ملاحظات حول الحل الجبري (السيمبلكس)

يوجد عدد من العقبات التي يمكن ان تعترض حل البرامج الخطية بواسطة طريقة السيمبلكس

1-حالة وجود اكثر من عنصر واحد للارتكاز ، وتظهر هذه الحالة عندما يكون

$$\theta = Min\left[\frac{b_i}{a_{id}}\right] = \frac{b_t}{a_{td}} = \frac{b_k}{a_{kd}}$$

يتم التخلص من هذه الحالة بواسطة اعتماد احد العنصرين a_{td} او a_{kd} ليكون عنصرا للارتكاز

2- حالة الانحلال نستدل عليها من ظهور صفر في عمود الثوابت الحرة ، وفي هذه الحالة نتجاهل ذلك الصفر ونختار عنصر الارتكاز وفق القواعد السابقة ، ولكن اذا لم نجد عنصرا موجبا في عمود الارتكاز غير العنصر المقابل لذلك الصفر فإننا نختاره كعنصر للارتكاز لمرة واحدة ونجري التبديل اللازم ثم نعود الى تعليمات الخوارزمية

3- حالة عدم وجود حل مثالي نستدل عليها من عدم وجود عنصر موجب بين عناصر عمود الارتكاز (عمود x_d) هذا يعني ان منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد تابع الهدف ، ولا يمكننا نقل المتحول x_d الى القاعدة ، وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك

4- يوجد عدد لانهائي من الحلول المثالية (حالة تعدد الحلول المثالية) تحدث هذه الحالة عندما يكون مستقيم (او مستوي) تابع الهدف ، نستدل على هذه الحالة من جراء ظهور صفر او اكثر في سطر تابع الهدف وفي العمود المقابل لاحد المتحولات غير القاعدية ،

بحوث العمليات

وعلى ان يكون ظهور هذه الحالة في اخر مرحلة من مراحل الحل ، ولا يعتبر ظهور ذلك الصفر مشكلة او عقبة لأننا نكون قد حصلنا على حل مثالي للمسالة

5-عدم وجود أي حل مقبول (وبالتالي عدم وجود حل مثالي) تحدث هذه الحالة عندما تكون الشروط متعارضة ونستدل على ذلك من الجدول وذلك عندما تكون عناصر احد الاسطر سالبة ويكون العدد الثابت $b_i \geq 0$ وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعلن ذلك

6- نقوم بالتحقق من أن الحل المثالي الذي حصلنا عليه يحقق الشروط المفروضة ويعطينا القيمة الكبرى للتابع z وذلك بتعويض مركباته في جميع الشروط وفي تابع الهدف

البرامج الخطية المرافقة

مقدمة:

من المفاهيم الأساسية في البرمجة الخطية مفهوم الترافق أو الثنائية حيث يعتمد هذا المفهوم على نظرية الترافق التي تشير إلى أن كل برنامج خطي يمتلك برنامجا مرافقا بحيث انه إذا وجد حل لأحد البرنامجين فان هناك حلا للبرنامج الأخر وتتساوى قيمة تابع الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل، حيث تظهر الحاجة إلى النموذج المرافق عندما تكون m عدد القيود اكبر من n عدد المتغيرات (المتحولات)

البرامج الخطية المتناظرة:

تعريف:

نقول عن برنامج خطي انه موضوع بصيغة متناظرة إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بان تكون غير سالبة وإذا اعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب ان تكون متراجحات قيود مسالة الزيادة الى الحد الاعظمي موضوعة بصيغة اقل من او يساوي في حين ان متراجحات قيود مسالة الإنقاص الى الحد الاصغري يجب ان تكون بصيغة أكبر من او يساوي

تشكيل البرنامج المرافق للبرنامج المتناظر:

يمكن تشكيل برنامج مرافق لكل برنامج خطي متناظر حيث انه إذا كان لدينا برنامجا خطيا يتكون من تابع هدف في صورة تعظيم وشروط في صورة أصغر من أو يساوي أي البرنامج الأصلي يأخذ الشكل التالي

$$Max \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ---+ c_n x_n$$

طبقا للشروط

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ---+ a_{1n} x_n \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ---+ a_{2n} x_n \le b_2$$
$$----------$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ---+ a_{mn} x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, ---x_n \ge 0$$

والذي يكتب بالصورة المختصرة التالية

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

طبقا للشروط

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad ; \quad i = 1,2,----m$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , ---x_n \ge 0$$

حيث c_j ، b_i ، a_{ij} ثوابت و x_j متغيرات القرار عندئذ يأخذ البرنامج المرافق الشكل

$$Min \quad U = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ---+ b_n y_n$$

طبقا للشروط

بحوث العمليات

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + - - - + a_{m1}y_m \le c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + - - - + a_{m2}y_m \le c_2$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + - - - + a_{nm}y_m \le c_n$$
$$y_1, y_2, - - - y_m \ge 0$$

والذي يكتب بالصورة المختصرة التالية

$$Min \quad U = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

طبقا للشروط

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$$
$$j = 1,2, - - n$$
$$y_1, y_2, - - y_m \ge 0$$

وإذا كان البرنامج المتناظر معطى بالشكل المصفوفي التالي

$$Z = CX$$

مع مراعاة القيود

$$AX \le B$$
$$X \ge 0 \quad , \quad B \ge 0$$

عندها يكون البرنامج الخطي المرافق بالشكل المصفوفي التالي

$$Min\ L = BY$$

مع مراعاة القيود

$$AY \ge C$$
$$Y \ge 0$$

حيث

A مصفوفة من القياس $m \times n$

بحوث العمليات

B مصفوفة عمود أي من القياس $m\times 1$

C مصفوفة سطر من القياس $1\times n$

X مصفوفة عمود من القياس $n\times 1$

Y مصفوفة سطر من القياس $1\times m$

كما انه يمكن اعتبار البرنامج المرافق برنامج أصلي وفي هذه الحالة يكون البرنامج الأصلي هو البرنامج المرافق

تشكيل البرنامج المرافق للبرنامج غير المتناظر:

نحول النموذج الى الشكل المتناظر كما مر معنا سابقا ونوضح الطريقة من خلال المثال التالي

مثال: اوجد $MaxZ=4x_1+5x_2$

ضمن القيود

$$3x_1+2x_2\le 20$$
$$4x_1-3x_2\ge 10$$
$$x_1+x_2=5$$

$x_1\ge 0$ و x_2 غير مقيد

نحول النموذج السابق الى الشكل المتناظر (أي يجب ان تكون جميع القيود من نوع اقل او يساوي لان جميع تابع الهدف من نوع Max)

الحل:

1-نضرب المتراجحة الثانية بـ (-1) تصبح $-4x_1+3x_2\le -10$

2-قيد المساواة يحول الى قيدين

$$x_1+x_2\ge 5$$
$$x_1+x_2\le 5$$

ثم نحول القيد الى قيد اقل او يساوي

$$-x_1-x_2\le -5$$

بالنسبة للمتحول x_2 فهو غير مقيد في نص المسالة الاصلية نحوله الى فرق بين متحولين مقيدين x_4 , x_3

$$x_2 = x_3 - x_4 \quad ; \quad x_3 \geq 0 \quad , \quad x_4 \geq 0$$

عندها تصبح المسالة بالشكل التالي

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_3 - 5x_4$$

ضمن القيود

$$3x_1 + 2x_3 - 3x_4 \leq 20$$
$$-4x_1 - 3x_3 + 3x_4 \leq -10$$
$$x_1 + x_3 - x_4 \leq 5$$
$$x_1 + x_3 - x_4 \leq -5$$
$$x_1 , x_3 , x_4 \geq 0$$

البرنامج المرافق

$$MaxL = 20y_1 - 10y_2 + 5(y_3^+ - y_3^-)$$

ضمن القيود

$$3y_1 - 4y_2 + (y_3^+ - y_3^-) \geq 4$$
$$2y_1 - 3y_2 + (y_3^+ - y_3^- \geq 5$$
$$-2y_1 + 3y_2 - y_3^+ + y_3^- \geq -5$$
$$y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0$$

y_3 غير مقيد

ملاحظة:

إذا كان تابع الهدف من نوع تعظيم وكان لدينا شرطا مقيدا أو أكثر من نوع أكبر أو يساوي فإننا نحوله إلى أصغر أو يساوي وذلك بضربه بـ (-1)

أما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فان القيود يجب أن تكون من نوع أكبر من أو يساوي وعليه أي قيد من نوع أصغر من أو يساوي يحول إلى قيد من نوع أكبر من أو يساوي بربه بـ (-1)

ملاحظة:

كل قيد من نوع مساواة يعطي قيدين إحداهما من نوع أكبر من أو يساوي والأخر من نوع أصغر من أو يساوي وتحول المسالة تعظيم أو تقليل

بحوث اقتصادية

حيث نلخص طريقة إعداد البرنامج المرافق بالخطوات التالية:

1- إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي في صورة تعظيم (تقليل) فان تابع هدف البرنامج المرافق يكون في صورة تقليل (تعظيم)

2- يقابل كل قيد أو شرط في البرنامج الأصلي متغيرا في البرنامج المرافق ويقابل كل قيد أو شرط في البرنامج المرافق متغيرا في البرنامج الأصلي

3- إذا كان تابع هدف في أي من البرنامجين في صورة تعظيم فان القيود تكون في صورة اقل من أو يساوي وإذا كان تابع هدف في أي من البرنامجين في صورة تصغير فان القيود تكون في صورة أكبر من أو يساوي

4- معاملات تابع الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن لمقيدات البرنامج الأصلي وقيم الطرف الأيمن لمقيدات البرنامج المرافق هي معاملات تابع الهدف في البرنامج الأصلي

5- إذا كان عدد القيود (m) وعدد متغيرات القرار (n) فان عدد متغيرات القرار تصبح (m) في البرنامج المرافق وعدد القيود تصبح (n)

6- معاملات المتغيرات في الشروط المقيدة (القيود) للبرنامج المرافق هي نفسها معاملات المتغيرات في الشروط المقيدة (القيود) للبرنامج الأصلي مع تبديل معاملات الأسطر والأعمدة هذا يعني أن معاملات السطر رقم (i) في الشروط المقيدة للبرنامج الأصلي هي نفسها معاملات العمود رقم (i) في الشروط المقيدة للبرنامج المرافق مع ملاحظة أن مرافق البرنامج المرافق هو البرنامج الأصلي

مثال:

نفرض انه لدينا البرنامج الخطي الآتي

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

طبقا للشروط التالية

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

لإيجاد البرنامج المرافق للبرنامج الخطي السابق نجد أن تابع الهدف في صورة تعظيم ولذلك يجب أن تكون جميع الشروط المقيدة في صورة متراجحات اقل من أو يساوي ولتحويل اتجاه المتراجحة في الشرط الثاني لصورة اقل من او يساوي نضرب كل حد فيه ب (-1) فنحصل على

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq -b_2$$

والشرط الثالث على صورة معادلة يحل محله الشرطين التاليين

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$

ولتحويل اتجاه المتراجحة الأخيرة إلى صورة اقل أو يساوي نضرب كل حد فيها بـ (-1) نحصل على

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq -b_3$$

وتصبح الصورة المعدلة للبرنامج الأصلي هي

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

طبقا للشروط

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq -b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq -b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نفرض أن (y_1, y_2, y_3^+, y_3^-) هي المتغيرات البديلة أو المرافقة المقابلة للقيود السابقة على الترتيب عندها يكون البرنامج المرافق

$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^-$$

بحوث العمليات

$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3(y_3^+ - y_3^-)$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3^+ - a_{31}y_3^- \geq c_1$$

$$a_{21}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3^+ - a_{32}y_3^- \geq c_2$$

$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3^+ - a_{33}y_3^- \geq c_2$$

$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

وبوضع $y_3 = y_3^+ - y_3^-$ حيث y_3 متغير غير محدد الإشارة يصبح البرنامج السابق

$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3$$

طبقا للشروط

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1$$

$$a_{21}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$$

$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geq c_2$$

$$y_3(\geq \quad \leq)0 \quad y_1, y_2 \geq 0$$

نظريات حول الترافق:

1- إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي

2- إذا كان $(x_1, x_2, - - - x_n)$ حلا مقبولا للنموذج وكان $(y_1, y_2, - - - y_m)$ حلا مقبولا للنموذج المرافق فان قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة تابع الهدف للمرافق عند هذين الحلين أي انه يكون لدينا

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

وذلك من اجل جميع الحلول المقبولة لكل من النموذجين (وبما في ذلك الحل المثالي)

3- إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين المترافقين غير محدود (ليس له حل مثالي) فان النموذج الأخر يكون قابل للحل لتعارض الشروط

4- إذا كان لأحد النموذجين حل مثالي محدود فان للنموذج الأخر حل مثالي محدود وان قيمتي تابع الهدف الحديتين متساويتين

$$Max \quad Z = Min \quad U$$

5- الشرط اللازم والكافي لكي يكون الحلين $(x_1, x_2, - - - x_n)$ و $(y_1, y_2, - - - y_m)$ حلين مثاليين للبرنامج الأصلي ومرافقه هو أن تكون قيمتا تابعي الهدف متساويتان وان يحققا الشرطين التاليين

$$x'_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i - c_j\right) = 0 \quad j = 1,2, - - n$$

$$i = 1,2, - - - m \quad y'_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b_i\right) = 0$$

بمعنى أن يكون أحد الجدائين في العلاقتين السابقتين مساويا للصفر

انتهـــــت المحاضرة

مدرس المقرر

د. ميسم احمد جديد

بحوث العمليات