BCG} = 5 + \frac{DE \times DG}{2} - \frac{DA \times DG}{2}$$

$$\text{أي : } S_{BCG} = 5 + 32 - 16 = 21 \text{ إذن } S_{BCG} = 21$$

حساب مساحة المنطقة المظللة :

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث  $ADC$  + مساحة المثلث  $BCG$

$$S_{ADC} + S_{BCG} = 3.2 + 21 = 24.2$$

## أولمبياد الثامن عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$

$$\text{بين أن : } \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 - y^2 - z^2} = y^4$$

### تمرين 2

$EFG$  مثلث بحيث :  $EF = 8\text{cm}$  و  $EG = 6\text{cm}$

و  $FG = 10\text{cm}$

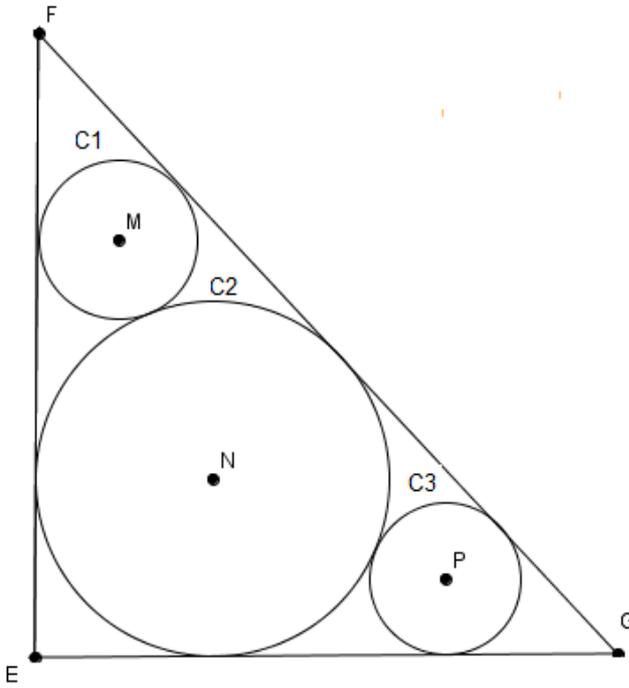
$(C_1)$  و  $(C_2)$  و  $(C_3)$  ثلاث دوائر توجد داخل

المثلث  $EFG$  كما هو مبين في الشكل جانبه

مركزهما على التوالي :  $M$  و  $N$  و  $P$

1- حدد شعاع الدائرة  $(C_2)$

2- حدد شعاع الدائرة  $(C_1)$



### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة

$$\text{بين أن : } \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{3}{2}$$

### تمرين 4

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

بين أن :  $x + y = 0$

## حل أولمبياد الثامن عشر

### تمرين 1

$$\text{نضع : } \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = t$$

$$\text{بما أن } \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = t \text{ فإن } y = xt \text{ و } z = yt$$

$$\text{أي : } y = xt \text{ و } z = xt^2$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^{-2} - y^{-2} - z^{-2}} &= \frac{x^2 - (xt)^2 + (xt^2)^2}{x^{-2} - (xt)^{-2} - (xt^2)^{-2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2t^2 + x^2t^4}{x^{-2} - x^{-2}t^{-2} - x^{-2}t^{-4}} \\ &= \frac{x^2(1 - t^2 + t^4)}{x^{-2}(1 - t^{-2} - t^{-4})} \\ &= x^2 x^2 \frac{1 - t^2 + t^4}{1 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}} \\ &= x^4 \frac{t^4 - t^2 + 1}{t^4 - t^2 + 1} \\ &= x^4 t^4 \frac{t^4 - t^2 + 1}{t^4 - t^2 + 1} \\ &= (xt)^4 = y^4 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^{-2} - y^{-2} - z^{-2}} = y^4$$

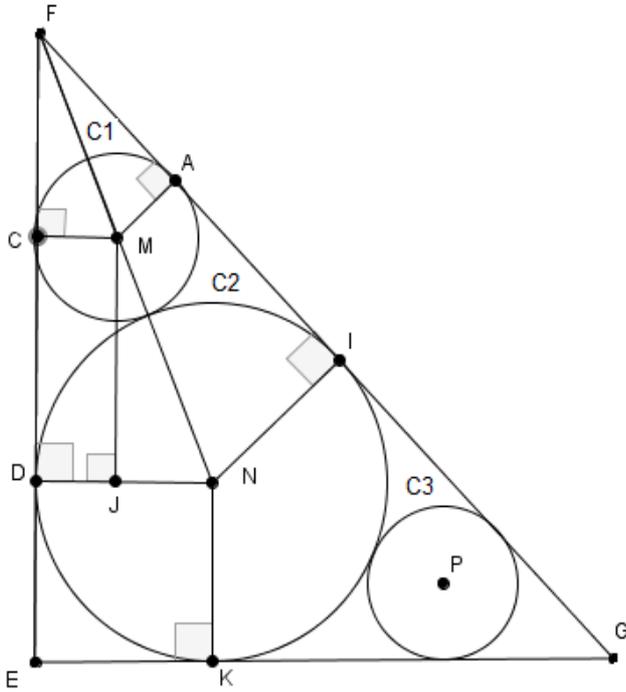
### تمرين 2

1- حساب مساحة الدائرة  $(C_2)$  :

بما أن  $(EF)$  مماس للدائرة  $(C_2)$  في النقطة  $D$

فإن  $(EF) \perp (DN)$

أي المثلث  $DNF$  قائم الزاوية في  $D$



حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة

$$FN^2 = FD^2 + DN^2 \quad \text{إذن}$$

$$(1) \quad FD^2 = FN^2 - DN^2 \quad \text{ومنه}$$

بما أن (GF) مماس للدائرة (C<sub>2</sub>) في النقطة I

$$\text{فإن } (GF) \perp (IN)$$

أي المثلث INF قائم الزاوية في I

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة

$$FN^2 = FI^2 + IN^2 \quad \text{إذن}$$

$$(2) \quad FI^2 = FN^2 - IN^2 \quad \text{ومنه}$$

$$(3) \quad DN = IN \quad \text{ونعلم أن}$$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن  $FD^2 = FI^2$

$$\text{أي } FI = FD$$

$$(4) \quad FI = 8 - DE \quad \text{إذن}$$

وبنفس الطريقة نبين أن  $GI = 6 - EK$  (5)

$$\text{لدينا } FG^2 = 10^2 = 100$$

$$\text{و } EF^2 + EG^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث EFG قائم الزاوية في E ومنه  $\hat{E} = 90^\circ$

$$\text{لدينا } \hat{D}NK = 360 - \hat{E}DN - \hat{E}KN - \hat{E} = 360 - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

بما أن  $\hat{D}NK = \hat{E} = \hat{E}DN = \hat{E}KN = 90^\circ$  و  $DN = IN$  فإن الرباعي DNKE مربع

$$(6) \quad DE = EK \quad \text{ومنه}$$

من 5 و 6 نستنتج أن  $GI = 6 - DE$  (7)

$$(8) \quad FG = FI + GI = 5 \quad \text{ونعلم أن}$$

من 4 و 7 و 8 نستنتج أن  $FI + GI = 8 - DE + 6 - DE = 10$

$$\text{أي } -2DE + 14 = 10$$

$$\text{أي } -2DE = -4$$

$$\text{إذن : } DE = \frac{4}{2} = 2$$

2- حساب مساحة الدائرة  $(C_1)$  :

لدينا المثلث  $FND$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $FN^2 = DF^2 + DN^2$

$$\text{أي : } FN^2 = (FE - DE)^2 + DN^2$$

$$\text{أي : } FN^2 = (8 - 2)^2 + 2^2$$

$$\text{أي : } FN^2 = 36 + 4 = 40$$

$$\text{ومنه : } FN = 2\sqrt{10}$$

نعتبر النقطة  $J$  المسقط العمودي للنقطة  $M$  على  $(DN)$

$$\text{لدينا } \hat{C}M\hat{J} = 360 - \hat{M}\hat{J}\hat{D} - \hat{J}\hat{D}\hat{C} - \hat{D}\hat{C}\hat{M} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

بما أن  $\hat{C}M\hat{J} = \hat{M}\hat{J}\hat{D} = \hat{J}\hat{D}\hat{C} = \hat{D}\hat{C}\hat{M} = 90^\circ$  فإن الرباعي  $CMJD$  مستطيل

$$\text{ومنه : } CM = JD$$

$$\text{لدينا : } MN = CM + 2 \text{ و } NJ = DN - DJ = 2 - CM$$

في المثلث  $FDN$  لدينا :  $\hat{D}\hat{F}\hat{N} + \hat{F}\hat{D}\hat{N} + \hat{F}\hat{N}\hat{D} = 180^\circ$

$$\text{يعني : } \hat{D}\hat{F}\hat{N} = 180^\circ - \hat{F}\hat{D}\hat{N} - \hat{F}\hat{N}\hat{D}$$

$$\text{إذن : } \hat{D}\hat{F}\hat{N} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{F}\hat{N}\hat{D} = 90^\circ - \hat{F}\hat{N}\hat{D} \quad (9)$$

في المثلث  $MNJ$  لدينا :  $\hat{N}\hat{M}\hat{J} + \hat{M}\hat{J}\hat{N} + \hat{M}\hat{N}\hat{J} = 180^\circ$

$$\text{يعني : } \hat{N}\hat{M}\hat{J} = 180^\circ - \hat{M}\hat{J}\hat{N} - \hat{M}\hat{N}\hat{J}$$

$$\text{إذن : } \hat{N}\hat{M}\hat{J} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{F}\hat{N}\hat{D} = 90^\circ - \hat{F}\hat{N}\hat{D} \quad (10)$$

من 9 و 10 نستنتج أن :  $\hat{D}\hat{F}\hat{N} = \hat{N}\hat{M}\hat{J}$

$$\text{أي : } \sin \hat{D}\hat{F}\hat{N} = \sin \hat{N}\hat{M}\hat{J}$$

$$\text{أي : } \frac{DN}{FN} = \frac{NJ}{NM}$$

$$\text{أي : } \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{2 - CM}{CM + 2}$$

$$\text{أي : } 2CM + 4 = 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}CM$$

$$\text{أي : } 2CM + 2\sqrt{10}CM = 4\sqrt{10} - 4$$

$$\text{أي : } 2CM(1 + \sqrt{10}) = 2(2\sqrt{10} - 2)$$

$$\text{إذن : } CM = \frac{2\sqrt{10} - 2}{1 + \sqrt{10}}$$

### تمرين 3

$$\text{لدينا : } \left(\frac{x+y}{y+z} - 1\right)^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 - 2\frac{x+y}{y+z} + 1 \geq 0 \quad \text{يعني : } \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1 \geq 2\frac{x+y}{y+z}$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times \left(\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1\right) \geq \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times 2\frac{x+y}{y+z}$$

$$\text{يعني : } \frac{x+y}{y+z} + \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \geq \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times 2\frac{x+y}{y+z}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} \geq 2$$

$$(2) \quad \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} \geq 2 \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن :}$$

$$(3) \quad \frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 2 \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 2+2+2$$

$$\text{أي : } \left(\frac{x+y}{y+z} + \frac{x+z}{y+z}\right) + \left(\frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{x+y}\right) + \left(\frac{y+z}{x+z} + \frac{x+y}{x+z}\right) \geq 2+2+2$$

$$\text{أي : } \frac{2x+y+z}{y+z} + \frac{2z+x+y}{x+y} + \frac{2y+x+z}{x+z} \geq 6$$

$$\text{أي : } \frac{2x}{y+z} + \frac{y+z}{y+z} + \frac{2z}{x+y} + \frac{x+y}{x+y} + \frac{2y}{x+z} + \frac{x+z}{x+z} \geq 6$$

$$\text{أي : } \frac{2x}{y+z} + 1 + \frac{2z}{x+y} + 1 + \frac{2y}{x+z} + 1 \geq 6$$

$$\text{أي : } \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z}\right) \geq \frac{1}{2} \times 3 \quad \text{أي : } 2 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z}\right) \geq 6 - 3$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{3}{2}$$

تمرين 4

لدينا :  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني :  $\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني :  $\frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \times (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني :  $\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \times (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني :  $\frac{-(y + \sqrt{y^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 1$

يعني :  $-y - \sqrt{y^2 + 1} = x - \sqrt{x^2 + 1}$

إذن :  $(1) \quad x + y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}$

لدينا :  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني :  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) \times \frac{y - \sqrt{y^2 + 1}}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني :  $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{y^2 - (\sqrt{y^2 + 1})^2}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني :  $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{y^2 - y^2 - 1}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني :  $\frac{-(x + \sqrt{x^2 + 1})}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني :  $-x - \sqrt{x^2 + 1} = y - \sqrt{y^2 + 1}$

إذن :  $(2) \quad x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف :  $2(x + y) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

أي :  $2(x + y) = 0$

وبالتالي :  $x + y = 0$

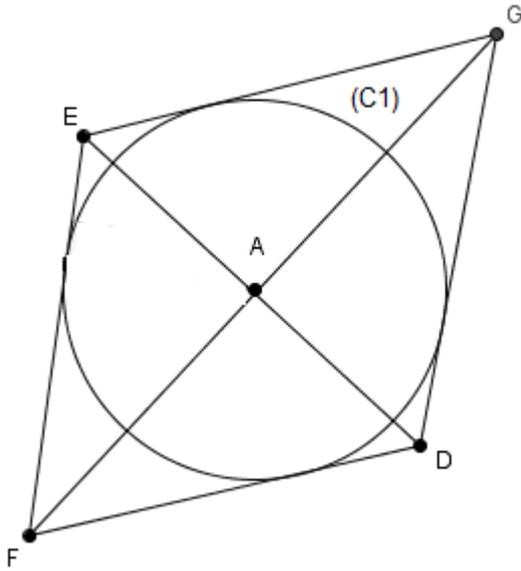
## أولمبياد التاسع عشر

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث :  $x+2y+3z \geq 20$

بين أن :  $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \geq 13$

### تمرين 2



$EGDF$  معين مركزه  $A$  محيطه  $P=2\sqrt{41}cm$  ومساحته  $S=10cm^2$  كما هو مبين في الشكل جانبه.

الدائرة  $(C_1)$  هي مماسة لأضلاع المعين  
احسب مساحة الدائرة  $(C_1)$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية منعدمة بحيث :  $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

بين أن :  $(y+x+z)^2 = y^2 + x^2 + z^2$

### تمرين 4

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $x \neq y$  و  $x^2 = 2016 + y$  و  $y^2 = 2016 + x$

احسب  $xy$

## حل أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned} x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} &= \frac{4x}{4}+\frac{2y}{2}+\frac{4z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \\ &= \frac{3x+x}{4}+\frac{y+y}{2}+\frac{3z+z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \\ &= \frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}+\frac{z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \end{aligned}$$

إذن :  $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} = \left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) + \frac{x+2y+3z}{4}$  ( 1 )

لدينا :  $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}+\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 \geq 0$

يعني :  $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + \left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 \geq 0$

يعني :  $\frac{3x}{4} + 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + \frac{3}{x} \geq 0$

إذن :  $\frac{3x}{4} + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}}$  ( 2 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $\frac{y}{2} + \frac{9}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2}} \times \sqrt{\frac{9}{2y}}$  ( 3 )

و  $\frac{z}{4} + \frac{4}{z} \geq 2\sqrt{\frac{z}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{z}}$  ( 4 )

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 طرف بطرف :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2}} \times \sqrt{\frac{9}{2y}} + 2\sqrt{\frac{3z}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{z}} \\ &= 2\sqrt{\frac{3\cancel{x}}{4}} \times \frac{3}{\cancel{x}} + 2\sqrt{\frac{\cancel{y}}{2}} \times \frac{9}{2\cancel{y}} + 2\sqrt{\frac{\cancel{z}}{4}} \times \frac{4}{\cancel{z}} \\ &= 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} + 2 \end{aligned}$$

ومنه :  $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) \geq 8$  ( 5 )

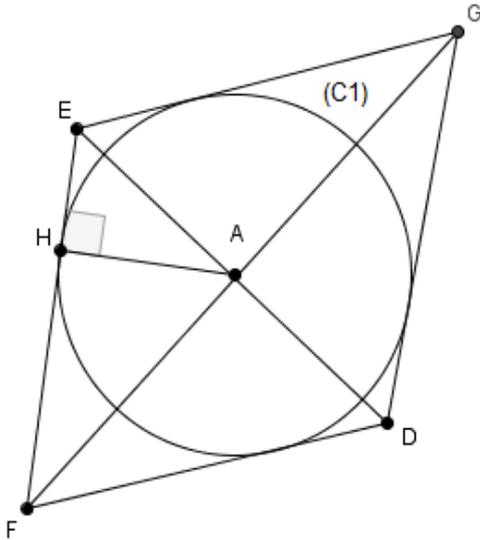
ونعلم أن :  $x+2y+3z \geq 20$  ( 6 )

من 1 و 5 و 6 نستنتج أن :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4} \geq 8+\frac{20}{4}$$

وبالتالي :  $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \geq 13$

## تمرين 2



لدينا :  $P = 4 \times EG = 2\sqrt{41}$

إذن :  $EG = \frac{2\sqrt{41}}{4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

ولدينا :  $S_{EGDF} = \frac{1}{2} \times ED \times FG = 10$

(  $S_{EGDF}$  : مساحة المعين  $EGDF$  )

إذن :  $ED \times FG = 10 \times 2 = 20$  ( 1 )

نعتبر  $H$  نقطة التماس بين الدائرة  $(C_1)$

والمستقيم  $(EF)$

إذن :  $(EF) \perp (AH)$

أي : ارتفاع  $[AH]$  في المثلث  $EAF$  القائم الزاوية في  $A$

أي :  $AH \times EF = AE \times AF$  ( علاقة مترية )

$$AH = \frac{ED \times FG}{4 \times \frac{\sqrt{41}}{2}} \quad \text{أي} \quad AH = \frac{\frac{ED}{2} \times \frac{FG}{2}}{EF} \quad \text{أي} \quad AH = \frac{AE \times AF}{EF}$$

إذن :  $AH = \frac{ED \times FG}{2\sqrt{41}}$  ( 2 )

من 1 و 2 نستنتج أن :  $AH = \frac{20}{2\sqrt{41}}$  ومنه :  $AH = \frac{10}{\sqrt{41}} \times \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{10\sqrt{41}}{41}$

مساحة الدائرة  $(C_1)$  :  $S_{(C_1)} = \pi \times AH^2$

وبالتالي :  $S_{(C_1)} = 3.14 \times \left(\frac{10\sqrt{41}}{41}\right)^2 = 7.65 \text{ cm}^2$

## تمرين 3

$$\text{لدينا : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

$$\text{يعني : } xyz \times \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = xyz \times 0 = 0 \quad \text{يعني : } \frac{xyz}{x} + \frac{xyz}{y} + \frac{xyz}{z} = 0$$

$$\text{يعني : } yz + xz + xy = 0 \quad \text{يعني : } yz + xz = -xy$$

$$\text{يعني : } z(y+x) = -xy$$

$$\text{يعني : } y+x = \frac{-xy}{z} \quad \text{يعني : } y+x+z = \frac{-xy}{z} + z$$

$$\text{يعني : } (y+x+z)^2 = \left( \frac{-xy}{z} + z \right)^2$$

$$\text{يعني : } (y+x+z)^2 = \left( \frac{xy}{z} \right)^2 - 2xy + z^2$$

$$\text{يعني : } (y+x+z)^2 = (y+x)^2 - 2xy + z^2$$

$$\text{يعني : } (y+x+z)^2 = y^2 + 2xy + x^2 - 2xy + z^2$$

$$\text{إذن : } (y+x+z)^2 = y^2 + x^2 + z^2$$

$$\left( \left( \frac{-xy}{z} \right)^2 = \left( \frac{xy}{z} \right)^2 = (y+x)^2 \right)$$

#### تمرين 4

$$\text{لدينا : } y^2 = 2016 + x \quad \text{و} \quad x^2 = 2016 + y$$

$$\text{يعني : } x^2 - y^2 = 2016 + y - 2016 - x$$

$$\text{يعني : } (x-y)(x+y) = -(x-y)$$

$$\text{يعني : } (x \neq y) \quad x+y = \frac{-(x-y)}{x-y} = -1$$

$$\text{يعني : } (x+y)^2 = (-1)^2$$

$$\text{يعني : } x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

$$\text{يعني : } y + 2016 + 2xy + x + 2016 = 1$$

$$\text{يعني : } (x+y) + 2032 + 2xy = 1$$

$$\text{يعني : } -1 + 2032 + 2xy = 1 \quad (x+y = -1)$$

$$\text{يعني : } 2xy = -2030$$

$$\text{وبالتالي : } xy = -2015$$

## أولمبياد العشرون

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $x+y+z=3$   
بين أن :  $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

### تمرين 2

احسب  $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

### تمرين 3

$u-1$  و  $v$  و  $w$  أعداد حقيقية

بين أن :  $(u+v+w)^2 \leq 3(u^2+v^2+w^2)$

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث :  $x+y+z=1$

بين أن :  $\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$  ( استعمل السؤال 1 )

### تمرين 4

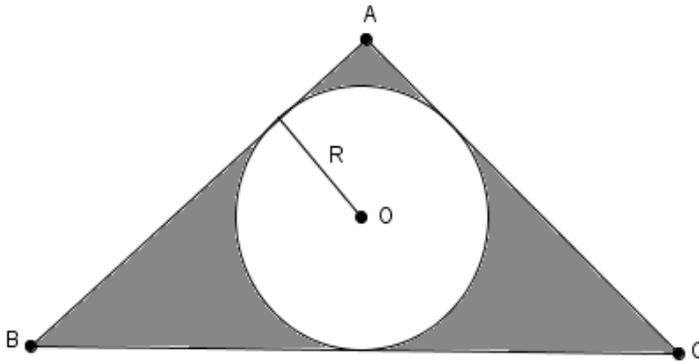
$ABC$  مثلث بحيث :  $AB=13cm$

و  $BC=15cm$  و  $AC=14cm$

النقطة  $O$  هي مركز الدائرة

المحاطة بالمثلث  $ABC$

التي شعاعها  $R$



احسب مساحة المنطقة المظللة

## حل أولمبياد العشرون

### تمرين 1

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } (-\sqrt{x}-2 \leq 0) \quad (\sqrt{x}-1)^2 \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \times (-\sqrt{x}-2)$$

$$\text{يعني : } (x-2\sqrt{x}+1) \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \quad \text{يعني : } -x\sqrt{x}-2x+2x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$$

$$\text{يعني : } -x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0 \quad \text{يعني : } \sqrt{x}(3-x) \leq 2 \quad \text{يعني : } \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2} \quad \text{إذن : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2} \quad \text{و}$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

$$\text{أي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

### تمرين 2

نضرب في المرافق

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} \times \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\sqrt{98}-\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{1} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{1} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{1} \\ &= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + \sqrt{100} \\ &= -1 + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9 \end{aligned}$$

### تمرين 3

1- لنحدد إشارة الفرق :  $3(u^2 + v^2 + w^2) - (u+v+w)^2$

لنحدد إشارة الفرق

لدينا :

$$\begin{aligned} 3(u^2 + v^2 + w^2) - (u+v+w)^2 &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - ((u+v)+w)^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - (u+v)^2 - 2 \times (u+v) \times w - w^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - u^2 - 2uv - v^2 - 2uw - 2vw - w^2 \\ &= 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2uv - 2uw - 2vw \\ &= u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - 2uw + w^2 + v^2 - 2vw + w^2 \\ &= (u-v)^2 + (u-w)^2 + (v-w)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

إذن :  $(u+v+w)^2 \leq 3(u^2 + v^2 + w^2)$

2- نضع :  $u = \sqrt{6x+1}$  و  $v = \sqrt{6y+1}$  و  $w = \sqrt{6z+1}$

حسب السؤال 1 :  $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6x+1+6y+1+6z+1)$

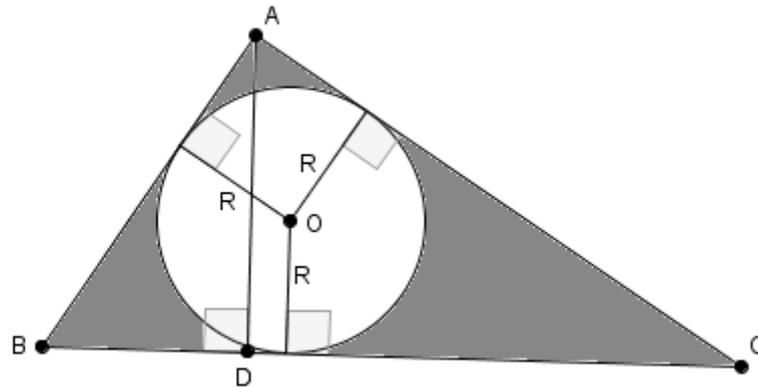
يعني :  $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6(x+y+z)+3)$

يعني :  $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6 \times 1 + 3) = 27$  (  $x+y+z=1$  )

يعني :  $\sqrt{(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2} \leq \sqrt{27}$

وبالتالي :  $\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$

### تمرين 4



لدينا المثلث  $ADB$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AB^2 = AD^2 + DB^2$

ومنه :  $AD^2 = AB^2 - DB^2$  ( 1 )

لدينا المثلث  $ADC$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AC^2 = AD^2 + DC^2$

ومنه :  $AD^2 = AC^2 - DC^2$  ( 2 )

من 1 و 2 نستنتج ان :  $AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$

أي :  $DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$  أي :  $(DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2$

أي :  $(DB - DC)AC = AB^2 - AC^2$  أي :  $(DB - DC) \times 15 = 13^2 - 14^2$

أي :  $DB - DC = \frac{169 - 196}{15}$  إذن :  $DB - DC = -1,8$  أي :  $DC = DB + 1,8$

لدينا :  $BD + DC = 15$

يعني :  $BD + (DB + 1,8) = 15$  يعني :  $2BD = 15 - 1,8$  إذن :  $BD = 6,6$

لدينا :  $AD^2 = AB^2 - DB^2$  أي :  $AD^2 = 13^2 - 6,6^2$  أي :  $AD = \sqrt{169 - 43,56}$

إذن :  $AD = 11,2$

لدينا :  $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC}$

يعني :  $84 = \frac{13 \times R}{2} + \frac{15 \times R}{2} + \frac{14 \times R}{2}$  يعني :  $84 = R \left( \frac{13}{2} + \frac{15}{2} + \frac{14}{2} \right)$  يعني :  $84 = R \times 21$

إذن :  $R = 4cm$

لدينا : مساحة المنطقة المظلة = مساحة المثلث  $ABC$  - مساحة الدائرة

يعني :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AD \times BC - \pi R^2 &= \frac{1}{2} \times 11,2 \times 15 - 3,14 \times 4^2 \\ &= 84 - 50,24 \\ &= 33,76cm^2 \end{aligned}$$

وبالتالي مساحة المنطقة المظلة هي :  $33,76cm^2$

## أولمبياد الواحد والعشرون

### تمرين 1

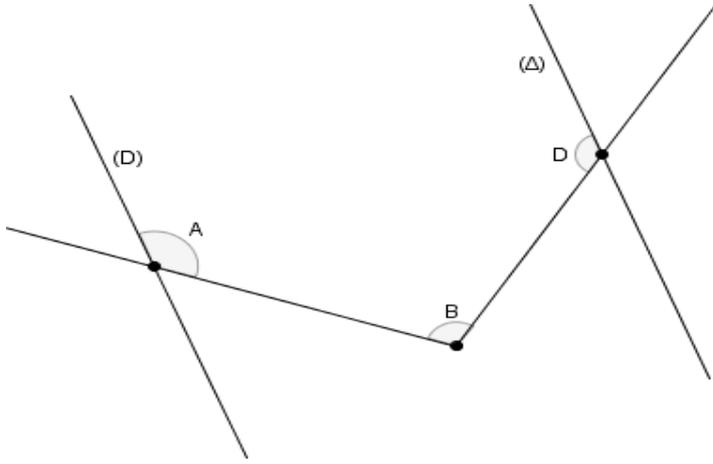
$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية بحيث :  $x > 1$  و  $y > 1$  و  $z > 1$   
بين أن :  $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > y + x + z + \frac{1}{xyz}$

### تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$$(D) \parallel (\Delta)$$

بين أن :  $A + B + D = 360^\circ$



### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  هي أطوال أضلاع مثلث

$$\text{بين أن : } (x + z - y)^2 < 4xz$$

### تمرين 4

$x$  عدد حقيقي غير منعدم بحيث :  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

$$\text{أحسب : } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

## حل أولمبياد الواحد والعشرون

### تمرين 1

بما أن  $y > 1$  فإن  $-y < -1$

ومنه  $-\frac{1}{y} > -1$

لدينا  $-\frac{1}{y} > -1$  و  $x > 1$  يعني  $x + \left(-\frac{1}{y}\right) > 1 + (-1)$

إذن :  $x - \frac{1}{y} > 0$  ( 1 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $y - \frac{1}{z} > 0$  ( 2 )

و  $z - \frac{1}{x} > 0$  ( 3 )

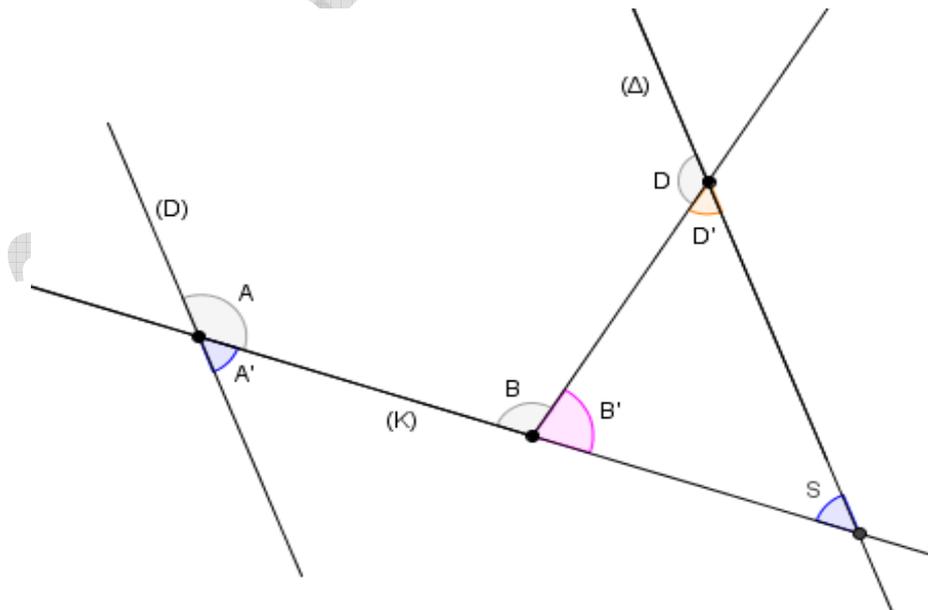
نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :  $\left(x - \frac{1}{y}\right)\left(y - \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{x}\right) > 0$

أي :  $\left(xy - \frac{x}{z} - 1 + \frac{1}{yz}\right)\left(z - \frac{1}{x}\right) > 0$  أي :  $xyz - y - x + \frac{1}{z} - z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xyz} > 0$

أي :  $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \left(y + x + z + \frac{1}{xyz}\right) > 0$

وبالتالي :  $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > y + x + z + \frac{1}{xyz}$

### تمرين 2



بمأن  $(\Delta) // (D)$  و  $(K)$  قاطع لهما

$$S = A'$$

$$S = A' = 180^\circ - A \quad \text{لدينا}$$

$$B' = 180^\circ - B \quad \text{و}$$

$$D' = 180^\circ - D \quad \text{و}$$

ونعلم أن مجموع زوايا مثلث تساوي  $180^\circ$

$$S + B' + D' = 180^\circ \quad \text{يعني}$$

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - D = 180^\circ \quad \text{يعني}$$

$$A + B + D = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ - 180^\circ \quad \text{يعني}$$

$$A + B + D = 360^\circ \quad \text{وبالتالي}$$

### تمرين 3

لنحدد إشارة الفرق  $(x+z-y)^2 - 4xz$  :

$$(x+z-y)^2 - 4xz = ((x+z)-y)^2 - 4xz$$

$$= (x+z)^2 - 2 \times (x+z) \times y + y^2 - 4xz$$

$$= x^2 + 2xz + z^2 - 2xy + 2yz + y^2 - 4xz$$

$$= x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz)$$

لدينا :  $x$  و  $y$  و  $z$  هي أطوال أضلاع مثلث

يعني :  $x + y > z$  (متفاوتة مثلثية)

يعني :  $z \times (x+y) > z \times z$  ( $z > 0$ )

إذن :  $xz + yz > z^2$  (1)

وبنفس الطريقة نبين أن :  $yz + xy > y^2$  (2)

و  $xy + xz > x^2$  (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$xz + yz + yz + xy + xy + xz > z^2 + y^2 + x^2$$

$$2(xy + yz + xz) > x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{أي}$$

$$\text{أي : } (x+z-y)^2 - 4xz = x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz) \leq 0$$

$$\text{وبالتالي : } (x+z-y)^2 < 4xz$$

#### تمرين 4

$$\text{نضع : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{يعني : } y^2 = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } y^2 - 2 = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = \left( x + \frac{1}{x} \right)^2$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 - 9 = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2 + 3)(y^2 - 2 - 3) = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 + 1)(y^2 - 5) = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 - 5 = 0 \text{ أو } y^2 + 1 = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 = -1 \text{ المعادلة ليس لها حل}$$

$$\text{أو } (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5}) = 0$$

$$\text{يعني : } y + \sqrt{5} = 0 \text{ أو } y - \sqrt{5} = 0$$

$$\text{يعني : } y = -\sqrt{5} \text{ أو } y = \sqrt{5}$$

$$\text{ونعلم أن } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{وبالتالي : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$$

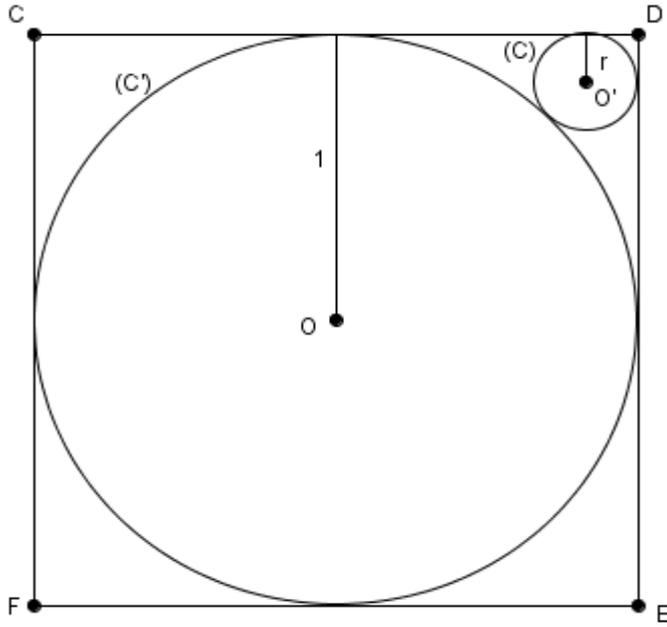
## أولمبياد الثاني والعشرون

### تمرين 1

$x$  عدد حقيقي بحيث :  $x > 1$  و  $x = \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}}}{20}$

بين أن :  $14x + 1 = x^2$

### تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

مربع  $CDEF$  طول ضلعه يساوي  $2\text{cm}$

دائرة  $(C')$  مركزها  $O$  شعاعها  $1\text{cm}$

دائرة  $(C)$  مركزها  $O'$  شعاعها  $r$

بين أن  $r = 3 - 2\sqrt{2}$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية بحيث :  $x + y + z \neq 0$  و  $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0$

بين أن :  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$

### تمرين 4

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$

بين أن :  $EF^3 + EG^3 < FG^3$

## حل أولمبياد الثاني والعشرون

### تمرين 1

$$\text{لدينا : } x = \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}}}{20} \text{ يعني : } x^2 = \left( \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}}}{20} \right)^2 \text{ يعني : } x^2 = \frac{(\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}})^2}{20^2}$$

$$\text{يعني : } x^2 = \frac{2x^4 + 4x^2 + 2}{400} \text{ يعني : } x^2 = \frac{\cancel{2}(x^4 + 2x^2 + 1)}{\cancel{2} \times 200}$$

$$\text{يعني : } 196x^2 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \text{ يعني : } 196x^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\text{يعني : } (14x)^2 = (x^2 - 1)^2 \text{ يعني : } 14x = x^2 - 1$$

$$\text{وبالتالي : } 14x + 1 = x^2$$

### تمرين 2

$$\text{لدينا : } \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0$$

$$\text{يعني : } \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + (x+y+z) = 0 + (x+y+z)$$

$$\text{يعني : } \left( \frac{x^2}{y+z} + x \right) + \left( \frac{y^2}{x+z} + y \right) + \left( \frac{z^2}{x+y} + z \right) = (x+y+z)$$

$$\text{يعني : } \frac{x^2 + x(y+z)}{y+z} + \frac{y^2 + y(x+z)}{x+z} + \frac{z^2 + z(x+y)}{x+y} = (x+y+z)$$

$$\text{يعني : } \frac{x(x+y+z)}{y+z} + \frac{y(x+y+z)}{x+z} + \frac{z(x+y+z)}{x+y} = (x+y+z)$$

$$\text{يعني : } (x+y+z) \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right) = (x+y+z)$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{x+y+z} \times (x+y+z) \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right) = \frac{1}{x+y+z} \times (x+y+z)$$

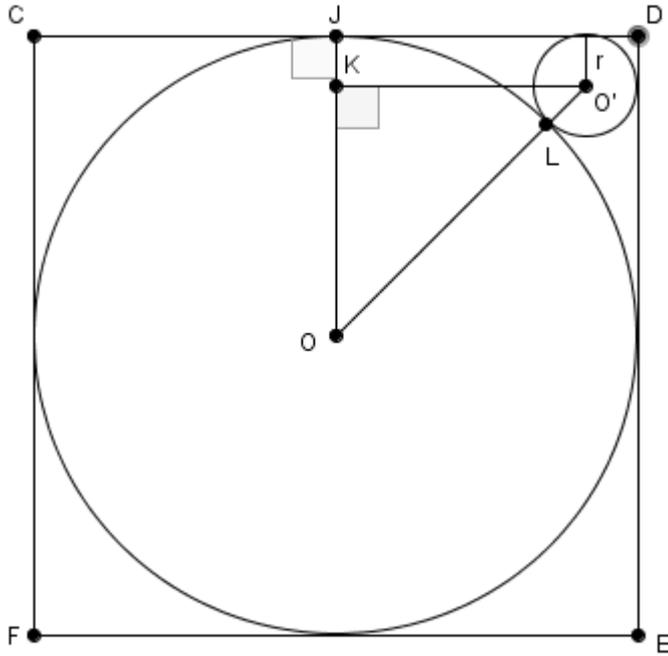
$$\text{وبالتالي : } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$$

### تمرين 3

$$\text{لدينا : } OO' = OL + LO'$$

$$\text{و } OK = OJ - KJ \text{ و } KO' = JD - r$$

$$\text{إذن : } OO' = 1 + r \text{ و } OK = 1 - r$$



$$KO' = 1 - r \quad \text{و}$$

لدينا المثلث  $OKO'$  قائم الزاوية في  $K$   
حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$OO'^2 = OK^2 + O'K^2$$

$$(1+r)^2 = (1-r)^2 + (1-r)^2 \quad \text{أي}$$

$$(1+r)^2 = 2(1-r)^2 \quad \text{أي}$$

$$1+r = \sqrt{2}(1-r) \quad \text{أي}$$

$$1+r = \sqrt{2}(1-r) \quad \text{أي}$$

$$r(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{أي} \quad r + \sqrt{2}r = \sqrt{2} - 1$$

اي :

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{1-2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\boxed{r = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}} \quad \text{وبالتالي}$$

#### تمرين 4

لدينا مثلث قائم الزاوية في  $E$

$$EF^2 + EG^2 = FG^2 \quad \text{إذن}$$

لنبين أن :  $EF^3 + EG^3 - FG^3 < 0$

$$EF^3 + EG^3 - FG^3 = EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - FG^2 \times FG$$

$$= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - (EF^2 + EG^2) \times FG$$

$$= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - EF^2 \times FG - EG^2 \times FG$$

$$= EF^2 \times (EF - FG) + EG^2 \times (EG - FG) < 0$$

( لأن  $EF < FG$  و  $EG < FG$  )

$$EF^3 + EG^3 < FG^3 \quad \text{وبالتالي}$$

## أولمبياد الثالث والعشرون

### تمرين 1

$x$  عدد حقيقي غير منعدم ( $x \neq 0$ ) بحيث :  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$

بين أن :  $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{29}$

### تمرين 2

$a$  و  $b$  و  $c$  أطوال أضلاع مثلث

1- بين أن  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

2- بين أن :  $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- استنتج أن :  $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{a+c-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $xy + yz + zx = \frac{xyz}{2}$

بين أن :  $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{2}$

### تمرين 4

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان غير منعدمان بحيث :  $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{3}$

احسب  $\frac{x}{y}$

## حل أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^3}{x^3 \left( x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \left( x + \frac{1}{x} \right) + \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left( x^3 + \frac{1}{x^3} \right)}$$

لنحدد قيمة  $x + \frac{1}{x}$  :

لدينا :  $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{3}$  يعني  $\frac{x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$  يعني  $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$

إذن :  $x + \frac{1}{x} = 3$

لنحدد قيمة  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  :

لدينا :  $x + \frac{1}{x} = 3$  يعني  $\left( x + \frac{1}{x} \right)^2 = 3^2$  يعني  $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$

إذن :  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

لنحدد قيمة  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  :

لدينا :  $x + \frac{1}{x} = 3$  يعني  $\left( x + \frac{1}{x} \right) \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = 3 \times 7$  يعني  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 21$

يعني :  $x^3 + 3 + \frac{1}{x^3} = 21$  إذن  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+3+7+18}$$

وبالتالي :  $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{29}$

## تمرين 2

1- لدينا :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(c+a)} + \frac{2c}{2(a+b)}$$

$$= \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

لدينا :  $a$  و  $b$  و  $c$  أطوال أضلاع مثلث

يعني :  $a+b > c$  و  $c+a > b$  و  $b+c > a$

يعني :  $a+b+(a+b) > c+a+b$  و  $c+a+(c+a) > b+c+a$  و  $b+c+(b+c) > a+b+c$

يعني :  $\frac{1}{b+c+(b+c)} < \frac{1}{a+b+c}$  و  $\frac{1}{c+a+(c+a)} < \frac{1}{b+c+a}$  و  $\frac{1}{a+b+(a+b)} < \frac{1}{c+a+b}$

يعني :  $\frac{2a}{b+c+(b+c)} < \frac{2a}{a+b+c}$  و  $\frac{2b}{c+a+(c+a)} < \frac{2b}{b+c+a}$  و  $\frac{2c}{a+b+(a+b)} < \frac{2c}{c+a+b}$

إذن :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

$$< \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{b+c+a} + \frac{2c}{c+a+b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

2- لدينا :  $a+b > c$  و  $c+a > b$  و  $b+c > a$  يعني :  $a+b-c > 0$  و  $c+a-b > 0$  و  $b+c-a > 0$

نضع :  $z = b+c-a > 0$  و  $y = c+a-b > 0$  و  $x = a+b-c > 0$

يعني :  $x+y = 2a$  و  $x+z = 2b$  و  $y+z = 2c$

إذن :  $\sqrt{x+z} = \sqrt{2}\sqrt{b}$  و  $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} = \sqrt{x} + \sqrt{z}$

لنبين أن :  $\sqrt{x} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+z}$

لدينا :  $2(x+z) - (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 = 2x+2z-x-2\sqrt{x}\sqrt{z}-z = x-2\sqrt{x}\sqrt{z}+z = (\sqrt{x}-\sqrt{z})^2 \geq 0$

$$2(x+z) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 : \text{يعني}$$

$$\sqrt{2(x+z)} \geq \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{z})^2} : \text{يعني}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+z} : \text{إذن}$$

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b} : \text{وبالتالي}$$

$$3- \text{حسب السؤال السابق لدينا : } \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b} \quad (1)$$

$$\text{وبنفس الطريقة نبين أن : } \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{c} \quad (2)$$

$$\text{و } \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{2}\sqrt{a} \quad (3)$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$2\sqrt{a+b-c} + 2\sqrt{b+c-a} + 2\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{b} + \sqrt{2}\sqrt{c} + \sqrt{2}\sqrt{a}$$

$$\text{أي : } 2(\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}) \leq 2(\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{a})$$

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} : \text{وبالتالي}$$

### تمرين 3

$$\text{لدينا : } xy + yz + zx = \frac{xyz}{2}$$

$$\text{يعني : } \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } \frac{xy}{xyz} + \frac{yz}{xyz} + \frac{zx}{xyz} = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{لدينا : } 2 > 0$$

$$\text{يعني : } 2 > x - x$$

$$\text{يعني : } 2 + x > x$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{2+x} < \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\text{بنفس الطريقة نبين أن : } \frac{1}{2+y} < \frac{1}{y} \quad (3) \quad \text{و} \quad \frac{1}{2+z} < \frac{1}{z} \quad (4)$$

$$\text{نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 نستنتج أن : } \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

من 1 و 5 نستنتج أن :  $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{2}$

#### تمرين 4

لدينا :  $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{3}$

يعني :  $\frac{\cancel{xy} \times \left( \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right)}{\cancel{xy} \times \left( \frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} \right)} = \frac{1}{3}$

يعني :  $\frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}} = \frac{1}{3}$

نضع :  $k = \frac{x}{y}$

يعني :  $\frac{k - 1 + \frac{1}{k}}{k + 1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{3}$

يعني :  $\frac{k^2 - k + 1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3}$

يعني :  $\frac{k^2 - k + 1}{k} \times \frac{k}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3}$

يعني :  $\frac{k^2 - k + 1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3}$

يعني :  $k^2 + k + 1 = 3k^2 - 3k + 3$

يعني :  $3k^2 - 3k + 3 - k^2 - k - 1 = 0$  يعني :  $2k^2 - 4k + 2 = 0$

يعني :  $2(k^2 - 2k + 1) = 0$  يعني :  $k^2 - 2k + 1 = 0$

يعني :  $(k-1)^2 = 0$  يعني :  $k-1 = 0$

إذن :  $k = 1$

وبالتالي :  $\frac{x}{y} = 1$

## أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

بين أن :  $xyz = \frac{1}{3}$   $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=5 \end{cases}$  بحيث :  $x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية

تمرين 2

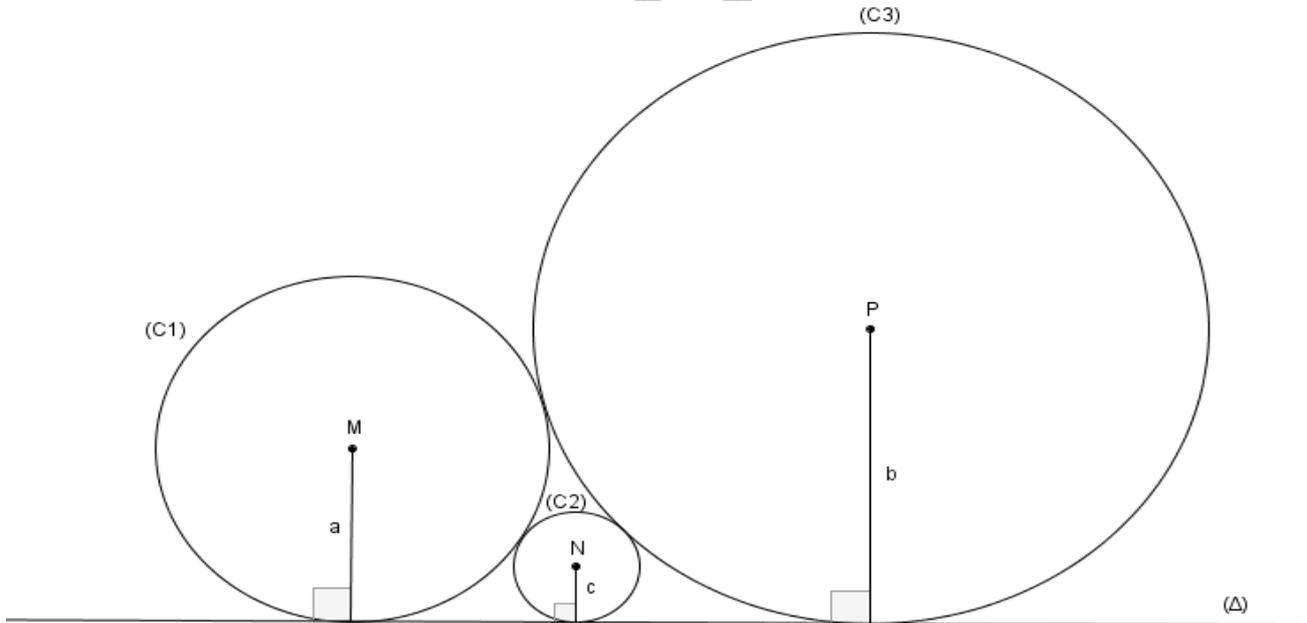
$$X = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$$

$$Y = 1+2+3+4+\dots+99+100$$

بين أن :  $X+Y=0$

تمرين 3

نعتبر الشكل أسفله بحيث : الدوائر  $C_1(M,a)$  و  $C_2(N,c)$  و  $C_3(P,b)$  متماسة فيما بينها والمستقيم  $(\Delta)$  مماس للدوائر الثلاثة بين أن :  $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$



تمرين 4

$a$  و  $b$  و  $c$  أطوال أضلاع مثلث . بين أن  $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$

## حل أولمبياد الرابع والعشرون

### تمرين 1

لدينا :  $x + y + z = 1$

يعني :  $(x + y + z)^3 = 1^3$

يعني :  $(x + y + z)^2 \times (x + y + z) = 1$

يعني :  $(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \times (x + y + z) = 1$

يعني :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz = 1$

يعني :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) + 3z^2(x + y) + 6xyz = 1$

بما أن  $x + y + z = 1$  فإن  $x + y = 1 - z$  و  $y + z = 1 - x$  و  $x + z = 1 - y$

يعني :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(1 - x) + 3y^2(1 - y) + 3z^2(1 - z) + 6xyz = 1$

يعني :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 + 6xyz = 1$

يعني :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = 1$

يعني :  $5 + 3 \times 3 - 3 \times 5 + 6xyz = 1$  (  $x^3 + y^3 + z^3 = 5$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  )

يعني :  $-1 + 6xyz = 1$

وبالتالي :  $xyz = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

### تمرين 2

$$X + Y = (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100)$$

$$= (1+1) + (2-2^2) + (3+3^2) + (4-4^2) + \dots + (99+99^2) + (100-100^2)$$

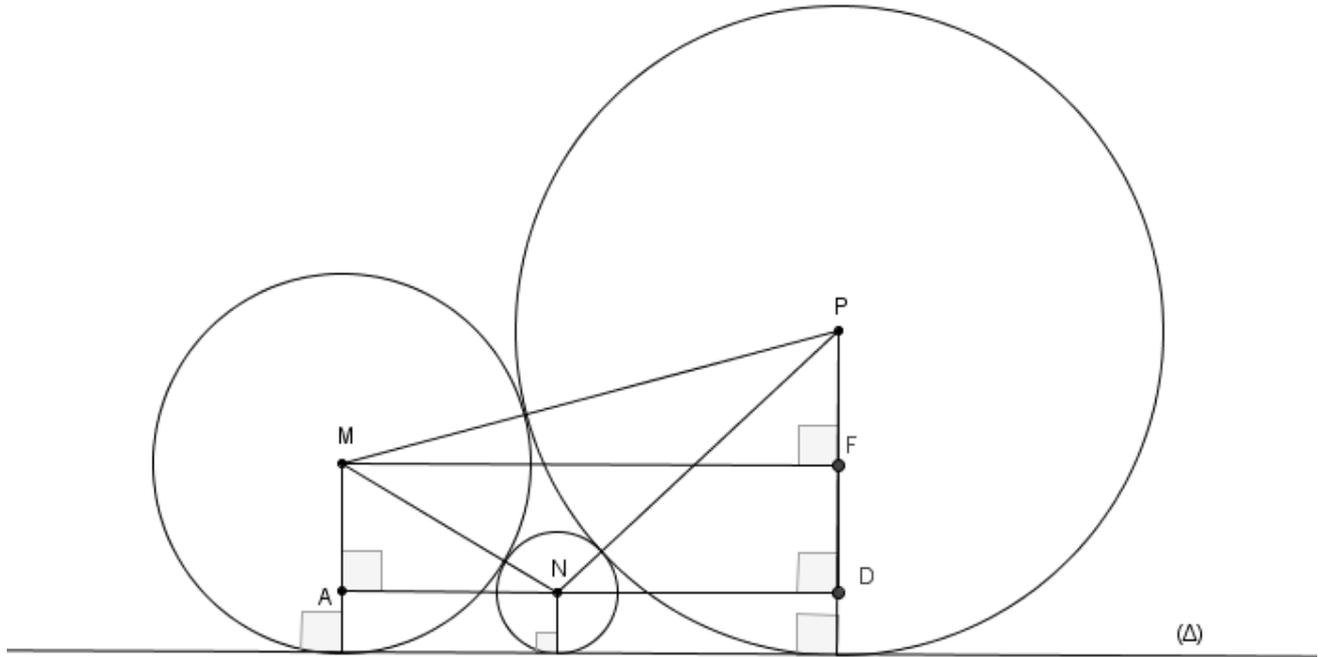
$$= 2 + (2 \times (1-2)) + (3 \times (1+3)) + (4 \times (1-4)) + \dots + (99 \times (1+99)) + (100 \times (1-100))$$

$$= 2 + (2 \times (-1)) + (3 \times (4)) + (4 \times (-3)) + \dots + (99 \times (100)) + (100 \times (-99))$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{12} - \cancel{12} + \dots + \cancel{9900} - \cancel{9900}$$

$$= 0$$

تمرين 3



لدينا  $MAN$  قائم الزاوية في  $A$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $MN^2 = MA^2 + AN^2$

أي :  $AN^2 = MN^2 - MA^2$  أي :  $AN^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2$

أي :  $AN = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - a^2 + 2ac - c^2}$  أي :  $AN = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2}$

ومنه :  $(1) AN = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$

و لدينا  $NDP$  قائم الزاوية في  $D$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $NP^2 = ND^2 + DP^2$

أي :  $ND^2 = NP^2 - DP^2$  أي :  $ND^2 = (c+b)^2 - (b-c)^2$

أي :  $ND = \sqrt{c^2 + 2cb + b^2 - b^2 + 2cb - c^2}$  أي :  $ND = \sqrt{(c+b)^2 - (b-c)^2}$

ومنه :  $(2) ND = \sqrt{4cb} = 2\sqrt{cb}$

و لدينا  $MFP$  قائم الزاوية في  $F$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $MP^2 = MF^2 + PF^2$

$$MF^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2 \text{ أي } MF^2 = MP^2 - PF^2$$

$$MF = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} \text{ أي } MF = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$$

$$(3) \quad MF = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \text{ ومنه}$$

$$(4) \quad MF = AD = AN + ND$$

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن  $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}$

$$\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\sqrt{ab} = \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb})$$

أي  $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$  وبالتالي

#### تمرين 4

لدينا  $a$  و  $b$  و  $c$  أطوال أضلاع مثلث

يعني  $b+c > a$  و  $c+a > b$  و  $a+b > c$

يعني  $b+c-a > 0$  و  $c+a-b > 0$  و  $a+b-c > 0$

نضع :  $z = c+a-b > 0$  و  $y = b+c-a > 0$  و  $x = a+b-c > 0$

لدينا :  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  يعني  $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$  يعني  $2\sqrt{xy} \leq x + y$

إذن :  $(1) \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

بنفس الطريقة نبين أن :  $(2) \quad \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$

و  $(3) \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{xy} \times \sqrt{xz} \times \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$$

أي :  $\sqrt{(xyz)^2} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$  أي  $xyz \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي :

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{a+b-c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a+c-b}{2}$$

أي :  $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{2b}{2} \times \frac{2a}{2} \times \frac{2c}{2}$

وبالتالي :  $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc$

# أولمبياد الخامس والعشرون

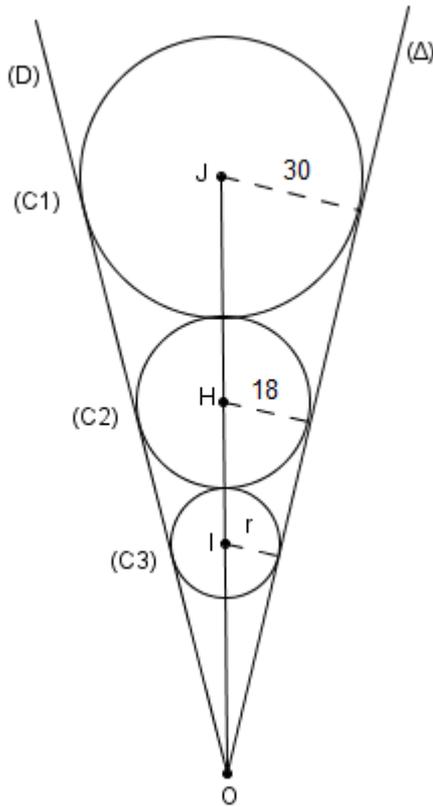
## تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً  
بين أن :  $(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$

## تمرين 2

نعطي :  $1^3 + 2^3 + \dots + 14^3 + 15^3 = 14400$   
أحسب  $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 28^3 + 30^3$

## تمرين 3



المستقيمان  $(D)$  و  $(\Delta)$  يتقاطعان في النقطة  $O$   
ومماسان للدوائر  $C_1(J,30)$  و  $C_2(H,18)$  و  $C_3(I,r)$   
والدائرتان  $C_1$  و  $C_2$  متماستان  
والدائرتان  $C_2$  و  $C_3$  متماستان  
احسب  $r$  شعاع الدائرة  $C_3$

## تمرين 4

بين أن :  $\sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} = \frac{4058209}{2}$

## حل أولمبياد الخامس والعشرون

### تمرين 1

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x} \times \sqrt{y} \geq 0$$

$$\text{إذن : } x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\text{ومنه : } (1) \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(2) \quad x + z \geq 2\sqrt{xz} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \quad y + z \geq 2\sqrt{yz} \quad \text{و}$$

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{xz} \times 2\sqrt{yz}$$

$$\text{أي : } (x + y)(x + z)(y + z) \geq 8(\sqrt{x})^2 \times (\sqrt{z})^2 \times (\sqrt{y})^2$$

$$\text{وبالتالي : } (x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$$

### تمرين 2

لدينا :

$$2^3 + 4^3 + 6^3 \dots + 28^3 + 30^3$$

$$2^3 = (2 \times 1)^3 = 2^3 \times 1^3$$

$$4^3 = (2 \times 2)^3 = 2^3 \times 2^3$$

$$6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$$

⋮

$$28^3 = (14 \times 2)^3 = 14^3 \times 2^3$$

$$30^3 = (15 \times 2)^3 = 15^3 \times 2^3$$

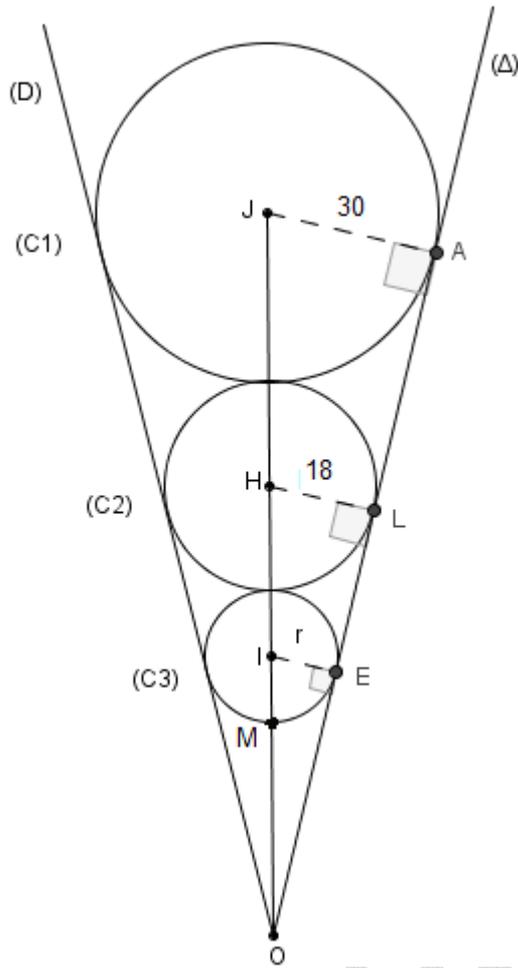
إذن :

$$2^3 + 4^3 + 6^3 \dots + 28^3 + 30^3 = 2^3 \times 1^3 + 2^3 \times 2^3 + 2^3 \times 3^3 + \dots + 14^3 \times 2^3 + 15^3 \times 2^3$$

$$= 2^3 (1^3 + 2^3 + \dots + 14^3 + 15^3)$$

$$= 8 \times 14400$$

### تمرين 3



لدينا المستقيمان (D) و (Δ) مماسان للدوائر (C<sub>1</sub>) و (C<sub>2</sub>) و (C<sub>3</sub>) على التوالي في A و L و E و

يعني :  $(JA) \perp (\Delta)$  و  $(HL) \perp (\Delta)$  و  $(IE) \perp (\Delta)$

يعني :  $\sin \hat{I}OE = \sin \hat{H}OL = \sin \hat{J}OA$

يعني :  $\frac{IE}{OI} = \frac{HL}{OH} = \frac{JA}{OJ}$

يعني :

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+2 \times 18+30}$$

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} \quad \text{حسب النتيجة 1 لدينا :}$$

$$r \times OM + 2r^2 + 18r = 18 \times OM + 18r \quad \text{يعني}$$

$$2r^2 = 18 \times OM - r \times OM \quad \text{يعني}$$

$$2r^2 = OM(18-r) \quad \text{يعني}$$

$$\text{إذن : } OM = \frac{2r^2}{18-r} \quad (1)$$

$$\frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66} \quad \text{حسب النتيجة 1 لدينا :}$$

$$18 \times OM + 36r + 1188 = 30 \times OM + 60r + 540 \quad \text{يعني}$$

$$30 \times OM - 18 \times OM + 60r - 36r = 1188 - 540 \quad \text{يعني}$$

$$\text{إذن : } 12 \times OM + 24r = 648 \quad (2)$$

$$\text{من 1 و 2 نستنتج أن : } 12 \times \left( \frac{2r^2}{18-r} \right) + 24r = 648$$

$$\text{أي : } \frac{24r^2 + 432r - 24r^2}{18-r} = 648$$

$$\text{أي : } 432r = 11664 - 648r$$

أي :  $1080r = 11664$

وبالتالي :  $r = \frac{11664}{1080} = 10,8$

تمرين 4

نضع :  $x = 2013$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} &= \sqrt{\frac{(x+3) \times (x+2) \times (x+1) \times x + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{x \times (x+3) \times (x+2) \times (x+1) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 + 3x) \times (x^2 + 3x + 2) + 1}{4}} \end{aligned}$$

نضع :  $t = x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} &= \sqrt{\frac{(x^2 + 3x) \times (x^2 + 3x + 2) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t \times (t+2) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4}} \\ &= \frac{t+1}{2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1}{2} \\ &= \frac{2013^2 + 3 \times 2013 + 1}{2} \\ &= \frac{4052169 + 6039 + 1}{2} = \frac{4058209}{2} \end{aligned}$$

## أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان موجبان قطعا

$$\text{بين أن : } 3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

تمرين 2

$a$  و  $b$  و  $x$  و  $y$  أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث :  $x \leq y$

$$\text{بين أن : } \frac{x}{y} \leq \frac{ax+by}{ay+bx} \leq \frac{y}{x}$$

تمرين 3

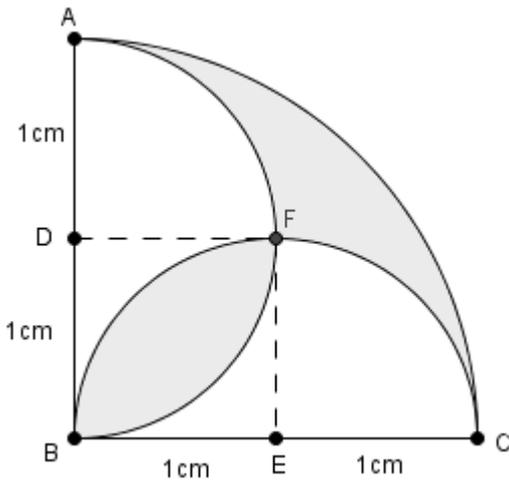
1-  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان موجبان بحيث :  $x - y = 16\sqrt{2}$  و  $xy = 224$

أحسب  $x + y$

$$2- \text{احسب : } S = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \frac{1}{208} + \frac{1}{304} + \frac{1}{418} + \frac{1}{550} + \frac{1}{700}$$

تمرين 4

احسب مساحة المنطقة المظللة



## حل أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned} 3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) &= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

إذن :  $3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

تمرين 2

لدينا :  $x \leq y$

يعني :  $x^2 \leq y^2$

يعني :  $(bx) \times x^2 \leq (bx) \times y^2$  و  $(ay) \times x^2 \leq (ay) \times y^2$  (  $bx > 0$  و  $ay > 0$  )

يعني :  $bx^3 \leq bxy^2$  و  $ayx^2 \leq ay^3$

يعني :  $bx^3 + (ax^2y) \leq bxy^2 + (ax^2y)$  و  $ayx^2 + (bxy^2) \leq ay^3 + (bxy^2)$

يعني :  $x^2(bx + ay) \leq xy(by + ax)$  و  $xy(ax + by) \leq y^2(ay + bx)$

يعني :  $\frac{1}{x^2} \times x^2(bx + ay) \leq \frac{1}{x^2} \times xy(by + ax)$  و  $\frac{1}{y^2} \times xy(ax + by) \leq \frac{1}{y^2} \times y^2(ay + bx)$

يعني :  $bx + ay \leq \frac{y}{x} \times (by + ax)$  و  $\frac{x}{y} \times (ax + by) \leq (ay + bx)$

يعني :  $\frac{1}{bx + ay} \geq \frac{x}{y} \times \left(\frac{1}{by + ax}\right)$  و  $\frac{1}{ay + bx} \geq \frac{y}{x} \times \left(\frac{1}{ax + by}\right)$

يعني :  $\frac{y}{x} \geq \frac{ax + by}{ay + bx}$  و  $\frac{ax + by}{bx + ay} \geq \frac{x}{y}$

وبالتالي :  $\frac{x}{y} \leq \frac{ax + by}{ay + bx} \leq \frac{y}{x}$

تمرين 3

$$x - y = 16\sqrt{2} : \text{ لدينا } -1$$

$$(x - y)^2 = (16\sqrt{2})^2 : \text{ يعني}$$

$$(1) \quad x^2 - 2xy + y^2 = 256 \times 2 = 512 : \text{ إذن}$$

$$xy = 224 : \text{ لدينا}$$

$$(2) \quad 4 \times xy = 4 \times 224 = 896 : \text{ إذن}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4 \times xy = 512 + 896 : \text{ نجمع المساويتان 1 و 2 طرف بطرف}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1408 : \text{ أي}$$

$$(x + y)^2 = 1408 : \text{ أي}$$

$$x + y = \sqrt{1408} = 2\sqrt{352} : \text{ وبالتالي}$$

-2

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \frac{1}{13 \times 16} + \frac{1}{16 \times 19} + \frac{1}{19 \times 22} + \frac{1}{22 \times 25} + \frac{1}{25 \times 28} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{4-1}{1 \times 4} + \frac{1}{3} \times \frac{7-4}{4 \times 7} + \frac{1}{3} \times \frac{10-7}{7 \times 10} + \frac{1}{3} \times \frac{13-10}{10 \times 13} + \frac{1}{3} \times \frac{16-13}{13 \times 16} + \frac{1}{3} \times \frac{19-16}{16 \times 19} + \frac{1}{3} \times \frac{22-19}{19 \times 22} + \frac{1}{3} \times \frac{25-22}{22 \times 25} + \frac{1}{3} \times \frac{28-25}{25 \times 28} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{19}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{22}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{28}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{27}{28} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 3}{28} \\ &= \frac{9}{28} \end{aligned}$$

تمرين 4

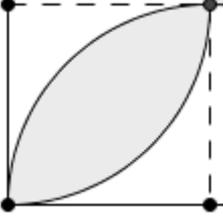
$$- \text{ مساحة الشكل} : \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$$

$$- \text{ مساحة نصف الدائرة التي قطرها يساوي 2} : \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

- مساحة نصف الدائرتين التي قطرها يساويان  $2 : \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$

- مساحة الشكل البيضاوي :

$$\begin{aligned} 1^2 - 2\left(1^2 - \frac{\pi \times 1^2}{4}\right) &= 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{4 - \pi}{2} \\ &= \frac{\pi - 2}{2} \end{aligned}$$



- مساحة المنطقة المضللة :

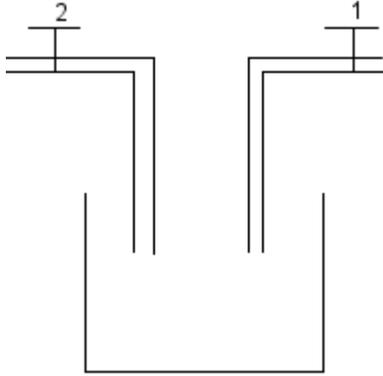
مساحة المنطقة المضللة = مساحة الشكل - (مساحة نصف الدائرتين - مساحة الشكل البيضاوي)

$$1 - \left(\pi - \frac{\pi - 2}{2}\right) = \frac{2 - \pi}{2} \text{ cm}^2$$

مساحة المنطقة المضللة هي :  $\frac{2 - \pi}{2} \text{ cm}^2$

## أولمبياد السابع والعشرون

### تمرين 1



الشكل جانبه يمثل صهريج يحتوي على حنفيتين لمئه بالماء الحنفيه الأولى تملأ الصهريج في ساعتان والحنفيه الثانية تملأ الصهريج في 3 ساعات إذا فتحنا الحنفيتين في نفس الوقت فكم سيستغرق من الوقت حتى يمتلأ الصهريج

### تمرين 2

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

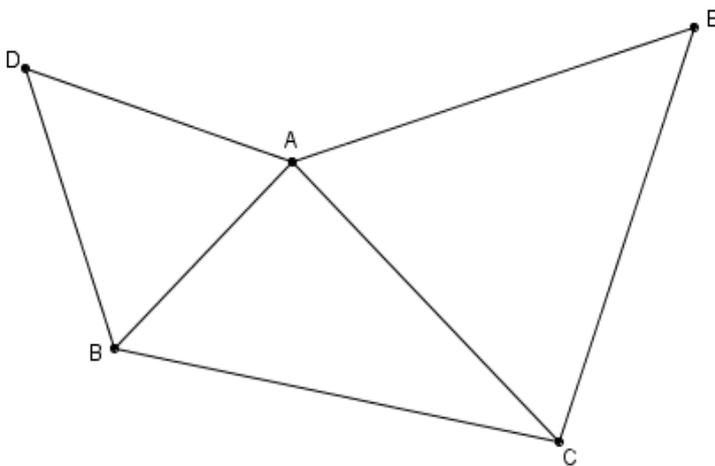
$$\text{بين أن : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$$

### تمرين 3

$ABCD$  مستطيل مساحته  $S = 30\text{cm}^2$  و طول قطره  $BD = \sqrt{65}$

حدد محيط المستطيل  $P$

### تمرين 4



في الشكل جانبه :  $ABC$  مثلث

والمثلثان  $ACE$  و  $BAD$  متساويا

الأضلاع على التوالي في  $D$  و  $E$

بين أن :  $DC = BE$

## أولمبياد السابع والعشرون

### تمرين 1

نضع :  $V$  : حجم الصهريج

$S_1$  : صبيب الحنفية الأولى

$S_2$  : صبيب الحنفية الثانية

$t$  : المدة الزمنية حتى يمتلأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا

- عند ملأ الصهريج بالحنفية الأولى فإن حجم الصهريج هو :  $V = S_1 \times 2$

$$\text{يعني : } S_1 = \frac{V}{2}$$

- عند ملأ الصهريج بالحنفية الثانية فإن حجم الصهريج هو :  $V = S_2 \times 3$

$$\text{يعني : } S_2 = \frac{V}{3}$$

- عند ملأ الصهريج بالحنفيتين معا فإن حجم الصهريج هو :  $V = (S_1 + S_2) \times t$

$$\text{يعني : } t = \frac{V}{S_1 + S_2} = \frac{V}{\frac{V}{2} + \frac{V}{3}} = \frac{V}{\frac{5V}{6}} = V \times \frac{6}{5V} \text{ يعني : } t = \frac{6}{5}h$$

$$\text{إذن : } t = \frac{6}{5}h$$

المدة الزمنية لملأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا هي :  $1h12 \text{ min}$

### تمرين 2

$$\text{لدينا : } (x - \sqrt{yz})^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } x^2 - 2x\sqrt{yz} + yz \geq 0 \text{ يعني : } x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz} \text{ يعني : } \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} \times \frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$$

$$(2) \quad \frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{\sqrt{xz}}{2xyz}$$

$$( 3 ) \quad \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{\sqrt{xy}}{2xyz} \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$$

$$( 4 ) \quad \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$\text{لدينا : } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$\text{يعني : } x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$( 5 ) \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{إذن}$$

$$( 6 ) \quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$( 7 ) \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 5 و 6 و 7 طرف بطرف :

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}$$

$$\text{اي : } \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \frac{2x+2y+2z}{2}$$

$$\text{اي : } \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq \cancel{2} \frac{(x+y+z)}{\cancel{2}}$$

$$( 8 ) \quad \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq x+y+z \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{x+y+z}{xyz} \right) \quad \text{من 4 و 8 نستنتج أن}$$

$$\text{أي : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}yz} + \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}z} + \frac{\cancel{z}}{xy\cancel{z}} \right)$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$$

### تمرين 3

لدينا  $ABD$  مثلث قائم الزاوية في  $B$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$( 1 ) \quad \text{ومنه : } AB^2 + AD^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$$

لدينا :  $S = 30cm^2$

يعني :  $AB \times AD = 30$

يعني :  $2 \times AB \times AD = 2 \times 30$

إذن :  $( 2 ) \quad 2 \times AB \times AD = 60$

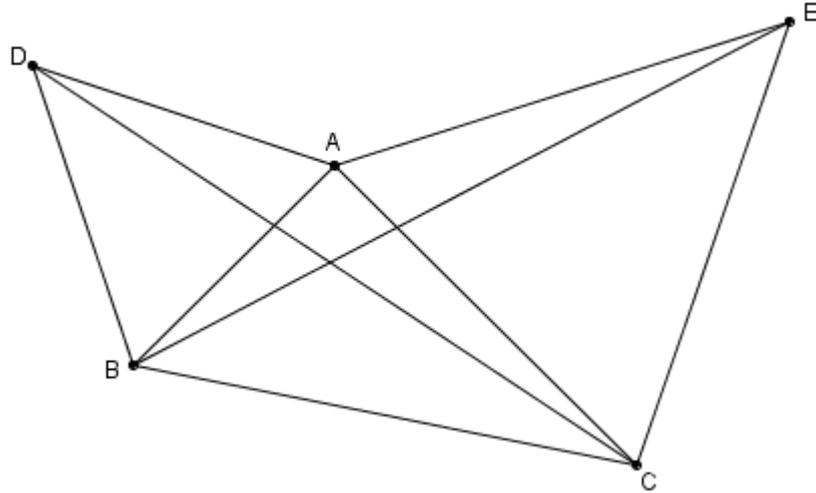
نجمع المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف :  $AB^2 + AD^2 + 2 \times AB \times AD = 65 + 60 = 125$

ومنه :  $(AB + AD)^2 = 125$

أي :  $AB + AD = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

وبالتالي :  $P = 2 \times (AB + AD) = 2 \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{5} \text{ cm}$

#### تمرين 4



لدينا :  $\hat{B}AE = \hat{B}AC + \hat{C}AE = \hat{B}AC + 60^\circ$  ( لأن المثلث  $ACE$  متساوي الأضلاع )

و  $\hat{C}AD = \hat{C}AB + \hat{B}AD = \hat{C}AB + 60^\circ$  ( لأن المثلث  $BAD$  متساوي الأضلاع )

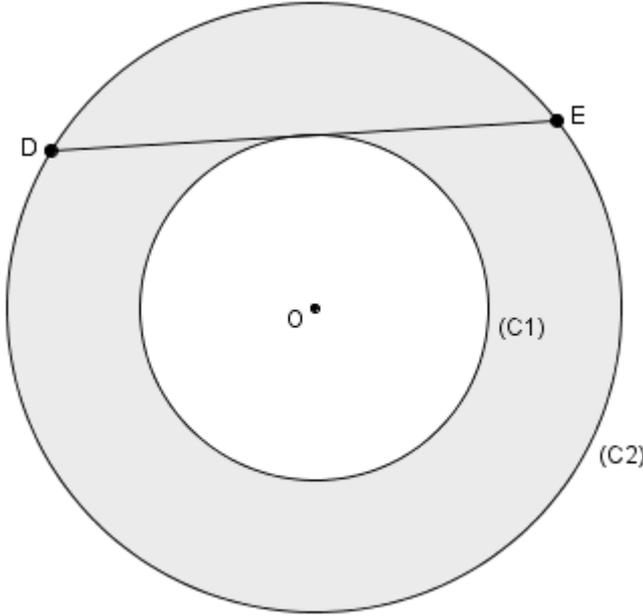
إذن :  $\hat{B}AE = \hat{C}AD$

فإن : المثلثان  $BAE$  و  $CAD$  متقايسان  $\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}AE = \hat{C}AD \\ AE = AC \\ AB = AD \end{array} \right.$  بما أن :

وبالتالي :  $DC = BE$

## أولمبياد الثامن والعشرون

### تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

النقطة  $O$  هي مركز مشترك للدائرة  
 $(C_1)$  التي شعاعها  $r$  والدائرة  $(C_2)$  التي  
 شعاعها  $R$ .  $(DE)$  هو مماس للدائرة  
 $(C_1)$  و  $DE = 7\text{cm}$   
 احسب  $S$  مساحة المنطقة المظللة

### تمرين 2

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين بحيث :  $x + y = 1$   
 بين أن :  $xy \leq \frac{1}{4}$

### تمرين 3

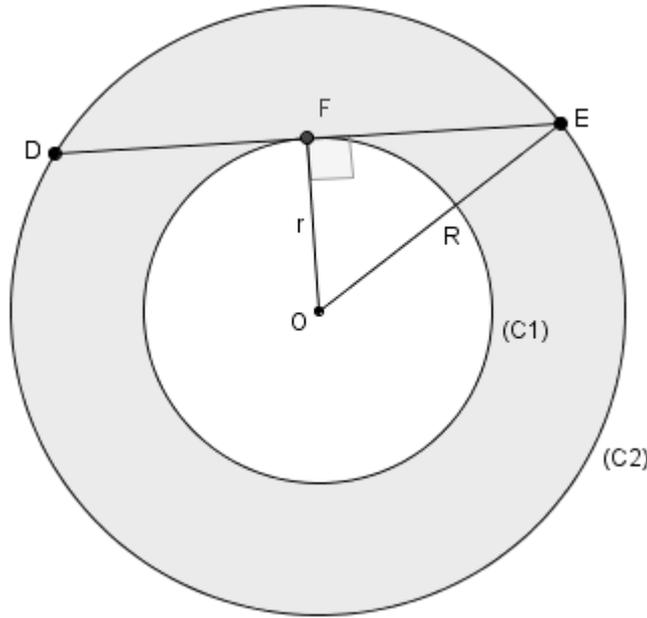
$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعا  
 -1 بين أن :  $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} \leq xy$   
 -2 استنتج أن :  $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} + \sqrt{(z^2-1)} \leq \frac{xy + yz + xz}{2}$

### تمرين 4

1-  $a$  عدد حقيقي موجب قطعا بحيث :  $a + \frac{1}{a} = 2$   
 احسب  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  و  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  و  $a^6 + \frac{1}{a^6}$  و  $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$   
 2- بين أن :  $55555^2 - 33333^2 = 444444$

## حل أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1



لدينا  $(DE)$  هو مماس للدائرة  $(C_1)$  في النقطة  $F$

إذن  $(OF) \perp (DE)$

بما أن  $(OF) \perp (DE)$  و  $OE = OD = R$  فإن  $(OF)$  واسط القطعة  $[DE]$

$$\text{ومنه : } FD = FE = \frac{DE}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ cm}$$

لدينا المثلث  $OFE$  قائم الزاوية في  $F$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $OE^2 = OF^2 + FE^2$

$$\text{أي : } R^2 = r^2 + 3,5^2$$

$$\text{أي : } (1) \quad R^2 - r^2 = 12,25 \text{ cm}$$

مساحة المنطقة المضللة  $(S) = \text{مساحة الدائرة } (C_2) - \text{مساحة الدائرة } (C_1)$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

من 1 و 2 نستنتج أن :  $S = \pi (R^2 - r^2) = 3,14 \times 12,25 = 38,465 \text{ cm}^2$

## تمرين 2

لدينا :  $x + y = 1$  يعني :  $(x + y)^2 = 1^2$  يعني :  $x^2 + 2xy + y^2 = 1$   
 يعني :  $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 1 - 4xy$  يعني :  $x^2 - 2xy + y^2 = 1 - 4xy$  يعني :  $(x - y)^2 = 1 - 4xy$   
 ( نعلم أن :  $(x - y)^2 \geq 0$  )  
 يعني :  $1 - 4xy \geq 0$  يعني :  $1 \geq 4xy$  إذن :  $xy \leq \frac{1}{4}$

## تمرين 3

لدينا :  $(\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1)^2 \geq 0$   
 يعني :  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1 \geq 0$   
 يعني :  $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1 \geq 0$   
 يعني :  $x^2 - 1 + y^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \leq x^2y^2$   
 يعني :  $(\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)})^2 \leq x^2y^2$  يعني :  $\sqrt{\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)}} \leq \sqrt{x^2y^2}$   
 إذن :  $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} \leq xy$

2- حسب السؤال 1 لدينا :  $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} \leq xy$  ( 1 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $\sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq yz$  ( 2 )

و  $\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq xz$  ( 3 )

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} + \sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq xy + yz + xz$$

$$2\sqrt{(x^2 - 1)} + 2\sqrt{(y^2 - 1)} + 2\sqrt{(z^2 - 1)} \leq xy + yz + xz \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 (\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)}) \leq \frac{1}{2} \times (xy + yz + xz) \quad \text{أي :}$$

$$\sqrt{(x^2 - 1)} + \sqrt{(y^2 - 1)} + \sqrt{(z^2 - 1)} \leq \frac{xy + yz + xz}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

## تمرين 4

-1

حساب  $a^2 + \frac{1}{a^2}$

$$\text{لدينا : } a + \frac{1}{a} = 2$$

$$\text{يعني : } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2^2$$

$$\text{يعني : } a^2 + 2 \times a \times \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4$$

$$\text{يعني : } a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 4$$

$$\text{إذن : } a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$$

$$\text{- حساب } a^3 + \frac{1}{a^3}$$

$$\text{لدينا : } \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2 \times 2$$

$$\text{يعني : } a \times a^2 + a \times \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \times a^2 + \frac{1}{a} \times \frac{1}{a^2} = 4$$

$$\text{يعني : } a^3 + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a^3} = 4$$

$$\text{يعني : } a^3 + 2 + \frac{1}{a^3} = 4$$

$$\text{إذن : } a^3 + \frac{1}{a^3} = 2$$

$$\text{- حساب } a^6 + \frac{1}{a^6}$$

$$\text{لدينا : } a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$$

$$\text{يعني : } \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = 2^2$$

$$\text{يعني : } (a^2)^2 + 2 \times a^2 \times \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = 4$$

$$\text{يعني : } a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} = 4$$

$$\text{إذن : } a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$$

$$\text{لدينا : } \left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2 \times 2$$

$$\text{يعني : } a^4 \times a^2 + a^4 \times \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} \times a^2 + \frac{1}{a^4} \times \frac{1}{a^2} = 4$$

$$\text{يعني : } a^6 + \frac{1}{a^2} + a^2 + \frac{1}{a^6} = 4$$

يعني :  $a^6 + 2 + \frac{1}{a^6} = 4$

إذن :  $a^6 + \frac{1}{a^6} = 2$

- حساب  $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

لدينا :

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

$$= a + 2 + \frac{1}{a}$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

إذن :  $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 2$

-2

$$555555^2 - 333333^2 = (111111 \times 5)^2 - (111111 \times 3)^2 = 111111^2 \times 5^2 - 111111^2 \times 3^2$$

$$= 111111^2 \times (5^2 - 3^2)$$

$$= 111111^2 \times (25 - 9)$$

$$= 111111^2 \times 16$$

$$= 111111^2 \times 4^2$$

$$= (111111 \times 4)^2 = 444444^2$$

## للتواصل

**البريد الإلكتروني :** [abderrahimstit@gmail.com](mailto:abderrahimstit@gmail.com)

**الموقع الإلكتروني :** <https://sites.google.com/site/stitmath>

**الصفحة على الفيسبوك :**

<https://www.facebook.com/profile.php?id=100009542156143>