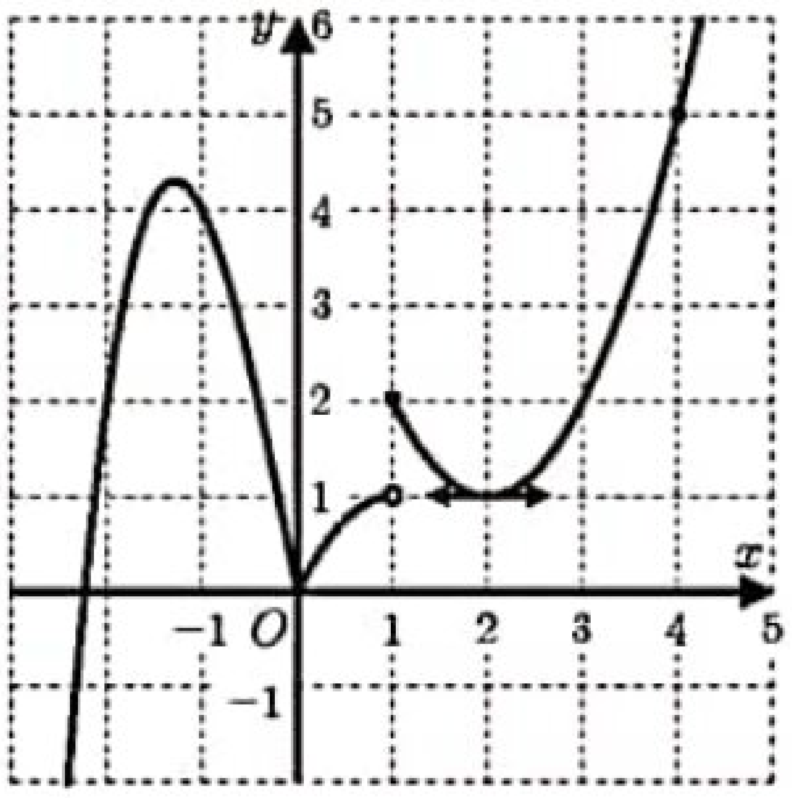
الجمهورية العربية السورية — النموذج الأول

وزارة التربية — (الصفحة الأولى) — الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية — المدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)



السؤال الأول : نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على R والمطلوب :

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$ ؟

3) هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع f . علل ذلك .

4) ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

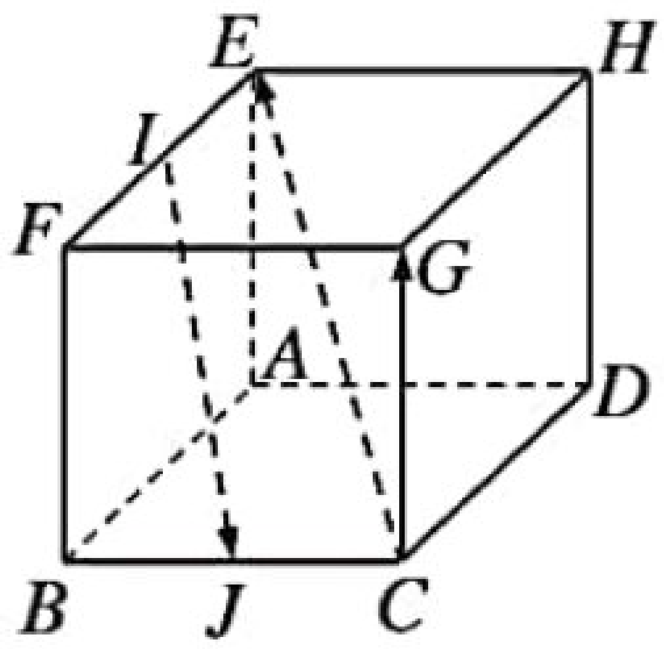
5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=2$ ؟ 6) أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$ ؟

السؤال الثاني : ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية . الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X : 1) ما عدد الاختبارات في التجربة ؟

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					$\frac{16}{81}$

2) اكمل الجدول المجاور . 3) احسب التوقع الرياضي والتباين للمتحول العشوائي X .

السؤال الثالث :



في الشكل المجاور مكعب . I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$

1) أثبت أن : $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

2) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ ، $\overrightarrow{CG}$ ، $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً .

السؤال الرابع : حل المعادلة $4^{x}=5^{x+1}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : 1) ليكن g التابع المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة : $g(x)=ln\sqrt{x+1}$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ln\sqrt{x+1}-ln\sqrt{2}}{x-1}$

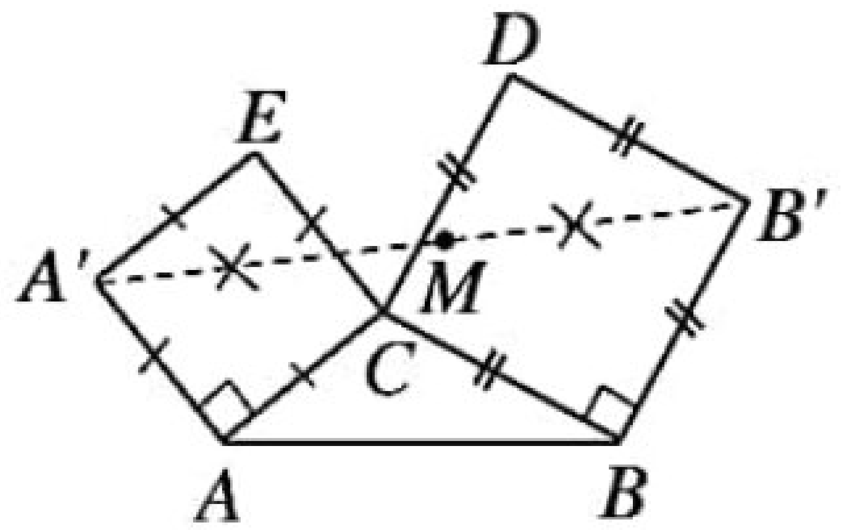
2) احسب نهاية التابع f المعرف على $R\setminus\{2\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{2x+sin\,x}{x-2}$ عند $+\infty$.

التمرين الثاني : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق : $x_0=4$ و $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2$

في حالة $n\geq 0$. نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة : $y_n=x_n-8$.

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، واكتب x_n بدلالة n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

(يتبع في الصفحة الثانية)



التمرين الثالث : ليكن المثلث ABC في المستوي

ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين

$ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور .

تمثل الأعداد العقدية a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'

1) B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b,c .

2) أثبت أن : $a' = i\,(c-a)+a$.

3) عين بدلالة a,b العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

4) كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي .

التمرين الرابع : أثبت صحة المساواة : $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$ ، ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x\, dx$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالصيغة : $f(x) = x\,e^{-x}$

1) احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته الحدية ثم ارسم C .

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

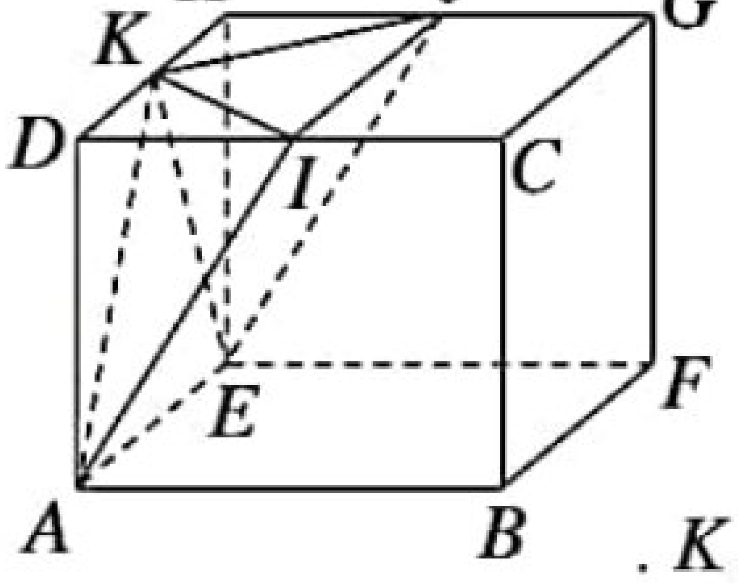
3) بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0,e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين .

4) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$

a) أثبت أن $0<u_n\leq 1$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n .

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ، ثم بين تقاربها واحسب نهايتها .

المسألة الثانية : نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب . نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ .



1) أوجد إحداثيات النقاط $A\,,I\,,E$.

2) اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

3) احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K .

5) احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

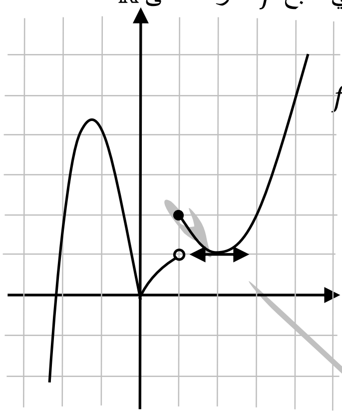
6) أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α,β,γ هي أثقال يطلب تعيينها

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري الأول 2017)

حل النموذج الوزاري الأول

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

❷ ما مجموعة حلول المتراجحة

$$f(x) \geq 5$$

❸ هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟

❹ ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

❺ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$؟

❻ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$؟

الحل:

❶ حل وحيد لأن المستقيم $y = 5$ يقطع الخط البياني للتابع f بنقطة واحدة فقط.

❷ مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة قيم x التي تحقق $f(x) \geq 5$ ،

فنلاحظ حسب الرسم أنها $[4, +\infty[$.

❸ نعم ، لأن: $I =]0,2[$ و $1 \in I$ و $I \cap \mathbb{R} = I$ فالشرط

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(2) \ \text{(محقق)}$$

❹ عدد القيم هو 4.

❺ بما أن المماس عند $x = 2$ أفقي عندئذ $f'(2) = 0$.

❻ لا ، لأنه غير مستمر (منقطع) عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي.

السؤال الثاني: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية

الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي لـ X.

❶ ما عدد الاختبارات في التجربة؟

❷ أكمل الجدول المجاور.

❸ احسب التوقع الرياضي وتباين المتحول العشوائي X؟

الحل:

تذكرة بالتجربة البرنولية
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$
حيث $q = 1 - p$

❶ عدد الاختبارات هو $n = 4$.

❷ كون التجربة برنولية فمن الجدول نجد

$$P(X = 4) = \frac{16}{81} = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow p = \frac{2}{3} \ \& \ q = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$P(X = 0) = q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} p^1 . q^3 = 4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} p^3 q = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

للتحقق: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

❸ حساب التوقع الرياضي: بما أن التجربة برنولية عندئذ:

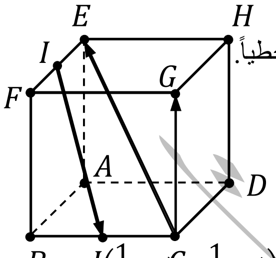
$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$V(X) = n.p(1 - p) = 4$$

السؤال الثالث: في الشكل المجاور مكعب. I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$

❶ أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$.

❷ أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.



الحل:

❶ $$2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

$$l_1 = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GE}$$

$$l_2 = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2$$

❷ $$\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CE}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}) + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CE}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{JI} = \vec{0}$$

فالأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع: حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$.

الحل:

نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x) = \ln(5^{x+1})$

$$x.\ln 4 = (x+1)\ln 5 \qquad (\text{خواص } ln)$$

$$x.\ln 4 - x.\ln 5 = \ln 5$$

$$x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

❶ ليكن g التابع المعرف على $I =]-1,+\infty[$ وفق العلاقة

$$g(x) = \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\sqrt{2}}{x-1}$$

الحل: حساب $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$

$$g(1) = \ln\left(\sqrt{1+1}\right) = \ln\sqrt{2}$$

إن g معرف واشتقاقي على I.

$$g'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\sqrt{x+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{4}$$

❷ احسب نهاية التابع f المعرفة $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-2}$$

عند $+\infty$.

الحل: نعلم أن $\quad -1 \le \sin x \le 1$

$$2x-1 \le 2x+\sin x \le 2x+1$$

نقسم على $x-2>0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{2x-1}{x-2} \le \frac{2x+\sin x}{x-2} \le \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-2} = 2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-2} = 2\end{cases} \text{حسب مبرهنة الإحاطة نجد } 2 =$$

التمرين الثاني: لتكن $(x_n)_{n\ge0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 4$ و $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ في حالة $n \ge 0$.

نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$.

أثبت أن $(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$

الحل: إثبات أن المتتالية هندسية $\quad y_{n+1} = \quad x_{n+1} - 8$

$$y_{n+1} = \left(\frac{3}{4}x_n + 2\right) - 8$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}x_n - 6 = \frac{3}{4}x_n - \frac{24}{4}$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}(x_n - 8)$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}y_n$$

ومنه فالمتتالية y_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول:

$$y_0 = x_0 - 8 = 4 - 8 = -4$$

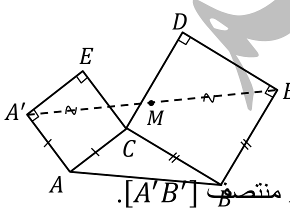
حدها العام بدلالة n هو $\quad y_n = (-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \left(\text{لأن } \left|\frac{3}{4}\right| < 1\right)$$

التمرين الثالث: ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور.

تمثل الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'.

❶ B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عيّنه واكتب الصيغة العقدية



للعدد b' بدلالة b, c.

❷ أثبت أنَّ $a' = i(c-a) + a$.

❸ عيّن العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

❹ كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي؟

الحل:

❶
$$b' - b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$$

$$b' - b = -i(c-b)$$

$$\boxed{b' = b - i(c-b)}$$

❷ إن A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ومنه

$$a' - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$$

$$\boxed{a' = i(c-a) + a}$$

❸ بما أن M منتصف $[A'B']$ عندئذ:

$$m = \frac{a' + b'}{2}$$

$$m = \frac{i(c-a) + a + b - i(c-b)}{2}$$

$$\boxed{m = \frac{a + b + i(b-a)}{2}}$$

❹ لا تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي ، لأن m غير مرتبطة بـ c (حسب الطلب الثالث) وأيضاً a, b غير مرتبطتان بـ c.

التمرين الرابع: أثبت صحة المساواة

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,.\, \sin^2 x \, dx$.

الحل: إثبات صحة المساواة:

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right).\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[1 - \cos^2(2x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$$

حساب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,.\, \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}.0 - \frac{1}{4}.0\right]$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,.\, \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{16}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = xe^{-x}$

❶ احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعيّن قيمته الحدية ، ثم ارسم C.

❷ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

❸ بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حليّن مختلفين.

❹ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي:

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ثمّ بيّن تقاربها واحسب نهايتها

الحل:

❶ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x.e^{-x} = -\infty$$

إن التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1.e^{-x} + (-e^{-x}.x) = (1-x)e^{-x}$$

نعدم المشتق ، أي: $f'(x) = 0$

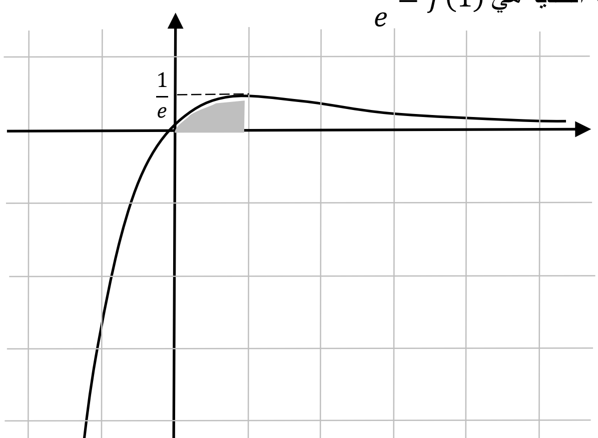
$$(1-x)e^{-x} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

التابع f متزايد على المجال $]-\infty, 1]$ ومتناقص على المجال $[1, +\infty[$.

القيمة الحدية هي $f(1) = \frac{1}{e}$



❷
$$S=\int_0^1 x.e^{-x}dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض

$$u=x \qquad v'=e^{-x}$$
$$u'=1 \qquad v=-e^{-x}$$

$$S=[-xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=[-e^{-1}-0]-[e^{-x}]_0^1$$

$$S=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

$$\boxed{S=1-\frac{2}{e}}$$

❸ بملاحظة أن $f(0)=0$

$f(]0,1[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]1,\infty[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,\infty[$

إذاً: لكل $m\in]0,e^{-1}[$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلين

$x_1\in]0,1[$ و $x_2\in]1,\infty[$

❹ (a) لنبرهن بالتدريج أن: $E(n): 0<u_n\le 1$ أياً كان n.

لنثبت صحة العلاقة من أجل $E(0)$

لدينا فرضاً $u_0=1$ فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $0<u_k\le 1$ صحيحة.

ولنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ كما يلي:

$$0<u_k\le 1$$

$$f(0)<f(u_k)\le f(1) \quad (f \text{ متزايد على المجال } [0,1])$$

$$0<u_{k+1}\le\frac{1}{e}<1$$

$$\boxed{0<u_{k+1}\le 1}$$

(b) لنبرهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة وذلك بالتدريج أي لنثبت صحة العلاقة $E(n): u_{n+1}\le u_n$.

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$

$$\left.\begin{array}{l} u_0=1 \\ u_1=\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow 1\ge\frac{1}{e}\Rightarrow u_1\le u_0 \ (\text{صحيحة})$$

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $u_{k+1}\le u_k$ ... $(*)$ صحيحة.

لنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ أي: $u_{k+2}\le u_{k+1}$ كما يلي:

$$u_{k+1}\le u_k \qquad (\text{حسب } *)$$

$$f(u_{k+1})\le f(u_k) \quad (f \text{ متزايد على المجال } [0,1])$$

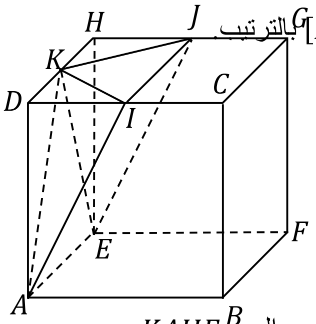
$$u_{k+2}\le u_{k+1}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من $l=0$ حل المعادلة $f(x)=x$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

المسألة الثانية: نتأمل مكعّباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب.



نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.

❶ أوجد إحداثيات النقاط A,I,E.

❷ اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

❸ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار النقطة K.

❺ احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

❻ أثبت أنّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

الحل:

❶ نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0), I\left(\frac{1}{2},0,1\right), A(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE}=(x_E-x_A,y_E-y_A,z_E-z_A)$$
$$=(0-0,1-0,0-0)=(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AI}=(x_I-x_A,y_I-y_A,z_I-z_A)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-0,0-0,1-0\right)=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

❷ نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $AIJE$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AE}=0\Rightarrow b=0$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AI}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AI}=0\Rightarrow\frac{1}{2}a+c=0$$

نفرض $c=1$ لأن للمستوي أكثر من ناظم

$$\frac{1}{2}a+1=0\Rightarrow a=-2$$

وبالتالي يكون $\vec{n}(-2,01)$.

معادلة المستوي $(AIJE)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$

$$-2x + z = 0$$

❸ بعد K عن المستوي $(AIJE)$: نلاحظ حسب الرسم أن $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$$h = \text{dist}(K, AIJE) = \frac{|(-2)(0) + 0 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $KAIJE$

لذا لنحسب مساحة قاعدة الهرم $KAIJE$ وهي $AIJE$

$$S_{(AIJE)} = IJ \times AI = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{(AIJE)}.h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$$

❹ بما أن المستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$

$$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(AIJE)}} = (-2,0,1)$$

$$d:\begin{cases} x = -2t + 0 \\ y = 0 + \frac{1}{2} \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{d:\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

❺ لحساب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$
نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ والمستقيم d

$$-2(-2t) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + t + 1 = 0$$

$$4t + t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{5}}$$

ومنه إحداثيات N هي $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

❻ $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AE}$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = x\left(\frac{1}{2},0,1\right) + y(0,1,0)$$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{2}x, y, x\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AI} + 5\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{AN} + 5\overrightarrow{NE}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -3\overrightarrow{NA} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$

إذاً N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3),(I,8),(E,5)$.

الجمهورية العربية السورية　　　　　　النموذج الثاني

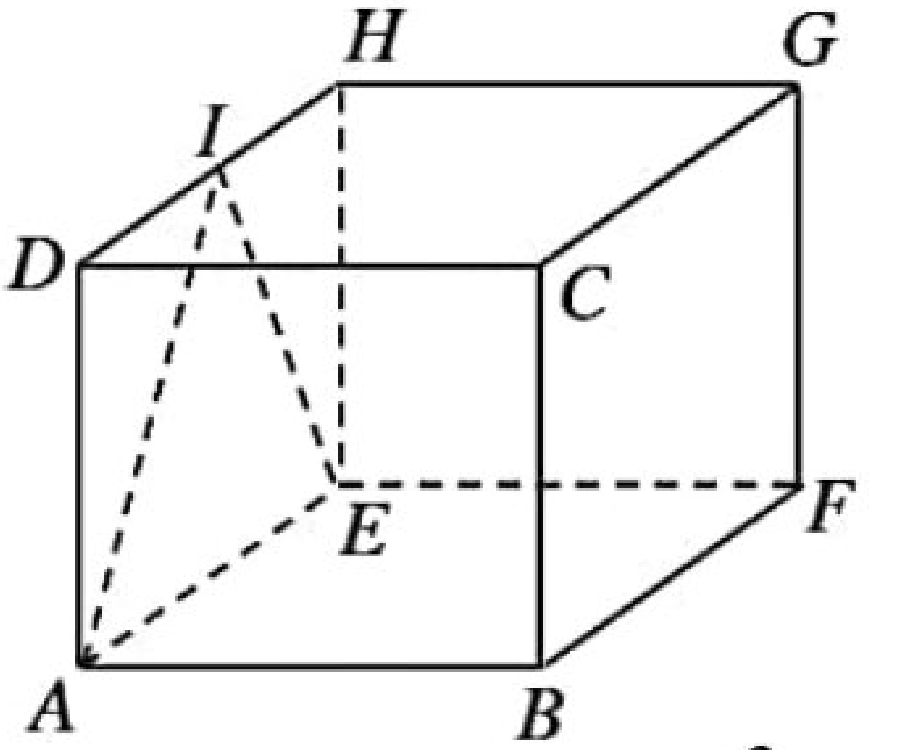
وزارة التربية　　　　　　(الصفحة الأولى)　　　　　　الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية　　　　　　المدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 . مزوداً بمعلم متجانس $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$



حيث I هي منتصف $[DH]$:

1) أعطِ إحداثيات النقاط I و E و A .

2) جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI .

3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟

4) احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$

السؤال الثاني : ليكن f التابع المعرف على $D=R\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x+1}$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D .

2) احسب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبت أن $\dfrac{w\cdot\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : احسب مشتق التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=e^{1-\sin x}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

التمرين الثاني : لتكن $(x_n)_{n\ge 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_0=5$, $x_{n+1}=\dfrac{6}{5}x_n+\dfrac{4}{5}$

1) احسب x_1,x_2,x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية .

2) نعرف $(y_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n+4$. أثبت أن $(y_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية .

3) اكتب y_n بدلالة n . ثم احسب $y_2+y_3+\ldots\ldots+y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\dfrac{6}{5}$. (يتبع في الصفحة الثانية)

التمرين الثالث : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$

والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها .

2) اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B .

التمرين الرابع : يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء ، وثلاث كرات خضراء ، وواحدة بيضاء

نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان الظاهرة بين الكرات المسحوبة

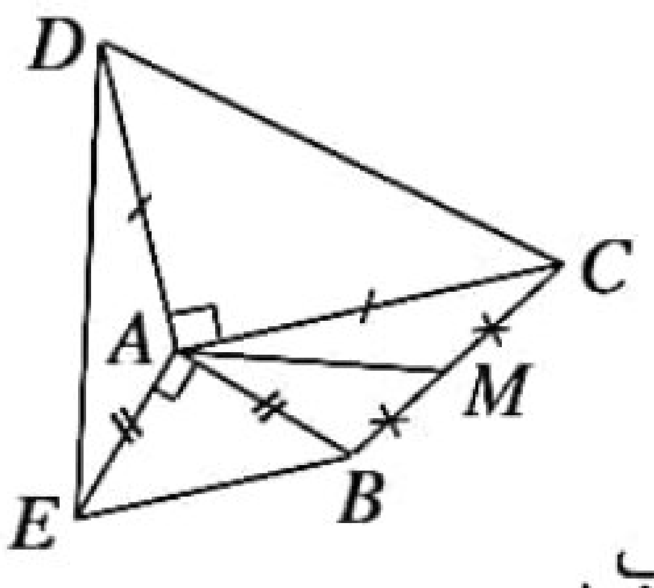
1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

2) احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$.

3) احسب توقع X وانحرافه المعياري .

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً .



لتكن M منتصف $[BC]$ ، وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A

ومتساويي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A .

ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C

1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و D و M بالترتيب .

2) احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED=2AM$

3) نفترض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$.

احسب $\dfrac{c}{b}$ ، ثم احسب قياس الزاوية $\widehat{BAC}$.

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x}$

1) احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

2) أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

3) ارسم الخط C في معلم متجانس .

4) لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n=f(n)$. نضع $S_n=u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n$.

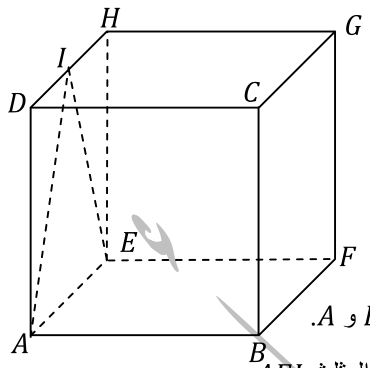
أثبت أن $S_n=\ln\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري الثاني 2017)

حل النموذج الوزاري الثاني

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول:



نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$.

❶ أعط إحداثيات النقاط I و E و A.

❷ جِدْ إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.

❸ أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$

❹ احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$.

الحل:

❶ $A(0,0,0),E(0,1,0),I\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

❷ $O\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3},\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$

$$=\left(\frac{0+0+0}{3},\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

❸

$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}$$

$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FO}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}}$$

إذا النقطة M تقع على $[FO]$

❹

$$\overrightarrow{IA}=(x_A-x_I,y_A-y_I,z_A-z_I)=\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{IE}=(x_E-x_I,y_E-y_I,z_E-z_I)=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(-1)(-1)=\frac{3}{4}$$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$$

❶ جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D.

❷ احسب $I=\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

❶ بالقسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \mp x^2\mp x & x-6 \\ \hline -6x+1 & \\ \pm 6x\pm 6 & \\ \hline +7 & \end{array}$$

$f(x)=x-6+\frac{7}{x+3}$

ومنه $a=1,b=-6,c=7$

❷ $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}-6(2)+7\ln 3\right)-(0-0+7\ln 1)$$

$$\Rightarrow\boxed{I=7\ln(3)-10}$$

السؤال الثالث: ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أن $\frac{w\overline{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت

الحل:

نعلم أن العدد العقدي z يكون تخيلي بحت إذا حقق: $\overline{z}=-z$ ومنه

$$\overline{\left(\frac{w.\overline{z}-z}{i.w-i}\right)}=\frac{\overline{w\overline{z}-z}}{\overline{iw-i}}$$

$$=\frac{\overline{w}z-\overline{z}}{-i.\overline{w}+i}.\frac{w}{w}=\frac{\overline{w}.wz-\overline{z}.w}{-i.\overline{w}.w+iw}$$

$$=\frac{|w|z-\overline{z}.w}{-i.|w|+iw}=\frac{z-\overline{z}.w}{-i+iw}=-\frac{w.\overline{z}-z}{iw-i}$$

ومنه $\boxed{\overline{\left(\frac{w.\overline{z}-z}{i.w-i}\right)}=-\frac{w.\overline{z}-z}{iw-i}}$ وهو المطلوب .

السؤال الرابع: احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=e^{1-\sin x}$$

الحل:

$$f'(x) = (1-\sin x)'.e^{1-\sin x} = -\cos x.e^{1-\sin x}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

❶ ما نهاية التابع f عند $-\infty$.

❷ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x^2+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$$

❷ $$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$$

حيث أن $f(0) = 0$ و $m = f'(0^+) = 1$

وبالتالي $T: y = 1(x-0)+0$ أي $\boxed{T: y = x}$.

التمرين الثاني:

لتكن $(x_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة

$$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad x_0 = 5$$

❶ احسب x_1, x_2, x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

❷ نعرّف $(y_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية.

❸ اكتب y_n بدلالة n. ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$.

الحل:

$$x_1 = \frac{6}{5}.5 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = \frac{6}{5}\left(6+\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$$

نلاحظ أن المتتالية x_n متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج أي:

$$E(n): x_n \leq x_{n+1}$$

لنثبت صحة القضية $E(0)$

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = 5 \\ x_1 = \frac{34}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \leq x_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ ، أي: $x_n \leq x_{n+1} \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي: $x_{n+1} < x_{n+2}$ كما يلي:

$x_n \leq x_{n+1}$ حسب $(*)$

$\frac{6}{5}x_n \leq \frac{6}{5}x_{n+1}$ نضرب الطرفين بـ $\frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \leq \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}$ نجمع للطرفين $\frac{4}{5}$

$$x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

إذن فحسب البرهان بالتدريج فإن $x_n < x_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

❷

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n+4)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$$

فالمتتالية y_n هندسية أساسها $\frac{6}{5}$ وحدها الأول

$$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$$

❸ كتابة y_n بدلالة n: $y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

$$y_2 = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 9 \times \frac{36}{25}$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 9 \times \frac{36}{25} \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{324}{25} \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}} = -\frac{324}{5}\left(1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right)$$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

❶ أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

❷ اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

الحل:

❶ إن $\mathcal{P}: 2x-3y+z-5=0$

كما أن المستقيم (AB) يقبل شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}=(-3,4,5)$ نكتب معادلة المستقيم (AB) بالشكل الوسيطي

$$(AB):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0\,;t\in\mathbb{R} \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB):\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=4t-1\quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=5t \end{cases}$$

بالحل المشترك لمعادلة المستقيم (AB) و معادلة المستوي $\mathcal{P}$ فنجد:

$$2(-3t+2)-3(4t-1)+(5t)-5=0$$

بالإصلاح نجد أن: $-13t+2=0$ ومنه $t=\frac{2}{13}$ إذن يتقاطعان في النقطة C

$$\left.\begin{aligned} x&=-3\left(\frac{2}{13}\right)+2=\frac{20}{13} \\ y&=4\left(\frac{2}{13}\right)-1=-\frac{5}{13} \\ z&=5\left(\frac{2}{13}\right)=\frac{10}{13} \end{aligned}\right\}\Rightarrow C\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$$

❷ نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ شعاع ناظم لـ Q.

$$Q\perp\mathcal{P}\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0\Rightarrow 2a-3b+c=0\ldots(1)$$

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_Q}\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -3a+4b+5c=0\ldots(2)$$

نضرب المعادلة (1) بـ 3 والمعادلة (2) بـ 2 عندئذ

$$\begin{cases} 6a-9b+6c=0 \\ -6a+8b+10c=0 \end{cases}\text{ نجمع فنجد } -b+13c=0$$

وبما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ: $b=13$ نعوض في (1) فنجد $a=19$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(19,13,1)$ إذاً:

$$Q: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$19(x-2)+13(y+1)+1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{Q: 19x+13y+z-25=0}$$

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء ، وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

❶ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

❷ احسب كلاً من $P(X=1)$, $P(X=2)$ ثم استنتج قيمة $P(X=3)$.

❸ احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل:

❶ ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة فتكون مجموعة القيم التي يأخذها هي $\{1,3,2\}$.

$$p(x=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4+1}{56}=\frac{5}{56}$$

$$p(X=3)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{12}{56}$$

$$P(X=2)=1-\left(\frac{5}{56}+\frac{12}{56}\right)=\frac{39}{56}$$

$$E(X)=\frac{1}{56}(1\times 5+3\times 12+2\times 39)=\frac{119}{56}=\frac{17}{8}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{56}(1^2\times 5+3^2\times 12+2^2\times 39)=\frac{269}{56}$$

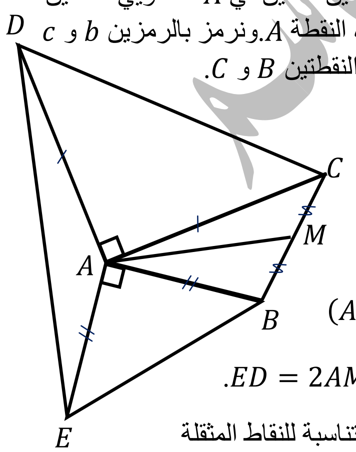
$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{269}{56}-\frac{289}{64}=\frac{129}{448}$$

❷

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$ ، ولكين AEB و ACD مثلثين قائمين في A متساويي الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A.ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C.



❶ احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و C و M بالترتيب.

❷ احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأنّ $ED=2AM$.

❸ نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$$(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$$

- احسب $\frac{c}{b}$. ثم استنتج قياس الزاوية BAC.

الحل:

❶ نلاحظ أولاً أن $a = 0$ لأن A هي مبدأ المعلم.

بما أن M منتصف $[BC]$ عندئذ: $\boxed{m = \frac{b+c}{2}}$

بما أن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين فإن D ناتجة عن دوران C حول A بزاوية $+\frac{\pi}{2}$

$$d - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a) \Rightarrow d = i(c-a) + a \xRightarrow{\text{لكن } a=0} \boxed{d = ic}$$

بما أن المثلث AED قائم ومتساوي الساقين فإن E ناتجة عن دوران B حول A بزاوية $-\frac{\pi}{2}$

$$e - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow e = -i(b-a) + a \xRightarrow{\text{لكن } a=0} \boxed{e = -ib}$$

❷

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic-(-ib)}{m-0} = \frac{i(c+b)}{m} = \frac{2im}{m} = 2i$$

إثبات أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED أي إثبات $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ED}) = \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

إذن: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$.

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{|d-e|}{|m-a|} = 2 \Rightarrow \frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow \boxed{ED = 2AM}$$

❸ بما أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1), (C,1), (E,3), (D,2)$

$$a = \frac{1.b + 1.c + 2.d + 3.e}{1+1+3+2}$$

ولكن $a = 0$ و $d = ic$ و $e = -ib$ عندئذ

$$0 = \frac{b + c + 2ic - 3ib}{7}$$

$$\Rightarrow -b(3i-1) + c(1+2i) = 0$$

$$\Rightarrow c(1+2i) = b(3i-1)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3i-1}{1+2i}.\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{b} = 1+i}$$

حساب قياس الزاوية BAC

$$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = 1+i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

❶ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

❷ أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظّم جدولاً بتغيرات التابع f.

❸ ارسم الخط C في معلمٍ متجانس.

❹ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = f(n)$ نضع

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots\cdots + u_n$$

أثبت أنَّ $S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$.

الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

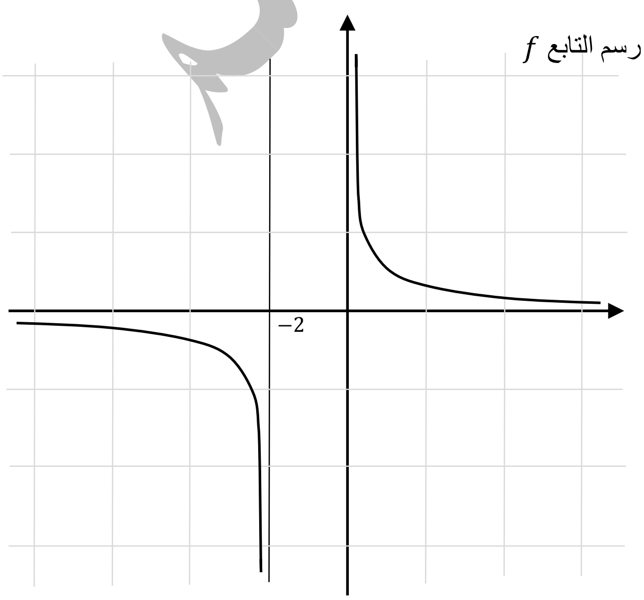
❷ إن f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x-x-2}{x^2}.\frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
f'		$-$			$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

❸

رسم التابع f



❹ نلاحظ أن:

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln(n+2) - \ln n$$

نبرهن العلاقة $E(n): S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$ بالتدريج

من أجل $E(1)$

$$S_1 = \ln\left(\frac{3\times 2}{2}\right) = \ln 3 = u_1$$

إذاً $E(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $E(n)$ أي: $S_n = \ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ صحيحة.

ولنبرهن صحة $E(n+1)$ ، أي: $S_{n+1} = \ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) + \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{(n+3)(n+1)}{2}.\frac{n+3}{n+1}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$$

فالقضية صحيحة وحسب البرهان بالتدريج فإن S_{n+1} صحيحة أياً يكن $n \in \mathbb{N}^*$

الجمهورية العربية السورية — النموذج الرابع

وزارة التربية — (الصفحة الأولى) — الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية — المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – <u>أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية</u> : (40° لكل سؤال)

<u>السؤال الأول</u> : تجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

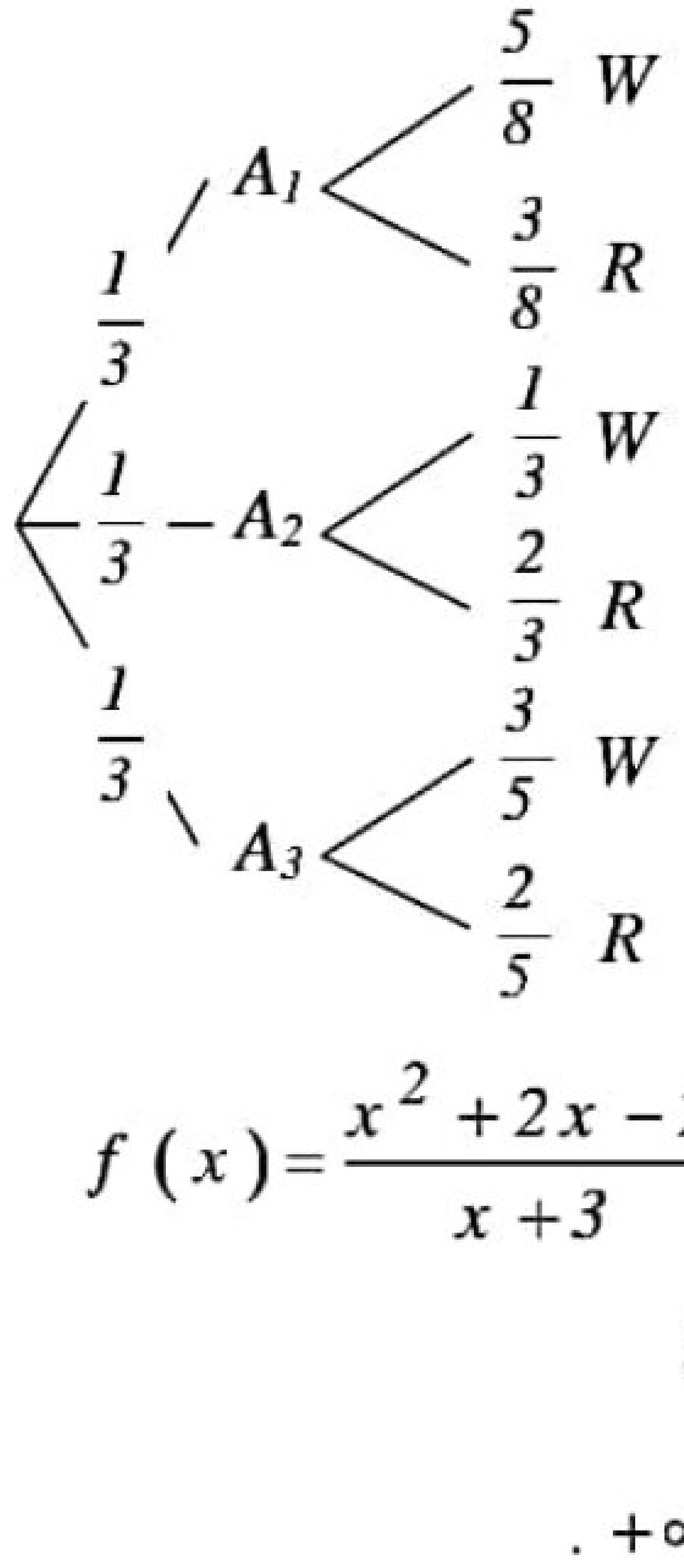
2) ما عدد القيم الحدية محلياً .

3) اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

<u>السؤال الثاني</u> : حل في C المعادلة $z^2=1+2\sqrt{2}\,i$

<u>السؤال الثالث</u> : ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A ليكون $x>A$ من المجال $f(x)$ [$]1.95\,,2.05[$.



<u>السؤال الرابع</u> : في المخطط الشجري المرسوم جانباً .

الرموز $A_1\,,A_2\,,A_3$ تدل على ثلاثة صناديق .

الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R يدل على الكرات الحمراء

يتم اختيار عشوائياً صندوق ثم يتم سحب عشوائياً كرة واحدة منه .

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

2) إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول A_1 .

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (60° لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f التابع المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+3}$

1) اكتب $f(x)$ بالشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a و b

ثم أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

2) احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$.

(يتبع في الصفحة الثانية)

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$ و $u_0=e^3$

v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n=ln(u_n)-2$ والمطلوب :

1) أثبت أن v_n هندسية وعين q, v_0 . 2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أثبت أن : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=e^2$.

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق : $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :

1) جد احداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً .

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً .

4) أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) .

التمرين الرابع : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x)=e^x+2-x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=x+\frac{x-1}{e^x}$

1) أثبت أن $f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)$

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<0.5$.

3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي .

4) ارسم Δ وارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

المسألة الثانية : في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC)

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري الرابع 2017)

حل النموذج الوزاري الثالث

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً جدول التغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$		0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

❷ ما عدد القيم الحدية محلياً.

❸ اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$.

الحل:

❶ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ هو واحد فقط لأن:

f مستمر ومتزايد على المجال $]0,1]$ و $f(]0,1]) =]-\infty,1]$ و $0 \in]-\infty,1]$ فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,1]$ (حسب مبرهنة القيمة الوسطى)

❷ عددها واحد وهي $f(1) = 1$.

❸ نلاحظ أن $f(1) = 1$ قيمة حدية عندئذ المماس أفقي عند $x = 1$ وهو $\boxed{T: y = 1}$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$.

الحل: نلاحظ أن: $\left|1 + i2\sqrt{2}\right| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ:

$$2ab = 2\sqrt{2} \quad \dots(1)$$

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \dots(2)$$

$$a^2 + b^2 = 3 \quad \dots(3)$$

نجمع (2) مع (3) نجد: $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad a = +\sqrt{2} \Rightarrow b = +1 \Rightarrow Z = \sqrt{2} + i \\ \text{أو} \quad a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow Z = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم عين A ليكون $x > A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

$$f(x) \in]1.95,2.05[$$

$$f(x) \in]2 - 0.05, 2 + 0.05[$$

$$|f(x) - 2| < 0.05$$

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{3}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| > 20$$

$$|x-1| > 60$$

$x - 1 > 60$ كون x في جوار $+\infty$

$$x > 61$$

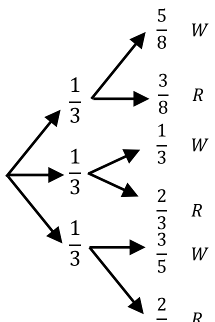
إذا عندما $x > 61$ فإن $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$.

السؤال الرابع: في المخطط الشجري المرسوم جانباً ، الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم اختيار كرة واحدة

❶ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء

فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.



الحل:

❶

$$P(R) = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5} = \frac{173}{360}$$

❷

$$P(I|R) = \frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 3}$$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a, b ثم أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

احسب $\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

❶

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 2 & x + 3 \\ \hline \mp x^2 \mp 3x & x - 1 \\ -x - 2 & \\ \pm x \pm 3 & \\ 1 & \end{array}$$

ومنه

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right) = 0$$

إذا $\Delta: y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

❷

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+3)\right]_0^2$$

$$= (2 - 2 + \ln 5) - (0 - 0 + \ln 3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $u_0 = e^3, u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n = \ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

❶ أثبت أن v_n هندسية وعين $v_0.q$.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

❸ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n = e^2$

الحل:

❶

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2$$

$$= \ln e + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

أي $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = \ln(e^3) - 2$$

$$= 3\ln e - 2 = 3 - 2 = 1$$

❷

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln(u_n) - 2$$

$$\ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \Rightarrow u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} = e^{0+2} = e^2$$

حيث $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:

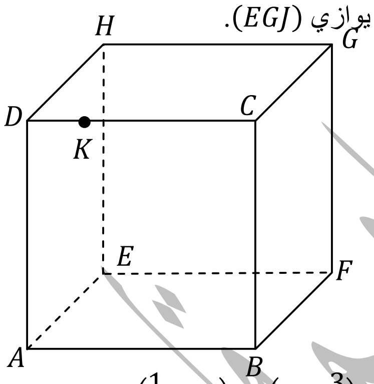
❶ جد إحداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$

❷ أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

❸ أثبت أن الاشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً.

❹ أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ).

الحل:



❶ نرسم الشكل لسهولة إيجاد إحداثيات النقط فنلاحظ حسب الرسم

$$G(1,1,1), K\left(\frac{1}{4}, 0, 1\right), J\left(1, 0, \frac{3}{4}\right), E(0,1,0), H(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{EG} = (x_G - x_E, y_G - y_E, z_G - z_E) = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{EJ} = (x_J - x_E, y_J - y_E, z_J - z_E) = \left(1, -1, \frac{3}{4}\right)$$

❷ نلاحظ أن $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}}$ المركبات المتقابلة غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

❸ لكي تكون الأشعة مرتبطة خطياً يجب أن تحقق $\overrightarrow{HK} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$

$$\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right) = \alpha(1,0,1) + \beta\left(1, -1, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right) = \left(\alpha + \beta, -\beta, \alpha + \frac{3}{4}\beta\right)$$

$$\alpha+\beta=\frac{1}{4}\quad\dots(1)$$
$$-\beta=-1\quad\dots(2)$$
$$\alpha+\frac{3}{4}\beta=0\dots(3)$$

من (2) نجد $\beta=1$ نعوض في (3) فنجد $\alpha=-\frac{3}{4}$ نتحقق من (1) فنجد $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ محقق ، إذا فالأشعة مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$$

❹ بما أن الاشعة مرتبطة خطياً فتقع في مستويات متوازية لأنها لا تشترك بنقطة ومنه (HK) يوازي المستوي الحاوي على EG و EJ وهو (EGJ).

التمرين الرابع: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

الحل:

$$T_r=\binom{8}{r}x^{8-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{8}{r}x^{8-r}.x^{-r}=\binom{8}{r}x^{8-2r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $8-2r=0 \Leftarrow \boxed{r=4}$.

$$T_0=\binom{8}{4}x^0=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

ثالثاً حل المسائل التالية (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=e^x+2-x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$.

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x+\frac{x-1}{e^x}$$

❶ أثبت أن $f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)$.

❷ بين أن للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<\frac{1}{2}$

❸ أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

❹ ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الحل:

أولاً: دراسة إطراد التابع g:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$$

في جوار $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$ لإزالتها نكتب

$$g(x)=e^x\left(1+\frac{2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty(1+0-0)=+\infty$$

إن g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$g'(x)=e^x-1$ ، نعدم المشتق ، أي: $g'(x)=0$ ومنه

$$e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow \ln e^x=\ln 1\Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$g(0)=3$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

إذاً: g متناقص على المجال $]-\infty,0]$ و g متزايد على المجال $[0,+\infty[$

حلول المتراجحة $g(x)>0$: حسب الجدول $]-\infty,+\infty[$.

ثانياً:

❶ إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$$f'(x)=1+\frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=1+\frac{1-x+1}{e^x}$$
$$f'(x)=\frac{e^x-x+2}{e^x}=\frac{1}{e^x}(e^x-x+2)$$
$$f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)$$

❷ نلاحظ أن:

$$\left.\begin{aligned}&f(0)=0-e^0=-1<0\\&f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ وهو وحيد لأن

$$f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)>0$$

❸ نلاحظ أن:

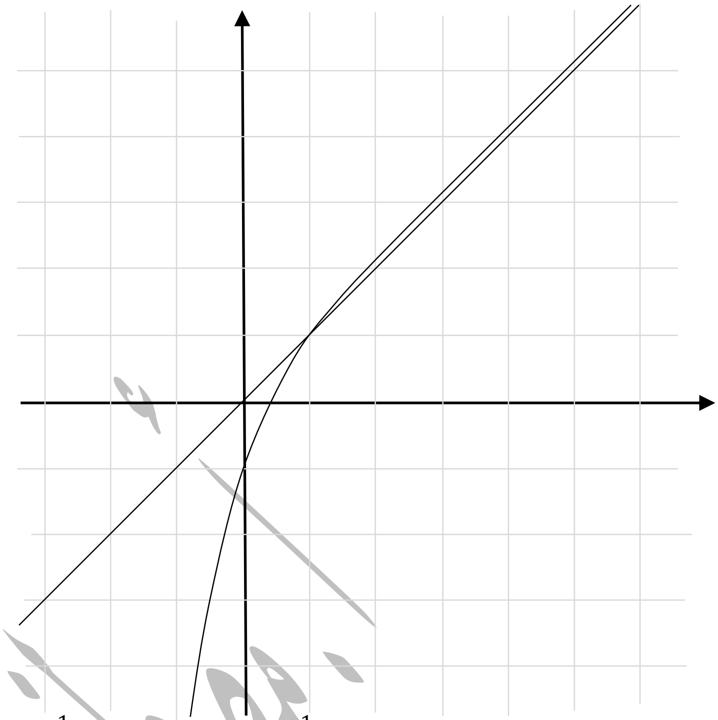
$$h(x)=f(x)-x=x+\frac{x-1}{e^x}-x=\frac{x-1}{e^x}=\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=0$$

إذا Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$. دراسة الوضع النسبي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت Δ		C فوق Δ	

❹



$$S=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1 -(x-1)e^{-x}dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $u=x-1 \quad v'=-e^{-x}$
$u'=1 \quad v=e^{-x}$

$$S=[-(x-1)e^{-x}]_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$S=(0+1)-[-e^{-x}]_0^1$$

$$S=1-(-e^{-1}+1)=1+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

❶ أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC).

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(1,2,4)$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B)=(1,-1,5)$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{27}$$

نلاحظ أن $BC^2=AB^2+AC^2$ فحسب عكس فيثاغورث فالمثلث ABC قائم.

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{126}}{2}$$

❷ $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow a-b-5c=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 2a+b-c=0$$

نجمع المعادلتين فنجد $3a-6c=0$

ولكن بما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ $a=2$ ومنه $b=-3$ ، إذا $\vec{n}(2,-3,1)$. فمعادلة المستوي (ABC)

$$(ABC): a(x-x_a)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x-3y+z-1=0}$$

❸

$$h=dist(D,ABC)=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\sqrt{14}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{126}}{2}\times\sqrt{14}=7$$

الجمهورية العربية السورية　　　　النموذج الثالث

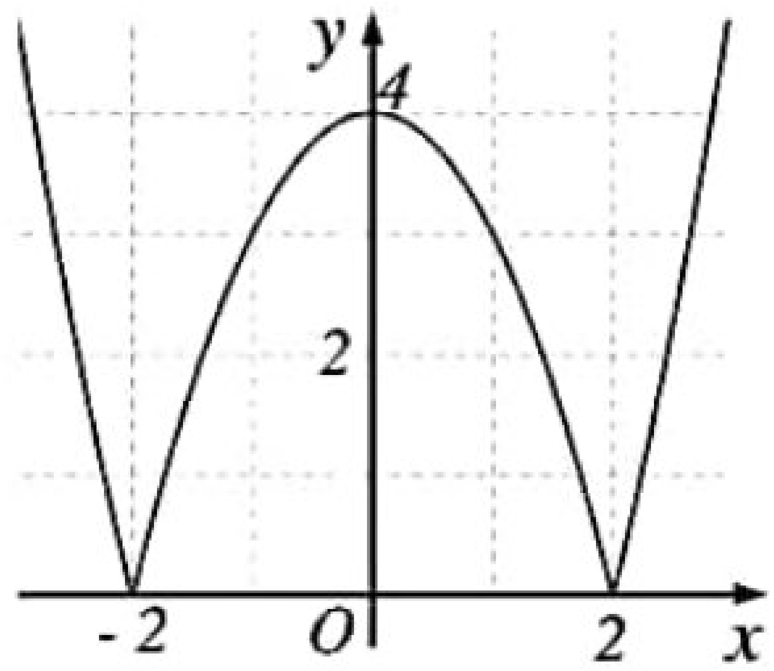
وزارة التربية　　　　(الصفحة الأولى)　　　　الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية　　　　المدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R . والمطلوب :



1) كم حلاً للمعادلة $f(x)=2$.

2) احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر .

3) عين صورة المجال $I=[-2,2]$ وفق f .

4) كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f .

السؤال الثاني : حل في R المعادلة الآتية : $-ln(x+1)+ln x=ln(x-1)$

السؤال الثالث : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

السؤال الرابع : ما هي أمثال الحد $x^2 y$ في منشور $\left(\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x}{y}\right)^8$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : إذا كان $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\dfrac{1}{2}$ أياً يكن x من R^*

أوجد نهاية التابع f عند الصفر

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $u_0=\dfrac{1}{2}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2-u_n}$

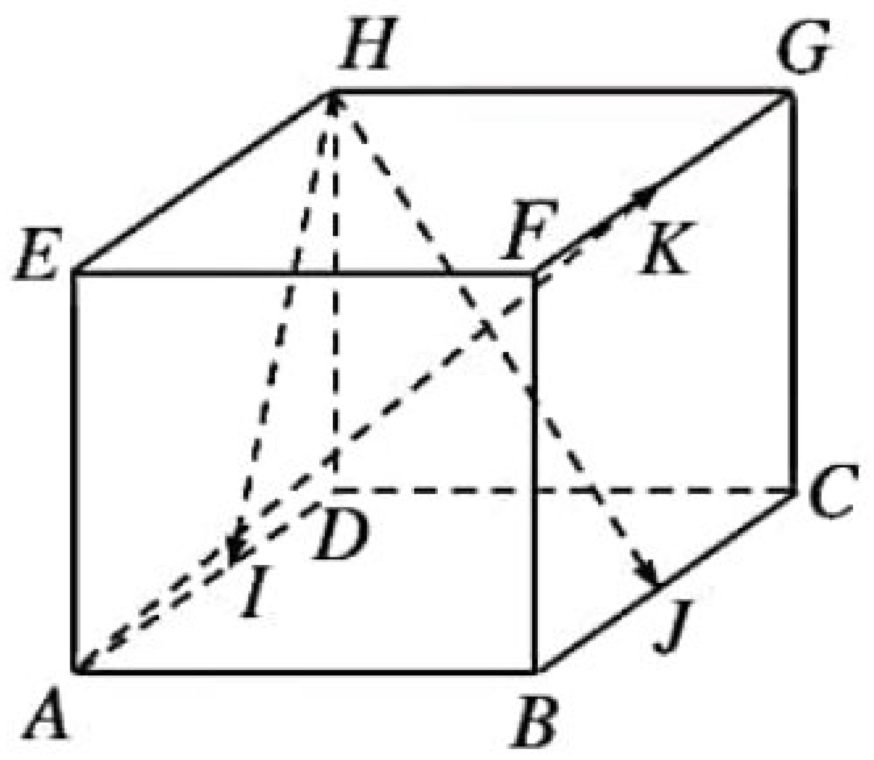
1) أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

2) نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1$.أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3) اكتب u_n بدلالة n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(يتبع في الصفحة الثانية)

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب . I و J و K هي بالترتيب منتصفات



$[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

1) باختيار معلم متجانس $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

2) أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة :

$$\overrightarrow{AK}=a\,\overrightarrow{HI}+b\,\overrightarrow{HJ}$$

ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً .

التمرين الرابع : عين العددين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases}2z_1-z_2=-3\\ 2\overline{z_1}+\overline{z_2}=-3+2\sqrt{3}\,i\end{cases}$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (90° للأولى و 110° للثانية)

المسألة الأولى : صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل .

1) احسب احتمالات الأحداث التالية : A , B , $A|B$.

2) إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه .

المسألة الثانية : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=2e^{-x}+x-2$ خطه البياني C

1) أوجد معادلة المقارب المائل للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى هذا المقارب .

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها . وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها .

3) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α .

أثبت أن $1<\alpha<2$.

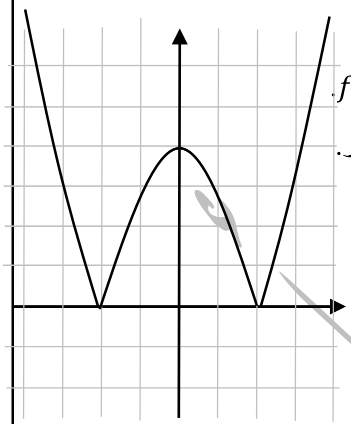
4) ارسم المقارب المائل ثم ارسم C , واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $y=x-2$ و $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$.

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري الثالث 2017)

حل النموذج الوزاري الرابع

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40° لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانبًا الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ أوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$.

❷ احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.

❸ احسب $f([-2,2])$.

❹ كم قيمة كبرى وصغرى محليًا.

❺ اكتب جدول تغيرات التابع f.

الحل:

❶ أربع حلول لأن المستقيم $y = 2$ يقطع الخط C في اربع نقاط

❷ نلاحظ أن المستقيم المماس في النقطة $x = 0$ أفقي عندئذ $f'(0) = 0$

❸ $f([-2,2]) = [0,4]$

❹ ثلاث قيم وهي $f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$ و $f(0) = 4$.

❺ جدول تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل: شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \quad \text{مقبول} \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 \quad \text{مرفوض}$$

السؤال الثالث:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الحل: إن المستوي المحوري يقبل شعاع ناظم $\overrightarrow{AB}$ حيث

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,4,-4)$$

ولتكن I منتصف $[AB]$ وتنتمي للمستوي المحوري P

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (3,1,1)$$

$$P: 2(x-3) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

$$2x + 4y - 4z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: x + 2y - 2z - 3 = 0}$$

السؤال الرابع: ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$؟

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} . \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$= \binom{8}{r}(y^2x^{-1})^{8-r} . (xy^{-1})^r$$

$$= \binom{8}{r} y^{16-2r} x^{-8+r} x^r y^{-r} = \binom{8}{r} y^{16-3r} x^{2r-8}$$

نحصل على x^2y عندما

$$\left.\begin{array}{l} 16 - 3r = 1 \Rightarrow r = 5 \\ 2r - 8 = 2 \Rightarrow r = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r = 5}$$

$$T_5 = \binom{8}{5} x^2 y = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

ثانياً حل التمرينات الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول: إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً يكن x من $\mathbb{R}^*$ أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

الحل:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 0$$

حيث $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 1$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

❶ أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

❷ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$. أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n.

❸ اكتب u_n بدلالة n ، واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

الحل:

❶ سنبرهن بالتدريج أنَّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$ كما يلي:

لنثبت صحة القضية $E(0)$

$$u_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{صحيحة}$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي $0 < u_n < 1 \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$$0 < u_n < 1 \quad (\text{حسب } (*))$$

$$f(0) < f(u_n) < f(1) \quad (f \text{ متزايد})$$

$$0 < 1 < \frac{u_n}{2-u_n} < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} < 2}$$

التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ متزايد لأن:

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

إذا فحسب التدريج فإن $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.

❷

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

$$= \frac{2-u_n-u_n}{u_n} = \frac{2(1-u_n)}{u_n} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 2v_n}$$

إذا v_n متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

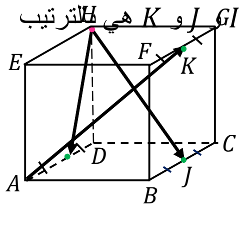
$$\Rightarrow \boxed{v_n = 2^n}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow 2^n + 1 = \frac{1}{u_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2^n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$$

حيث $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$.



❶ باختيار معلم متجانس $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$.

❷ أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$ ثم استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً.

الحل:

❶ $A(1,0,0), K\left(\frac{1}{2},1,1\right), H(0,0,1), I\left(\frac{1}{2},0,0\right), J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

$$\overrightarrow{AK} = (x_k - x_A, y_k - y_A, z_k - z_A) = \left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

$$\overrightarrow{HI} = (x_I - x_H, y_I - y_H, z_I - z_H) = \left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$

$$\overrightarrow{HJ} = (x_J - x_H, y_J - y_H, z_J - z_H) = \left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

❷ إيجاد العددين المحققين لـ $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = a\left(\frac{1}{2},0,-1\right) + b\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, b, -a-b\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} \ldots (1) \\ b = 1 \ldots (2) \\ -a-b = 1 \ldots (3) \end{cases} \text{من}(2) \text{ نجد } b = 1$$

نعوض في (1) و (3) فنجد $a = -2$

ومنه $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً.

التمرين الرابع: عيّن العددين z_1 و z_2 حيث

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل:نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} 2\overline{z_1} - \overline{z_2} = -3 \\ 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\overline{z_1} = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{z_1} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (90° للأولى و 110° للثانية)

المسألة الأولى:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً ولكين الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل.
احسب الاحتمالات التالية:

❶ $A|B$, B , A.

❷ إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

❶

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{31}{35}$$

$$P(B)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{22}{35}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}$$

❷ مجموعة قيم المتحول X هي $\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}$$

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{35}+1^2\times\frac{18}{35}+2^2\times\frac{12}{35}+3^2\times\frac{1}{35}=\frac{15}{7}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

المسألة الثانية:

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^{-x}+x-2$ خطه البياني C.

❶ أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. وبين أنّه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها.

❸ استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر الآخر نرمزه بالرمز α أثبت أن $1<\alpha<2$.

❹ ارسم المقارب المائل ثم ارسم C ، واحسب السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلتها

$$x=\ln 3\,,x=\ln 2\,,y=x-2$$

الحل:

❶ نلاحظ أن $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ لـ C لأن:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(x-2)\big)=\lim_{x\to\infty}2e^{-x}=0$$

بما أن $f(x)-(x-2)=2e^{-x}>0$ عندئذ C فوق Δ

❷ $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}(2+xe^{x}-2e^{x})=\infty(2+0-0)=\infty$$

إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه

$$f'(x)=-2e^{-x}+1\Rightarrow f'(x)=0$$

$$e^{-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow -x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x=\ln 2\Rightarrow \boxed{f(\ln 2)=-1+\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty,\ln 2[$ و

$$0\in\,]-\infty,-1+\ln 2[\,=f(]-\infty,\ln 2[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,\ln 2[$ وهو $x=0$ حيث $f(0)=0$.

f مستمر ومتزايد على المجال $]\ln 2\,,+\infty[$ و

$$0\in\,]-1+\ln 2\,,+\infty[\,=f(]\ln 2\,,+\infty[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]\ln 2\,,+\infty[$.

مما سبق للمعادلة جذران مختلفان في $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = 2e^{-1} - 1 < 0 \\ f(2) = 2e^{-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1).f(2) < 0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha \in]1,2[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

❹

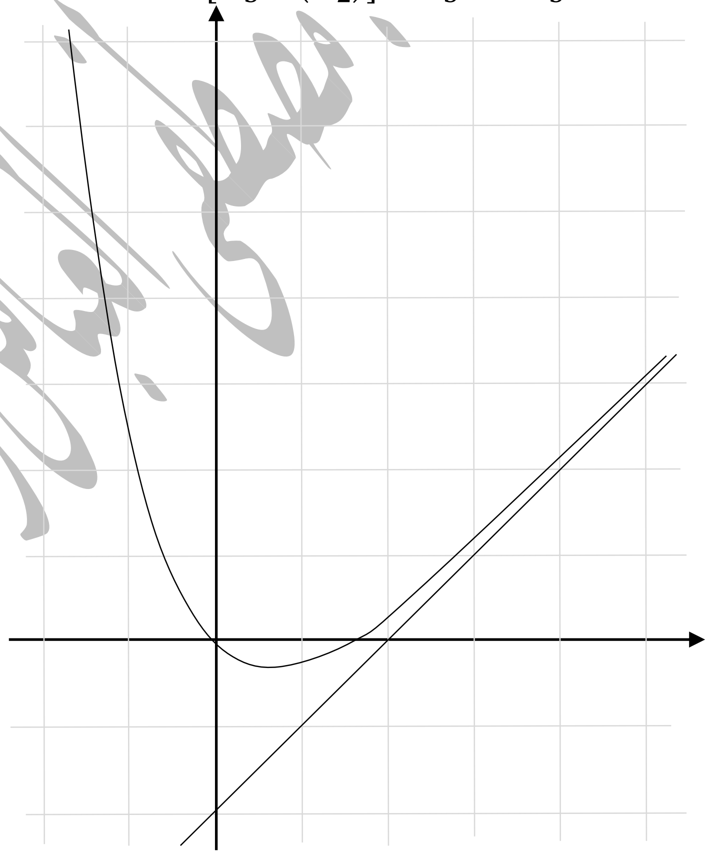
$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(f(x) - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(2e^{-x} + x - 2 - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^{-x}dx$$

$$= [-2e^{-x}]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= \left[-\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{2}\right)\right] = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$



الجمهورية العربية السورية النموذج الخامس

وزارة التربية (الصفحة الأولى) الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها

واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{10}$

السؤال الثاني : اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \dfrac{1 - \sqrt{3}\, i}{1 + i}$

السؤال الثالث : رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ، ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B :

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية .

السؤال الرابع : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب :

1) احسب $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ، $g'(x)$ ، $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \dfrac{\pi}{4}}$

2) احسب مشتق التابع $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$ على $R \setminus \{0\}$.

التمرين الثاني : لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$ ، $(x_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق :

$x_n = \dfrac{4n + 5}{n + 1}$ و $y_n = \dfrac{4n + 1}{n + 2}$. أثبت أن المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$ ، $(x_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان .

التمرين الثالث : ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين a و b يحققان $P(z) = \left(z^2 + az + a\right)\left(z^2 + bz + a\right)$

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$.

(يتبع في الصفحة الثانية)

(الصفحة الثانية)

التمرين الرابع : يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B . نعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في إنتاج المصنع A هي $40\ \%$ وفي إنتاج المصنع B هي $10\ \%$. نسحب عشوائياً مصباحاً :

1) ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً .

2) إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من إنتاج المصنع B .

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : ($100°$ لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $R \setminus \{-1\}$

1) ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x = -1$

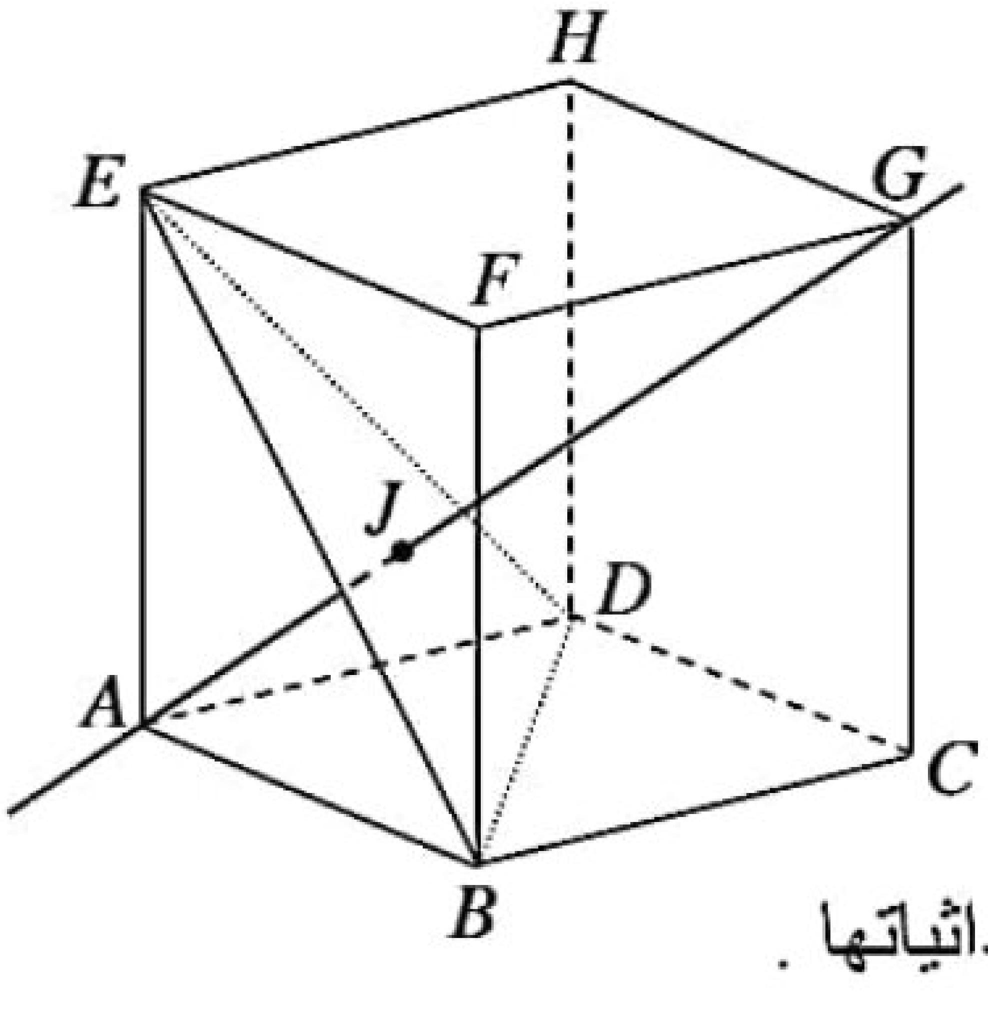
2) أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C .

3) احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ما له من قيم حدية محلية .

4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x = -2$.

5) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x = 3$

المسألة الثانية :



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

1) عين إحداثيات النقاط D , B , E , G

في المعلم $\left(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} , \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} , \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

2) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG) .

3) أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها .

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله .

6) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري الخامس 2017)

حل النموذج الوزاري الخامس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية عين أساسها واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

الحل:

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1)$$
$$= 4n + 5 - 4n - 1 = 4$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$$u_{10} = u_0 + 10r = 1 + 10 \times 4 = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{1 + 41}{2} = 231$$

السؤال الثاني: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

الحل:

الشكل المثلثي للعدد $1 + i$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1+i| = \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2 \\ \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]}$$

السؤال الثالث:

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كبت للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B

❷ بكم طريقة ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلف B في البداية.

الحل:

❶ عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة الأولى (للمؤلف B) يساوي P_4^3

عدد طرق ترتيب الكتب المتبقية (ثلاث كتب للمؤلف A و كتاب للمؤلف B) يساوي $4!$

فحسب المبدأ الأساسي في العدد فإن عدد طرق ترتيب الكتب وفق شرط هو

$$P_4^3 \times 4!$$

❷ عدد طريقة ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلف B في البداية هو $1 \times 6! = 6!$

السؤال الرابع: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل:

نفرض $X = e^x$ و $Y = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 & \ldots(1) \\ 2X + Y = 4 + e & \ldots(2) \end{cases}$$ نضرب المعادلة (1) بـ (-2) ونجمع

$$\boxed{Y = e} \Leftarrow \left(\frac{2}{e} + 1\right)Y = 2 + e \xleftarrow{\text{نجمع}} \begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$$

ومنه $X = 2 \Leftarrow X - \frac{1}{e}e = 1$

إذا
$$\boxed{y = 1} \Leftarrow e^y = e$$
$$\boxed{x = \ln 2} \Leftarrow e^x = 2$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

❶ احسب $g'\left(\frac{\pi}{4}\right), g'(x), g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

❷ احسب مشتق التابع $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

الحل:

❶
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$g'(x) = \tan^2 x + 1$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

الاستنتاج:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

❷

$$f'(x)=1.e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

التمرين الثاني: لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0},(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق

$$x_n=\frac{4n+5}{n+1}\quad,\quad y_n=\frac{4n+1}{n+2}$$

برهن أنهما متجاورتين.

الحل: ⋆ دراسة إطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1}-\frac{4n+5}{n+1}$$

$$=\frac{4n+9}{n+2}-\frac{4n+5}{n+1}$$

$$=\frac{4n^2+13n+9-(4n^2+13n+10)}{(n+2)(n+1)}$$

$$=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

⋆⋆ دراسة إطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2}-\frac{4n+1}{n+2}$$

$$=\frac{4n+5}{n+3}-\frac{4n+1}{n+2}$$

$$=\frac{4n^2+13n+10-(4n^2+13n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$=\frac{7}{(n+2)(n+3)}>0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

$$x_n-y_n=\frac{4n+5}{n+1}-\frac{4n+1}{n+2}$$

$$=\frac{(4n+5)(n+2)-(4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{4n^2+8n+5n+10-(4n^2+4n+n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$x_n-y_n=\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}=0$$

إذاً المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0},(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين الثالث: ليكن كثير الحدود $P(z)=z^4+5z^3+10z^2+10z+4$

❶ عين عددين a,b يحققان $P(z)=(z^2+az+a)(z^2+bz+a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

الحل:

❶ $P(z)=(z^2+az+a)(z^2+bz+a)$

$$=z^4+(a+b)z^3+(2a+ab)z^2+(a^2+ab)z+a^2$$

لكن $P(z)=z^4+5z^3+10z^2+10z+4$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{c}a+b=5\\2a+ab=10\\a^2+ab=10\\a^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{ll}a=2\ \Rightarrow b=3 & \text{مقبول}\\a=-2\Rightarrow b=7 & \text{مرفوض}\end{array}$$

عندئذ $P(z)=(z^2+2z+2)(z^2+3z+2)$.

❷ $P(z)=(z^2+2z+2)(z^2+3z+2)=0$ ومنه

إما $z^2+3z+2=0 \Leftarrow (z+2)(z+1)=0 \Leftarrow \left.\begin{array}{l}z=-1\\z=-2\end{array}\right\}$

أو $z^2+2z+2=0$ نحل $\Delta=2^2-4(1)(2)=-4$

$$z_1=\frac{-2+2i}{2}=-1+i\quad,\quad z_2=\frac{-2-2i}{2}=-1-i$$

فمجموعة حلول $P(z)=0$ هي $\{-1,-2,-1+i,-1-i\}$.

التمرين الرابع: يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B.

إذا علمت أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي 4% وفي انتاج B هي 10%. نسحب عشوائياً مصباحاً.

❶ ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

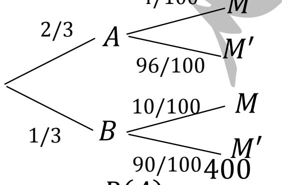
❷ إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من B.

الحل:

❶ لنفرض أن M الحدث سحب مصباح معطوب

و A الحدث سحب مصباح من المعمل A

و B الحدث سحب مصباح من المعمل B



$$P(A)=\frac{400}{600}=\frac{2}{3}\qquad P(B)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$$

$$P(M_A)=\frac{4}{100}\qquad P(M_B)=\frac{10}{100}$$

$$P(M)=P(A\cap M)+P(B\cap M)$$

$$=P(A\cap M).P(M|A)+P(B).P(M|B)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{18}{300}$$

$$P(M_B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{18}{300}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$

❶ ادرس نهايات التابع عند اطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x = -1$.

❷ أوجد معادلة مقارب أفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

❸ احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ماله من قيم حدية محلية

❹ أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x = -2$.

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x = 3$.

الحل:

❶ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

❷ $\Delta: y = 0$ مقارب أفقي للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

دراسة الوضع النسبي:

x	-∞	-2	-1	+∞
$f(x) - 0$	-	0	+ ||	+
الوضع النسبي	C تحت المقارب |		C فوق المقارب	

❸ حساب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1.(x+1)^2 - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x + 1 - 2x - 4}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-x-3}{(x+1)^3}}$$

دراسة تغيرات التابع f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$ ||		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$ ||	$+\infty$	↘	0

القيمة الحدية (صغرى) هي $f(-3) = -\frac{1}{4}$.

❹ $f(-2) = 0$ و $m = f'(-2) = +1$

$$T: y = m\big(x - (-2)\big) + f(-2) = +1(x+2) + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T: y = x + 2}$$

❺

$$S = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2} dx = \int_0^3 \left(\frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$

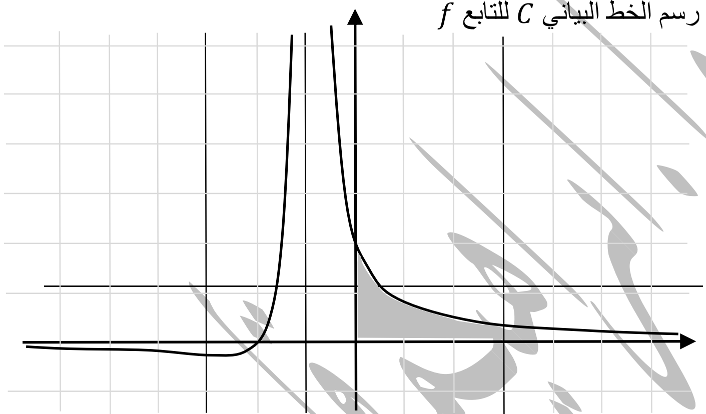
$$= \int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} + (x+1)^{-2}\right) dx$$

$$= \left[\ln(x+1) + \frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^3 = \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

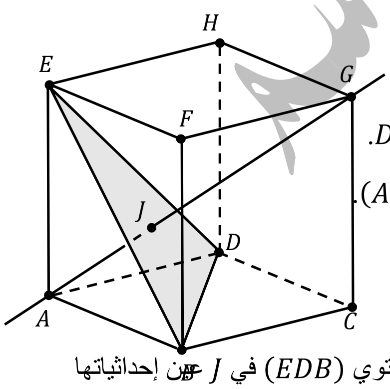
$$= \left(\ln(4) - \frac{1}{4}\right) - (\ln(1) - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \ln(4) + \frac{3}{4}}$$

رسم الخط البياني C للتابع f



المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



❶ عين إحداثيات النقاط D, B, E, G.

❷ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG).

❸ أثبت أن المستقيم (AG) ناظم مع للمستوي (EDB).

❹ المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها

❺ أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

❻ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل:

❶ $D(0,3,0), B(3,0,0), E(0,0,3), G(3,3,3)$

❷ إن المستقيم (AG) يقبل شعاع توجيه

$$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A, y_G - y_A, z_G - z_A) = (3,3,3)$$

$$(AG): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases} \Rightarrow (AG): \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

❸
$$\overrightarrow{EB} = (x_B - x_E, y_B - y_E, z_B - z_E) = (3,0,-3)$$

$$\overrightarrow{ED} = (x_D - x_E, y_D - y_E, z_D - z_E) = (0,3,-3)$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB} = -3(3) + 0(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED} = 0(3) + (-3)(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{ED}$$

وبما أن الشعاعان $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطان خطياً عندئذ $(AG) \perp (EDB)$

❹ نوجد معادلة المستوي (EDB)

وجدنا أن $(AG) \perp (EDB)$ عندئذ $\vec{n} = \overrightarrow{AG} = (3,3,3)$

$$(EDB): a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$$

$$3(x-0) + 3(y-0) + 3(z-3) = 0$$

$$3x + 3y + 3z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(EDB): x + y + z - 3 = 0}$$

بالحل المشترك نجد أن:

$$3t + 3t + 3t - 3 = 0 \Rightarrow 9t = 3 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$

ومنه احداثيات نقطة التقاطع $J(1,1,1)$ لأن:

$$x = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, y = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, z = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

❺ إن المثلث EDB مثلث متساوي الأضلاع لأن EB, DB, ED هي أقطار لمربعات متطابقة فهي متساوية أي $EB = DB = ED$

إذن نقطة تلاقي الارتفاعات في مركز ثقل المثلث ومنه k مركز ثقل المثلث EDB

$$K = \left(\frac{x_E + x_D + x_B}{3}, \frac{y_E + y_D + y_B}{3}, \frac{z_E + z_D + z_B}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{0+0+3}{3}, \frac{0+3+0}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right) = (1,1,1) = J$$

إذن J هي مركز ثقل المثلث EDB ونقطة تلاقي ارتفاعه.

❻ نعلم أن $V_{AFDB} = \frac{1}{3} S_{EDB}.h$ عندئذ لنحسب h و S_{EDB}

$$S_{EDB} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

حيث $a = ED$

$$= \sqrt{9+0+9}$$
$$= \sqrt{18}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{18}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$h = AJ = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{9}{2}$$

الجمهورية العربية السورية النموذج السادس

وزارة التربية (الصفحة الأولى) الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C .

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية ؟

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني : اكتب العدد العقدي $z=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC

جـد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

السؤال الرابع : ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^{x}$

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\longrightarrow \ln 2}\dfrac{e^{x}-2}{x-\ln 2}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي : $u_0=0\ ,\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) أثبت أن $0\leq u_n\leq 1$.

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

3) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها .

(يتبع في الصفحة الثانية)

(الصفحة الثانية)

التمرين الثاني : صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء .

نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً .

نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك .

عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه .

التمرين الثالث : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

التمرين الرابع : عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر .

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : ($100°$ لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1) أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف .

2) ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها .

3) بين القيم الحدية المحلية للتابع f . وارسم خطه البياني C .

4) استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

المسألة الثانية : نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً ، وليكن المستوي Q الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

1) أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P .

2) جد معادلة الكرة S . 3) أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S .

4) أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q .

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً $d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \,,\, t\in R \\ z=4-3t \end{cases}$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

(b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

(انتهت أسئلة النموذج الوزاري السادس 2017)

حل النموذج الوزاري السادس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

❶ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

❷ هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟

❸ هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

❹ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

الحل:

❶ المستقيم $y=3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

والمستقيم $x=1$ مقارب شاقولي

والمستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي

❷ لا يوجد لأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\neq\infty$

❸ لا لأن المشتق لا ينعدم.

❹ إن f متناقص على المجال $]-1,1[$ و $0\in\,]-\infty,\infty[\,=f(]-1,1[)$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني: اكتب العدد العقدي

$$Z=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ بالشكل الأسي

الحل:

$$Z=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=(\sqrt{2}-1)e^{\frac{4\pi}{3}i}}$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث DBC عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right)\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$

فمجموعة النقاط M تشكل كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x$.

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}$.

الحل:

$$f(x)=e^x\Rightarrow f(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$f'(x)=e^x\Rightarrow f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}=f'(\ln 2)=2$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}\quad,\quad u_0=0$$

❶ أثبت أنّ $0\leq u_n\leq 1$.

❷ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶ سنثبت صحة العلاقة $0\leq u_n\leq 1$ بالتدريج

لنثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي: $u_0=0\Rightarrow 0\leq u_0=0\leq 1$ فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي: $0\leq u_n\leq 1\ \dots(*)$

ولنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ كما يلي:

$0\leq u_n\leq 1$ (حسب $*$)

$f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$ (لأن f متزايد)

$0\leq \frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1$

$0\leq u_{n+1}\leq 1$

نلاحظ أن f متزايد لأن

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

❷ لنثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة أي لنثبت أن $E(n): u_n<u_{n+1}$ بالتدريج

إن العلاقة $E(0)$ صحيحة لأن : $\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1 > u_0$

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي $u_{n+1} > u_n$ ... $(*)$

لنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

$u_{n+1} > u_n$ (حسب $*$)

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$ (لأن f متزايد)

$u_{n+2} > u_{n+1}$

إذن فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

من $l = 1$ حل المعادلة $f(x) = x$

إذاً: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

$f(x) = x$

$\frac{2x+1}{x+2} = x$

$2x + 1 = x^2 + x$

$x^2 = 1$

$x = 1$ مقبول

$x = -1$ مرفوض

التمرين الثاني: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه

الحل:

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{0,3,5\}$

$$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2} + \binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{6}{12}$$

r	0	3	5
$P(X=r)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = 0.\frac{6}{12} + 3.\frac{5}{12} + 5.\frac{1}{12} = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2.\frac{6}{12} + 3^2.\frac{5}{12} + 5^2.\frac{1}{12} = \frac{35}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{55}{18}$$

التمرين الثالث: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

الحل:

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{6}{r}x^{12-2r}.x^{-r}$$

$$= \binom{6}{r}x^{12-3r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $12 - 3r = 0 \Leftarrow \boxed{r=4}$.

$$T_0 = \binom{6}{4}x^0 = \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} = 15$$

التمرين الرابع: عين مجموعة تعريف التابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر.

الحل:

الجذر معرف عندما $1 + x \geq 0$ أي $]-1,+\infty[$

مجموعة تعريف التابع f هي $]-1,+\infty[$ عدا القيم التي تعدم المقام أي عدا حلول المعادلة $\sqrt{1+x} - 1 = 0$ عندئذ

$$\sqrt{1+x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1$$

نربع الطرفين $\Rightarrow 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0$

ومنه $D_f = \,]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}.\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$= 1\left(\sqrt{1+0}+1\right) = 2$$

حيث $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

❶ أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف.

❷ ادرس اطراد التابع ونظم جدولاً بها.

❸ بيّن القيم الحدية المحلية للتابع f. وارسم خطه البياني.

❹ استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x} = 1$.

❺ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

❷ إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ: $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x(2-x)e^{-x}=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(0)=0\\f(2)=4e^{-2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

اطراد التابع f: نلاحظ حسب الجدول أن:

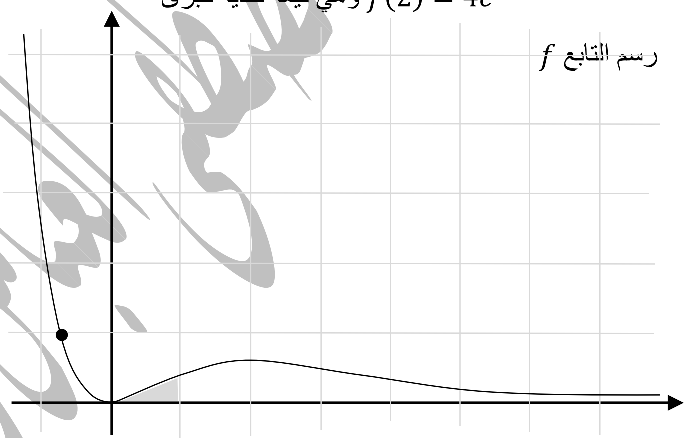
f متزايد على المجال $[0,2]$

و f متناقص على المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$

❸ القيم الحدية هي $f(0)=0$ وهي قيمة حدية صغرى

$f(2)=4e^{-2}$ وهي قيمة حدية كبرى

رسم التابع f



❹ عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$ هو نفس عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

فنلاحظ حسب الجدول أن:

f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$ و

$$1\in]0,+\infty[=f(]-\infty,0[)$$

فللمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.

بما أن $1\notin[0,4e^{-2}]=f([0,2])$
فلمعادلة $f(x)=1$ مستحيلة المجال $[0,2]$.

بما أن $1\notin]0,4e^{-2}[=f(]0,+\infty[)$
فلمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$.
مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.

❺ حسب الرسم نجد أن:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

$$I=[-x^2e^{-x}]_0^1-\int_0^1 -2xe^{-x}dx=-e^{-1}+2\int_0^1 xe^{-x}dx$$

نطبق التجزئة مرة ثانية فنفرض

$u=x$	$v'=e^{-x}$
$u'=1$	$v=-e^{-x}$

$$I=-e^{-1}+2[-xe^{-x}]_0^1-2\int_0^1 -e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}+2(-e^{-1}+0)+2[-e^{-x}]_0^1=\boxed{2-\frac{5}{e}}$$

المسألة الثانية:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً ، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن S الكرة مركزها A ونصف قطرها AB.

❶ أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي P.

❷ جِد معادلة الكرة S.

❸ أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S.

❹ أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=12-5t\ ;t\in\mathbb{R}\\z=4-3t\end{cases}$$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q.

(b) أثبت أن المستقيم d محتوي في المستوي المحوري للقطة المستقيمة $[BC]$.

الحل:

❶ $$P: a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$

$$2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: 2x+y-z-8=0}$$

❷ الكرة التي مركزها A ونصف قطرها

$$R^2=AB^2=2^2+1^2+(-1)^2=6$$

$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

$$S:(x-1)^2+(y-1)+(z-1)^2=6$$

❸

نطبق التجزئة فنفرض

$u=x^2$	$v'=e^{-x}$
$u'=2x$	$v=-e^{-x}$

$$dist(A,Q)=\frac{|1-1+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow dist(A,Q)=6=AB=R$$

إذن المستوي Q يمس الكرة S.

❹ $\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2),\overrightarrow{n_Q}=(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{n_Q}=-\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\perp Q$

لنثبت أن $c\in Q$ لذا نعوض c في معادلة المستوي Q

$$0-2-2+4=0\Rightarrow 0=0$$

إذا $C\in Q$ و $\overrightarrow{AC}\perp Q$ عندئذ C المسقط القائم للنقطة C على Q.

❺ (a) إثبات أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q

$$\left.\begin{matrix}x-y+2z+4=0\\2x+y-z-8=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{بالجمع}}3x+z-4=0$$

$$\Rightarrow z=4-3x$$

نفرض $\boxed{x=t}$ عندئذ: $\boxed{z=4-3t}$ و

$$y=x+2z+4=t+2(4-3t)+4\Rightarrow \boxed{y=12-5t}$$

وبالتالي فمعادلة الفصل المشترك للمستويين P و Q هي:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=12-5t\\z=4-3t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

(b) نفرض R المستوي المحوري للقطعة BC

نوجد إحداثيات النقطة I منتصف $[BC]$

$$I=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2},\frac{z_B+z_C}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$$

$$R:-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0+1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\boxed{R:-3x-z+4=0}$$

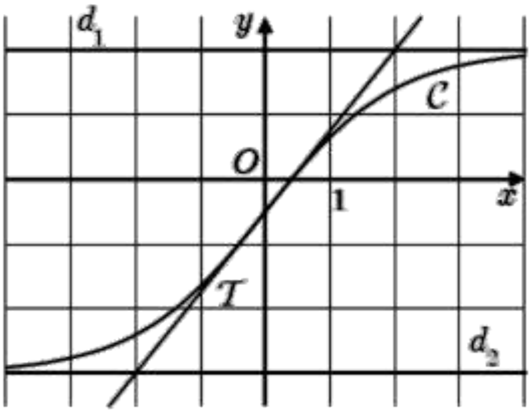
حتى يكون d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ يجب أن يحقق معادلة المستوي

$$-3t-(4-3t)+4=-3t-4+3t+4=0$$

إذاً: d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

النموذج الوزاري السابع ٢٠١٩	**امتحان شهادة الدراسة الثانويّة العامّة دورة عام.........**	الاسم:
الرياضيات:	(الفرع العلمي)	الرقم:
	الصفحة الأولى	المدة: ثلاث ساعات
		الدرجة: ستمئة

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: إذا كان C الخط البياني للتابع f و المستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C و المستقيم T مماس للخط C المطلوب :

١- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 و d_2 .

٣- إذا علمت أن المستقيم المائل (T) المرسوم في الشكل يمسّ المنحني في النقطة $(0,\frac{-1}{2})$ احسب $f'(\frac{-1}{2})$ ثم اكتب معادلة المستقيم T .

السؤال الثاني: نتأمل النقاط $A(3,5,2), B(2,-1,3), C(0,-2,2)$

١- احسب إحداثيّات منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$.

٢- احسب مركّبات الأشعّة $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$.

٣- عيّن إحداثيّات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع .

السؤال الثالث :

١- عين حل المعادلة التفاضلية $3y+2y'=1$ الذي يحقّق الشرط $f(0)=1$.

٢- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

السؤال الرابع: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

١- كم عدداً زوجياً مؤلّفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

٢- كم عدد المجموعات الجزئيّة المكوّنة من عنصرين من عناصر المجموعة S ؟

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$ و المطلوب :

١- احسب $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

٢- استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه Δ .

التمرين الثاني : لتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان : $z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-2i$ و المطلوب :

١- اكتب z_A بالشكل الأسّي، ثُمّ جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC .

٢- أثبت أنَّ $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثالث : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة عند كل عدد طبيعي n يحقق $n \geq 1$ وفق :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

١– أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$.

٢– أثبت أن $u_n < 2$ و استنتج أن المتتالية u_n متقاربة .

التمرين الرابع : نملأ عشوائيّاً كل خانة من الخانات الأربع $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ بأحد العددين *0 , 3* و المطلوب:

١– ليكن الحدث A << مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي ٦ >>

وليكن الحدث B << عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين >> احسب $P(A)$ ثم $P(B/A)$.

٢– نسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الخانات التي كتب فيها العدد ٣ ،

عيّن القانون الاحتماليّ للمتحوّل العشوائي X و احسب توقّعه الرياضي و تباينه .

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (*100* درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,-1,2)$ ، $B(2,0,4)$ و المستوي P الذي معادلته : $x-y+3z-4=0$ و المطلوب :

١– جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P و يمر بالنقطتين A,B .

٢– جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة A و يعامد المستوي P .

٣– عيّن إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P .

٤– أعط معادلة للمجموعة ε المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ مبيّناً طبيعة المجموعة ε .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$

و ليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ و المطلوب :

١– أثبت أنّ f تابع فردي و استنتج الصفة التناظرية للخط C .

٢– ادرس تغيّرات التابع g و نظّم جدولاً بها و اكتب معادلة كل مقارب للخط C' .

٣– ارسم كل مقارب وجدته و ارسم C' ثم استنتج رسم C .

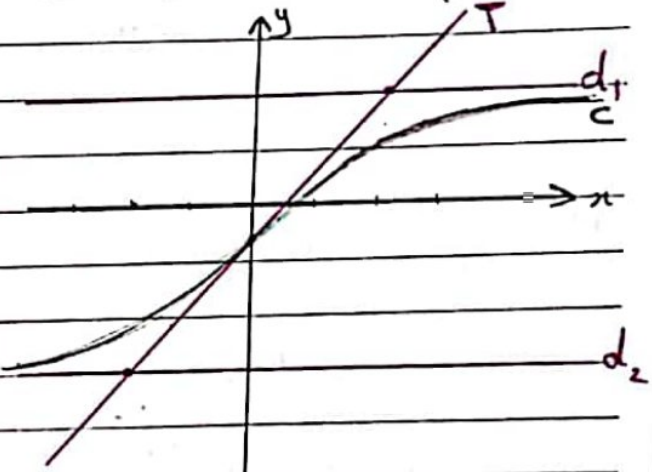
٤– احسب مساحة السطح المحصور بين C' و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$ و $x=3$.

نموذج امتحان 2019

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40)

السؤال الأول:

اذا كان c الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 , d_2 مقاربين للخط c والمستقيم T مماس للخط c، المطلوب:



① احسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

② اكتب معادلة كل من المقاربين d_1, d_2

③ اذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $(0, -\frac{1}{2})$ احسب $f'(-\frac{1}{2})$ ثم اكتب معادلته.

① $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$

② $d_1 : y = 2$, $d_2 : y = -3$

③ T مار بنقطتين $A(2, 2)$

$B(-2, -3)$

$$m_T = \frac{-3-2}{-2-2} = \frac{5}{4}$$

$$f'(-\tfrac{1}{2}) = m_T = \frac{5}{4}$$

$$T : y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x - 0)$$

$$\boxed{T : y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}}$$

السؤال الثاني:

تأمل النقاط $A(3, 5, 2)$

$B(2, -1, 3)$, $C(0, -2, 2)$

① احسب احداثيات منتصف القطعة [AC]

② احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$

③ عين احداثيات K بحيث يكون الرباعي ABCK متوازي أضلاع

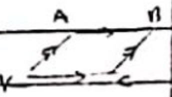
① I منتصف [AC] $I(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2})$

$I(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2)$

② $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$

$\overrightarrow{AC}(-3, -7, 0)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -6, 1)$



③ ABCK متوازي أضلاع

أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$

$(-1, -6, 1) = (-x, -2-y, 2-z)$

$x = 1$, $y = 4$, $z = 1$ ⟹ $K(1, 4, 1)$

السؤال الثالث:

① عين حل المعادلة التفاضلية $3y+2y'=1$ الذي يحقق الشرط $f(0)=1$

② احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

① $3y+2y'=1 \rightarrow y'=-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$

حلها

$y=ke^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$

$1=k+\frac{1}{3}$

$\boxed{k=\frac{2}{3}}$

$y=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\,?$ عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=1\cdot 1=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لأن

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=1$ لأن و

السؤال الرابع:

لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

① كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S.

② كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من S

①

عدد الأعداد الزوجية $=6\times 6\times 3$

$=108$

② عدد المجموعات $=\binom{6}{2}$

$\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$

ثانياً: حل التمارين الوريقة الرتبية: (60)

السؤال الخامس: التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

المطلوب:

1- احسب $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

2- استنتج معادلة المقارب المائل Δ في جوار $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C.

① $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 \longrightarrow \boxed{a=2}$

$f(x)-ax = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - 2x$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = ?$

$\infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) - 2x = 2x-1+\frac{-6}{x-3} - 2x$

$= -1 - \frac{6}{x-3}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = -1 \longrightarrow \boxed{b=-1}$

$\frac{2x^2-7x-3}{x-3} = 2x-1-\frac{6}{x-3}$ (بعد القسمة الاقليدية)

② نستنتج أن

$\Delta : y = 2x-1$

مقارب مائل لـ C بجوار $(+\infty)$.

الوضع النسبي:

$f(x) - y = \frac{-6}{x-3}$

x	$-\infty$ 3	3 $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$	$-$
وضع نسبي	C فوق Δ	C تحت Δ

السؤال السادس: التمرين الثاني:

لتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان $z_A = -\sqrt{3}+i$

$z_B = -2i$

① اكتب z_A بالشكل الأسي، ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ O مركز ثقل المثلث ABC

② أثبت أن: $z_C - z_A = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

① $z_A = -\sqrt{3}+i$

$r = 2$

$\theta = +\frac{5\pi}{6}$ ⇒ $z_A = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

O مركز ثقل المثلث ABC

$z_O = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

$0 = \frac{-\sqrt{3}+i-2i+z_C}{3}$

$$a = -\sqrt{3} - i + Z_C$$

$$\rightarrow Z_C = \sqrt{3} + i$$

② $Z_C - Z_A = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i$

$= 2\sqrt{3}$

$e^{\frac{\pi}{3}i}(Z_B - Z_A) = e^{\frac{\pi}{3}i}(-2i + \sqrt{3} - i)$

$= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\sqrt{3} - 3i)$

$= (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\sqrt{3} - 3i)$

$= 2\sqrt{3}$

$\longrightarrow Z_C - Z_A = e^{\frac{\pi}{3}i}(Z_B - Z_A)$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(e^{\frac{\pi}{3}i})$ $\qquad$ $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = |e^{\frac{\pi}{3}i}|$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\frac{AC}{AB} = 1$

$AB = AC$

اذاً المثلث متساوي الساقين

وفيه زاوية $\frac{\pi}{3}$

← المثلث متساوي

الأضلاع

السؤال الرابع: التمرين الثالث:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

① اثبت أن: $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

② اثبت أن $U_n < 2$ واستنتج أن U_n متقاربة.

① $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$\left.\begin{array}{l} \ell_1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\ \ell_2 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ أي $\ell_1 \leq \ell_2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

من الفرض:

$$\frac{1}{(n+2)} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+2)}$$

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2}{n+2}$$

أصغر من الواحد بالتالي

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

محققة من أجل $n+1$ نقول صحيحة أياً كانت $n \geq 1$

② $U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

$U_n \leq \underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}$

S_n متتالية مجموع هندسية

~~أساسها~~ $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $U_0 = \frac{1}{2^0} = 1$

عدد الحدود $= n$

$U_n \leq S_n$

$U_n \leq 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$U_n \leq 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$U_n \leq 2 - \underbrace{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{سالب دوماً}}$

$U_n \leq 2 \to U_n$ محدودة بـ 2

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ ومنه U_n متزايدة تماماً

ومنه المتتالية متقاربة.

السؤال الثامن: التمرين الرابع:

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربعة الآتية بأحد العددين 3، 0 والمطلوب:

① ليكن الحدث A: «مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي 6»

وليكن الحدث B: «عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين»

احسب $P(A)$ ثم $P(B|A)$

② نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الخانات التي كتب فيها العدد (3).

اكتب القانون الاحتمالي واحسب التوقع الرياضي والتباين

① $A = \{$ $\boxed{3 \mid 3 \mid 0 \mid 0}$ تباديل $\times 6$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{16}$

$B = \{$ $\boxed{0 \mid 3 \mid 0 \mid 3}$ $\}$
$3 \quad 0 \quad 3 \quad 0$

$P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

② $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(0) = \frac{1}{16}$

$P(1) = \frac{4}{16}$

$P(2) = \frac{6}{16}$

$P(3) = \frac{4}{16}$

$P(4) = \frac{1}{16}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\sum x_i\, p(x_i)$	$0 +$	$\frac{4}{16} +$	$\frac{12}{16} +$	$\frac{12}{16} +$	$\frac{4}{16} = \frac{32}{16} =$
x_i^2	0	1	4	9	16
$x_i^2\, p(x_i)$	$0 +$	$\frac{4}{16} +$	$\frac{24}{16} +$	$\frac{36}{16} +$	$\frac{16}{16} = \frac{80}{16} =$

التوقع الرياضي: $E(x) = \sum x_i\, p(x_i)$

$= 2$

$V(x) = \sum x_i^2\, p(x_i) - E^2(x)$

$= 5 - 4 = 1$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين (100)

السؤال التاسع: المسألة الأولى:

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين

$A(1, -1, 2)$ ، $B(2, 0, 4)$

والمستوي P الذي معادلته

$x - y + 3z - 4 = 0$ والمطلوب:

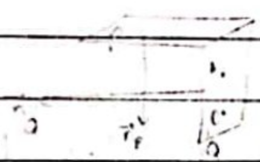
① جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين AB

② جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من النقطة A ويعامد المستوي P.

③ عين إحداثيات المسقط القائم A' للنقطة A على المستوي P.

④ اعط معادلة للمجموعة Σ المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق: $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ وما طبيعة المجموعة Σ

①



Q يعامد P ويمر من AB

إذاً $\vec{n}_Q$ يعامد $\vec{n}_P$ و $\vec{AB}$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0$

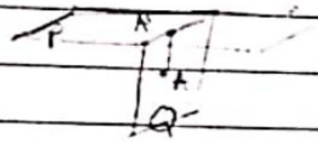
$\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0$

$\vec{n}_Q(a, b, c)$ حيث a, b, c ليست جميعها أصفار

$\vec{AB}(1, 1, 2)$

$\vec{n}_P(1, -1, 3)$

③



$A'(x, y, z)$

تقع على d : A'

$A'(1+t, -1-t, 2+3t)$

تقع في المستوي P : A'

$1+t-(-1-t)+3(2+3t)-4=0$

$2+2t+6+9t-4=0$

$4+11t=0 \rightarrow \boxed{t=-\frac{4}{11}}$

$\rightarrow A'\left(1-\frac{4}{11}, -1+\frac{4}{11}, 2-\frac{12}{11}\right)$

$A'\left(\frac{7}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$

④ $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

$\vec{AM}(x-1, y+1, z-2)$

$\vec{BM}(x-2, y, z-4)$

$(x-1)(x-2)+y(y+1)+(z-2)(z-4)=0$

$x^2-3x+y^2+y+z^2-6z+10=0$

$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2-6z+9-9+10=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-3)^2=\frac{6}{4}$

إذاً مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة

مركزها $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$

نصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0 \longrightarrow a-b+3c=0$ ①

$\vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0 \longrightarrow a+b+2c=0$ ② $\oplus$

$2a+5c=0$

نفرض $\boxed{c=2} \longrightarrow \boxed{a=-5}$

نعوض في ② $\longrightarrow \boxed{b=1}$

$\vec{n}_Q(-5, 1, 2)$

$Q: -5x+y+2z+d=0$

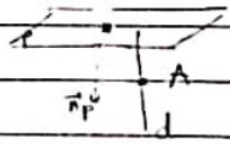
تمر بـ B : Q

$-10+0+8+d=0$

$\longrightarrow d=2$

$Q: -5x+y+2z+2=0$

②



$\vec{u} = \vec{n}_P$ إذاً P يعامد d

$\vec{u}(1, -1, 3) \qquad A(1, -1, 2)$

$$d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2+3t \end{cases}$$

السؤال العاشر: المسألة الثانية:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

وليكن c' الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$

والمطلوب:

① اثبت أن f تابع فردي واستنتج الصفة الناظرية للخط c

② ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب للخط c'

③ ارسم كل مقارب وجدته وارسم c' ثم استنتج رسم c

④ احسب مساحة السطح المحصور بين c' ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$, $x=3$

① [1] $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$-x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

الشرط الأول محقق

[2] $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right)$

$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$

$= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$= -f(x)$

الشرط الثاني محقق

$\Longleftarrow$ f تابع فردي وخطه البياني c متناظر بالنسبة للمبدأ.

② g معرف واستمراري على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = +\infty$$

$\boxed{x=1}$ مقارب شاقولي // yy' بجوار $+\infty$.

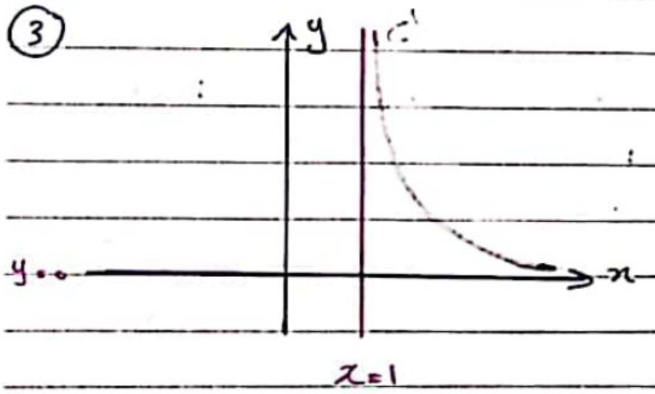
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$$

$\boxed{y=0}$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$

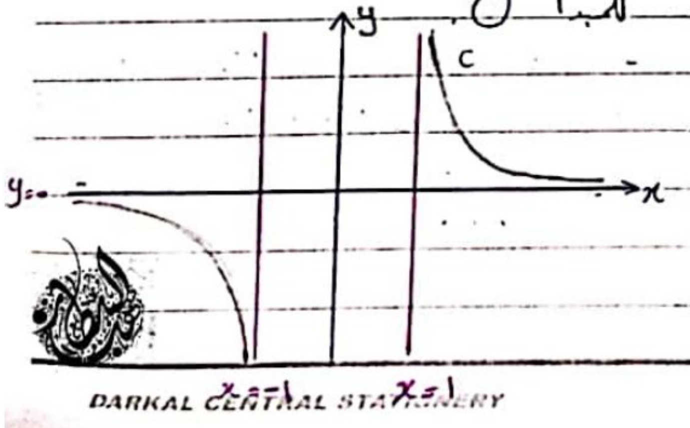
$$g'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} < 0$$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

③



g مقصور f على المجال $]1,+\infty[$ و f تابع فردي خطه c متناظر بالنسبة للمبدأ O



(4) $S = \int_2^3 g(x)\, dx$

$= \int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$

$u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow u'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$

$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$

$S = \left[u(x).v(x)\right]_2^3 - \int_2^3 v(x)\,u'(x)\, dx$

$= \left[x.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^3 - \int_2^3 -\frac{2x}{x^2-1}\, dx$

$= \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2-1)\right]_2^3$

$= 3\ln 2 + \ln 8 - 2\ln 3 - \ln 3$

$= 6\ln 2 - 3\ln 3$

مع تمنياتي بالتوفيق

النموذج الوزاري الثامن ٢٠٢٠ | امتحان شهادة الدراسة الثانويّة العامّة دورة عام........ | الاسم:

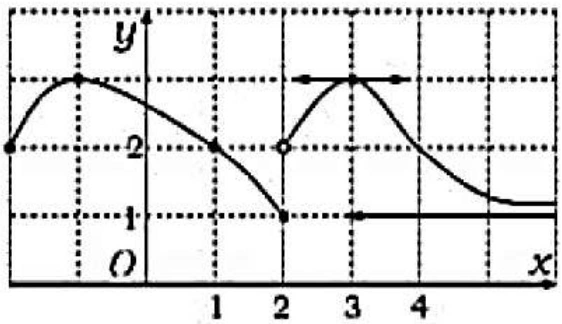
الرياضيات: | (الفرع العلمي) | الرقم:

المدة: ثلاث ساعات

الصفحة الأولى

الدرجة: ستمئة

أولاً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً

١- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.

٢- هل f اشتقاقي عند 2 ؟

٣- جد $f'(3)$ ، $f(3)$. و جد معادلة المماس عند 3 .

٤- ما عدد القيم الحدّية للتابع f ؟

السؤال الثاني: لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين : $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

١- ادرس اطّراد كل من $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$.

٢- أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان .

السؤال الثالث : حل المعادلة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0$ ثم حل المتراجحة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$

ثانياً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 . فيه I منتصف $[CD]$.

١- وضّع النقطة M المحققّة للعلاقة : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$.

٢- احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

السؤال الثاني:

١- جد المجموع $S=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6$ بدلالة α .

٢- ليكن $\alpha=e^{2\pi i/7}$ أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=0$.

السؤال الثالث: يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع .

١- بكم طريقة يمكن للطالب أن يرتّب المواد لدراستها ؟

٢- بكم طريقة يمكن أن يرتّب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات و الأخيرة هي الفيزياء ؟

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة للأول، 70 درجة للثاني ، 80 درجة للثالث)

التمرين الأول :

ليكن التابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ و المعطى بالعلاقة : $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$ و المطلوب :

١- أثبت أن التابع f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f' .

٢- جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$.

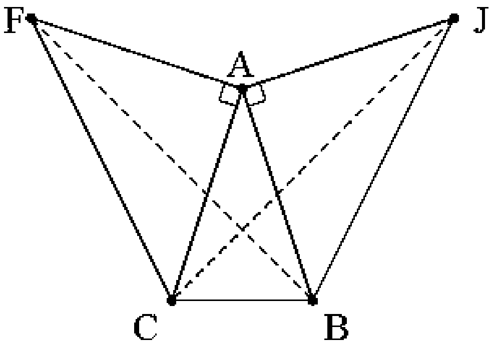
٣- استنتج مشتق التابع g المعرّف على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=\sqrt{\cos x}\ln(1+\cos x)$.

التمرين الثاني : لتكن النقاط $A(1\,,-1\,,2)$ ، $B(2\,,1\,,0)$ ، $C(2\,,3\,,-1)$ ، $D(0\,,0\,,2)$ و المطلوب :

١- عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$.

٢- حدّد S مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$.

٣- جد معادلة للمجموعة S .



التمرين الثالث : ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين ، رأسه A . ننشئ خارجه مثلثين قائمين و متساويَي الساقين ABJ و ACF . لتكن الأعداد العقديّة $a\,,b,\,c,\,j\,,f$ الممثّلة للنقاط $A\,,B\,,C\,,J\,,F$ بالترتيب .

١- جد بدلالة c و b العددين j و f .

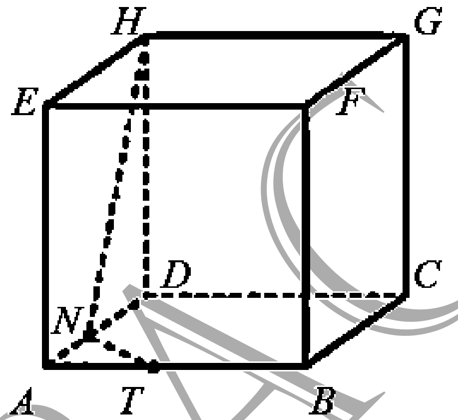
٢- اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري .

٣- أثبت أن $JC=BF$ و أنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان .

٤- نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$ احسب $\frac{c}{b}$.

رابعاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1 ، و T نقطة من $[AB]$ تحقّق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ، و N نقطة من $[AD]$ و تحقّق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.



١- في المعلم المتجانس $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط $H\,,F\,,N\,,T$.

٢- جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT) .

٣- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF) .

٤- استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT) .

٥- اذكر مقطع المكعّب بالمستوي (HNT) . ما طبيعته ؟

المسألة الثانية:

ليكن f التابع المعرّف على المجال $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]0\,,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$. لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق : $u_n=g(n)$ حيث g مقصور التابع f على المجال $[1\,,+\infty[$.

١- ادرس تغيّرات f على المجال $]0\,,+\infty[$ و نظّم جدولاً بها و اكتب معادلة كل مقارب .

٢- ارسم الخط C على المجال $]0\,,+\infty[$.

٣- أثبت أنَّ النقطة $A(-\frac{1}{2},0)$ هي مركز تناظر للخط C ، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f .

٤- نضع $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ أثبت أنَّ $s_n=-\ln(n+1)$

٥- جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ ، و ما نهاية $(s_n)_{n\geq1}$ ؟

انتهت أسئلة النموذج الوزاري الثامن ٢٠٢٠

حل النموذج الثاني (الفئة التطبيقية)

أولاً

السؤال الأول:

① $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \to 1} f(t) = 2$

② $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

f غير مستمر عند $(x=2)$ فهو غير اشتقاقي عند $x=2$.

③ $f(3) = 3$

$f'(3) = 0$

المماس في النقطة $(3,0)$ أفقي معادلته $y = 3$.

④ اربع قيم حدية .

$f(-2)=2$ قيمة حدية صغرى

$f(-1)=3$ قيمة حدية كبرى

$f(2)=1$ قيمة حدية صغرى

$f(3)=3$ قيمة حدية كبرى.

السؤال الثاني:

$u_n = \frac{-1}{n}$ $\qquad$ $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

① $* \; u_{n+1} = \frac{-1}{n+1}$

$\cdot \; u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$

← u_n متزايدة تماماً .

$* \; v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$

$\cdot \; v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 0$

← v_n متناقصة تماماً .

② من الطلب السابق وجدنا أن :

u_n متزايدة تماماً و v_n متناقصة تماماً

← الشرط الأول محقق .

$u_n - v_n = \frac{-1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0 - 0 = 0$

الشرط الثاني محقق

← المتتاليتان متجاورتان

السؤال الثالث:

$*\ (e^x-1)(e^x-\frac{1}{2})=0$

إما $e^x-1=0 \longrightarrow e^x=1$

$\boxed{x=0}$

أو $e^x-\frac{1}{2}=0 \longrightarrow e^x=\frac{1}{2}$

$x=\ln(\frac{1}{2})$

$\boxed{x=-\ln 2}$

$*\ (e^x-1)(e^x-\frac{1}{2})\leq 0$

$(e^x-1)(e^x-\frac{1}{2})=0$

إما $x=0$ أو $x=-\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
معادلة		+	0	−	0	+	
متراجحة		غير محققة		محققة		غير محققة	

$S=[-\ln 2, 0]$

ثانياً

السؤال الأول:

(1) $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{BI}$

$=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC})-\vec{BI}$

$=\frac{1}{2}(2\vec{AI})-\vec{BI}$

$=\vec{AI}+\vec{IB}$

$=\vec{AB}$

← M تنطبق على B.

(2) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos(\hat{A})$

$=4\cdot 4\cdot\cos(\frac{\pi}{3})$

$=4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}$

$=8$

السؤال الثاني:

① $S = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6$.

$= (\alpha)^0 + (\alpha)^1 + (\alpha)^2 + \dots + (\alpha)^6$

S متتالية مجاميع هندسية

• أساسها $q = \alpha$.

• حدها الأول $u_0 = \alpha^0 = 1$.

• عدد الحدود $6-0+1 = 7$

$$S = 1\cdot\frac{1-(\alpha)^7}{1-\alpha} = \frac{1-(\alpha)^7}{1-\alpha}$$

② $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$

$$1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6 \overset{?}{=} 0$$

$$\ell_1 = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6$$

$$= S$$

$$= \frac{1-(\alpha)^7}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^7}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}$$

$$= \frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}} = 0 = \ell_2$$

محققة.

السؤال الثالث:

① عدد الطرق = $7!$

② اختيار المادة الأولى (الرياضيات) بطريقة واحدة

اختيار المادة الأخيرة (الفيزياء) بطريقة واحدة

اختيار بقية المواد يتم بـ $5!$ طريقة

← عدد الطرق = $1 \times 5! \times 1$

= $5!$ طريقة.

التمرين الثالث :

نختار معلم متجانس $(A;\vec{u},\vec{v})$ ؛

① J صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$j-a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$$

$$\boxed{j = i\,b}$$

F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$f-a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)$$

$$\boxed{f = -i\,c}$$

② $$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib}\cdot\frac{i}{i}$$

$$= \frac{c-bi}{(c-bi)\,i}$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$\frac{f-b}{c-j} = -i$$

③ $$\underbrace{\frac{f-b}{c-j} = -i}$$

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right| = |-i| \qquad \arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = \arg(-i)$$

$$\frac{BF}{JC} = 1 \qquad (\vec{JC},\vec{BF}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$BF = JC \qquad \vec{JC} \perp \vec{BF}$$

اذا المستقيمين $(BF),(JC)$ متعامدات

④ A مركز الابعاد للنقاط المثقلة

$(B,1)\ (C,1)\ (F,3)\ (J,2)$

$$a = \frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2}$$

$$0 = \frac{b+c-3ci+2bi}{7}$$

$$b+c-3ci+2bi = 0$$

$$c-3ci = -b-2bi$$

$$c(1-3i) = b(-1-2i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1-2i}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i}$$

$$= \frac{-1-3i-2i+6}{1+9} = \frac{5-5i}{10}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

ثالثا:

التمرين الأول :

$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(1+x)$ ، $I = [0,+\infty[$

① نضع $g(x)$ المعرف على $]0,\infty[$

وفق : $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$f(0)=0$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}\cdot\ln(1+x)}{x}$$

$$= \sqrt{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0\cdot(1) = 0$$

حيث $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\longleftarrow$ f اشتقاقي عند $x=0$

إذا $D_{f'} = [0,+\infty[$

② f معرف واشتقاقي على $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\cdot\sqrt{x}$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

$$= \frac{(1+x)\ln(1+x)+2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$$

③ $g(x) = \sqrt{\cos x}\cdot\ln(1+\cos x)$

$$g(x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = f'(\cos x)\cdot(\cos x)'$$

$$= \frac{(1+\cos x)\ln(1+\cos x)+2\cos x}{2\sqrt{\cos x}\,(\cos x+1)}(-\sin x)$$

التمرين الثاني:

$A(1,-1,2)$ $\quad B(2,1,0)$

$C(2,3,-1)$ $\quad D(0,0,2)$

① G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,2)$ $(D,1)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$= \frac{1(1)+2(2)+2(2)+1(0)}{1+2+2+1}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$y_G = \frac{1(-1)+2(1)+2(3)+1(0)}{6}$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$z_G = \frac{1(2)+2(0)+2(-1)+1(2)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

②

$$\| \underbrace{\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + \vec{MD}} \| = 6$$

$$\| 6\vec{MG} \| = 6$$

$$6\,MG = 6$$

$$MG = 1$$

S مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة

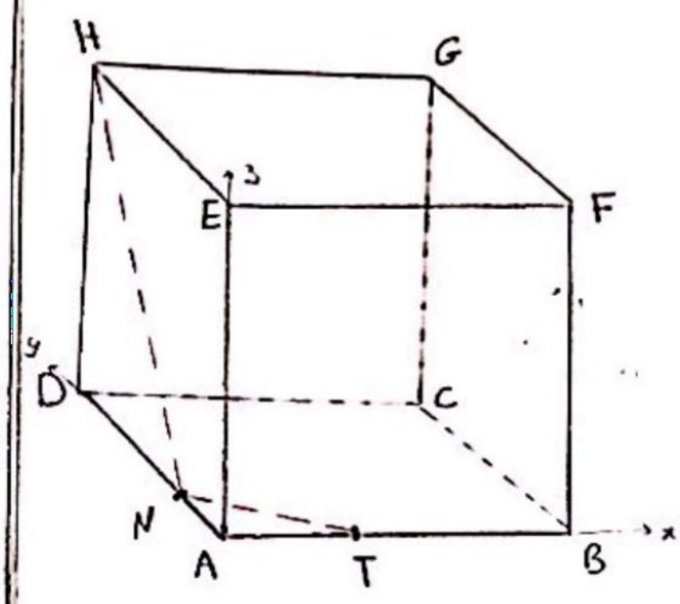
مركزها G نصف قطرها $r=1$

③

$$S: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

رابعاً

المسألة الأولى :



$(A ; \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AE})$

$A(0,0,0)$	$H(0,1,1)$
$B(1,0,0)$	$F(1,0,1)$
$D(0,1,0)$	$C(1,1,0)$
$E(0,0,1)$	$G(1,1,1)$
	$N(0, \frac{2}{5}, 0)$
	$T(\frac{2}{5}, 0, 0)$

②

$\vec{NT}(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$

$\vec{NH}(0, \frac{3}{5}, 1)$

لإيجاد معادلة المستوي (HNT) نحتاج إلى

نقطة $H(0,1,1)$

ناظم $\vec{n}(a,b,c)$; $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$\vec{n} \perp \vec{NT} \longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{NT} = 0$ [1]

$\vec{n} \perp \vec{NH} \longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{NH} = 0$ [2]

$\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b = 0$ [1] $\longrightarrow a = b$

$\frac{3}{5}b + c = 0$ [2]

نختار $\boxed{b = 5}$

$\longrightarrow \boxed{a = 5}$

$\longrightarrow \boxed{c = -3}$

$\vec{n}(5, 5, -3)$

$(HNT): 5x + 5y - 3z + d = 0$

$H \in (HNT): 0 + 5 - 3 + d = 0$

$\boxed{d = -2}$

$(HNT): 5x + 5y - 3z - 2 = 0$

③ (EF)

نقطة $E(0,0,1)$

شعاع توجيه $\vec{u} = \vec{EF}(1,0,0)$

$$(EF): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

(4)

$\vec{n}\,(5,5,-3)$

$\vec{u}\,(1,0,0)$

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 5 \neq 0$

← (EF) قاطع للمستوي (HNT)

لايجاد نقطة التقاطع

نعوض المعادلات الوسيطية لمعادلة المستقيم

في معادلة المستوي

$5(t)+5(0)-3(1)-2=0$

$5t-5=0$

$\boxed{t=1}$

نعوض في المعادلات الوسيطية

$x=1$

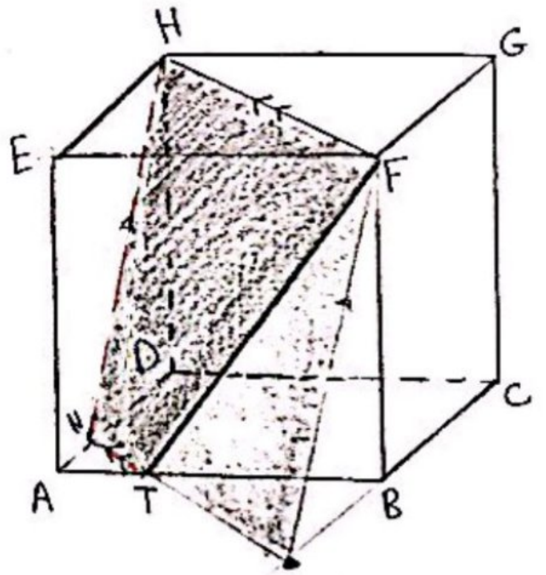
$y=0$

$z=1$

← احداثيات نقطة التقاطع

هي $F(1,0,1)$

(5)



• F نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (TNH)

اذاً (F نقطة من المقطع)

• الحرف (NT) محتوى في المستوي (ABCD)

← (HNT) مستوي يقطع الوجه EFGH بفصل مشترك يوازي الحرف (NT) وهو (HF)

• F نقطة تنتمي إلى المستويين (HNT),(ABFE)

و T نقطة تنتمي إلى المستويين (HNT),(ABFE)

اذاً (FT) هو الفصل المشترك لتقاطع المستويين

اذاً المقطع هو NTFH

طبيعة المقطع: شبه منحرف متساوي الساقين لأن $NT \parallel HF$ و $HN = FT = \frac{\sqrt{34}}{5}$

المسألة الثانية:

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$: $I =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$U_n = g(n)$: $[1,+\infty[$

① f معرف واستمراري على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي عند $(-\infty)$.

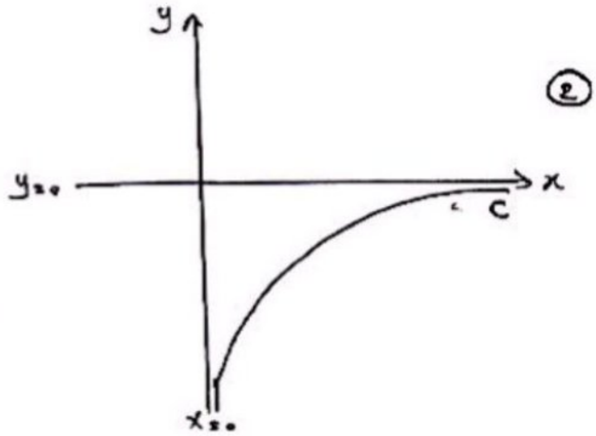
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\boxed{y=0}$ مقارب أفقي بجوار $(+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{x}{1+x}} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$

②



③ $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

نثبت أن:

1] $2x_0 - x \in I$

2] $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

1] $2x_0 - x = -1 - x$

$x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$-x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$-1-x \in]-\infty,-1[\cup]0,\infty[$

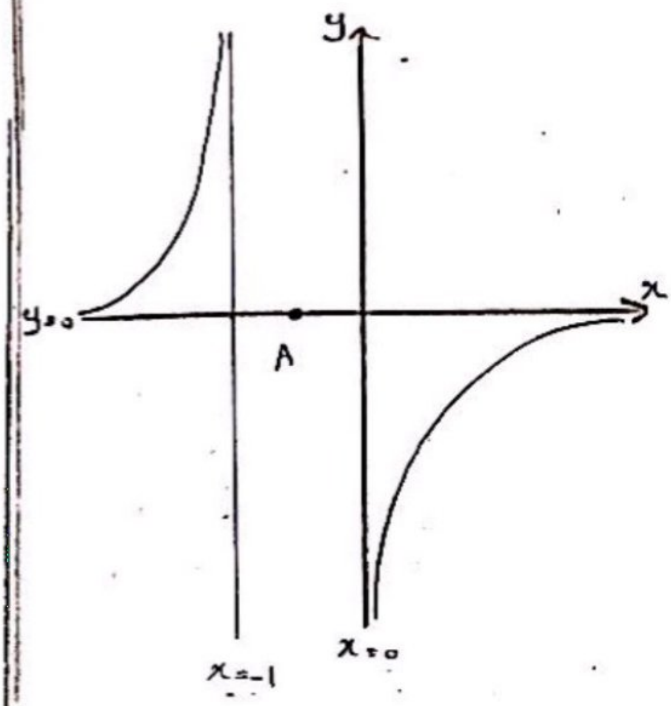
الشرط الأول محقق

2] $f(-1-x) + f(x) \overset{?}{=} 2(0) = 0$

$$\ell_1 = f(-1-x) + f(x)$$
$$= \ln\left(\frac{-1-x}{1-1-x}\right) + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{-1-x}{-x}\right) + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1+x}{x} \times \frac{x}{1+x}\right)$$
$$= \ln(1) = 0$$
$$= \ell_2$$

الشرط الثاني محقق

$\Longleftarrow A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ مركز تناظر للمخطط C.



كل التوفيق لكم طلابنا الغوالي

④

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$U_n = g(n) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n}}{n+1}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= -\ln(n+1)$$

⑤

$$U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \ln(1) = 0$$

$$S_n = -\ln(n+1)$$

$$\lim S_n = -\infty .$$

النموذج الوزاري التاسع ٢٠٢٠ — **امتحان شهادة الدراسة الثانويّة العامّة دورة عام........** — الاسم:

الرياضيات: — (الفرع العلمي) — الرقم:

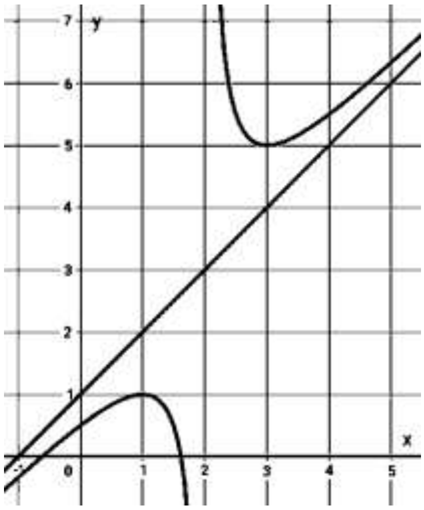
الصفحة الأولى

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة

أولاً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ و المطلوب :



١- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- دل على القيم الحدّية للتابع و بيّن نوعها .

٣- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

٤- اكتب معادلة المقارب المائل .

٥- اذكر إحداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f .

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\cos x$

١- جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

٢- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$

السؤال الثالث: حل المتراجحة $e^{x}-1\le 6e^{-x}$.

ثانياً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس وضع المستقيمين d و d' المعرّفين كما يأتي :

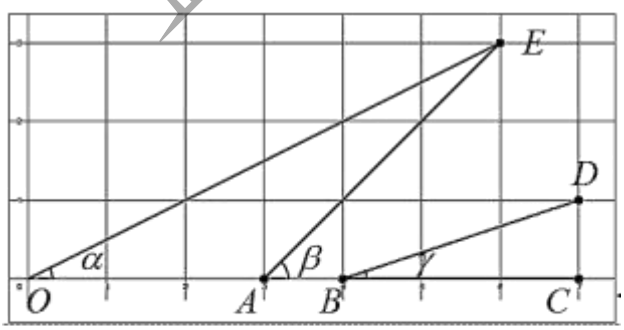
$$d:\begin{cases} x=2t-5\\ y=t-2\\ z=-\frac{1}{2}t+3\end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad d':\begin{cases} x=s+5\\ y=2\\ z=2s+5\end{cases}\ ;\ s\in\mathbb{R}$$

السؤال الثاني: جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $\omega=8-6i$.

السؤال الثالث: عيّن قيمة n في المعادلة الآتية : $P_{n+2}^{5}=45P_{n+1}^{3}$.

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (80 درجة للأول ،70 درجة للثاني ، 70 درجة للثالث)

التمرين الأول : في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسيّة للزوايا الموجّهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب ، والمطلوب :



١- اكتب كلّاً من الأعداد العقديّة الآتية بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي : $z_{\overrightarrow{OE}}$ ، $z_{\overrightarrow{AE}}$ ، $z_{\overrightarrow{BD}}$.

٢- اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OE}}.z_{\overrightarrow{AE}}.z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي .

٣- استنتج المجموع $\alpha+\beta+\gamma$.

التمرين الثاني : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-2,2[$ وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ ، و المطلوب :

١– أثبت أنّ التابع f هو تابع فرديّ ، ثمّ ادرس تغيّرات التابع على المجال $[0,2[$.

٢– اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

٣– ادرس الوضع النسبيّ بين C_f و T .

التمرين الثالث : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$ ، و المطلوب :

١– ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها .

٢– أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$ ، ثم جد هذا الحل جبريّاً .

٣– استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$.

رابعاً : حل المسألتين الآتيتين : (*100* درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ و المطلوب :

١– ادرس تغيّرات f و نظّم جدولاً بها .

٢– أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f ، ثمّ ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه d .

٣– حلّ المعادلة $f(x) = x$.

٤– لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً بالشكل : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ عند كل $n \in \mathbb{N}$ ، و المطلوب :

a– احسب u_1 و u_2 .

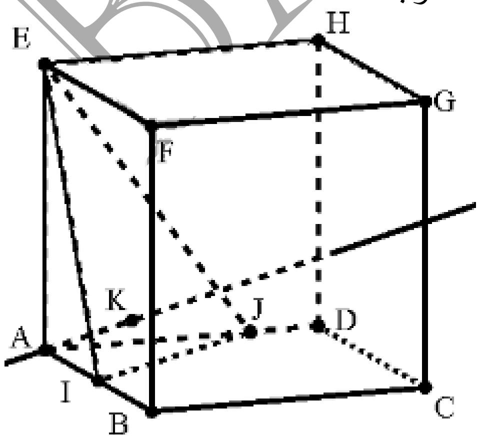
b– استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحّة الخاصة $E(n): 2 < u_{n+1} < u_n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

c– استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ، و احسب نهايتها .

d– ارسم مقاربات C_f و المستقيم $\Delta : y = x$ ، ثمّ ارسم C_f و مثّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه .

المسألة الثانية:

ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول حرفه يساوي 4 ، و لتكن النقطة I منتصف $[AB]$ و النقطة J تحقّق العلاقة $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ ، نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ ، و المطلوب :



١– جد إحداثيّات رؤوس المكعّب و النقطتين I و J .

٢– أثبت أنّ معادلة المستوي (EIJ) هي $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

٣– اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A و عمودياً على المستوي (EIJ) ، ثمّ جد إحداثيّات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ) .

٤– احسب مساحة المثلّث AEJ ثمّ استنتج حجم رباعي الوجوه $I\text{-}AEJ$.

٥– احسب بعد النقطة A عن المستوي (EIJ) و استنتج مساحة المثلّث EIJ .

انتهت أسئلة النموذج الوزاري التاسع ٢٠٢٠

حل نموذج امتحاني 2020

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية

السؤال الأول

1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى

$f(3)=5$ " " صغرى

3 حلان

4 نختار نقطتين $(-1,0)$ و $(0,+1)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y - y_0 = m(x-x_0)$$

$$y-1 = 1(x-0)$$

$$\boxed{y = x+1}$$

5 $I(2,3)$

السؤال الثاني

$f(x)=\cos x \to f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -\sin x \to f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$= f'(\frac{\pi}{3})$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

السؤال الثالث

$$e^x - 1 \leq 6e^{-x}$$

نضرب الطرفين بـ e^x

$$e^{2x} - e^x \leq 6$$

$$e^{2x} - e^x - 6 \leq 0$$

ندرس الإشارة

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$$

$e^x = 3 \to x = \ln 3$

$e^x = -2$ مستحيلة

x	$-\infty$ $\ln 3$ $+\infty$	
$e^{2x}-e^x-6$	$-$ 0	$+$
المتراجحة	محققة	//////

$$x \in]-\infty, \ln 3]$$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية

السؤال الأول

$\vec{u}_d(2,1,-\frac{1}{2})$ $\vec{u}_{d'}(1,0,2)$

المركبات غير متناسبة.

فالشعاعان غير مرتبطان خطياً

فالمستقيمان إما متقاطعان أو متخالفان

نحل المشترك (بالمساواة)

$2t-5 = s+5$ ---- (1)

$t-2 = 2$ ---- (2)

$-\frac{1}{2}t+3 = 2s+5$ ---- (3)

نحل (1)، (2) ثم نتحقق من (3)

من ② $\boxed{t=4}$

نعوض في ①

$8-5=s+5 \Rightarrow s=3-5$

$\Rightarrow \boxed{s=-2}$

نتحقق من ③

$-\frac{1}{2}(4)+3=2(-2)+5$

$1=1$ محققة

فالمستقيمان متقاطعان

نعوض $t=4$

$x=8-5=3$

$y=4-2=2$

$z=-2+3=1$

نقطة التقاطع $(3,2,1)$

السؤال الثاني

$w=8-6i$

بفرض الجذر التربيعي $z=a+iy$

$z^2=w$

$|z|^2=|w|$

ومنه

$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{64+36}$

$\Rightarrow x^2+y^2=10$ --- ①

$x^2-y^2=a \Rightarrow x^2-y^2=8$ --- ②

$x\cdot y=\frac{b}{2} \Rightarrow x\cdot y=\underset{\text{سالب}}{-3}$ --- ③

نحل ① و ② بالجمع

$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=\mp 3}$

نعوض في ①

$9+y^2=10 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\mp 1}$

من ③ x و y جداؤهما سالب فهما

من اشارتين مختلفتين

$z_1=3-i$

$z_2=-3+i$

السؤال الثالث

$P^5_{n+2}=45P^3_{n+1}$

شرط ①

$n+2\geq 5 \rightarrow \boxed{n\geq 3}$

شرط ②

$n+1\geq 3 \rightarrow \boxed{n\geq 2}$

ومنه الشرط

$\boxed{n\geq 3}$

$(n+2)\cancel{(n+1)}\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}(n-2)=45\cancel{(n+1)}\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}$

نقسم الطرفين على

$(n+1)(n)(n-1)\neq 0$

$(n+2)(n-2)=45$

$n^2-4=45$

$n^2=49$

$n=-7$ (مرفوض)

$n=7$ (مقبول)

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية،

التمرين الأول

$Z_O=0 \,,\, Z_A=3 \,,\, Z_B=4 \,,\, Z_C=7$

$Z_E=6+3i \,,\, Z_D=7+i$

1) $Z_{\overrightarrow{OE}} = Z_E - Z_O = 6+3i = 3\sqrt{5}\,e^{i\alpha}$

$Z_{\overrightarrow{AE}} = Z_E - Z_A = 3+3i = 3\sqrt{2}\,e^{i\beta}$

$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 3+i = \sqrt{10}\,e^{i\gamma}$

2) بالشكل الجبري

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = (6+3i)(3+3i)(3+i)$$
$$= 3(2+i)[3(1+i)](3+i)$$
$$= 9\underbrace{(2+i)(1+i)}(3+i)$$
$$= 9(2+2i+i-1)(3+i)$$
$$= 9(1+3i)(3+i)$$
$$= 9(\cancel{3}+i+9i\cancel{-3})$$
$$= 9(10i) = \boxed{90i}$$

بالشكل الأسي

$$Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}} = 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}\, e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$= 9\sqrt{100}\, e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$= \boxed{90\, e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}}$$

3) بالمساواة بين شكليه الجبري والأسي للعدد نجد

$$\cancel{90}\, i = \cancel{90}\, e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$
$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = i$$

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$$

وعلماً

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < \frac{\pi}{4} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \\ \gamma < \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha+\beta+\gamma < \pi$$

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}}$$

التمرين الثاني:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) \qquad I =]-2,2[$$

1) مهما تكن $x \in]-2,2[$

فإن $-x \in]-2,2[$

الشرط الأول محقق

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+2}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)^{-1}$$
$$= -\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) = -f(x)$$

الشرط الثاني محقق

f تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $[0,2[$

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ln(\infty) = +\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي

$f(x) = \ln(x+2) - \ln(-x+2)$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{-1}{-x+2}$

$= \underset{(-x+2)}{\frac{1}{x+2}} + \underset{(x+2)}{\frac{1}{-x+2}} = \frac{-x+2+x+2}{(x+2)(-x+2)}$

$= \frac{4}{(x+2)(-x+2)} > 0$

f متزايدة تماماً

x	0		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	∞

$\boxed{2}$

$x_0 = 0$

$y_0 = f(0) = 0$

$m = f'(0) = \frac{4}{4} = 1$

معادلة المماس $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$\boxed{y = x}$

$\boxed{3}$ لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق $f(x) - y_T$

$f(x) - y_T = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$

x	-2		0		2
$f(x) - y_T$		−	0	+	
الوضع النسبي		T تحت C	0 نقطة التماس (0,0)	T فوق C	

طريقة ثانية:

نشكل g

$g(x) = f(x) - y_T$

$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$

ندرس اطراده

g اشتقاقي على $]-2,2[$

$g'(x) = \frac{4}{(x+2)(-x+2)} - \frac{1}{1}$

$= \frac{4 - (x+2)(-x+2)}{(x+2)(-x+2)}$

$= \frac{4 - (-x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + 4)}{(x+2)(-x+2)}$

$= \frac{4 + x^2 - 4}{(x+2)(-x+2)} = \frac{x^2}{(x+2)(-x+2)}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

x	-2		0		2
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$		↗	0	↗	
		$g(x)$ سالب		$g(x)$ موجب	

T تحت C $x \in]-2,0[$

T فوق C $x \in]0,2[$

نقطة تقاطع $x = 0$

أو

"الجدول السابق بطريقة أولى"

التمرين الثالث:

$f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$

$\boxed{1}$ f مستمر ومشتق على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$

ع.ت.ن

$f(x) = x\left[2 - \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right]$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(2-1) = \infty$

$$f'(x) = 2 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+5}} = \frac{2}{1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$(\sqrt{x^2+5}) \quad (1)$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+5} - x}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{2}$ f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$

$f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

وبما أن $0 \in]-\infty,+\infty[$

فالمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α

في R

لدينا $f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0$ (سالب)

$f(2) = 4 - \sqrt{9} = 1$ (موجب)

$f(1).f(2) < 0$

أي $\alpha \in]1,2[$

نوجد α بحل المعادلة

$f(x) = 0$

$2x - \sqrt{x^2+5} = 0$

$\sqrt{x^2+5} = 2x$

شرط الحل $2x > 0$

$\Rightarrow x > 0$

نربع الطرفين

$x^2+5 = 4x^2$

$x^2 - 4x^2 = -5$

$-3x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ (مرفوض)

$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ (مقبول)

$\boxed{3}$

$g(x) = f(\sin x)$

$g'(x) = f'(\sin x) \cdot (\sin x)'$

$$= \frac{2\sqrt{\sin^2 x+5} - \sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 5}} \cdot \cos x$$

رابعاً: حل المسائل الآتية

المسألة الأولى

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

1 f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-4}{x^2}\right) = \underset{(x^2)}{\frac{1}{2}} - \underset{(2)}{\frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{x^2-4}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=-2 \notin D_f$

$\boxed{x=2} \longrightarrow f(2)=2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

قيمة حدية صغرى $f(2)=2$

2 $f(x)-y_d = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x$

$= \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-y_d) = 0$

d مقارب مائل للخط c بجوار $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق

$f(x)-y_d = \frac{2}{x}$

البسط موجب فإشارة الفرق إشارة المقام

المقام $x=0$

x	0	$+\infty$
$f(x)-y_d$	||	$+$
الوضع النسبي	||	c فوق d

أو مباشرة

$f(x)-y_d = \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow$ c فوق d

3 $f(x)=x$

$\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)=x$ نضرب بـ 2

$\underset{(x)}{\frac{x}{1}} + \underset{(1)}{\frac{4}{x}} = \underset{(x)}{\frac{2x}{1}}$

$x^2+4 = 2x^2 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow \boxed{x=\mp 2}$

4 $u_{n+1} = f(u_n)$ $\quad u_0=4$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$$

a) $u_1 = \frac{1}{2}(4+1) = \boxed{\frac{5}{2}}$

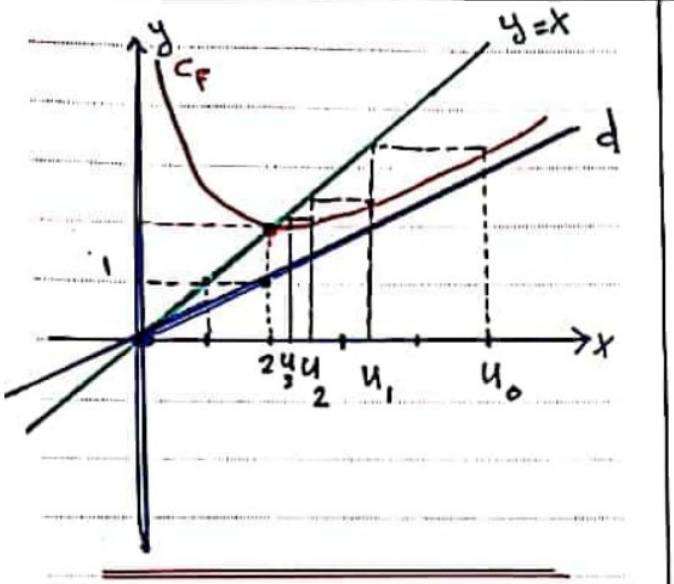
$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{4}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underset{(5)}{\frac{5}{2}} + \underset{(2)}{\frac{8}{5}}\right)$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{25+16}{10} = \boxed{\frac{41}{20}}$

b) نستخدم الإثبات بالتدريج

العلاقة $E(n)$ هي

$2 < u_{n+1} < u_n$



نثبت $E(0)$

$2<u_1<u_0 \Leftrightarrow 2<\frac{5}{2}<4$

محققة

نفرض $E(n)$ صحيحة ونثبت $E(n+1)$

اي نثبت

$$2<u_{n+2}<u_{n+1}$$

لدينا

$$2<u_{n+1}<u_n$$

بما ان f متزايد على المجال $]2,\infty[$

$$f(2)<f(u_{n+1})<f(u_n)$$

$$2<u_{n+2}<u_{n+1}$$

$E(n+1)$ صحيحة

فالعلاقة $E(n)$ صحيحة.

c) • بما أن $u_{n+1}>2$ فالمتتالية محدودة من الأسفل بالعدد 2

• بما أن $u_{n+1}<u_n$ فالمتتالية متناقصة تماماً

ومنه فالمتتالية متقاربة

ونهايتها هو العدد ℓ الذي يحقق

$$f(\ell)=\ell \Rightarrow \boxed{\ell=2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

d) الرسم:

المقارب $y=\frac{1}{2}x$

x	y	النقطة
0	0	(0,0)
2	1	(2,1)

المسألة الثانية

1

$A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(4,4,0)$

$D(0,4,0)$ $E(0,0,4)$ $F(4,0,4)$

$H(0,4,4)$ $G(4,4,4)$

$I(2,0,0)$

نفرض $J(x,y,z)$ ونعوض في العلاقة

$$4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AD}$$

$$4(x,y,z)=3(0,4,0)$$

$$(4x,4y,4z)=(0,12,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x=0 \to x=0 \\ 4y=12 \to y=3 \\ 4z=0 \to z=0 \end{array}\right\} \to J(0,3,0)$$

2 نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{EI} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{EI}=0$

$\Rightarrow (a,b,c)\cdot(2,0,-4)=0$

$\Rightarrow 2a-4c=0$

$\Rightarrow \boxed{a-2c=0}$ — (1)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{EJ} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{EJ}=0$

$\Rightarrow (a,b,c)\cdot(0,3,-4)=0$

$\Rightarrow \boxed{3b-4c=0}$ — (2)

بفرض $\boxed{c=1}$ نجد

$\boxed{a=2}$

$\boxed{b=\frac{4}{3}}$

$\vec{n}(2,\frac{4}{3},1)$

$\vec{n}(6,4,3)$ أو يمكن اختيار

معادلة المستوي

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

نختار E

$6(x-0)+4(y-0)+3(z-4)=0$

$6x+4y+3z-12=0$

3 d عمودي على EIJ

$\vec{u}_d=\vec{n}(6,4,3)$

$$\begin{cases} x=6t \\ y=4t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$$

بالحل المشترك للتمثيل الوسيطي لـ d مع معادلة المستوي EIJ

نعوض التمثيل الوسيطي بمعادلة المستوي

$6(6t)+4(4t)+3(3t)-12=0$

$36t+16t+9t=12$

$61t=12 \to t=\frac{12}{61}$

نعوض في التمثيل الوسيطي

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{72}{61} \\ y=\frac{48}{61} \\ z=\frac{36}{61} \end{array}\right\} \to K\left(\frac{72}{61},\frac{48}{61},\frac{36}{61}\right)$$

4

$$S_{AEJ}=\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}=\frac{4\times 3}{2}=\boxed{6}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{AEJ}\cdot \underset{(AI)}{h}=\frac{1}{3}(6)(2)=\boxed{4}$$

5

$$dist(A,EIJ)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$dist(A, EIJ) = \frac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$$

حجم رباعي الوجوه I-AEJ

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{EIJ} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{EIJ} \cdot \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{4}{\sqrt{61}} \cdot S_{EIJ}$$

لكن $V = 4$

$$4 = \frac{4}{\sqrt{61}} \cdot S_{EIJ}$$

ومنه

$$S_{EIJ} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{61}}} = \frac{4\sqrt{61}}{4} = \boxed{\sqrt{61}}$$

نهاية الحل

2020

النموذج الوزاري العاشر ٢٠٢٠ — **امتحان شهادة الدراسة الثانويّة العامّة دورة عام.........** — الاسم:

الرياضيات: — (الفرع العلمي) — الرقم:

الصفحة الأولى — المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة

أولاً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

١- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

٢- اذكر قيمة حدّية للتابع و بيّن نوعها .

٣- هل $f(5)=4$ قيمة حدّية للتابع ؟

٤- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع .

٥- اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,3]$ وفق : $f(x) = (x-3)\sqrt{x(3-x)}$ جد $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، و استنتج أنّه اشتقاقي عند $x=3$.

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه ، مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD أثبت أنّ النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة ، وعيّن موضع النقطة G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

ثانياً : أجب عن سؤالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات :

$x^2+z^2=16$ و $2\le y\le 5$.

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2(1+i)z-4+2i=0$.

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,8,9\}$ و المطلوب :

١- كم عدداً مختلف الأرقام و مؤلّفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

٢- كم عدداً من مضاعفات العدد 5 و مؤلّفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

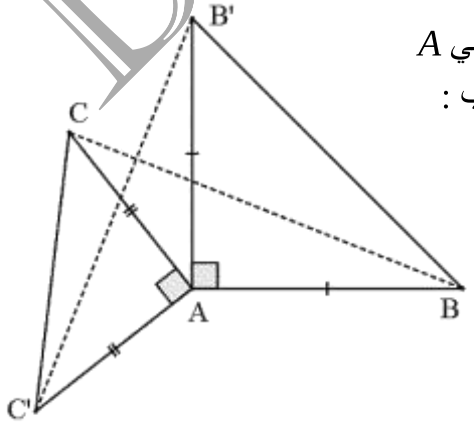
ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 درجة للأول ، 70 درجة للثاني ، 80 درجة للثالث)

التمرين الأول : في الشكل المجاور المثلّثان ABB' و ACC' كلٌّ منهما قائمٌ في A و متساوي الساقين ، تأمّل المعلم المتجانس و المباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$ ، و المطلوب :

١- اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B ، و $z_{C'}$ بدلالة z_C .

٢- احسب $\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}$.

٣- استنتج أنّ $(BC)\perp(B'C')$ و $BC=B'C'$.



التمرين الثاني : لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً وفق : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ عند كل $n \in \mathbb{N}$.

١– أثبت بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

٢– أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابيّة ، ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

٣– ليكن S_n المجموع المعرّف بالشكل : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ اكتب S_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثالث : ليكن التابع f المعرّف على $]-5,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$ ، و المطلوب :

١– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

٢– جد عدداً حقيقيّاً A يحقّق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]1.99 , 2.01[$.

٣– جد $f'(x)$ ثمّ استنتج $g'(x)$ حيث إنّ : $g(x)= \frac{2\sin x+1}{\sin x+5}$.

رابعاً : <u>حل المسألتين الآتيتين :</u> (*100* درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

١– أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ و في جوار $-\infty$ ، و ادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d .

٢– ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و اكتب معادلات المقاربات الشاقوليّة للخط C_f .

٣– أثبت أنّ $f(x) + f(-x) = -2$.

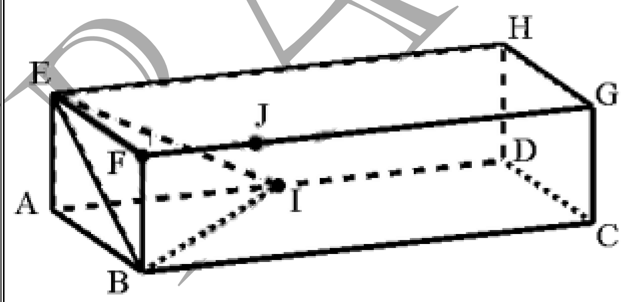
٤– استنتج أنّ C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$.

٥– ارسم ما وجدته من مقاربات ثمّ ارسم C_f .

٦– استنتج رسم C_g للتابع g المعرّف وفق : $g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

المسألة الثانية:

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = 4$ و $AE = 1$ ، و لتكن النقطة I منتصف $[AD]$ و النقطة J تحقّق العلاقة $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.



نتأمّل المعلم المتجانس $(A ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} , \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$ ، و المطلوب :

١– جد إحداثيّات رؤوس متوازي المستطيلات و النقطتين I و J .

٢– أثبت أنّ معادلة المستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$.

٣– بيّن نوع المثلّث EIB ، ثمّ احسب مساحته .

٤– احسب بعد G عن المستوي (EIB) ، و استنتج حجم رباعي الوجوه $G\text{-}EIB$.

٥– اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J و عموديّاً على المستوي (EIB) .

٦– استنتج أنّ المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

أولاً

السؤال الأول:

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$

② $f(2) = 0$ قيمة محلية صغرى

③ $f(5) = 4$ ليست قيمة محلية

((لأن المشتق لم يغير إشارته عندها))

④ $y = 2$ مقارب أفقي لـ C بجوار $(-\infty)$

$y = 6$ مقارب أفقي لـ C بجوار $(+\infty)$.

⑤ $g(x) = \ln(f(x))$

g معرف عندما: $f(x) > 0$

$\rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

السؤال الثاني:

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x(3-x)}$$

$$f(3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\sqrt{x(3-x)}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \sqrt{x(3-x)}$$

$$= 0 \in \mathbb{R}$$

حسب تعريف العدد المشتق f اشتقاقي عند $x = 3$.

السؤال الثالث:

G مركز ثقل النقاط $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$, $(D,1)$

K مركز ثقل $(C,1)$ $(D,1)$ $(B,1)$

$$(G,4) \left\{ \begin{array}{l} (A,1) \\ (K,3) \left\{ \begin{array}{l} (B,1) \\ (C,1) \\ (D,1) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

حسب الخاصة التجميعية G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(K,3)$, $(A,1)$

← النقاط K, G, A تقع على استقامة واحدة.

[1] $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KA}$

ثانياً :

السؤال الأول :

$x^2 + z^2 = 16$ ، $2 \le y \le 5$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تعبر عن اسطوانة ، محورها $(O;\vec{j})$

نصف قطرها 4

ارتفاعها 3

ومركزي قاعدتيها : $(0,2,0)$

$(0,5,0)$

السؤال الثاني :

$$Z^2 - 2(1+i)Z - 4 + 2i = 0$$

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 4(-4+2i)$$

$$= 16 > 0$$

المعادلة حلان مختلفان

$\sqrt{\Delta} = 4$

$$Z_1 = \frac{2(1+i)+4}{2} = 3 + i$$

$$Z_2 = \frac{2(1+i)-4}{2} = -1 + i$$

السؤال الثالث :

$S = \{2, 3, 5, 8, 9\}$

① عدد الأعداد $= 5 \times 4 \times 3$

$= 60$ عدد .

② يمكن اختيار الآحاد بطريقة واحدة (العدد 5)

ويمكن اختيار العشرات بخمس طرق

ويمكن اختيار المئات بخمس طرق

عدد الأعداد $= 5 \times 5 \times 1$

$= 25$ عدد .

التمرين الأول :

① B' صورة B وفق دوران مركزه A زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z_{B'} - z_A = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_A)$$

$$\boxed{z_{B'} = i z_B}$$

* C' صورة C وفق دوران مركزه A زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z_{C'} - z_A = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_C - z_A)$$

$$\boxed{z_{C'} = i z_C}$$

② $$\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = \frac{i z_B - i z_C}{z_B - z_C} = \frac{i(z_B - z_C)}{z_B - z_C} = i$$

③ $$\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = i$$

$$\left|\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}\right| = |i|$$

$$\frac{C'B'}{CB} = 1$$

$$\boxed{C'B' = CB}$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{C'B'}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg(i)$$

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{C'B'}$$

إذا $(CB) \perp (C'B')$

التمرين الثاني :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 4u_n} \end{cases}$$

① $u_n > 0$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$

$u_0 = 2 > 0$ محققة

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

$u_n > 0$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$u_{n+1} > 0$

حسب الفرض : $u_n > 0$

$1 + 4u_n > 0$

$\rightarrow \dfrac{u_n}{1+4u_n} > 0$

$u_{n+1} > 0$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أيا كانت n.

②

$$v_n = \frac{1}{U_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{1+4U_n}}$$

$$= \frac{1+4U_n}{U_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1+4U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{4U_n}{U_n}$$

$= 4$ ثابت

← v_n حسابية أساسها $r=4$

$$v_n = v_0 + n.r$$

$$v_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2} + 4n}$$

$$v_n = \frac{1}{U_n}$$

$$\rightarrow U_n = \frac{1}{v_n}$$

$$U_n = \frac{1}{\frac{1}{2}+4n}$$

$$\boxed{U_n = \frac{2}{1+8n}}$$

③

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

S_n متتالية مجاميع حسابية

• حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

• حدها الأخير $v_n = \frac{1}{2} + 4n$

• عدد الحدود $n-0+1 = n+1$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4n\right) \times \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{(1+4n)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4n^2+5n+1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty.$$

التمرين الثالث :

$f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$: $D =]-5, +\infty[$

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to 2} f(t) = \frac{5}{7}$

② $I =]1.99, 2.01[$

$\ell = 2$

$\varepsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$

$f(x) \in I \longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\left| \frac{2x+1}{x+5} - 2 \right| < \frac{1}{100}$

$\left| \frac{-9}{x+5} \right| < \frac{1}{100}$

$x \to +\infty$: $|x+5| = x+5$

$\frac{9}{x+5} < \frac{1}{100}$

$\frac{x+5}{9} > 100$

$x+5 > 900$

$x > 895$

اذاً $A = 895$

③ f اشتقاقي على $]-5, +\infty[$

$f'(x) = \frac{9}{(x+5)^2}$

$g(x) = \frac{2\sin x + 1}{\sin x + 5}$

$= f(\sin x)$

$g'(x) = f'(\sin x) \cdot (\sin x)'$

$= \frac{9}{(\sin x + 5)^2} \cdot \cos x$

رابعاً

المسألة الأولى:

$$C: f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

① $$f(x) - y_d = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - (2x-1)$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_d) = -\ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = -\ln(1) = 0$$

ح ← d مقارب مائل لـ C بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\underbrace{x+1 > x-1}$$

$\div(x-1) < 0$	$\div(x-1)$
$x \in]-\infty, -1[$	$x \in]1, \infty[$
$\frac{x+1}{x-1} < 1$	$\frac{x+1}{x-1} > 1$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \ln(1)$	$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \ln(1)$
$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$	$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$
$f(x) - y_d > 0$	$f(x) - y_d < 0$
C فوق d بجوار $(-\infty)$	C تحت d بجوار $(+\infty)$.

② f معرف واشتقاقي على $]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

$\boxed{x = -1}$ مقارب شاقولي عند $(+\infty)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

$\boxed{x = 1}$ مقارب شاقولي عند $(-\infty)$.

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(3) $f(x)+f(-x) \overset{?}{=} -2$

$l_1 = f(x)+f(-x)$

$= 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2(-x)-1-\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$

$= 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2x-1-\ln\left(\frac{1-x}{-(x+1)}\right)$

$= -2-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$= -2-\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$

$= -2-\left[\ln\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)\right]$

$= -2-\ln(1)$

$= -2 = l_2$ محقق.

(4) إثبات أن $I(0,-1)$

1] نثبت أن: $2x_0-x = -x \in D$

وهذا الشرط محقق وضوحاً

$x\in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

$\to -x\in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

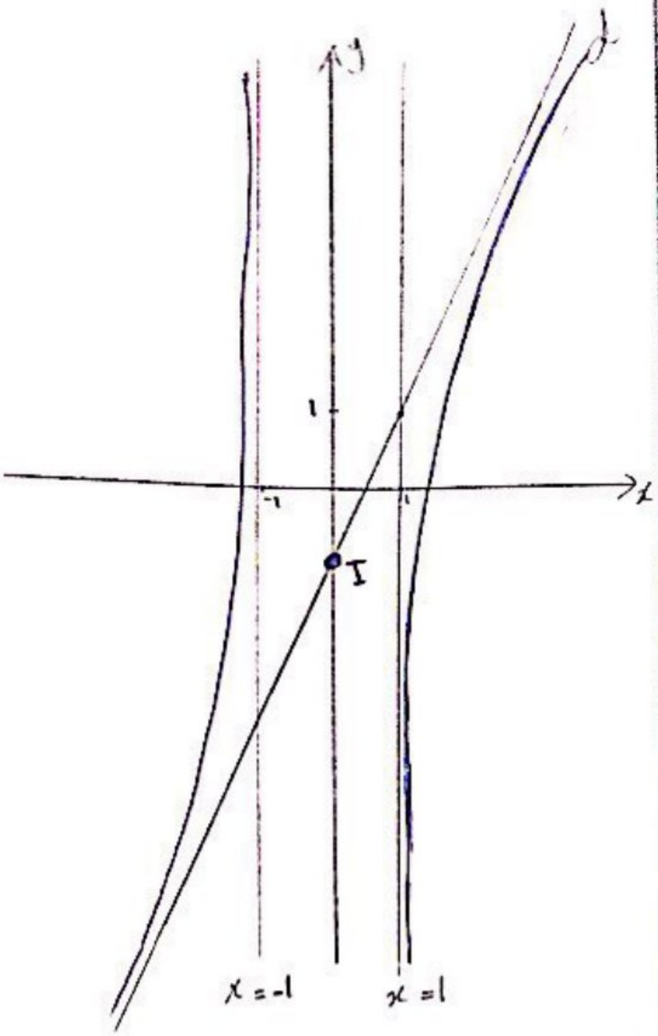
2] $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$

ولدينا $f(-x)+f(x)=-2=-2(1)$

وهو محقق

إذاً النقطة $I(0,-1)$ مركز تناظر للمنحنى C.

(5)



$d: y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1

(6) $g(x) = -2x+1-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$= -\left[2x-1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$

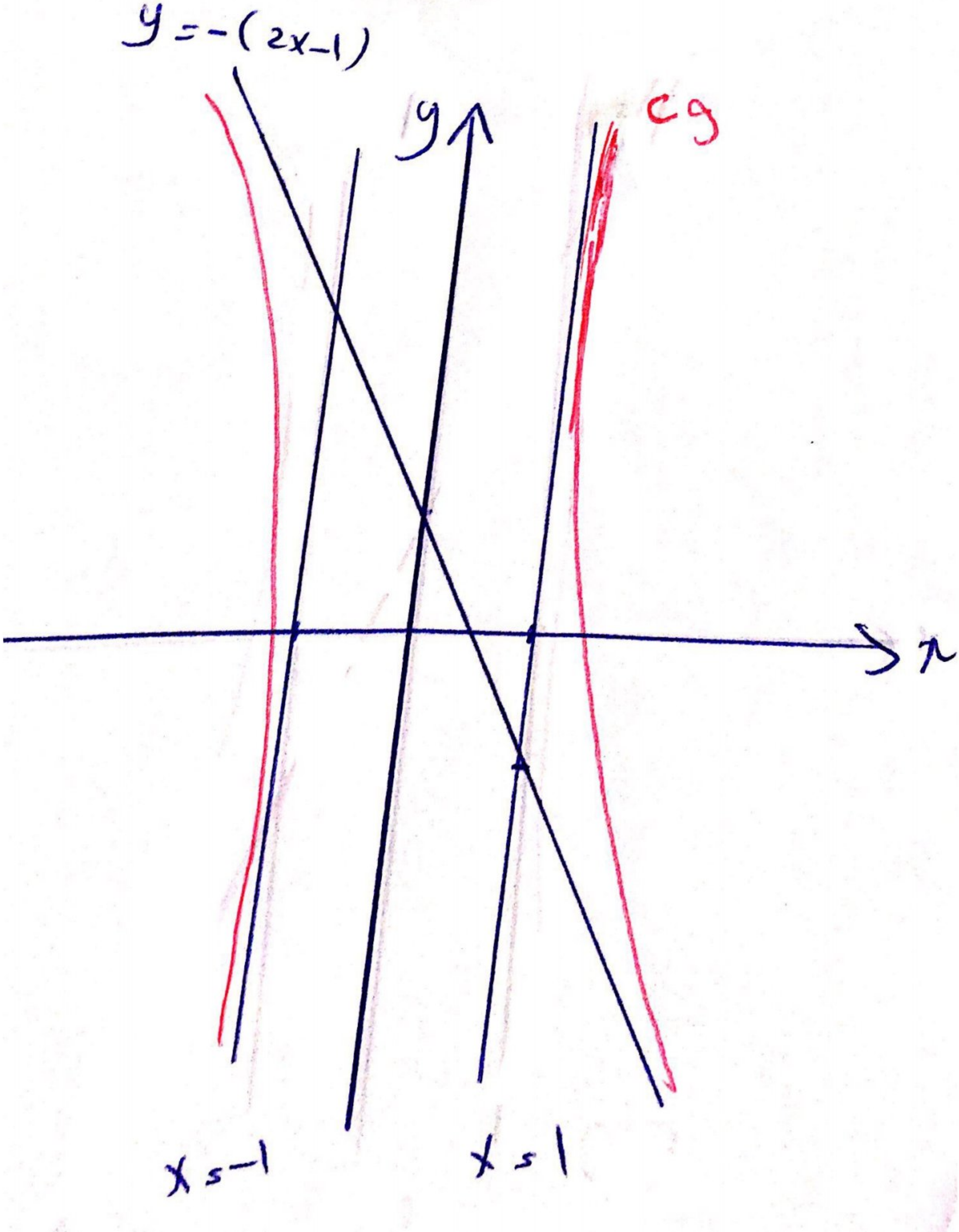
$= -\left[2x-1+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}\right]$

$= -\left[2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$

$= -f(x)$

$\to C_g$ نظير C_f بالنسبة لـ xx'

(7)



y = -(2x-1)
y
cg
x
x = -1
x = 1

المسألة الثانية :

$$(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \vec{AE})$$

(1)

$A(0,0,0)$ $C(2,4,0)$

$B(2,0,0)$ $F(2,0,1)$

$D(0,4,0)$ $G(2,4,1)$

$E(0,0,1)$ $H(0,4,1)$

I منتصف AD ⟵ $I(0,2,0)$

J تحقق $\vec{FJ}=\frac{1}{4}\vec{FG}$ ⟵ $J(2,1,1)$

(2)

$P: x+y+2z-2=0$

* نعوض E في P: $0+0+2-2=0$
محققة

إذا E تنتمي إلى المستوي P.

* نعوض I في P: $0+2+0-2=0$
محققة

إذا I تنتمي إلى المستوي P.

* نعوض B في المستوي P: $2+0+0-2=0$
محققة

إذا B تنتمي إلى المستوي .

إذا P هي معادلة المستوي (EIB).

(3)

$\vec{EI}(0,2,-1) \rightarrow EI=\sqrt{5}$

$\vec{EB}(2,0,-1) \rightarrow EB=\sqrt{5}$

$\vec{BI}(2,-2,0) \rightarrow BI=2\sqrt{2}$

المثلث EIB متساوي الساقين

رأسه E

ارتفاعه EE' حيث E' منتصف [BI]

$E'(1,1,0)$

$\vec{EE'}(1,1,-1) \rightarrow EE'=\sqrt{3}$

$$S_{EIB}=\frac{1}{2}.BI \times EE'$$

$$=\frac{1}{2}.2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

$$=\sqrt{6}$$

(4)

$$dist(G,(EIB))=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$V=\frac{1}{3}.S.h$$

$=\frac{1}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{6}$ $\quad : h=dist(G,(EIB))$

$=\frac{6}{3}=2.$

(5)

d

نقطة: $J(2,1,1)$

شعاع توجيه: $\vec{u} = \vec{n}_{(EIB)}(1,1,2)$

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

(6) J' مسقط J على (EIB)

J' ينتمي لـ d و لـ (EIB)

نعوض المعادلات الوسيطية لمستقيم d في المستوي (EIB):

$$(2+t) + (1+t) + 2(1+2t) - 2 = 0$$

$$3 + 6t = 0 \rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{2}}$$

نعوض في d:

$$x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$J'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

نكتب معادلة القطعة المستقيمة

$[BI]$

نقطة: $B(2,0,0)$

شعاع توجيه: $\vec{u} = \vec{BI}(-2,+2,0)$

$$[BI]: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = +2t \\ z = 0 \end{cases} ; t \in [0,1]$$

نقارن احداثيات J' مع المعادلات الوسيطية للقطعة BI:

$$2 - 2t = \frac{3}{2} \rightarrow t = +\frac{1}{4}$$

$$+2t = \frac{1}{2} \rightarrow t = +\frac{1}{4}$$

$0 = 0$ محققة

$t = +\frac{1}{4} \in [0,1]$ محققة

اذا J' تقع على القطعة المستقيمة BI.