هام

مثال معادلة كرة مركزها المبدأ

نتأمّل، في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النّقطة A الّتي إحداثيّاتها $(1,2,-4)$.

① جد معادلةً للكرة S الّتي مركزها O ونصفُ قطرها يساوي 5.

② جد معادلةً للكرة S' الّتي مركزها O وتمر بالنّقطة A.

لإيجاد معادلة كرةٍ، يمكن استعمال التّعريف الآتي : الكرة S الّتي مركزها O ونصفُ قطرها
، هي مجموعة النّقاط M من الفراغ الّتي تحقّق $OM^2 = R^2$.

الحل

① الكرة S الّتي مركزها O ونصفُ قطرها 5، هي مجموعة نقاط الفراغ الّتي تبعد عن O مسافة
ساوي 5. فالقولُ إنَّ النّقطةَ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى الكرة S، يكافئ القولَ إنَّ $OM = 5$،
$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25$. ويعني هذا أنَّ معادلةً للكرة S هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

② نصف قطر الكرة S' يساوي OA، ولمّا كان $OA^2 = 1^2 + 2^2 + (-4)^2 = 21$. استنتجنا أنّ
$x^2 + y^2 + z^2 = 2$ هي معادلة للكرة S'.

تدرّبْ

③ لدينا، في معلمٍ للفراغ، النّقاط $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,2)$ و $C(1,2,-2)$.

❶ جد إحداثيّات النّقطة I منتصف $[AB]$.

❷ جد إحداثيّات النّقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C.

❸ جد إحداثيّات النّقطة M الّتي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

❹ جد إحداثيّات النّقطة N الّتي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$.

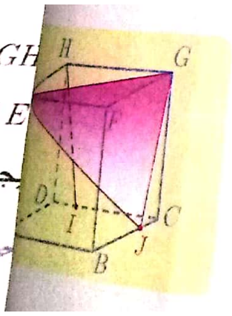
مثال إثبات وقوع نقاط من الفراغ في مستوٍ واحد

$ABCDEFGH$ مكعّب. أثبت أنَّ النّقطة K المعرّفة بالعلاقة

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG). ارسم النّقطة K.

فكرة الحل



لنتأمّل المكعّب $ABCDEFGH$. النَّقطة I من الحرف $[CD]$ تُحقّق المساواة $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ ، والنَّقطة J من $[BC]$ تحقّق المساواة $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) .

نحو الحلّ

13 نتأمّل في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النّقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

① أثبت أنّ النّقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النّقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)؟

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النّقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد؟

16 جِدْ على محور الفواصل نقطةً C متساوية البُعد عن النّقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$.

① أيمكن أن تنطبق إحدى النّقطتين I و J على الأخرى؟

② أثبت أنّه، أيّاً كانت النّقطة M من الفراغ، كان :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

③ جد مجموعة نقاط الفراغ M الّتي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

25 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ ، والنّقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالتّرتيب. والنّقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنّقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$.

① أثبت أنّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

② أثبت أنّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

③ استنتج أنّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعيّن طبيعة الرّباعي $ILJK$.

1 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النّقطة $A(2,2,-1)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P} : x - y + z = 0$$

$$\mathcal{Q} : 3x + z - 1 = 0$$

احسب بُعد A عن المستقيم d الّذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

1 نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النّقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P} : x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\mathcal{Q} : x + y + z = 0$$

① أثبت أنَّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان.

② احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

③ استنتج بُعد النّقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

19 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة الّتي مركزها Ω وتمر بالنّقطة A.

① $\Omega(0,0,1)$ و $A(1,1,1)$. ② $\Omega(0,5,-1)$ و $A(1,-2,3)$.

20 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة الّتي مركزها Ω ونصف قطرها r.

① $\Omega(1,2,3)$ و $r=2$. ② $\Omega(0,5,-1)$ و $r=\sqrt{3}$.

16 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النّقاط:

$A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$

① أثبت أنّ النّقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوى (CDE).

22 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النّقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+3z=5$.

اكتب معادلة للكرة الّتي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

23 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النّقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النّقاط $M(x,y,z)$ الّتي تُحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

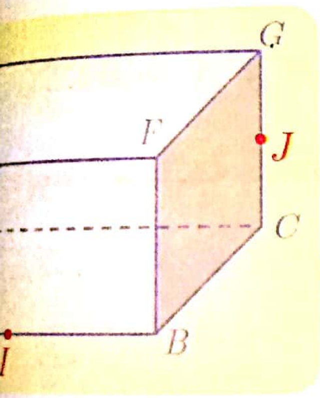
③ عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

④ عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

افكار شاملة دراسة افكارها



11 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$.

نتأمّل المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

① احسب المسافتين DJ و IJ.

② أثبت أنّ المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان. واحسب $\cos \widehat{IJD}$.

③ a. أعطِ معادلة للمستوي (DIJ).

b. احسب بُعد H عن المستوي (DIJ).

④ احسب: حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

⑤ a. أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)

b. احسب، إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI).

c. جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI).