الدوال البولية وتبسيطها

التعريف: ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$B_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in B_2 = \{0,1\}\}$$

التطبيق $f : B_2^n \longrightarrow B_2$ دالة بولية.

(بحيث n متغير).

مثال: $f(x,y) = xy + x'$

x	y	$x \cdot y$	x'	$xy + x'$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

تعريف: ليكن f و g كل منهما دالة بولية في n متغير.

f و g متكافئتان ونرمز لهذا: $f=g$

إذا كانت f و g لهما نفس الجدول.

مثال: (4,11) ص 200

$f(x,y,z)=xy$ ، $g(x,y,z)=(xz'+yz)xy$

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= (xz'+yz)xy \\ &= xz'xy + yzxy \\ &= xyz' + xyz \longrightarrow csp(f) \\ &= xy(z'+z) \\ &= xy \cdot 1 \\ &= xy = f(x,y,z) \end{aligned}$$

تعريف $f(x_1,\dots,x_n)$ دالة بولية.

(أ) الحد الاصغري (minterm)

حيث $y_1,y_2,\dots,y_n$ كل $y_i=x_i$ أو $y_i=x_i'$

(ب) مجموع جداءات التام للدالة f

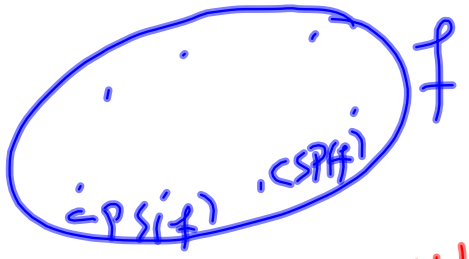
ونرمز له $CSP(f)$ هو كتابة f على شكل مجموع حدود اصغرية.

(ج) الحد الاعظمي (maxterm)

حيث $y_1+y_2+\dots+y_n$ كل $y_i=x_i$ أو $y_i=x_i'$

(د) جداء المجاميع التام للدالة f

ونرمز له $CPS(f)$ هو جداء الحدود الاعظمية للدالة f.



ملاحظة: csp(f) هي كتابة وحيدة باستثناء الترتيب في الجمع.

و cps(f) هي كتابة وحيدة (باستثناء الترتيب في الجمع)

مثال (ص (x,y,z)) حيث

الكتب الـ (لـ):

الحل: طريقة أولى

CSP على شكل $f(x,y,z)=(x+y)z'$ ثم $CPS(f)$

x	y	z	x+y	z'	f(x,y,z)	الحد ، الـ مكبر
1	1	1	1	0	0	$x'+y'+z'$
1	1	0	1	1	1	xyz'
1	0	1	1	0	0	$x'+y+z'$
1	0	0	1	1	1	$xy'z'$
0	1	1	1	0	0	$x+y'+z'$
0	1	0	1	1	1	$x'yz'$
0	0	1	0	0	0	$x+y+z'$
0	0	0	0	1	0	$x+y+z$

$$CSP(f)=xyz'+xy'z'+x'yz'$$

$$CPS(f)=(x+y+z)\cdot(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z')$$

الطريقة الثانية

$$f(x,y,z)=(x+y)z'=xz'+yz'$$

$$=x(y+y')z'+(x+x')yz'$$

$$=xyz'+xy'z'+xyz'+x'yz'$$

$$=xyz'+xy'z'+x'yz'$$

$$CSP(f)=xyz'+xy'z'+x'yz'$$ أي أن

$$f'(x,y,z)=\big((x+y)z'\big)'=(x+y)'+z$$

$$=x'\cdot y'+z$$

$$CSP(f')=x'y'(z+z')+(x+x')(y+y')z$$

$$=x'y'z+x'y'z'+xyz+xy'z+x'yz$$

$$CSP(f')=x'y'z+x'y'z'+xyz+xy'z+x'yz$$ أي أن

$$CPS(f)=\big(CSP(f')\big)'$$

$$CPS(f)=(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y'+z)$$

تبسيط الدوال البولية

التعريف: ليكن f و g دالة بولية بـ n متغير حيث $n \in \mathbb{N}$ ، $f = g$ (أو متكافئة)

f أبسط من g إذا كان

(أ) f تحتوي على حدود أقل من g وحروف أقل أو يساوي من حروف g.

أو (ب) f تحتوي على حرف أقل من g وحدود أقل أو يساوي من حدود g.

مبرهنة: ليكن S مجموعة الكتابات للدالة f فإن العلاقة "أبسط من" هي علاقة ترتيب جزئي في S.

مثال (4,15) ص 205

$f(x,y,z)=xy'+y'z+xz+xz'$, $g(x,y,z)=x+xy'z+x'y'z$,

$h(x,y,z)=xz+y'z+xz'$, $k(x,y,z)=x+y'z$

كل الدوال مستقلة.

الحل:

k	h	g	f	
2	3	3	4	عدد الحدود
3	6	7	8	عدد المتغيرات

f أبسط من g

g أبسط من h

h أبسط من k

$k \le h \le g \le f$,

جدول كارنو

في متغيرين

	y	y'
x	xy	xy'
x'	$x'y$	$x'y'$

في ثلاث متغيرات

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	xyz	xyz'	$xy'z'$	$xy'z$
x'	$x'yz$	$x'yz'$	$x'y'z'$	$x'y'z$

في أربع متغيرات

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	$xyzw$	$xyzw'$		
xy'	$xy'zw$			$xy'z'w$
$x'y'$			$x'y'z'w'$	
$x'y$	$x'yzw$	$x'yzw'$		$x'yz'w$

التعريف: كل مربع صغير هو خلية.

مستطيل R بـ n سطر، k عمود نرمز له (n,k)

مستطيل من النوع (n,k)

المستطيل الاساسي هو كل مستطيل من النوع

1×1 أو 1×2 أو 1×4 أو 2×1 أو 2×2 أو 2×4

4×1 أو 4×2 أو 4×4

بصفة عامة المستطيل الاساسي هو من النوع $2^p\times2^q$ حيث $p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

ملاحظات

(١) الخلايا تحتوي على حد أصغرية.

(٢) خليتان متجاورتان هما خليتان تحتوي كل منهما على حد أصغرى وتختلفان في حرف واحد.

(٣) مجموع خليتان متجاورتان يكون حد تحتوي على $p-1$ حرف حيث p عدد المتغيرات

مثال:

$$(x+x')yzw = xyzw + x'yzw$$

$$yzw =$$

التعريف ليكن f دالة كنا بات

(١) مجموع الجداءات الاصغري للدالة f

ونرمز له $MSP(f)$ وهو أبسط كتابة كمجموع للدالة f (الكتابة للدالة f التي نكتب كمجموع بأقل عدد من العدد والحروف)

(٢) جداء المجاميع الاصغري للدالة f

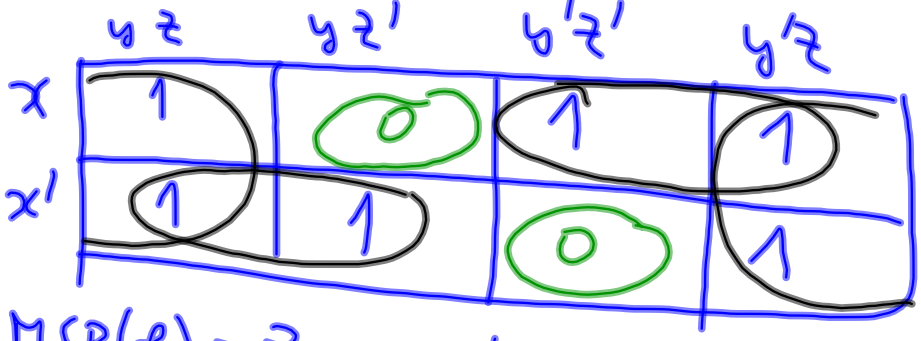
ونرمز له $MPS(f)$ وهو أبسط كتابة كجداء للدالة f.

مثال (4,18) ص 215

$f(x,y,z) = xyz + x'yz + xy'z' + xy'z + x'yz' + x'y'z'$

على شكل MSP نعم MPS

الحل



$MSP(f) = z + xy' + x'y$

MPS(f) ?

$MSP(f') = xyz' + x'y'z'$

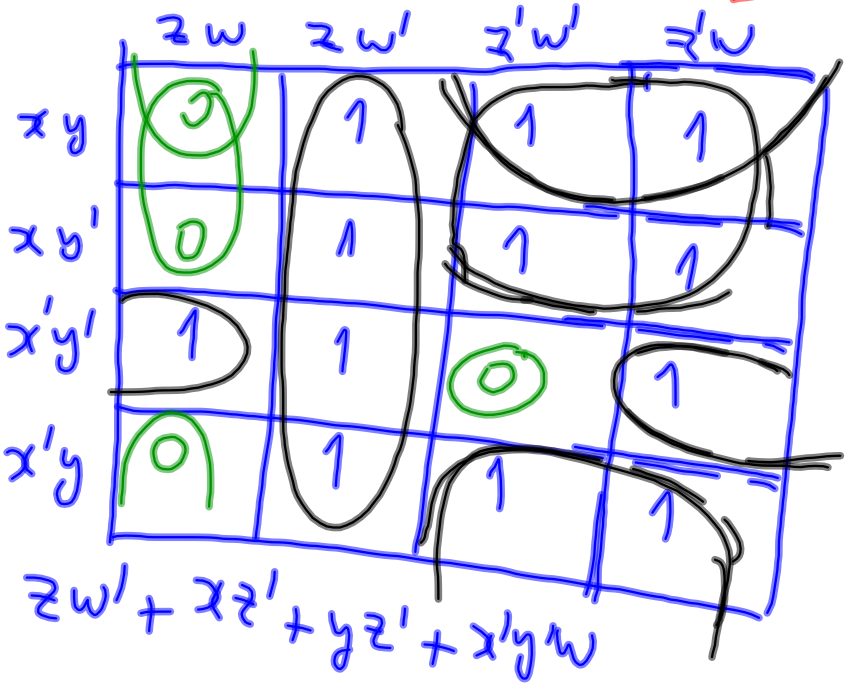
$MPS(f) = (MSP(f'))'$

$= (x'+y'+z)(x+y+z)$

مثال (4/13) ص 210

اكتب $f(x,y,z,w)=x'y'w+z'w+zw'+yw'+xw'$ على شكل MSP ثم MPS

الحل:



$MSP(f)=zw'+xz'+yz'+x'yw$

$MPS(f)$?

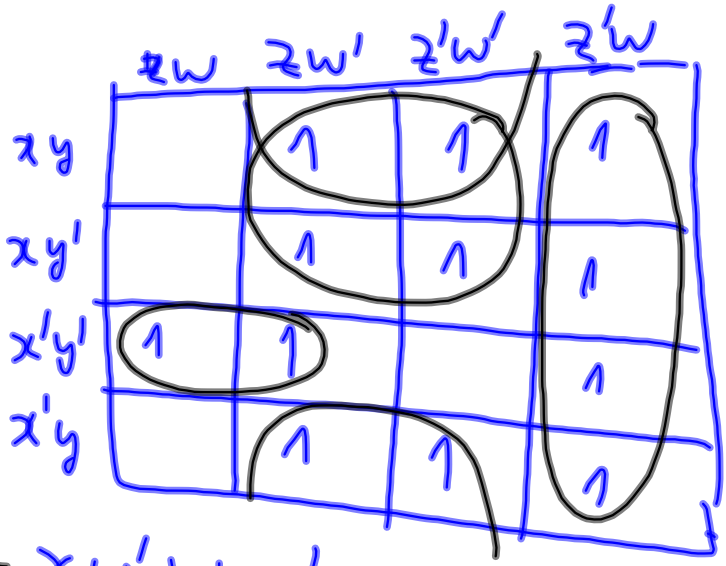
$MSP(f')=xzw+yzw+x'yz'w'$

$MPS(f)=(MSP(f'))'$

$=(x'+z'+w')(y'+z'+w')(x+y+z+w)$

ملحوظة:

يمكن كتابة MSP(f) بكتابة ثانية



$MSP(f) = xw' + yw' + z'w + x'y'z$