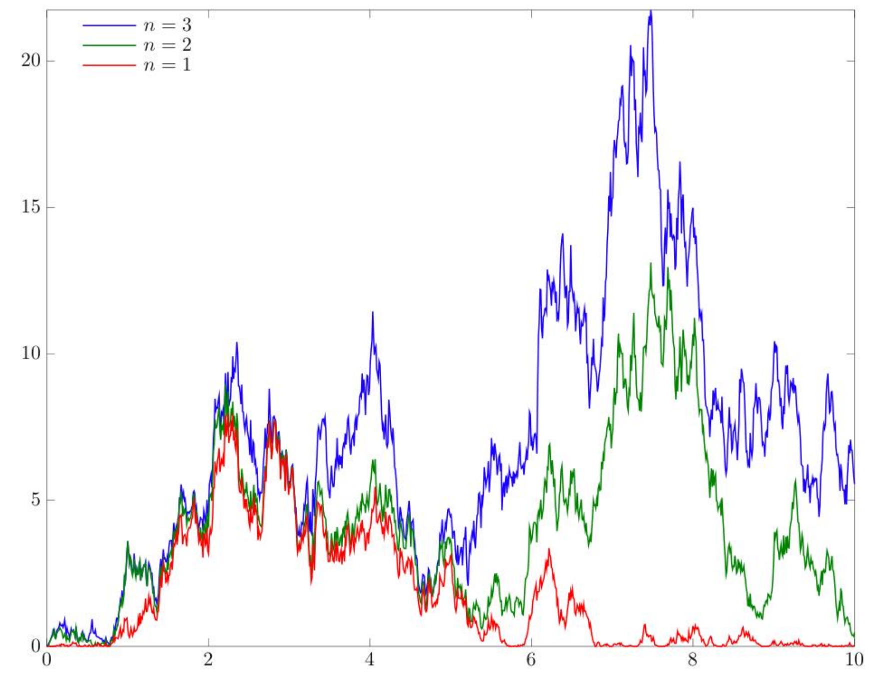
المحاضرة الأولى

السنة الثالثة –إحصاء رياضي

طوريات عشوائية (1)



مدرس المقرر   د. هادية طهماز

أساسيات:

تعريف المتجه الاحتمالي: بفرض لدينا $\vartheta = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ متجهاً من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$، عندئذ نقول عن هذا المتجه إنه متجه احتمالي إذا تحقق ما يلي:

$$(1) \qquad x_i \geq 0\ ; \quad \forall i \in \mathbb{N}_n$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

تعريف المتجه الثابت بالنسبة لمصفوفة:

ليكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة من المرتبة $n \times m$ وليكن $\vartheta = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ متجه غير صفري، عندئذ يقال عن المتجه ϑ إنه ثابت بالنسبة للمصفوفة A إذا تحققت العلاقة التالية:

$$\vartheta * A = \vartheta$$

مثال(1): بين فيما إذا كان المتجه ϑ_1 ثابت بالنسبة للمصفوفة A_1 علماً أن:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \vartheta_1 = (1 \quad 4)$$

لدينا:

$$\vartheta_1 * A_1 = (1 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (13 \quad 18) \neq \vartheta_1$$

أي أن ϑ_1 ليس ثابت بالنسبة للمصفوفة A_1.

مثال (2): ليكن لدينا :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad , \vartheta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_2 * A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \vartheta_2$$

تحقق الشرط أي أن ϑ_2 ثابت بالنسبة للمصفوفة A_2.

ملاحظة: إذا كان المتجه ϑ ثابت بالنسبة للمصفوفة A عندئذ من أجل أي عدد حقيقي k سيكون $k.\vartheta$ هو من جديد متجه ثابت بالنسبة للمصفوفة A وذلك لأن :

$$(k.\vartheta).A = k.(\vartheta.A) = k.\vartheta$$

تعريف المصفوفة العشوائية: بفرض A مصفوفة من المرتبة $n \times m$ عندئذ إذا كان كل صف من صفوف المصفوفة عبارة عن متجه احتمالي، عندئذ ندعو هذه المصفوفة بمصفوفة عشوائية.

أمثلة:

القرار	المصفوفة
ليست عشوائية لأن الصف الأول لا يمثل متجه احتمالي	$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
ليست عشوائية لأن الصف الأول فيه قيمة سالبة	$A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$	تمثل مصفوفة عشوائية
$A_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	تمثل مصفوفة عشوائية

تعريف المصفوفة المضاعفة العشوائية: بفرض A مصفوفة عشوائية ما، فإذا كان كل عمود من أعمدة هذه المصفوفة يمثل متجهاً احتمالياً عندئذ تدعى A بمصفوفة عشوائية مضاعفة.

مثال: تعتبر المصفوفة التالية مصفوفة عشوائية مضاعفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت A مصفوفة عشوائية من المرتبة n عندئذ ستكون قوى هذه المصفوفة $A^2, A^3, \dots, A^m$ هي من جديد مصفوفات عشوائية.

تعريف المصفوفة العشوائية المنتظمة:

بفرض A مصفوفة عشوائية مربعة من المرتبة n فإذا وجد عدد طبيعي k من أجله لدينا A^k جميع عناصرها موجبة تماماً، عندئذٍ تدعى هذه المصفوفة بمصفوفة منتظمة.

مثال: المصفوفة التالية منتظمة:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

لأن:

$$A_1^2 = A_1 \times A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة التالية غير منتظمة:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

لأن:

$$A_2^2 = A_2 \times A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{3/4} & 1/4 \end{pmatrix}$$
$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{7/8} & 1/8 \end{pmatrix}$$

مبرهنة: (دون برهان):

لتكن A مصفوفة عشوائية منتظمة مربعة، عندئذ:

1- يوجد متجه احتمالي وحيد τ ثابت بالنســـبة لهذه المصـــفوفة بحيث تكون جميع عناصر هذا المتجه موجبة تماماً.

2- إن متتالية المصفوفات A^n تتقارب من مصفوفة B فيها كل صف من صفوفها هو ذلك المتجه الاحتمالي الثابت τ.

3- إذا كان ϑ أي متجه احتمالي فإن متتالية المصـفوفات $\vartheta . A^n$ سـتتقارب من المصفوفة السطرية τ (أي نهاية كل عنصر في A يتقارب من العنصر المقابل في B أي: $\lim_{n\to\infty} a_{ij} = b_{ij}$).

تمرين: ليكن لدينا المصفوفة العشوائية المنتظمة:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

المطلوب تعيين المتجه الاحتمالي الثابت بالنسبة لهذه المصفوفة، ثم اعرض المصفوفة B التي تمثل نهاية متتالية المصفوفات A^n. علماً أن:

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

الحل: بما أن المصـــفوفة A من المرتبة الثانية إذاً المتجه الثابت والوحيد يمكن أخذه على الشكل:

$$\vec{\tau} = (x\,, 1 - x)$$

وحسب تعريف المتجه بالنسبة للمصفوفة لدينا:

$$\vec{\tau}.A = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \quad (x \quad 1-x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (x \quad 1-x)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1/2 - x/2 \quad x + 1/2 - x/2\right) = (x \quad 1-x)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1/2 - x/2 \quad 1/2 + x/2\right) = (x \quad 1-x)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 1/2 - x/2 &= x \\ 1/2 + x/2 &= 1 - x \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على قيمة X:

$$x = 1/3$$

وبالتالي

$$\vec{\tau} = \left(1/3\,, 2/3\right)$$

وحسب المبرهنة السابقة فإن متتالية المصفوفات A^n ستتقارب من المصفوفة B التي هي كل صف من صفوفها المتجه الثابت.