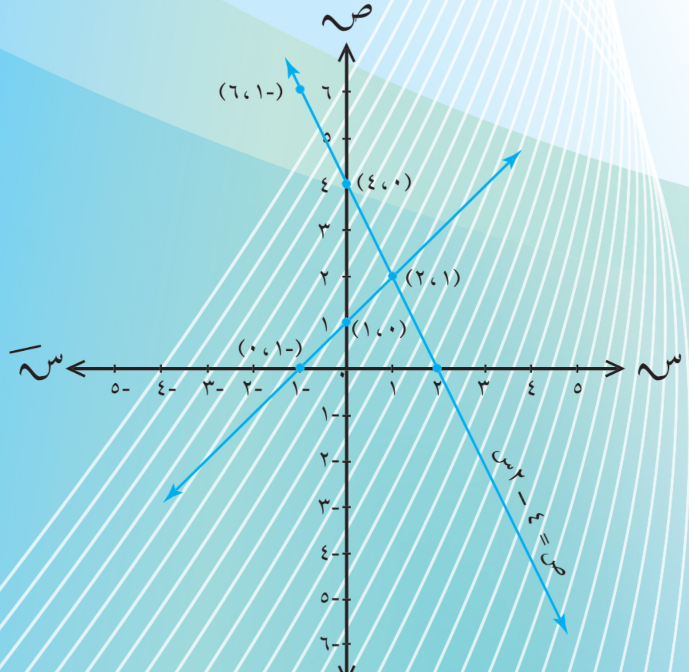
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الأول)



١٤٣٦هـ/ ٢٠١٥م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني بخدمة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. محمد شرف الدين

أ. خديجة عبدالهادي

أ. رقية الأهدل

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الأول)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حُمد الحوري.	د. محمد عبدالرب محمد بشر.
د. ردمان محمد سعيد.	د. علي شاهر نعمان القرشي.
د. منصور علي صالح عطاء.	د. محمد رشاد الكوري.
أ. مريم عبدالجبار سلمان.	د. عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي.
د. محمد علي مرشد.	أ. سالمين محمد باسلوم.
أ. يحيى بكار مصفر.	أ. ذا النون سعيد طه.
أ. عبدالباري طه حيدر.	أ. مصطفى عبد الواحد العبسي.
أ. عبده أحمد سيف.	أ. جميلة إبراهيم أحمد.
د. علي عبدالواحد.	أ. أحمد سالم باحويرث.

فريق المراجعة:

أ. جميلة إبراهيم الرازحي.	أ/ شرف عثمان الخامري.
أ/ تهاني سعيد الحكيمي.	أ/ مختار حيدر هزاع.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

الصف والتصميم : جلال سلطان علي إبراهيم.
إدخال التصويبات : علي عبدالله علي السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

النشيد الوطني

رددي أيتهــا الدنيــا نشــيدي ردديـــه وأعــيــدي وأعــيــدي
واذكـري في فـرحتي كـل شهيدٍ وامنـحيـه حُـللاً مِـنْ ضوءِ عيـدي

رددي أيتهــا الدنيــا نشــيدي
رددي أيتهــا الدنيــا نشــيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عـهدٌ عـالـقٌ فـي كـل ذِمّــة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس اُخْـلُـدِي خَـافِقَـةً فـي كـل قِمّــة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُـريـنــي لَـكِ يـا أكـرمَ أمــة

عشــتُ إيـمــانـي وحبّـي أُمميًا
ومســيري فـوق دربـي عـربيـا
وسيبـقــى نبـضُ قـلـبي يمنيـا
لـن تـرى الـدنيا عـلى أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
د/ عبدالله سالم لملس.	أ/ علي حسين الحيمي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	د/ إشراق هائل عبدالجليل الحكيمي.
د/ فضل أحمد ناصر مطلي.	أ/ محسن صالح حسين اليافعي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
د/ محمد عمر سالم باسليم.	أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي.	أ. د/ شكيب محمد باجرش.
أ. د/ محمد حاتم المخلافي.	أ. د/ صالح عوض عرم.
أ. د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
د/ عبده أحمد علي النزيلي.	أ. د/ إبراهيم محمد الحوثي.
أ/ محمد عبدالله زبارة.	أ/ عبدالله علي أسماعيل الرازحي.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

بسم الله الرحمن الرحيم

تقــديــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـة:

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين.

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف الثامن يأتي كتاب الصف التاسع لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبة مادة الرياضيات معروضة لهم بأساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للاستمرار في التعليم.

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفــون

المحتويات

تابع المحتويات

الموضوع	الصفحة

الوحدة الأولى

المجموعات والعلاقات

١ : ١ كتابة المجموعة بالصفة المميزة

تأمل المجموعتين التاليتين :

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ص هي مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ٢ والأصغر من ٨ . ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن : المجموعة س مكتوبة بطريقة السرد أمّا المجموعة ص مكتوبة بالصفة المميزة وهو الأسلوب اللفظي ، كما أن هناك أسلوباً آخر لكتابة المجموعتين السابقتين بالصفة المميزة وهو الأسلوب الرمزي .

فمثلاً ، تُكتب : س = { ا : ا عدداً زوجياً ، ١ > ا > ٧ } . وتُقرأ س مجموعة الأعداد ا حيث ا عدد زوجي محصور بين ١ ، ٧ والرمز (:) يُقرأ « حيث » .

وبالمثل تُكتب ص = { ب : ب عدداً فردياً، ٢ > ب > ٨ } . وتُقرأ ص مجموعة الأعداد ب حيث ب عدد فردي محصور بين ٢ ، ٨ .

مثـــال اكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة رمزياً :

ا) س = { ا ، ب ، ت ، ث ، ... ، ي } .

ب) ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } .

جـ) ع = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ... } .

الحـل :

أ) تلاحظ أن سـ هي مجموعة الحروف الهجائية العربية، ونكتب ذلك بالصفة المميزة رمزياً على النحو التالي :

سـ = { أ : أ أحد الحروف الهجائية العربية }

ب) تلاحظ أن الصفة المميزة لعناصر المجموعة صـ هي : أعداد صحيحة محصورة بين ٢ ، ٦ ، أو أرقام العدد ٥٤٣ ، . . . الخ .

نكتفي في الحل بذكر صفة واحدة فقط من الصفات المميزة ، فنكتب مثلاً :

صـ = { أ : أ ∈ صـ ، ٢ < أ < ٦ } .

جـ) ع = { ب : ب عدداً زوجياً طبيعياً ، ب < ٥ } .

تماريـن ومسائـل

[١] اكتب كلاً من المجموعات الآتية بالصفة المميزة رمزياً :

سـ = { محرم ، صفر ، ربيع أول ، . . . ، ذي الحجة }

صـ = { ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٩ }

ل = { ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ }

م = { ل ، ع ، ب } .

[٢] اكتب بذكر الصفة المميزة رمزياً كلاً من المجموعات التالية :

أ) مجموعة عواصم العالم ، ب) مجموعة مضاعفات العدد ٩ .

جـ) مجموعة الأعداد الفردية التي تقع بين العددين ١٦ ، ٢٦ .

ء) مجموعة المواد التي تدرسها في المدرسة .

[٣] اكتب كلاً من المجموعات التالية بطريقة السرد :

س = { س : س أحد حواس جسم الإنسان }

ص = { س : س ∈ ط ، س + ٥ < ٩ }

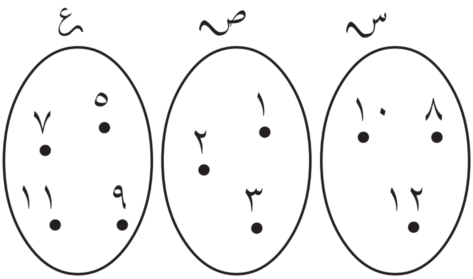
ع = { ص : ص عدداً فردياً ، ٤ < ص < ١٠ }

ل = { م : م رقم من أرقام العدد ٤٧٨٧ }

[٤] مستعيناً بالشكل (١–١) .

اكتب المجموعات س ، ص ، ع

بطريقة السرد ، ثم بطريقة الصفة المميزة .



شكل (١–١)

[٥] أكمل الجدول التالي بما يناسب الطريقة المطلوبة :

طريقة السرد	طريقة الصفة المميزة رمزياً
{شمال، جنوب، شرق ، غرب}	
	{أ: أ عدد صحيح، –٢ < أ < ٣}
{ ق ، ل ، م }	
	{ ل : ل شهر من أشهر السنة الميلادية الذي يبدأ بحرف « ي » }
هـ { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ }	

[٦] إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٦} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣} ، اكتب أولاً بطريقة السرد ، ثم بالصفة المميزة كلاً من :

أ) س ∩ ص   ب) س ∪ ص   جـ) س × ص

[٧] ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي : [ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، ص مجموعة الأعداد الصحيحة] .

أ) ٣ ∈ { س : س ∈ ط ، س عدد زوجي } .   (   )

ب) {٣ ، –٥} ⊂ { أ : أ ∈ ص ، أ < ٥ } .   (   )

جـ) { س : س ∈ ص ، س ≤ ٥٥ } ⊂ ص .   (   )

١ : ٢ مجموعة الفرق والمجموعة المتممة

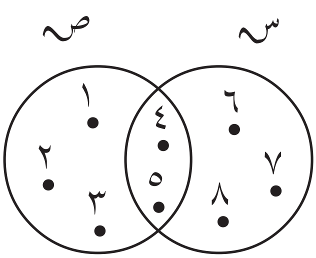
سبق أن تعلمت عمليتين على المجموعات هما التقاطع والاتحاد ، وفي هذا الدرس تتعلم عملية الفرق بين مجموعتين ، وعملية متممة مجموعة وتدرس أيضاً قانوني دي مورجان .

أولاً : الفرق بين مجموعتين :

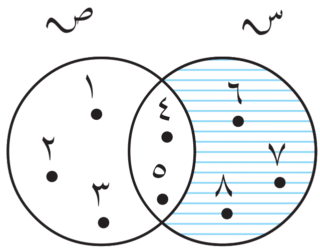
انظر الشكل (١ – ٢) تلاحظ أنه يمثل المجموعتين :

س = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} ،

ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ،



شكل (١ – ٢)



شكل (١ – ٣)

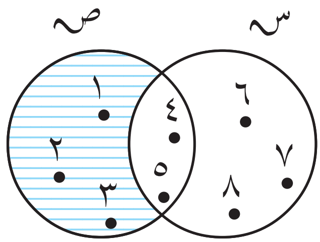
ماذا تمثل المنطقة المظللة في شكل (١ – ٣)؟

إنها تمثل مجموعة تتكون من العناصر التي تنتمي إلى س ولاتنتمي إلى ص ، ومثل هذه المجموعة تسمى « المجموعة س فرق المجموعة ص »

ونرمز لها بالرمز « س / ص » ، حيث أن :

س / ص = { ا : ا ∈ س ، ا ∉ ص } ،

أي أن : س / ص = { ٦ ، ٧ ، ٨ } .



شكل (١ – ٤)

وبالمثل ماذا تمثل المنطقة المظللة في شكل (١ – ٤) ؟

إنها تمثل مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ص ولا تنتمي إلى س ، فهل تمثل ص / س

حيث أن : ص / س = { ا : ا ∈ ص ، ا ∉ س } ،

أي أن : ص / س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ،

المجموعة س فرق المجموعة ص ، هي مجموعة عناصرها تنتمي إلى المجموعة س ولا تنتمي إلى المجموعة ص ونرمز لها بالرمز : س / ص.

س / ص = { ا : ا ∈ س ، ا ∉ ص }

مثال (١)

إذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ص = { ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ } ،

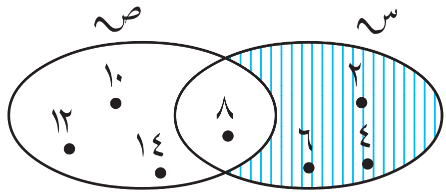
أوجد : ا) س / ص ، ومثّلها بأشكال ڤن .

ب) ص / س ، ومثّلها بأشكال ڤن .

الحل أ) س / ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } / { ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ }

= { أ : أ ∈ س ، أ ∉ ص }

= { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، وتمثلها المنطقة المظللة في الشكل (١–٥).

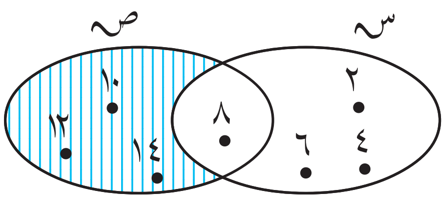


شكل (١–٥)

ب) ص / س = { ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ } / { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

= { أ : أ ∈ ص ، أ ∉ س }

= { ١٠ ، ١٢ ، ١٤ } .



شكل (١–٦)

و تمثلها المنطقة المظللة في الشكل (١–٦) .

قارن بين س / ص ، ص / س ماذا تلاحظ ؟

ثانياً : المجموعة المتممة :

غالباً نرمز للمجموعة الشاملة بالرمز « ش » فإذا كانت ش هي مجموعة طلبة فصلك وكانت س هي مجموعة طلبة فصلك المشتركين في الإذاعة المدرسية فإن مجموعة طلبة فصلك غير المشتركين في الإذاعة المدرسية تسمى متممة المجموعة س باعتبارها مجموعة تتمم بقية طلبة الفصل « أي تتمم بقية عناصر المجموعة الشاملة »

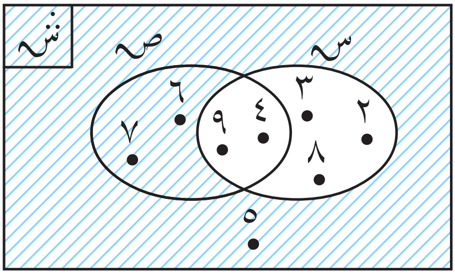
المجموعة المتممة للمجموعة س هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ش ولا تنتمي إلى س ، ويرمز لها بالرمز س′ . أي أن :

س′ = { أ : أ ∈ ش ، أ ∉ س } .

تلاحظ أن المجموعة المتممة للمجموعة س هي نفسها مجموعة الفرق بين ش ، س أي أن : س′ = ش / س .

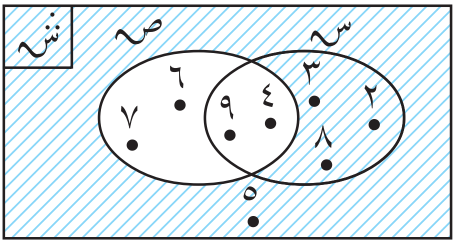
مثال (٢) إذا كانت : ش = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩ } ،
س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ }
أوجد كلاً من س̅ ، ص̅ ، ومثلّهما بأشكال فن.

الحل : س′ = ش / س
= { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩ } / { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩ }
= { ٥ ، ٦ ، ٧ } ، وتمثلها المنطقة المظللة في الشكل (١–٧).



شكل (١ – ٧)

ص′ = ش / ص
= { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩ } / { ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ }
= { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ } ، وتمثلها المنطقة المظللة في الشكل (١– ٨).



شكل (١ – ٨)

تدريب إذا كانت ش = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، س = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

أوجد : أ) س′ . ب) س″ . جـ) قارن المجموعتين س ، س″ .

ماذا تلاحظ؟

تلاحظ أن : س″ = س

أي أن : متممة المتممة للمجموعة س هي المجموعة س نفسها .

ثالثاً : قانونا دي مورجان :

نشـــاط

إذا كانـت ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ،

س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد :

أ) س ∩ ص ب) س ∪ ص جـ) س′

ء) ص′ هـ) س′ ∩ ص′ و) س′ ∪ ص′

ز) (س ∪ ص)′ ح) (س ∩ ص)′

ط) قارن (هـ) ، (ز) ، وكذلك (و) ، (ح) . ماذا تلاحظ ؟

بمقارنة إجابتي (هـ) ، (ز) تلاحظ أنهما متساويتان ، وبمقارنة إجابتي (و) ، (ح) تلاحظ أنهما متساويتان أيضاً .

أي أن :

(١) (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′ .

(٢) (س ∩ ص)′ = س′ ∪ ص′ .

ويُسمَّى هذان القانونان بقانوني دي مورجـــان .

تماريـن ومسائـل

[١] إذا كانت : أ = {٢ ، ٣} ، ب = {٣ ، ٤} ، جـ = {٤ ، ٥}

أوجد كلاً مما يلي ومثّله بأشكال فن :

أولاً : أ / ب ثانياً : ب / جـ ، ثالثاً : جـ / ب .

[٢] إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، ص = {٣ ، ٤ ، ٨ }

أوجد ما يلي : أ) س / ص ، ب) ص / س

جـ) (س / ص) ∪ س د) (س / ص) ∩ س

هـ) (ص / س) ∪ س و) (ص / س) ∩ س

[٣] إذا كانت المجموعة الشاملة هي مجموعة الأرقام في النظام العشري ،

ما متممة مجموعة أرقام العدد ٢٩٩٧٣٥ ؟

[٤] مستعيناً بالشكل (١–٩) .

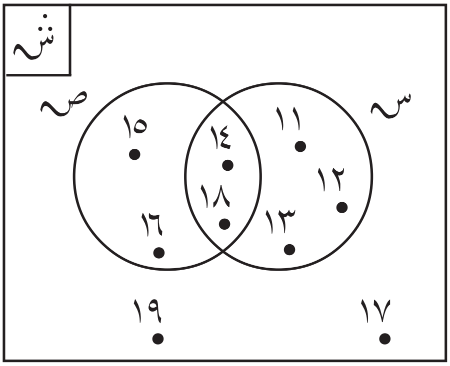
أوجد كلاً مما يلي :

أ) ش ب) ص′

جـ) (س ∩ ص)′

د) (س ∪ ص)′

هـ) ش / س



شكل (١ – ٩)

[٥] إذا كانـــت : ش = { أ : أ ∈ ط ، أ < ٩ }

س = {ب : ب عاملاً من عوامل العدد ٦ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٧ }

اكتب ش ، س بطريقة السرد ، ثم أوجد :

أ) س′ ب) ص′ جـ) س′ ∪ ص′

ء) (س ∩ ص)′ .　　　　هـ) س′ / ص′ .

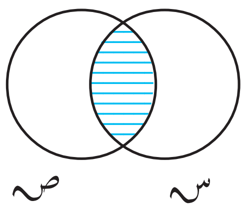
[٦] إذا كانت : ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٣ } ، ع = { ١ ، ٤ ، ٥ } أوجد :

أ) س′ / ص　　　ب) ع / س　　　جـ) ش′

ء) ص′　　　هـ) (ص / س)′ ∩ (ع / ص)′

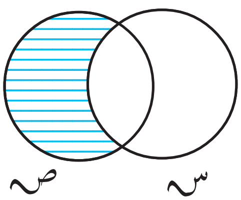
[٧] اكتب المجموعات الممثلة بالمناطق المظللة في كل شكل من أشكال ڤن التالية :

أ)



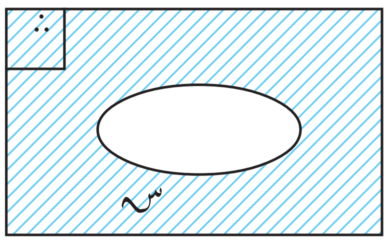
شكل (١ – ١٠ أ)

ب)



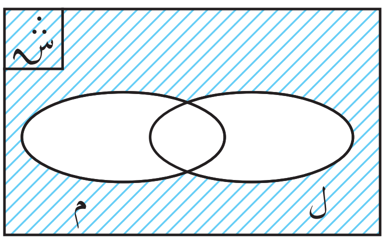
شكل (١ – ١٠ب)

جـ)



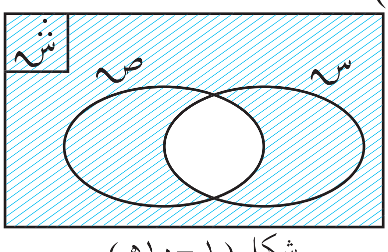
شكل (١ – ١٠جـ)

ء)



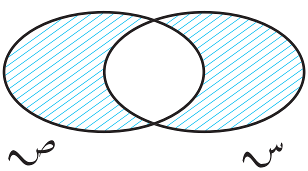
شكل (١ – ١٠ ء)

هـ)



شكل (١ – ١٠هـ)

و)



شكل (١ – ١٠و)

١ : ٣ العلاقة المتعدّية

تذكر : العلاقة ع على المجموعة س هي مجموعة جزئية من حاصل ضرب المجموعتين س × س .

أي أن: ع ⊂ س × س .

العلاقة الانعكاسية :

« تكون العلاقة ع انعكاسية على المجموعة س ، إذا كان لكل ا ∈ س فإن (ا ، ا) ∈ ع » .

العلاقة المتناظرة :

« تكون العلاقة ع متناظرة على المجموعة س، إذا كان لكل (ا ، ب) ∈ ع، فإن (ب ، ا) ∈ ع » ، حيث ا ، ب ∈ س .

مثال (١) إذا كانت : س = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، بيّن نوع العلاقات التالية (انعكاسية ، متناظرة) مع ذكر السبب :

ا) ع$_1$ = { (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) } ،

ب) ع$_2$ = { (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٥) } ،

جـ) ع$_3$ = { (٤ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) } ،

ء) ع$_4$ = { (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) } .

الحــل: ا) ع$_1$ انعكاسية لأن كل عنصر في س ارتبط بنفسه .

ع$_1$ ليست متناظرة ،لأن (٤ ، ٥) ∈ ع$_1$ ، ولكن (٥ ، ٤) ∉ ع$_1$.

ب) ع٢ ليست انعكاسية ، لأن ٦ ∈ س ، ولكن (٦ ، ٦) ∉ ع٢ .

ع٢ متناظرة ، لأن (٥ ، ٦) ∈ ع٢ وأيضاً (٦ ، ٥) ∈ ع٢ .

جـ) ع٣ انعكاسية ومتناظرة ، لماذا ؟

ء) ع٤ ليست انعكاسية وليست متناظرة ، لماذا ؟

وفي هذا الدرس سنتعرف على نوع آخر من العلاقات على المجموعات .

تأمل ما يلي :

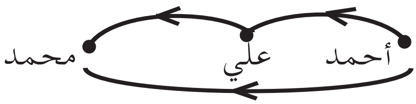
إذا كان هناك ثلاثة أصدقاء : أحمد ، علي ، محمد ، وكان أحمد أطول من علي ، وعلي أطول من محمد ، فإن ذلك يؤدي بالضرورة إلى أن أحمد أطول من محمد .

وإذا أردنا كتابة العلاقة « أطول من » بالأزواج المرتبة ستكون كالتالي :

ع = { (أحمد ، علي) ، (علي ، محمد) ، (أحمد ، محمد) } ،

ويمكن تمثيلها كالتالي :

أ) المخطط السهمي [الشكل (١ – ١١أ)] .



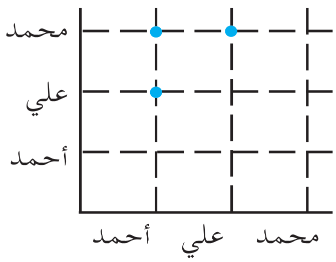
شكل (١ – ١١أ)

ب) الرسم البياني [الشكل (١ – ١١ب)]

ويتم ذلك على النحو التالي :

– حدّد المساقط الأولى للأزواج المرتبة على محور أفقي والمساقط الثانية على محور رأسي .

– عيّن النقاط التي تمثل الأزواج المرتبة لهذه العلاقة .



شكل (١ – ١١ب)

وإذا كانت ع علاقة « أخ » .

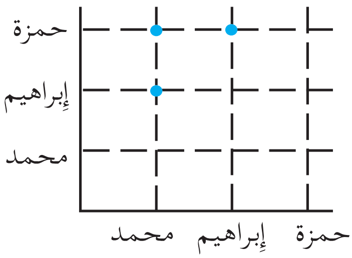
إذا كان محمد أخا إبراهيم ، إبراهيم أخا حمزة ،

فإن محمد أخو حمزة .

∴ ع = { (محمد ، إبراهيم) ، (إبراهيم ، حمزة) ، (محمد ، حمزة) } .

ويمكن تمثيلها في الشكلين (١ – ١٢ أ) ، (١ – ١٢ ب) :

شكل (١ – ١٢أ)



شكل (١ – ١٢ب)

مثل هذه العلاقات « أطول من » ، « أخ »، وعلاقات أخرى مثل « يوازي » « أصغر من » ، « أكبر من » . . . الخ تسمى علاقات متعدية ، وتسمى أيضاً « انتقالية »

« تكون العلاقة ع متعدية على المجموعة س : إذا كان لكل (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ∈ ع فإن (أ ، جـ) ∈ ع ، حيث أ ، ب ، جـ ∈ س .

مثال (٢) إذا كانت : ص = { ٧ ، ٤ ، ٢ } ، ع علاقة « أكبر من » على المجموعة ص ، فهل ع علاقة انعكاسية ، متناظرة ، متعدية على المجموعة ص؟ اذكر السبب .

الحـل : ع = { (٧ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٧ ، ٢) }

ع ليست انعكاسية ، لأنه لم يرتبط كل عنصر في ص بنفسه .

ع ليست متناظرة ، لأن (٧ ، ٤) ∈ ع ، ولكن (٤ ، ٧) ∌ ع .

∵ (٧ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ∈ ع نجد أن (٧ ، ٢) ∈ ع ،

∵ (٤ ، ٢) ∈ ع ، ولايوجد أي زوج مرتب آخر مسقطه الأول ٢،

∵ (٧ ، ٢) ∈ ع ، ولايوجد أي زوج مرتب آخر مسقطه الأول ٢ .

لهذا لايوجد ما ينقض شرط التعدي ،

∴ ع علاقة متعدية .

مثال (٣) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، $ع_١$ ، $ع_٢$ علاقتان معرفتان على المجموعة س ، حيث :

$ع_١$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

$ع_٢$ = { (٣ ، ٢) }

أ) هل $ع_١$ ، $ع_٢$ علاقتان متعديتان ؟ لماذا ؟

ب) ارسم المخطط السهمي والبياني للعلاقة $ع_١$.

الحـل : أ) لكي نقرر ما إذا كانت ع علاقة متعدية على المجموعة س أم لا ، فإنه يجب فحص كل الحالات التي يكون فيها (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ∈ ع ، أ ≠ ب ، ب ≠ جـ ، أي مختلفي المسقطين .

نبدأ بالزوج المرتب (١ ، ٢) ، ونأخذ كل الأزواج الأخرى التي مساقطها الأولى ٢ ، إن وجدت :

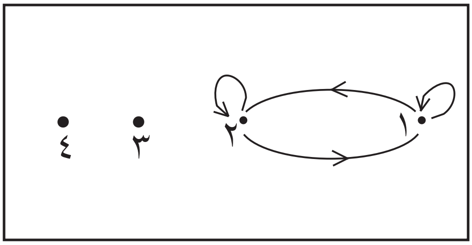
فنجد أن (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ∈ $ع_١$ ونجد أن (١ ، ١) ∈ $ع_١$ ، ثم الزوج

(٢ ، ١) ونأخذ كل الأزواج الأخرى التي مسقطها الأول ١ ، إن وجدت :

فنجد أن (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ∈ ع١ ونجد أن (٢ ، ٢) ∈ ع١ إذن العلاقة ع١ متعدية .

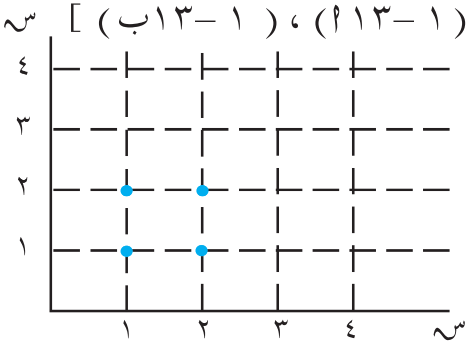
ع٢ علاقة متعدية لأن (٣ ، ٢) جواب شرط لفعل شرط لم يذكر .

ب) ويمكن تمثيلها كالتالي : الشكلين (١ –١٣أ) ، (١ –١٣ب)]



المخطط السهمي للعلاقة ع١

شكل (١ –١٣أ)

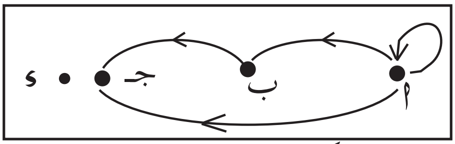


الرسم البياني للعلاقة ع١

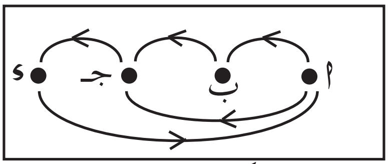
شكل (١ –١٣ب)

«تكون العلاقة ع غير متعدية على المجموعة س إذا وُجد زوجان مرتبان (أ،ب) ، (ب ، جـ) ∈ ع ، ولكن (أ ، جـ) ∉ ع بحيث أ ، ب ، جـ ∈ س » .

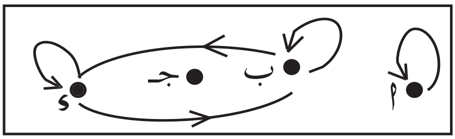
مثال (٤) إذا كانت ص = { أ ، ب ، جـ ، ء } ، فبين أيّاً من المخططات السهمية [الأشكال (١ –١٤أ) ، (١ –١٤ب) ، (١ –١٤جـ)] انعكاسية ، متناظرة ، متعدية على ص ، اذكر السبب .



شكل (١ –١٤أ)



شكل (١ –١٤جـ)



شكل (١ –١٤ب)

الحـل : نكتب كل الأزواج المرتبة ، التي تمثلها كل علاقة :

الشكل (١ –١٤أ) يمثل $ع_١$ = {(أ ، أ) ، (أ ، ب)، (ب ، جـ) ، (أ ، جـ)}

الشكل (١ –١٤ب) يمثل $ع_٢$ = {(أ ، أ)، (ب ، ب) ، (ب ، ب)، (ب ، ء)، (ء ، ب)، (ء ، ء)}

الشكل (١ –١٤جـ) يمثل $ع_٣$ = {(أ ، ب)، (ب ، جـ) ، (جـ ، ء) ، (أ، جـ)، (ء ، أ)}

الآن نفحص كل علاقة لمعرفة نوعها .

– $ع_١$ ليست انعكاسية وليست متناظرة ، لماذا ؟

ثم نفحص كل الأزواج المرتبة المختلفة المساقط .

(أ ، ب)، (ب ، جـ) $\in$ ع ونجد أن (أ ، جـ) $\in$ ع

وأما (ب ، جـ) ، فلايوجد أي زوج مرتب آخر مسقطه الأول جـ

وبالمثل بالنسبة للزوج المرتب (أ ، جـ) لايوجد أي زوج مرتب آخر مسقطه الأول جـ ، ولهذا لا يوجد ما ينقض شرط التعدي .

$\therefore$ العلاقة $ع_١$ علاقة متعدية .

– $ع_٢$ ليست انعكاسية ولكنها متناظرة . لماذا ؟

وبالنسبة لعلاقة التعدي نفحص كل الأزواج المرتبة المختلفة المساقط .

(ب، ء) ، (ء، ب) $\in ع_٢$ ونجد أن (ب ، ب) $\in ع_٢$

(ء ، ب) ، (ب ، ء) $\in ع_٢$ ونجد أن (ء ، ء) $\in ع_٢$

$\therefore$ $ع_٢$ علاقة متعدية .

– $ع_٣$: ليست انعكاسية ، وليست متناظرة وليست متعدية . لماذا ؟

تمارين ومسائل

[١] إذا كانت ك = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فبيّن نوع العلاقات التالية على ك من حيث كونها متعدية أو ليست متعدية ، اذكر السبب .

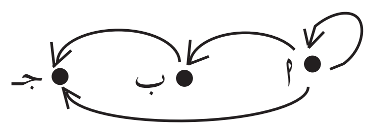
ع$_1$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ١)}

ع$_2$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (١ ، ٣)}

ع$_3$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)} ، ع$_4$ = {(٢ ، ٣) ، (٢ ، ٢)}

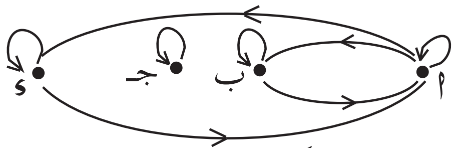
ع$_5$ = {(١ ، ٣)} ، ع$_6$ = ك × ك

[٢] أي العلاقات الموضحة بالمخططات السهمية [الأشكال (١–١٥أ ، ب ، جـ ، ء)] متعدية ؟ لماذا؟

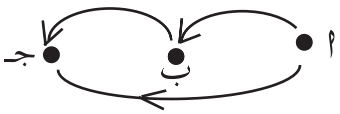


شكل (١ – ١٥أ)

شكل (١ – ١٥ب)



شكل (١ – ١٥جـ)



شكل (١ – ١٥ء)

[٣] إذا كانت : ل = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع علاقة على المجموعة ل ، حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ ل ، أ + ب عدداً فردياً } ،

فهل ع علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟

ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة والمخطط البياني .

[٤] أيّ العلاقات التالية انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ؟ اذكر السبب .

أ) علاقة « $\geq$ » على المجموعة ص= { –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } .

ب) علاقة « يقسم » على مجموعة الأعداد الصحيحة .

[٥] إذا كانت : م = { –٢ ، –١ ، ١ ، ٢ } ، ع علاقة على المجموعة م ، حيث ع ={ (أ ، ب) : أ^{٢} = ب^{٢} ، أ ، ب $\ni$ م } . هل ع علاقة متعدية؟ ولماذا؟

[٦] إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، اكتب علاقة على المجموعة س :

أ) انعكاسية ، ب) متناظرة ، جـ) متعدية ،

ء) ليست انعكاسية ، هـ) ليست متناظرة ، و) ليست متعدية .

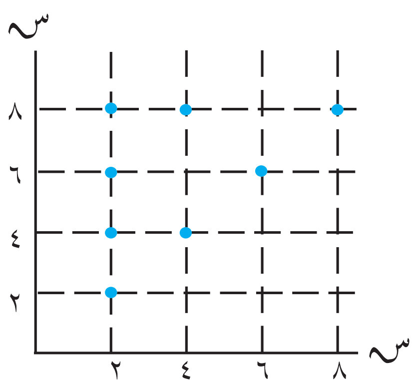
[٧] إذا كانت ص= { ٠ ، ١ ، ٢ ، –١ ، –٢ } ، ع علاقة على المجموعة ص حيث ع = { (أ ، ب) : أ + ب = ٠ ، أ ، ب $\ni$ ص }

هل ع انعكاسية ، متناظرة، متعدية ؟

[٨] الشكل (١–١٦) يُمثِّل مخططاً بيانياً لعلاقة ع معرفة على المجموعة س، س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } .

أ) اكتب ع بطريقة السرد .

ب) بيّن نوع العلاقة ع ، (انعكاسية ، متناظرة ، متعدية) .



شكل (١–١٦)

١ : ٤ علاقة التكافؤ

تدريب

لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ولتكن ع = سـ × سـ ،

أ) اكتب العلاقة ع كأزواج مرتبة .

ب) هل العلاقة ع انعكاسية ، ومتناظرة ، ومتعدية ؟

مما سبق تلاحظ أن ع علاقة انعكاسية ، ومتناظرة ، ومتعدية .

مثل هذه العلاقة تسمى علاقة تكافؤ .

ملحوظة : **تكون العلاقة ع علاقة تكافؤ على المجموعة سـ إذا كانت ع علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية على المجموعة سـ .**

مثال (١) لتكن م = { ١ ، ٢ ، ٣، ٥ } ، ع علاقة على م ، حيث

ع = { (أ ، ب) : أ + ب عدداً زوجياً ، أ ، ب ∈ م }

هل ع علاقة تكافؤ؟ ولماذا ؟

الحل : نبحث عن عددين من عناصر المجموعة م ، بحيث يكون مجموعهما عدداً زوجياً .

ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢)، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) } .

ع انعكاسية لأن (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ∈ ع .

ع متناظرة لأن (١ ، ٣) ∋ ع وأيضاً (٣ ، ١) ∋ ع ،
وبالمثل (١ ، ٥) ∋ ع وأيضاً (٥ ، ١) ∋ ع و (٣ ، ٥) ∋ ع وأيضاً
(٥ ، ٣) ∋ ع أي أن لكل (أ ، ب) ∋ ع فإن (ب ، أ) ∋ ع .

كي نقرر ما إذا كانت ع متعدية أم لا ، يجب فحص جميع الحالات التي يكون فيها (أ ، ب) ∋ ع ، (ب ، جـ) ∋ ع ، أي نفحص كل الأزواج المرتبة المختلفة :

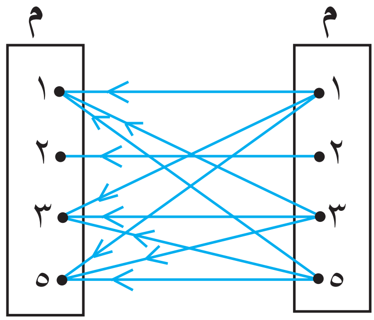
(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ∋ ع ونجد أن (١ ، ١) ∋ ع ،
(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ∋ ع ونجد أن (١ ، ٥) ∋ ع ،
(١ ، ٥) ، (٥ ، ١) ∋ ع ونجد أن (١ ، ١) ∋ ع ،
(١ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ∋ ع ونجد أن (١ ، ٣) ∋ ع ،
(٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ∋ ع ونجد أن (٣ ، ٣) ∋ ع ،
(٣ ، ١) ، (١ ، ٥) ∋ ع ونجد أن (٣ ، ٥) ∋ ع ،
(٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) ∋ ع ونجد أن (٣ ، ١) ∋ ع ،
(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ∋ ع ونجد أن (٣ ، ٣) ∋ ع ،
(٥ ، ١) ، (١ ، ٣) ∋ ع ونجد أن (٥ ، ٣) ∋ ع ،
(٥ ، ١) ، (١ ، ٥) ∋ ع ونجد أن (٥ ، ٥) ∋ ع .

وهكذا نستكمل بقية الأزواج المختلفة المساقط نجد أن ع علاقة متعدية .

∵ ع علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية

∴ ع علاقة تكافؤ .

ويمثلها المخطط السهمي في الشكل (١–١٧) .



شكل (١ –١٧)

مثال (٢) لتكن م = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، عر علاقة على م حيث

عر = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥)}

هل عر علاقة تكافؤ ؟ ولماذا ؟

الحــل : عر انعكاسية لأن لكل أ ∋ م ، فإن (أ ، أ) ∋ عر ،

عر متناظرة لأن (٣ ، ٤) ∋ عر ، وأيضاً (٤ ، ٣) ∋ عر .

∵ (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ∋ عر نجد أن (٣ ، ٣) ∋ عر .

وكذلك (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ∋ عر نجد أن (٤ ، ٤) ∋ عر .

∴ عر علاقة متعدية .

∵ عر علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

∴ عر علاقة تكافؤ .

مثال (٣) إذا كانت ك = { ٣ ، ٥ ، ٧ } ، وكانت عر علاقة على ك

حيث عر = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٧) } .

هل عر علاقة تكافؤ ؟ لماذا ؟

الحـــل:

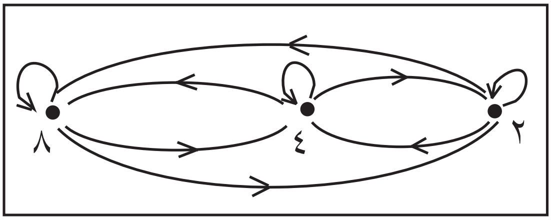
– ع انعكاسية لأن لكل أ ∈ ك ، فإن (أ ، أ) ∈ ع .

– ع ليست متناظرة لأن (٣ ، ٥) ∈ ع ، ولكن (٥ ، ٣) ∉ ع .

– ∴ ع ليست علاقة تكافؤ .

ملحوظة : **تكون العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ إذا لم تكن ع انعكاسية ، أو متناظرة ، أو متعدية .**

مثال (٤) لتكن س = { ٢ ، ٤ ، ٨ } ، ع علاقة على المجموعة س والموضحة بالمخطط السهمي في الشكل (١ –١٨) بيّن أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ على المجموعة س .



شكل (١ –١٨)

الحـــل:

ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، (٨ ، ٤) ، (٢ ، ٨) ، (٨ ، ٢) ، (٨ ، ٨) } .

– ع علاقة انعكاسية لأن لكل أ ∈ س فإن (أ ، أ) ∈ ع .

– ع متناظرة لأن (٢ ، ٨) ∈ ع ، وأيضاً (٨ ، ٢) ∈ ع ، ولأن (٢ ، ٤) ∈ ع ، وأيضاً (٤ ، ٢) ∈ ع ، ولأن (٤ ، ٨) ∈ ع ، وأيضاً (٨ ، ٤) ∈ ع .

– وبالنسبة لعلاقة التعدي نفحص كل الأزواج المرتبة المختلفة المساقط .

(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ∈ عر ونجد أن (٢ ، ٢) ∈ عر ،

(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ∈ عر ونجد أن (٢ ، ٨) ∈ عر ،

(٤ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ∈ عر ونجد أن (٤ ، ٤) ∈ عر ،

(٤ ، ٢) ، (٢ ، ٨) ∈ عر ونجد أن (٤ ، ٨) ∈ عر ،

(٤ ، ٨) ، (٨ ، ٤) ∈ عر ونجد أن (٤ ، ٤) ∈ عر ،

(٤ ، ٨) ، (٨ ، ٢) ∈ عر ونجد أن (٤ ، ٢) ∈ عر ،

(٨ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ∈ عر ونجد أن (٨ ، ٢) ∈ عر ،

(٨ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ∈ عر ونجد أن (٨ ، ٨) ∈ عر ،

(٢ ، ٨) ، (٨ ، ٢) ∈ عر ونجد أن (٢ ، ٢) ∈ عر ،

.... إلخ حتى ننتهي من فحص كل الأزواج المرتبة ،

نلاحظ أن عر علاقة متعدية .

∵ العلاقة عر انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

∴ عر علاقة تكافؤ .

تمارين ومسائل

[١] إذا كانت : ص = { أ ، ب ، جـ } فبيّن أيًّا من العلاقات التالية انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، وأيّها تمثل علاقة تكافؤ :

عر١ = { (أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) } ،

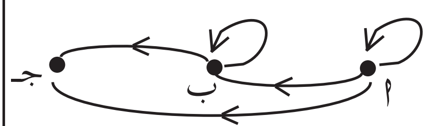
عر٢ = { (أ ، أ) ، (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، جـ) ، (أ ، جـ) } ،

ع$_{٣}$ = {(جـ ، جـ)، (ا ، جـ) ، (ب ، ب) ، (جـ ، ا)} ،

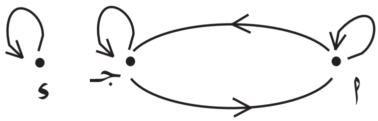
ع$_{٤}$ = {(ا ، ا) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) ، (ب ، جـ) } ،

ع$_{٥}$ = {(ا ، ب) ، (ب ، جـ) } .

[٢] بيّن نوع العلاقات الموضحة بالمخططات السهمية التالية [انظر الأشكال (١–١٩ا ، ب ، جـ] .



شكل (١ –١٩ا)



شكل (١ –١٩ب)

شكل (١ –١٩جـ)

[٣] إذا كانت : ل = { ا ، ب ، جـ ، ء }، ع علاقة على المجموعة ل ، حيث ع = {(ا ، ا) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) ، (ء ، ء) ، (ب ، ء) ، (ء ، ب) ، (جـ ، ء) ، (ء ، جـ) } ،

هل ع علاقة تكافؤ ؟ ولماذا ؟

ارسم المخطط السهمي والبياني للعلاقة ع .

[٤] لتكن م = { –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ع علاقة على المجموعة م

حيث ع ={ (ا ، ب) : ا ≤ ب ، ا ، ب ∋ م } .

هل ع علاقة تكافؤ ؟ اذكر السبب .

[٥] أي العلاقات التالية : انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ ، مع ذكر السبب :

ا) علاقة « = » على ط ، ب) علاقة « ≤ » على ص .

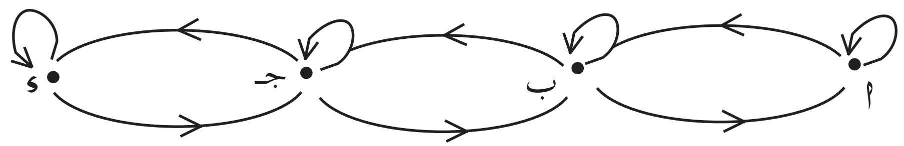
جـ) علاقة « يوازي » على مجموعة المستقيمات .

ى) علاقة التطابق « ≅ » على مجموعة الزوايا .

[٦] إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، اكتب علاقة على المجموعة س:

ا) ليست متعدية ، ب) علاقة تكافؤ .

[٧] إذا كان المخطط السهمي التالي يمثّل العلاقة ع ، فهل ع علاقة تكافؤ ؟ ولماذا ؟ [انظر الشكل (١ – ٢٠)] .



شكل (١ – ٢٠)

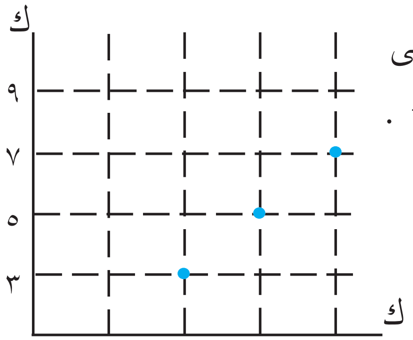
[٨] إذا كانت ع علاقة على ط حيث إن :

ع ={ (ا ، ب) : ا ، ب ∋ ط ، ا + ب = ٦ } ، فهل ع انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ ؟

[٩] الشكل (١–٢١) يُمثِّل مخطط بياني لعلاقة ع معرفة على المجموعة ك= { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } .

أ) اكتب العلاقة ع بذكر الصفة المميزة .

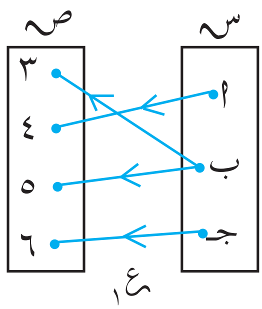
ب) هل العلاقة ع علاقة تكافؤ ؟



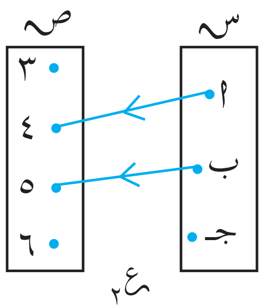
شكل (١ – ٢١)

١ : ٥ التطبيـــــق

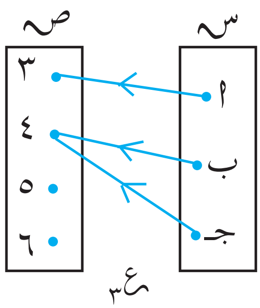
تعرفت على مفهوم العلاقة من مجموعة إلى أخرى ، تأمل المخططات السهمية التالية التي تمثل علاقات معرفة من س إلى ص [انظر الأشكال (١ – ٢٢ أ ، ب ، جـ)] . ماذا تلاحظ ؟



شكل (١ – ٢٢ أ)



شكل (١ – ٢٢ ب)



شكل (١ – ٢٢ جـ)

تلاحظ من ذلك ما يلي :

في $ع_1$ يوجد عنصر واحد من س هو العنصر ب ارتبط بعنصرين مختلفين من ص ، هما ٣ ، ٥ .

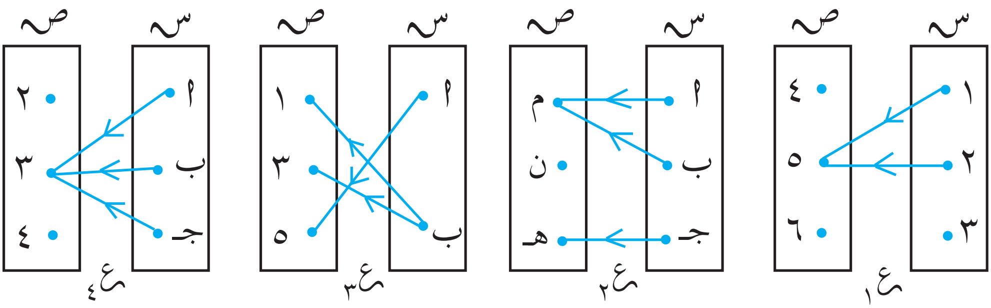
في $ع_{٢}$ يوجد عنصر واحد من س لم يرتبط بأي عنصر من ص ما هو؟

في $ع_{٣}$ كل عنصر من س ارتبط بعنصر واحد فقط من ص .

العلاقة مثل $ع_{٣}$ من س إلى ص تسمى تطبيق .

التطبيق هو علاقة من س إلى ص ، تربط كل عنصر من س بعنصر واحد فقط من ص ، ويسمى س مجال التطبيق (المنطلق) ، ويسمى ص المجال المقابل (المستقر) للتطبيق .

مثال (١) أيّ العلاقات التالية في الأشكال (١–٢٣أ ، ب ، جـ ، د) تمثّل تطبيقاً ؟ اذكر السبب :



شكل (١ –٢٣أ) شكل (١ –٢٣ ب) شكل (١ –٢٣ جـ) شكل (١ –٢٣ ء)

الحـل :

$ع_{١}$ ليست تطبيقاً ، لأن العنصر ٣ من س (المجال) لم يرتبط بأي عنصر من ص (المجال المقابل) .

$ع_{٢}$ تطبيق ، لأن كل عنصر من س ارتبط بعنصر واحد فقط من ص .

$ع_٣$ ليست تطبيقاً ،لأن العنصر ب من س ارتبط بعنصرين مختلفين من ص ، هما ١ ، ٣ .

$ع_٤$ تطبيق،لأن كل عنصر من المجال قد ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل .

مثال (٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ،

ص = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، فبيّن أي العلاقات التالية تمثل تطبيقاً من س إلى ص .

$ع_١$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٦) } ،

$ع_٢$ = { (١ ، ٤) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٤) ،(٣ ، ٨) } ،

$ع_٣$ = { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) } ،

$ع_٤$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٣ ، ٨) } .

الحــل :

$ع_١$ تطبيق ، لأن كل عنصر في المجال قد ظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة ، أي أن كل عنصر من س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص .

$ع_٢$ ليست تطبيقاً ، لأن العنصر (١) في المجال قد ظهر مرتين كمسقط أول في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة ، أي أن العنصر (١) من المجال ارتبط بعنصرين من المجال المقابل هما ٤ ، ٠ .

$ع_٣$ ليست تطبيقاً ، لأن العنصر (٢) من المجال لم يرتبط بأي عنصر من المجال المقابل .

$ع_٤$ تطبيق، لأن كل عنصر من المجال قد ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل .

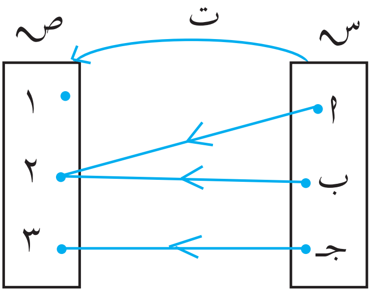
مدى التطبيق :

إذا رمزنا للتطبيق من س إلى ص بالرمز « ت » فيمكننا أن نعبّر عن التطبيق رمزياً كالتالي :

ت : س ← ص ، أو س $\xleftarrow{ت}$ ص .

ويُقرأ : التطبيق ت من س إلى ص .

المخطط المرسوم في الشكل (١–٢٤) يمثّل تطبيقاً من س إلى ص . تلاحظ أن ٢ هـي صـورة أ بالتطبيق ت ، ونكتب ذلك على النحو التالي :



شكل (١ – ٢٤)

ت (أ) = ٢ ، وبالمثل ت (ب) = ٢ ، ت(جـ) = ٣ .

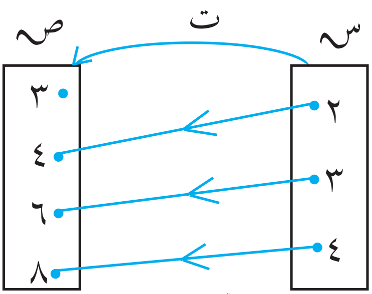
مجموعة صور المجال هي { ٢ ، ٣ }، وتسمى مدى التطبيق .

مجموعة صور عناصر المجال تُسمَّى مدى التطبيق .

مدى التطبيق مجموعة جزئية من المجال المقابل،أي{ ٢ ، ٣ }⊂{ ١ ، ٢ ، ٣ }.

قاعدة التطبيق :

المخطط المرسوم في الشكل (١–٢٥) يُمثِّل تطبيقاً من س إلى ص . تلاحظ أن كل عنصر من المجال ارتبط



شكل (١ – ٢٥)

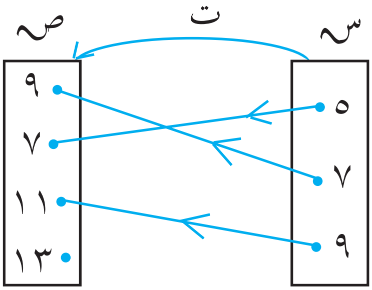
بضعفه من المجال المقابل أي أن : ٢ ⟵ ٤ ، ١٣ ⟵ ٦ ، ٤ ⟵ ٨ .

∴ أ ارتبط بـ ٢أ

أ ⟵ ٢أ أو ت (أ) = ٢أ هي قاعدة التطبيق .

قاعدة التطبيق هي العلاقة التي تربط كل عنصر من المجال بصورته في المجال المقابل .

مثال (٣) التطبيق ت : س ⟵ ص



شكل (١ – ٢٦)

ويمثله المخطط في الشكل (١–٢٦) .

أ) اكتب المجال والمجال المقابل للتطبيق ت .

ب) عيّن مدى وقاعدة التطبيق .

الحـــل :

أ) مجال التطبيق = {٥ ، ٧ ، ٩} ، المجال المقابل = {٩ ، ٧ ، ١١ ، ١٣} ،

ب) ∵ مدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر المجال .

∴ المدى = { ٩ ، ٧ ، ١١ } .

من المخطط السهمي تلاحظ أن : ٥ ⟵ ٧ ، ٧ ⟵ ٩ ، ٩ ⟵ ١١

أي أن كل عدد ارتبط بعدد يكبره بمقدار ٢ .

∴ أ ⟵ أ + ٢ أو ت (أ) = أ +٢ [هي قاعدة التطبيق] .

مثال (٤) إذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ } ، ل = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ،

وكان ت : ك ⟵ ل معرفاً بالقاعدة : أ ⟵ ٢ أ + ١

أ) اكتب صورة كل عنصر ، ثم عيّن المدى .

ب) مثّل التطبيق سهمياً وبيانياً .

الحـــل :

أ) المجال = ك = {١ ، ٢ ، ٣} ، المجال المقابل = ل = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ،

∵ أ ⟵ ٢ أ + ١

∴ ت(أ) = ٢أ + ١ ، منها :

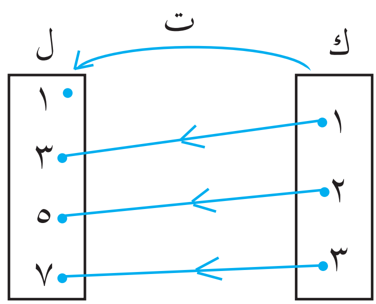
ت (١) = ٢ × ١ + ١ = ٣

ت (٢) = ٢ × ٢ + ١ = ٥

ت (٣) = ٢ × ٣ + ١ = ٧

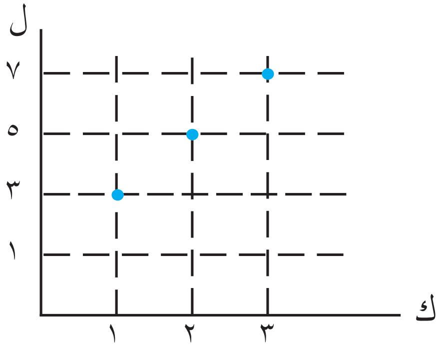
∴ مدى التطبيق = { ٣ ، ٥ ، ٧} ،

ب) الشكل(١–٢٧أ) يمثل التطبيق سهمياً والشكل(١–٢٧ب) يمثله بيانياً



المخطط السهمي للتطبيق

شكل (١ –٢٧أ)

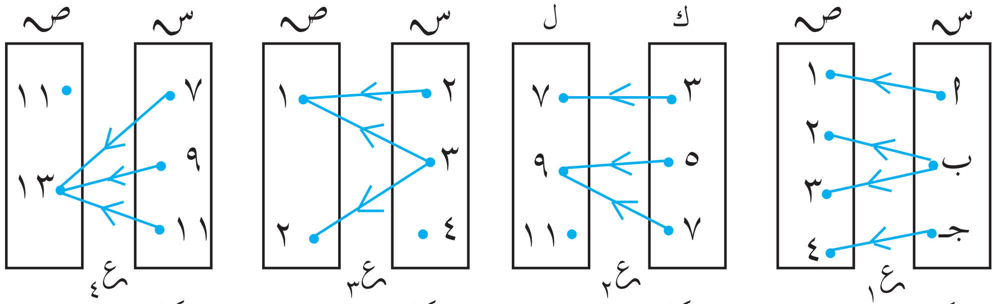


التمثيل البياني للتطبيق

شكل (١ –٢٧ب)

تمارين ومسائل

[١] أيّ العلاقات في الأشكال التالية تمثّل تطبيقاً ؟ اذكر السبب .



شكل (١ – ٢٨أ) شكل (١ – ٢٨ ب) شكل (١ – ٢٨ جـ) شكل (١ – ٢٨ ء)

[٢] إذا كانت س = {أ ، ب ، جـ }، ص = { ٠ ، ١ } ، بيّـن أياً من العلاقات التالية تمثل تطبيقاً من س إلى ص ؟ اذكر السبب .

ع١ = {(أ ، ٠) ، (ب ، ١) ، (جـ ، ١)} ،

ع٢ = {(جـ ، ٠) ، (ب ، ١) ، (جـ ، ١)} ،

ع٣ = {(أ ، ٠) ، (ب ، ١) ، (أ ، ١) ، (جـ ، ٠) } ،

ع٤ = {(أ ، ٠) ، (ب ، ٠) ، (جـ ، ٠) } ،

ع٥ = {(أ ، ١) ، (جـ ، ١) } .

[٣] في السؤال رقم (٢) عيّن المجال والمجال المقابل للتطبيقات ، ثم مثلها سهمياً وبيانياً .

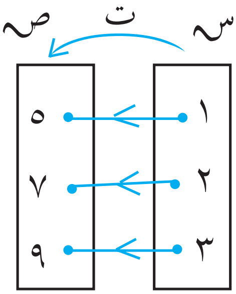
[٤] إذا كانت م = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ل = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ } وكان ت : م ⟵ ل معرفاً بالقاعدة أ ⟼ ٢أ – ٢ .

أ) اكتب صورة كل عنصر ، ثم اكتب مدى التطبيق .

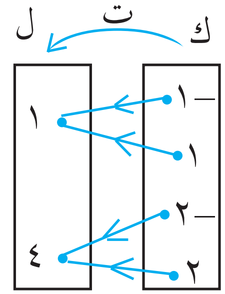
ب) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة ،ثم ارسم المخطط السهمي والبياني لهذا التطبيق .

[٥] لتكن س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١٥ ، ٣٤ ، ٤٣ ، ٥٥ ، ٩٢}،
وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص، حيث :
ع = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، أ رقم من أرقام العدد ب }،
أ) ارسم المخطط البياني للعلاقة ع ، ب) هل ع تمثّل تطبيقاً ؟ ولماذا ؟

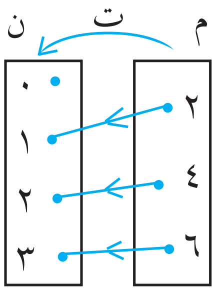
[٦] المخططات السهمية التالية تمثّل تطبيقات ، لماذا ؟ عيّن قاعدة ومدى هذه التطبيقات .



شكل (١ –٢٩أ)



شكل (١ –٢٩ ب)



شكل (١ –٢٩ جـ)

[٧] لتكن ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ل = {٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨} ، وكانت ت : ك ⟵ ل معرفاً بالقاعدة أ ⟼ $أ^{٢}$ + ٢ فأوجد صورة كل عنصر، ثم أوجد مدى التطبيق.

[٨] ت تطبيق مجاله س = {٠ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥} ، ومجاله المقابل ط (ط مجموعة الأعداد الطبيعية) و قاعدته هي أ ⟼ أ + ١٠ :
أ) أوجد مدى التطبيق ، ب) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة .

[٩] ت تطبيق مجاله س = {٠ ، ١ ، ٢ ، –١ ، –٢} ، ومجاله المقابل ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) معرفاً بالقاعدة أ ⟼ $أ^{٢}$ – ٣ .
أ) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة ثم أوجد مداه . ب) ارسم المخطط السهمي للتطبيق.

[١٠] أيّ العلاقات التالية المعرفة على س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
تمثّل تطبيقاً ؟ اذكر السبب .

ع$_{١}$ = {(١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ،(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ،(٥ ، ٢) ، (٦ ، ١)}،

ع$_{٢}$ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ٢ ب}،

ع$_{٣}$ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ٧ – ب} .

ثم ارسم بيانياً فقط العلاقات التي تمثّل تطبيقاً .

١ : ٦ مجموعة الأعداد الحقيقية

تعرَّفت فيما سبق على ثلاث مجموعات من الأعداد هي : مجموعة الأعداد الطبيعية **ط** = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...} ، وتمثيلها على خط الأعداد في الشكل (١ – ٣٠) :

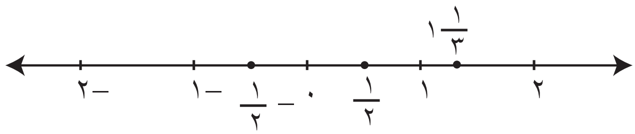
شكل (١ – ٣٠)

ومجموعة الأعداد الصحيحة :

ص = {... ، –٣ ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } ، وتمثيلها على خط الأعداد في الشكل (١–٣١) .

شكل (١ – ٣١)

مجموعة الأعداد النسبية(ن) = {$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ } ،
وتمثيلها على خط الأعداد في الشكل (١–٣٢) .



شكل (١ – ٣٢)

حيث تظهر كثافة النقاط التي تُمثِّل الأعداد النسبية ، فبين كل نقطة وأخرى تمثلان عددين نسبيين توجد كثير من النقاط التي تمثل أعداداً نسبية أخرى بينهما .

مما سبق تلاحظ أن ط ⊂ ص ⊂ ن .

الأعداد غير النسبية :

لاشك أنه قد خطر ببالك السؤال التالي :

هل توجد أعداد غير نسبية ؟ أي أعداد لا يمكن وضعها على صورة $\frac{أ}{ب}$.

تأمل الجذور التربيعية للأعداد التالية ٤ ، ١٦ ، $\frac{٤٩}{٢٥}$ ، ٢ .

تلاحظ أن :

الجذور التربيعية للأعداد ٤ ، ١٦ ، $\frac{٤٩}{٢٥}$ هي : ٢ ، ٤ ، $\frac{٧}{٥}$ ، وهي أعداد نسبية .. ولكن ما هو الجذر التربيعي للعدد ٢ .

هل $\sqrt{٢}$ عدداً نسبياً ؟

إذا بحثنا عن عدد بصورة $\frac{أ}{ب}$ بحيث $(\frac{أ}{ب})^{٢} = ٢$ ، فلانستطيع بالضبط إيجاد مثل هذا العدد ولكن نستطيع إيجاد أعداد مربعة مقاربة للعدد ٢ .

تدريـــب

أ) أوجد : $(١,٤)^{٢}$ ، $(١,٥)^{٢}$ ، وقارن بينهما .

ب) أوجد : $(١,٤١)^٢$ ، $(١,٤٢)^٢$ ، وقارن بينهما .

جـ) أوجد : $(١,٤١٤)^٢$ ، $(١,٤١٥)^٢$ ، وقارن بينهما .

تلاحظ أن نواتج $(١,٤)^٢$ ، $(١,٤١)^٢$ ، $(١,٤١٤)^٢$ أصغر من ٢ ، بينما نواتج $(١,٥)^٢$ ، $(١,٤٢)^٢$ ، $(١,٤١٥)^٢$ أكبر من ٢ .

ومما سبق يتبيّن أن مربع أي عدد من الأعداد السابقة لايساوي بالضبط العدد ٢ .

وإذا حاولنا أن نوجد الجذر التربيعي للعدد ٢ بأي طريقة كانت فلن نحصل على عدد عشري منته أو دوري ، أي لن نحصل على قيمة مضبوطة مربعها العدد ٢ . وبناءً على ما تقدم نلاحظ أن :

$\sqrt{٢} \approx ١,٤١$ (مقرباً إلى منزلتين عشريتين) .

أو $\sqrt{٢} \approx ١,٤١٤$ (مقرباً إلى ثلاث منازل عشرية) .

[$\sqrt{٢} \approx ١,٤١٤٢١٣٥ \leftarrow$] ولهذا لايمكن كتابة العدد $\sqrt{٢}$ على صورة نسبة بين عددين صحيحين وذلك لأن التمثيل العشري له ليس منتهياً ولا دورياً ، لذا نقول أن $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي .

ومن أمثلة الأعداد غير النسبية : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١١}$ ، ... الخ

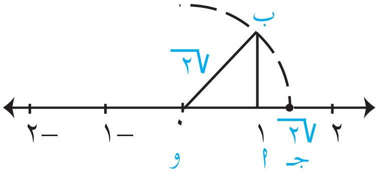
وكذلك النسبة التقريبية π ، ونرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز ن/ .

العدد غير النسبي هو العدد الذي لايمكن كتابته بالصورة $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب $\in$ ص ، ب $\neq$ ٠ .

تذكر أن : العدد النسبي يمكن كتابته بصورة كسر عشري منته مثل :

٣,٣ ، ١٤,١٨ ، ١,٠٢٥ ، أو دوري مثل : $٠,\overline{٣}$ ، $٤,\overline{١٨}$ ، $٢,١\overline{١٤}$.

أمّا العدد غير النسبي فهو العدد الذي يمكن كتابته بصورة كسر عشري غير منتهٍ وغير دوري مثّل : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ولتمثيل العدد $\sqrt{٢}$ على خط الأعداد [انظر الشكل (١–٣٣)] :



شكل (١ – ٣٣)

أولاً : نقيم العمود $\overline{\text{ا ب}}$ من النقطة ا بحيث يكون |ا و| = |ا ب| = ١ (وحدة) كما في الشكل المجاور .

ومن دروس الهندسة سوف تعلم أن : | و ب| = $\sqrt{٢}$.

ثانياً : نركزّ الفرجار في (و) وبفتحة طولها يساوي | و ب|، نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة (جـ) فيكون | و جـ|=|و ب| = $\sqrt{٢}$ وحدة ، وبذلك فإن النقطة (جـ) تمثل العدد $\sqrt{٢}$.

مثال

ميزّ الأعداد النسبية فيما يلي :

ا) ١,٤٦$\overline{٥٦}$ ب) ٠,٧٤٧٤٤←

الحل :

ا) بما أن ١,٤٦$\overline{٥٦}$ كسر عشري دوري .

إذن ١,٤٦$\overline{٥٦}$ عدد نسبي .

ب) بما أن ← ٠,٧٤٧٤٤ كسر عشري غير منته وغير دوري

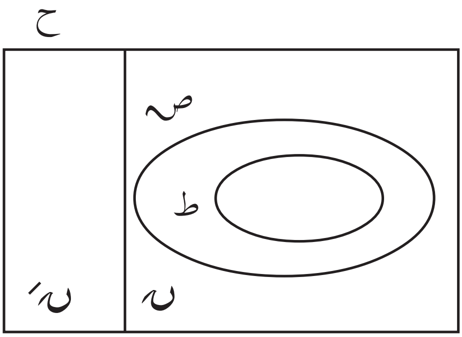
إذن ← ٠,٧٤٧٤٤ عدد غير نسبي .

الأعداد الحقيقية :

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة ناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ن ومجموعة الأعداد غير النسبية ن′ ،

ونرمز لها بالرمز (ح) .

[انظر الشكل (١–٣٤)].



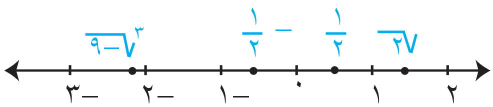
شكل (١ – ٣٤)

ح = ن ∪ ن′

ونلاحظ أن :

ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح

والشكل (١–٣٥) يُسمَّى خط الأعداد الحقيقية حيث كل نقطة فيه تمثل عدداً حقيقياً ، وكل عدد حقيقي يُمثَّل بنقطة .



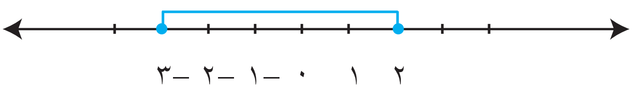
شكل (١ – ٣٥)

تمثيل مجموعات جزئية من ح على خط الأعداد :

أولاً : الفترات المحددة :

* أ = {س : س ∈ ح ، –٣ ≤ س ≤ ٢ } ،

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العددين –٣ ، ٢ والأعداد المحصورة بينهما وتُمثَّل على خط الأعداد [شكل (١–٣٦)] :

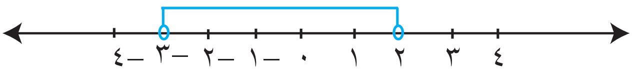


شكل (١ – ٣٦)

وهذه المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية ، تسمى « فترة مغلقة » ونكتبها بالصورة : [–٣ ، ٢]

* ب = {س : س ∈ ح ، –٣ < س < ٢ } .

هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة فقط بين العددين –٣ ، ٢ وتُمثَّل على خط الأعداد في الشكل (١–٣٧) :

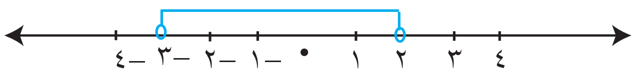


شكل (١ – ٣٧)

يلاحظ أن العددين –٣ ، ٢ لاينتميان إلى المجموعة ب ، وهذه المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية تسمى « فترة مفتوحة » ونكتبها بالصورة :] –٣ ، ٢ [.

* جـ = {س : س ∈ ح ، –٣ ≤ س < ٢ } .

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العدد –٣ والأعداد المحصورة بين العددين –٣ ، ٢ ، وتُمثَّل على خط الأعداد كما في الشكل (١–٣٨) [.



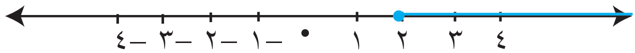
شكل (١ – ٣٨)

وهذه المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية تسمى « فترة نصف مغلقة أو

ثانياً : الفترات غير المحددة :

* أ = {س : س ∋ ح ، س ≤ ٢ } ،

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العدد ٢ والأعداد الأكبر من العدد ٢ ، وتُمثَّل على خط الأعداد كما في الشكل (١–٣٩) .

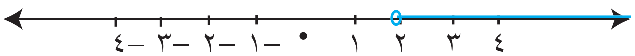


شكل (١ – ٣٩)

وهذه المجموعة تُمثِّلها فترة بدايتها العدد ٢ وليس لها نهاية محددة ونكتبها بالصورة : [٢ ، + ∞ [، حيث + ∞ « يقرأ موجب مالانهاية » .

* ب = {س : س ∋ ح ، س> ٢ }.

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من الأعداد الأكبر من العدد ٢ ، وتمثل على خط الأعداد كالتالي [الشكل (١–٤٠)] .

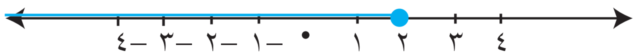


شكل (١ – ٤٠)

وتُمثِّلها الفترة] ٢ ، ∞ [

* جـ = {س : س ∋ ح ، س ≥ ٢ }.

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العدد ٢ والأعداد الأصغر من العدد ٢ وتمثل على خط الأعداد كما في الشكل (١–٤١) :



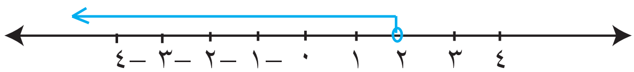
شكل (١ – ٤١)

وهذه المجموعة تُمثِّلها فترة بدايتها العدد ٢ وليس لها نهاية محددة ونكتبها بالصورة] – ∞ ، ٢] ، حيث – ∞ (يقرأ سالب مالانهاية) .

فترة نصف مفتوحة» ونكتبها بالصورة] −٣ ، ٢] .

* ء = {س : س ∈ ح ، س < ٢ }.

هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من الأعداد الأصغر من العدد ٢ ، وتُمثَّل على خط الأعداد كما في الشكل (١−٤٢) :



شكل (١ − ٤٢)

وتُمثِّلها الفترة] −∞ ، ٢ [.

ملاحظة : الدائرة المظللة (●) عند العدد ٢ تعني ٢ تنتمي إِلى هذه الفترة بينما الدائرة المفتوحة (○) عند العدد ٢ تعني ٢ لاتنتمي إِلى هذه الفترة.

تدريب اكتب كلاً من المجموعات التالية على صورة فترات ثم مثِّلها على خط الأعداد .

أ) س = {أ : أ ∈ ح ، ١ ≤ أ ≤ ٤ }

ب) ص = { س : س ∈ ح ، ٢ ≤ س < ٥ }

جـ) ع = { س : س ∈ ح ، س < −١ }

تمارين ومسائل

[١] ميِّز الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية فيما يلي :

أ) ٣,٠٢٠٢٢٠٢٢٢ → ب) ٥,$\overline{٣٠}$ ،

جـ) ١٤,١٥١١٥١١١٥ ء) $\sqrt{٣٢}$.

[٢] عيِّن النقاط التي تمثل الأعداد التالية على خط الأعداد :

أ) −٢ ، −$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٥}{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ ب) −٤ ، $\frac{٣}{٤}$ ، −$\sqrt{٥}$.

جـ) $\frac{٧}{٥}$ ، π ، $-\frac{٣}{٤}$ ، ء) $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٣}$

[٣] مثّل مجموعات الأعداد التالية على خط الأعداد ، ثم اكتب كلاً منها كفترة عددية :

أ) {س : س ∋ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٦ } ،

ب) {س : س ∋ ح ، ٠ > س > ٥ } ،

جـ) {س : س ∋ ح ، −٣ > س > ١ } ،

ء) {س : س ∋ ح ، س ≤ −٣ } ،

هـ) {س : س ∋ ح ، س < ٢ } ،

[٤] مثّل كلاً من الفترات الآتية على خط الأعداد ، ثم اكتب كلاً منها بالصفة المميزة :

أ) [−٤ ، ٢] ، ب)] ٠ ، ٣ [، جـ) [−١ ، ١] ،

ء)] −٤ ، ٣] ، هـ)] −∞ ، −٢ [، و)] ٢ ، +∞ [.

١ : ٧ التطبيق الخطي

تعرف أن : ت : س ← س هو تطبيق من المجموعة س إلى نفسها .

وهناك تطبيقات نحصرها فقط على المجموعات العددية .

مثال (١) ت : ط ← ط (ط مجموعة الأعداد الطبيعية) ، ارسم المخطط البياني للتطبيق ت ، حيث ت (أ) = أ + ٢

الحـــل : نظراً لأن المجموعة ط مجموعة غير منتهية ، فلانستطيع تمثيل التطبيق لجميع عناصره ، لهذا نكتفي بتمثيل بعض عناصر التطبيق :

∵ ت (أ) = أ + ٢

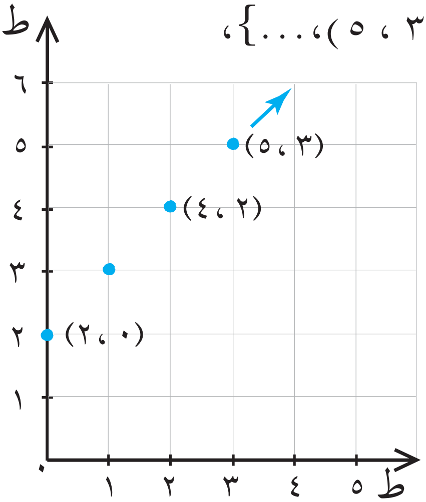
∴ ت (٠) = ٠ + ٢ = ٢ ، ت (١) = ١ + ٢ = ٣ ،

ت (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، ت (٣) = ٣ + ٢ = ٥ .

...وهكذا يمكن أن نكتب هذا التطبيق كأزواج مرتبة على النحو التالي :

{(٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ،(٢ ، ٤) ،(٣ ، ٥) ،...}،

انظر الشكل (١–٤٣) تلاحظ أن : جميـع الأزواج المرتبـة في المخطط البياني للتطبيق تمثل نقاط على استقامة واحدة .



شكل (١–٤٣)

مثال (٢) إذا كان ت : ص ← ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة)، وقاعدته هي : ت (أ) = ٢ أ – ٣ ، فارسم المخطط البياني للتطبيق .

الحـــل :

∵ ت (أ) = ٢ أ – ٣

∴ ت (–٢) = ٢ × –٢ – ٣ = – ٧

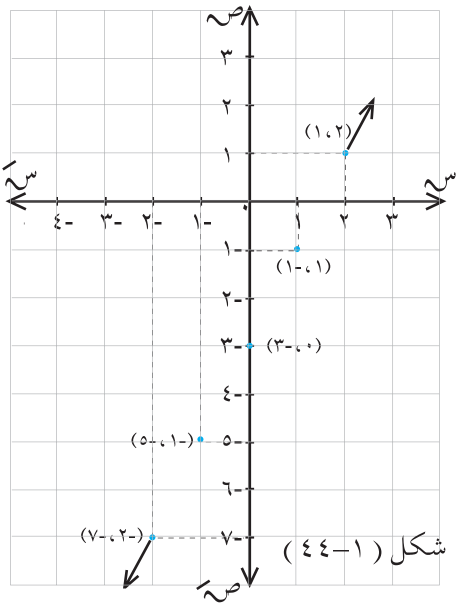
ت (−١) = ٢ × −١ − ٣ = − ٥

ت (٠) = ٢ × ٠ −٣ = − ٣

ت (١) = ٢ × ١ −٣ = − ١

ت (٢) = ٢ × ٢ −٣ = ١

... إلخ .



شكل (١−٤٤)

نكتب التطبيق كأزواج مرتبة كالتالي :

{...، (−٢ ، −٧)، (−١ ، −٥)، (٠ ، −٣)، (١ ، −١)، (٢ ، ١)،...}،

لاحظ أن المخطط البياني [الشكل (١−٤٤)] للتطبيق مجموعة غير منتهية من النقاط تقع على استقامة واحدة كل من المثالين السابقين لايمثل تطبيقاً خطياً .

مثال (٣) ارسم المخطط البياني للتطبيق ت : ح ← ح (ح مجموعة الأعداد الحقيقية) وقاعدته هي ت (أ) = أ + $\frac{١}{٢}$ ٣ .

الحـــل :

نختار أي ثلاثة أعداد من المجال، ثم نوجد صورها بالتعويض في قاعدة التطبيق مثلاً : −٢ ، ٠ ، ٢ .

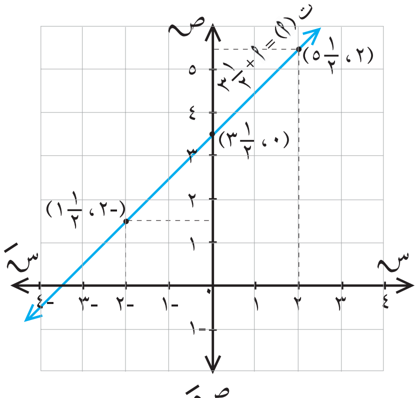
∵ ت (أ) = أ + $\frac{١}{٢}$ ٣ ∴ ت (−٢) = −٢ + $\frac{١}{٢}$ ٣ = $\frac{١}{٢}$ ١ .

ت (٠) = ٠ + $\frac{١}{٢}$ ٣ = $\frac{١}{٢}$ ٣ .

ت (٢) = ٢ + $\frac{١}{٢}$ ٣ = $\frac{١}{٢}$ ٥ .

نحدد النقاط (−٢ ، $\frac{١}{٢}$ ١) ، (٠ ، $\frac{١}{٢}$ ٣) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$ ٥) .

على المستوى الإحداثي حيث يمثل كل من المحور السيني والمحور الصادي المجموعة ح، ثم نصل هذه النقاط فيتكون لدينا خط مستقيم [انظر الشكل (١−٤٥)] تلاحظ أننا أخذنا أعداداً بسيطة حتى تسهل لنا العمليات الحسابية .



شكل (١−٤٥)

رسم التطبيق لايتغير إذا أخذنا أعداداً أخرى من مجاله .

يسمى هذا الخط المستقيم التمثيل البياني للتطبيق مثل هذا التطبيق الذي مخططه البياني خطاً مستقيماً يسمى تطبيقاً خطياً . أي أن :

التطبيق الخطي هو تطبيق من ح ← ح وقاعدته هي ت (س) = ا س + ب حيث ا ، ب ∋ ح .

تمارين ومسائل

[١] أيّ التطبيقات التالية يُعدُّ تطبيقاً خطياً؟ ولماذا ؟

ا) ت (ا) = ٤ ا^{٢} ب) هـ (س) = ٢ س + ٣

جـ) ك (س) = ٥ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ ء) ت (ا) = ٥ ا − ٢

هـ) ل (م) = ٤ و) ت (س) = ١ − $\frac{٢}{٣}$ س

[٢] لتكن ت(أ) = ٢أ − ١ ، فأوجد :

أ) ت$(\frac{١}{٢})$ ، ت$(\sqrt{٢})$ ، ت(٠) ، ت(−١) ، ت(−٢).

ب) اكتب التطبيق كأزواج مرتبة ، جـ) هل هذا تطبيق خطي ؟

[٣] إذا كانت ت(س) = ٣ س + ١ ، وكان مجاله هو {١ ، ٤ ، ٧} ،فأوجد مداه.

[٤] إذا كانت ت : ح ← ح ، وقاعدته هي : ت(أ) = ١ − ٢أ .

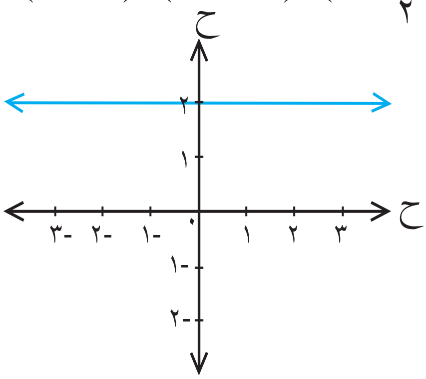
فأوجد صور العناصر − $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ $\frac{١}{٢}$ ، ثم مثِّل هذا التطبيق بيانياً.

[٥] لتكن ت : ح ← ح ، وقاعدته هي : ت(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ،

أوجد ت$(\frac{١}{٢})$ ، ت$(−\frac{١}{٢})$ ، ت(−١) ، ت$(\frac{٢}{٣})$ ، ثم مثّل هذا التطبيق بيانياً .

[٦] ارسم المخطط البياني للتطبيق ت(أ) = ٢أ + ٣ ، أيّ النقاط التالية تنتمي إلى التطبيق: (١ ، ٣)، (٠ ، ٣)، $(−\frac{١}{٢}$ ، ٢)، (−١ ، ١)، (٢ ، ٣).

[٧] الشكل (١ − ٤٦) يمثِّل التطبيق الخطي ت(أ) = ٢ أي النقاط التالية تنتمي إلى التمثيل البياني للتطبيق الخطي أعلاه ؟



شكل (١−٤٦)

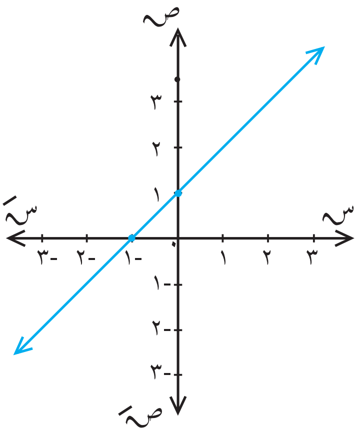
(٠ ، ٥)، (٥ ، ٠)، (−٢ ، ٢)، (٠ ، ٢)، (−١ ، ٢)، (٥٠٠ ، ٠).

[٨] الشكل(١–٤٧)يمثل تطبيقاً خطياً ،

ا) أوجد إحداثي نقطتي التقاطع مع محور السينات ، ومحور الصادات .

ب) أيّ القاعدتين التاليتين تعتبر قاعدة للتطبيق الخطي المرسوم جانباً :

ت(ا) = ٢ا – ١ ، ت (ا) = ا + ١ .



شكل (١–٤٧)

١ : ٨ تمارين عامة ومسائل

[١] ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ فيما يلي :

ا) –٩ ∈ {س : س ∈ ص ، س > –١٠}. ☐

ب) { ٥ ، ٦ } ⊂ {ا : ا ∈ ص ، –٦ < ا < ٤}. ☐

جـ) {٢ ، ٤ ، ٨ } = {ص : ص عدد يقسم العدد ٨}. ☐

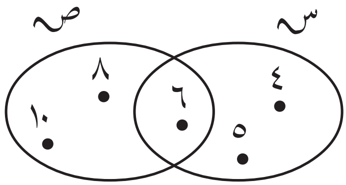
[٢] اكتب كلاً من المجموعات الآتية بالصفة المميزة (رمزياً) :

س = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ص = { ك ، ت ، ا ، ب } ،

ع هي مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ .

[٣] إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٢ ، ٦ ، ٨ } ، ع علاقة من س إلى ص حيث ع = {(١ ،٢) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }،

اكتب هذه العلاقة بطريقة الصفة المميزة رمزياً .



شكل (١ –٤٨)

[٤] من الشكل (١–٤٨) . اكتب :

أ) المجموعتين س ، ص بطريقة السرد ،

ب) المجموعة س بطريقة الصفة المميزة.

[٥] اكتب المجموعات التالية أولاً : بطريقة السرد ، ثم بالصفة المميزة رمزياً:

أ) مجموعة حروف كلمة « شبوة » .

ب) مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ١٠ ، والأصغر من ١٦ .

جـ) مجموعة أرقام العدد ٣٢٢٣٥ .

[٦] إذا كانت س = {٩ ، ٧ ، ٦} ، ص = {١ ، ٦ ، ٧ ، ٩} ، أوجد

أ) س / ص ، ص / س ، ب) مثّل س / ص بأشكال ڤن.

[٧] إذا كانت : ش = { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ } ،

س = {٥ ، ٧ ، ١٢} ، ص = {٧ ، ٩ ، ١٠} ، أوجد كلاً مما يأتي:

أ) س′ ب) س′ ∩ ص جـ) (س / ص) .

[٨] إذا كانت : ش = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ } ،

س = {٧ ، ٨ ، ١٠} ، ص = {٦ ، ٧ ، ١١} ، أوجد :

أ) س′ ب) ش / ص جـ) س′ / ص′.

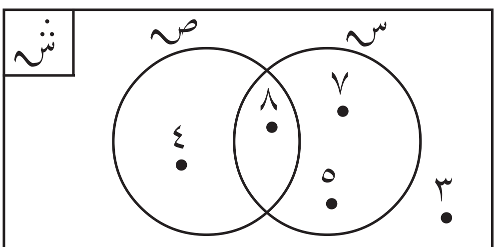
[٩] من الشكل (١–٤٩) أوجد كلاً مما يأتي:

أ) س / ص ،

ب) س′ ،

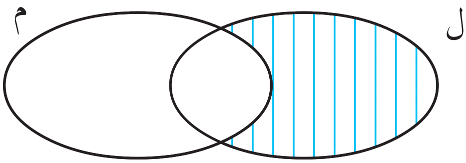
جـ) (س ∩ ص)′ ،

د) (س ∪ ص)′ .

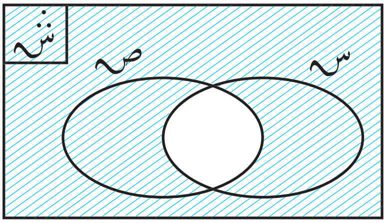


شكل (١ –٤٩)

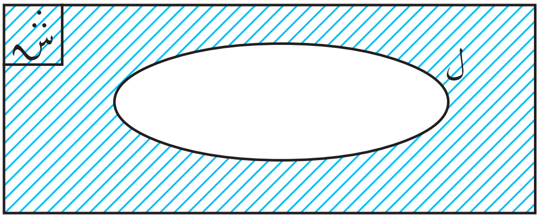
[١٠] اكتــب المجموعــات الممثلة بالمناطق المظللــة فــي كل مــن الأشكال (١–٥٠أ ، ب ، جـ) التالية :



شكل (١ –٥٠أ)



شكل (١ –٥٠ب)

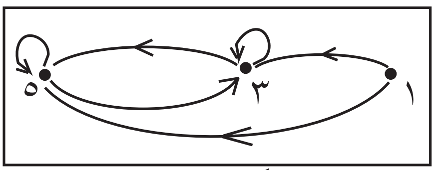


شكل (١ –٥٠جـ)

[١١] إذا كانت : س = { أ ،ب ، جـ ، ء } ، ص= { ٣ ، ٥ ، ٧ } .

فأوجد س × ص ، ثم مثِّله بيانياً .

[١٢] بيّن أن العلاقة الموضحة بالمخطط السهمي في الشكل (١–٥١) والمعرفة على المجموعة س= { ١ ، ٣ ، ٥ }، ليست انعكاسية ولامتناظرة ، ولكنها متعدية .



شكل (١ –٥١)

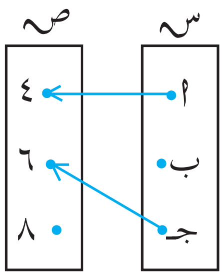
[١٣] إذا كانت : ك = { –١ ، ٠ ، ١ }، ع علاقة على المجموعة ك ، حيث

ع = { (ا ، ب) : ا ≤ ب ، ا ، ب ∈ ك }،

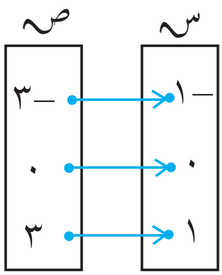
هل ع علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟

هل ع علاقة تكافؤ ؟ ولماذا ؟

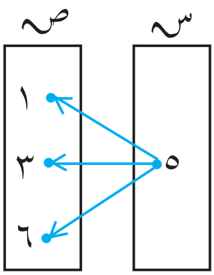
[١٤] الأشكال (١–٥٢ ا ، ب ، جـ ، ء) تمثل العلاقات الموضحة بالمخططات السهمية،حدد أياً منها يمثّل تطبيقاً ، واذكر السبب .عيّن مدى كل تطبيق .



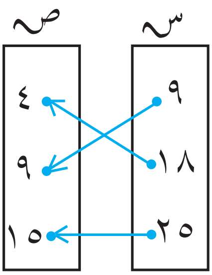
شكل (١ – ٥٢ ا)



شكل (١ – ٥٢ ب)



شكل (١–٥٢ جـ)



شكل (١ –٥٢ ء)

[١٥] لدينا التطبيق ت : س ⟵ ص (حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة)

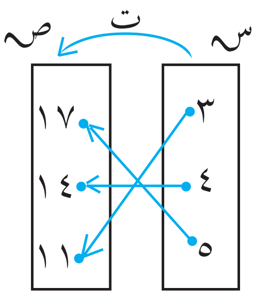
وقاعدته هي ت (ا) = ا – ٥ ، فإذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }،

اكتب صورة كل عنصر ثم حدد المدى . ارسم المخطط السهمي والبياني لهذا التطبيق .

[١٦] المخطط السهمي في الشكل (١–٥٣)

يمثّل تطبيقاً من س ⟵ ص .

أوجد مدى وقاعدة التطبيق .



شكل (١ – ٥٣)

[١٧] لتكن س = { ٣ }، هل س × س علاقة تكافؤ ؟ ولماذا ؟

[١٨] لتكن ت : س ← ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) ، مُعطى بالقاعدة : ت (أ) = أ − ٣ ، حيث س = { ٣ ، ٤ ، −٥ }،

أ) أوجد مدى التطبيق ، ب) ارسم المخطط السهمي والبياني للتطبيق .

[١٩] إِذا كان : ت : ح ← ح ، ارسم التطبيق ت (أ) = $\frac{١}{٢}$ أ + ١

[٢٠] عيّن النقاط التي تمثّل الأعداد التالية على خط الأعداد :

٣ ، − $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١٦}{٨}$ ، − $\sqrt{٢٧}$.

[٢١] ميز الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية فيما يلي :

أ) ٢,$\overline{٦}$ ، ب) $\sqrt{٨٧}$ ، جـ) ٤,٢١٢ .

[٢٢] مثّل مجموعات الأعداد التالية على خط الأعداد ، ثم اكتب كلاً منها كفترة عددية :

أ) { س : س ∈ ح ، ٥ > س ≥ ١٠ } ،

ب) { أ : أ ∈ ح ، −١ ≤ أ > ١ } ،

جـ) { ب : ب ∈ ح ، −٤ > ب > ٢ } ،

ء) { س : س ∈ ح ، س < ٤ } .

[٢٣] مثّل كلاً من الفترات الآتية على خط الأعداد ، اكتب كلاً منها بالصفة المميزة :

أ)] −٥ ، ٣ [، ب)] ٠ ، ٤ [،

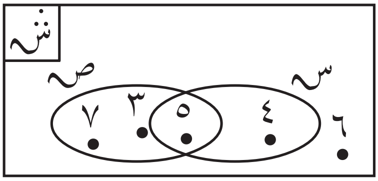
جـ)] −٢ ، ١] ، ء) [−٣ ، ١] ،

هـ) [٣ ، +∞] ، و) [−∞ ، ١ [.

١ : ٩ اختبار الوحدة

[١] إذا كانت : س = {أ : أ ∈ ص، −٥ < أ < ١}، ك = {−٤ ، ٠ ، ١}
أوجد س / ك ، ومثّلها بأشكال ڤـن .

[٢] من الشكل (١−٥٤) أوجد :

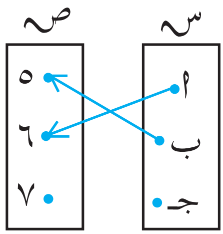


شكل (١ − ٥٤)

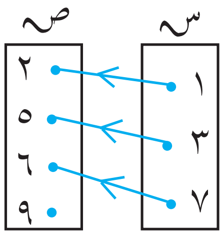
أ) س′ ، ص′ ،
ب) (س ∩ ص)′ ،
جـ) س′ ∩ ص′ ،
ء) تحقق من صحة أن : (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′ .

[٣] إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٧ } بيّن نوع العلاقات التالية على س من حيث كونها علاقة (انعكاسية، متناظرة ، متعدية ، تكافؤ) :
ع١ = {(٢ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٧ ، ٧)}، ع٢ = {(٢ ، ٣)، (٣ ، ٢)، (٢ ، ٢)}،
ع٣ = {(٧ ، ٧)، (٣ ، ٧)، (٧ ، ٣)، (٣ ، ٣)}.

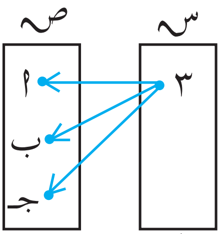
[٤] في الأشكال (١−٥٥ أ، ب ، جـ) أي العلاقات تمثّل تطبيقاً وأيها لا تمثل تطبيقاً ، اكتب المجال والمجال المقابل والمدى لكل تطبيق .



شكل (١ −٥٥أ)



شكل (١ −٥٥ ب)



شكل (١−٥٥ جـ)

[٥] ليكن التطبيق ت : س ⟵ ص حيث س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }، وقاعدته هي ت (أ) = أ + ٣ ، أ ∈ س
أوجد مدى التطبيق ، ثم ارسم مخططه السهمي .

[٦] ارسم التطبيق الخطي التالي : ت (أ) = ٣أ + ٥ ، ت : ح ⟵ ح .

الوحدة الثانية

تحليل المقادير الجبرية

٢ : ١ مراجعة

إِن تحليل المقدار الجبري يعني كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب عوامله، وسبق أن تعلَّمت طريقتين لتحليل المقادير ، هما :

– التحليل بإِخراج العامل المشترك .

– تحليل الفرق بين مربعين .

تدريب (١) حلِّل المقادير التالية :

أ) ٣ س + ١٥ ص

ب) ١٧ أ ب – ١٣ أ جـ

جـ) $س^٢ – أ^٢$

ء) $٣م^٢ – ٢٧ ل^٢$

هـ) $هـ^٢ (أ – ب) –٤ (أ – ب) و^٢$

تذكر : (١) عند التحليل بإِخراج العامل المشترك نستخدم خاصية التوزيع .

(٢) عند تحليل الفرق بين مربعين نطبق القاعدة .

$$أ^٢ – ب^٢ = (أ + ب) (أ – ب) .$$

تدريب (٢)

حلِّل المقادير التالية :

أ) $٧ س^٣ – ٣٥س^٢$

ب) $٨ ل^٣ م – ١٨ ل م^٣$

تمارين

حلل المقادير التالية :

[١] ٣ س^{٢} – ١٥ س ص + ٢١ ص^{٢} .

[٢] ٥ س ص – ٣ س ع + ٧ س ص^{٢} .

[٣] ٢٧أ^{٣} ب + ٦أ^{٢} ب^{٢} – ١٢أ ب^{٣} .

[٤] (م – ٢)^{٣} + (م – ٢)^{٢} .

[٥] م^{٢} – ٩ ل^{٢} .

[٦] ١٤٤ س^{٢} – أ^{٢} .

[٧] ٥أ^{٣} – ١٢٥أ ب^{٢} .

[٨] $\frac{\text{هـ}^{٢}}{٣٦}$ – ٢٥ و^{٢} .

[٩] أ^{٢} ب^{٢} – ٤٩ .

[١٠] ٣ ل^{٢} م – $\frac{٢٧}{٤}$ م^{٣} .

[١١] س^{٦} – ١ .

[١٢] ٠,١٦ أ^{٢} – $\frac{\text{ب}^{٢}}{٩}$.

[١٣] (٦٥)^{٢} – (٢٥)^{٢} .

[١٤] ٢٠ س^{٢} ص – ٤٥ ص .

[١٥] ٧ – ٢٨ ص^{٢} .

[١٦] ٨ س^{٣} ص^{٣} – ٢ س ص .

[١٧] (٩,١)^{٢} – (١,٩)^{٢} .

[١٨] ٢٧أ^{٢} – ١٢ ب^{٢} .

[١٩] $\frac{٤}{٩}$ أ^{٢} – ب^{٢} .

[٢٠] ٣٢ س ص^{٣} – ٧٢ س^{٣} ص .

[٢١] م^{٢} – (أ + ب)^{٢} .

[٢٢] (س + ص)^{٣} – ٩ (س + ص) .

٢ : ٢ المقـدار الثلاثـي

تأمل المقادير التالية :

(١) س^{٢} + ٥ س + ٦ (٢) س^{٢} – ٣ س – ١٠

(٣) ٢ س^{٢} + ١١ س + ١٥ (٤) ٣ س^{٢} + ٥ س – ١٢

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ في المقدارين (١) ، (٢) أن معامل س^{٢} في كل منهما يساوي الواحد الصحيح ، ولذا يُسمَّى كل منها مقدار ثلاثي بسيط .

اما في المقدارين (٣) ، (٤) تلاحظ أن معامل س^{٢} في كل منهما لايساوي الواحد الصحيح ، ولذا يسمى كل منها مقدار ثلاثي غير بسيط .

أولاً : تحليل المقدار الثلاثي البسيط :

تعلم أن : (س + ٣) (س + ٢) = س (س + ٢) + ٣ (س + ٢)

= س^{٢} + $\boxed{\text{٢ س + ٣ س}}$ + ٦

إِذن (س + ٣) (س + ٢) = س^{٢} + ٥ س + ٦

يُسمَّى المقداران (س + ٣) ، (س + ٢) عاملين للمقدار س^{٢} + ٥ س +٦

حيث الحد الأول : $س^2 = س \times س$ ،

الحد المطلق : ٦ ، والجدول المجاور

يوضح عوامله المختلفة .

اما الحد الأوسط = ٥ س

ابحث في الجدول عن عاملين للعدد ٦

مجموعهما يساوي معامل س ستجدهما ٢ ، ٣

مما سبق تجد أن :

عوامل العدد ٦	مجموعها
١ ، ٦	٧
١– ، ٦–	٧–
٢ ، ٣	٥
٢– ، ٣–	٥–

لتحليل المقدار الثلاثي البسيط الذي صورته $س^2 + ب\,س + جـ$ يحلل الحد المطلق (جـ) إلى عاملين مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (ب) . وبصورة عامة فإن :

$$س^2 + (م + ن)\,س + م\,ن = (س + م)(س + ن)$$

حيث م ، ن $\in$ ح ، م + ن = ب ، م ن = جـ

مثال (١) حلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية :

أ) $ص^2 - ٧ص + ١٠$ ، ب) $م^2 + ٢م - ١٥$ ، جـ) $هـ^2 - هـ - ١٢$.

الحـل:

أ) $ص^2 - ٧ص + ١٠$ ، فيه :

الحد الأول : $ص^2 = ص \times ص$

الحد الأوسط : –٧ ص

الحد الثالث = ١٠ (موجب)، عاملاه كلاهما : موجبان أو سالبان .

ابحث في الجدول المقابل عن عاملين للعدد (١٠) مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (–٧) ستجد انهما : –٢ ، –٥ .

عوامل العدد ١٠	مجموعها
١ ، ١٠	١١
–١ ، –١٠	–١١
٢ ، ٥	٧
–٢ ، –٥	–٧

∴ ص^{٢} – ٧ص + ١٠ = (ص – ٢) (ص – ٥)

التحقق :

اضرب المقدارين : (ص – ٢) ، (ص – ٥) ، ماذا تجد ؟

ب) م^{٢} + ٢م – ١٥ ، فيه :

الحد الأول : م^{٢} = م × م

الحد الأوسط : ٢ م

الحد الثالث : –١٥ (سالب) العاملين للعدد (–١٥) مختلفين في الإِشارة .

ابحث في الجدول المقابل عن عاملين للعدد (–١٥) مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (٢) ستجد انهما : –٣ ، ٥ .

عوامل العدد –١٥	مجموعها
–١ ، ١٥	١٤
١ ، –١٥	–١٤
–٣ ، ٥	٢
٣ ، –٥	–٢

∴ م^{٢} + ٢م – ١٥ = (م – ٣) (م + ٥) .

التحقق :

كيف ستتحقق من صحة إِجابتك ؟

جـ) هـ^{٢} – هـ – ١٢ ، فيه :

الحد الأول : هـ^{٢} = هـ × هـ

الحد الأوسط : – هـ

الحد الثالث : –١٢ (سالب) العاملان مختلفان في الإشارة .

ابحث في الجدول المقابل عن عاملين للعدد (–١٢) مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (–١) ستجد انهما –٤ ، ٣ .

∴ هـ^{٢} – هـ –١٢= (هـ – ٤)(هـ +٣)

عوامل العدد –١٢	مجموعها
–١ ، ١٢	١١
١ ، –١٢	–١١
–٢ ، ٦	٤
٢ ، –٦	–٤
–٣ ، ٤	١
٣ ، –٤	–١

التحقق :

تحقق بنفسك من صحة الإجابة .

ملاحظة :

(١) إذا كانت إشارة الحد الثالث موجبة ، فإن العاملين لهما نفس إشارة الحد الأوسط .

(٢) إذا كانت إشارة الحد الثالث سالبة ، فأن إشارة العاملين مختلفتان .

مثال (٢) حلّل المقدار : ٲ^{٢} + ٣ ٲ ب – ٢٨ ب^{٢} .

الحــل :

الحد الأول : ٲ^{٢} = ٲ × ٲ

الحد الأوسط : + ٣ ٲ ب

الحد الثالث : -28 ب^2 .

ما عاملي العدد(-28) التي مجموعها يساوي معامل الحد الأوسط (3)؟

ستجد إنهما : 7 ، -4 ، ∴ -28 ب^2 = 7 ب X -4 ب .

∴ أ^2 + 3 أ ب -28 ب^2 = (أ + 7 ب) (أ $-$ 4 ب) .

مثال (٣) حلل ما يأتي :

أ) -10 + 3 ع + ع^2 ، ب) (س $-$ 3)^2 -2 (س $-$ 3) -8 .

الحــل :

أ) أولاً : نرتب المقدار المعطى في الصورة العامة : س^2 + ب س + جـ ،

فنحصل على : ع^2 + 3 ع $-$ 10

∴ معامل الحد الأوسط = 3

نبحث عن عاملين للعدد (-10) ، مجموعهما يساوي 3 ،

نحصل على : 5 ، -2 .

∴ ع^2 + 3 ع $-$ 10 = (ع + 5) (ع $-$ 2) .

ب) (س $-$ 3)^2 -2 (س $-$ 3) -8 ، فيه :

الحد الأول : (س $-$ 3)^2 = (س $-$ 3) (س $-$ 3)

الحد الأوسط : -2 (س $-$ 3) ، ومعامله (-2)

الحد الثالث : -8 (سالب) ، ∴ العاملان مختلفا الإشارة .

نبحث عن عاملين للعدد ($-$ 8) مجموعهما يساوي ($-$ 2)

ستجدهما -4 ، 2 .

∴ (س − ٣)^{٢} − ٢(س − ٣) −٨

= [(س − ٣) − ٤] [(س − ٣) + ٢]

= (س − ٣ − ٤) (س − ٣ + ٢)

= (س − ٧) (س − ١)

ثانياً : تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط :

تدريـــب اضرب : (٢س + ٣) (س +٢) ، بعد إِجراء عملية الضرب

تحصل على : (٢س + ٣) (س +٢) = ٢ س^{٢} + ٤ س + ٣ س + ٦

= ٢ س^{٢} + (٤ + ٣) س + ٦

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن ٢ × ٦ = ١٢ = ٤ × ٣

أي أن حاصل ضرب معامل س^{٢} في الحد المطلق يعطيك عدداً ، يحلل هذا العدد إِلى عاملين مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط .

مثال (٤) حلل المقدار : ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤ .

الحـــل :

معامل س^{٢} = ٣ ، الحد المطلق = −٤

حاصل ضرب معامل س^{٢} في الحد المطلق = −١٢

نحلل العـــدد (-١٢) إلى عاملين مجموعهما يســاوي معامــل الحد الأوسط (-٤) العاملان هما : -٦ ، ٢ .

نكتب المقدار بحيث يظهر معامل الحد الأوسط على صورة مجموع العاملين، وذلك على النحو التالي :

$٣ س^٢ - ٤ س - ٤ = ٣ س^٢ - ٦ س + ٢ س - ٤$ (بأخذ العامل المشترك لكل حدين متتاليين على حده)

$= ٣ س (س - ٢) + ٢ (س - ٢)$ (بأخذ العامل المشترك)

$= (س - ٢) (٣ س + ٢)$

التحقق :

اضرب المقدارين ($س - ٢$) ، ($٣ س + ٢$) .

مثال (٥) حلِّل المقدار : $٢ س^٢ + ٧ س + ٦$.

الحــل :

حاصل ضرب معامل $س^٢$ في الحد المطلق = ١٢

نحلِّل العدد ١٢ إلى عاملين مجموعهما يساوي ٧ « معامل الحد الأوسط »

فنجد أنهما : ٤ ، ٣ .

$\therefore ٢ س^٢ + ٧ س + ٦ = ٢ س^٢ + ٤ س + ٣ س + ٦$

$= ٢ س (س + ٢) + ٣ (س + ٢)$

$= (س + ٢) (٢ س + ٣)$

التحقق : تحقق بنفسك من صحة التحليل .

ملاحظة :

يمكنك تحليل المقدار السابق كما يلي :

يستعان برسم خطين متقاطعين بصورة مقص ، يُحلّل الحد الأول يمينهما ويحلّل الحد المطلق يسارهما ، والحد الأوسط ينتج عن مجموع عاملي ضرب الطرفين .

٢ س   + ٣

س   + ٢

الحد الأوسط = ٢ س × ٢ + س × ٣

= ٤ س + ٣ س

= ٧ س

∴ ٢ س^{٢} + ٧ س + ٦ = (٢ س + ٣) (س + ٢)

مثال (٦) حلِّل المقدار : ٣ س^{٢} – ١٣ س ص + ١٤ ص^{٢} .

الحـــل :

الحد الأول : ٣ س^{٢} = ٣ س × س

الحد الثالث : ١٤ ص^{٢} « موجب » ، إِذن العاملان لهما نفس إِشارة الحد الأوسط وهما : –١٤ ص ، –ص أو –٧ ص ، –٢ ص .

نضع هذه العوامل في الأشكال التالية :

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
٣س –١٤ص	٣س –ص	٣س –٢ص	٣س –٧ص
س –ص	س –١٤ص	س –٧ص	س –٢ص
الحد الأوسط = –١٧ س ص	الحد الأوسط = –٤٣ س ص	الحد الأوسط = –٢٣ س ص	الحد الأوسط = –١٣ س ص

تلاحظ أن الحالة (٤) هي التي فيها الحد الأوسط = −١٣ س ص .

∴ ٣ س^{٢} − ١٣ س ص + ١٤ ص^{٢} = (٣ س − ٧ ص) (س − ٢ص)

التحقق :

تحقق بنفسك من صحة التحليل .

ثالثاً : تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل :

تدريب حلّل المقدار : س^{٢} + ٦س + ٩ .

بعد إِجراء عملية التحليل تحصل على :

س^{٢} + ٦س + ٩ = (س + ٣) (س + ٣) .

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن : (س + ٣) (س + ٣) = (س + ٣)^{٢} .

أي أن حاصل ضرب كميتين متساويتين يساوي مربع الكمية نفسها .

∴ س^{٢} + ٦س + ٩ = (س + ٣)^{٢} .

يُسمَّى المقدار : س^{٢} + ٦س + ٩ مربعاً كاملاً « لماذا » ؟

– الحد الأول : س^{٢} « جذره التربيعي س »

– الحد الثالث : ٩ « جذره التربيعي ٣ »

– الحد الأوسط : ٦ س « ٢ × الجذر التربيعي للحد الأول × الجذر التربيعي للحد الثالث » .

- المقدار الثلاثي المربع الكامل يتكون من :
مجموع كميتين مربعتين مضافاً إليه «أو مطروحاً منه» ضعف حاصل ضرب الكميتين .
- يحلل المقدار الثلاثي المربع الكامل بالشكل التالي :
$($ الجذر التربيعي للحد الأول $\pm$ الجذر التربيعي للحد الثالث $)^{٢}$
ويستند في وضع الإشارة إلى إشارة الحد الأوسط .
والصورة العامة هي : $أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢} = (أ \pm ب)^{٢}$.

مثال (٧) أكمل الفراغ فيما يأتي بما يجعل المقدار مربعاً كاملاً :

أ) $س^{٢} - ... + ١٦$ ، ب) $٤أ^{٢} + ... + ٩ جـ^{٢}$ ،

جـ) $... + ١٠ س ص + ٢٥ ص^{٢}$، ء) $م^{٢} - ١٤ م ن + ...$.

الحل أ) الحد الأوسط = $\pm ٢ \times$ الجذر التربيعي للحد الأول $\times$ الجذر التربيعي للحد الثالث

$= \pm ٢ \times س \times ٤ = \pm ٨ س$

$\therefore$ المقدار هو $س^{٢} - ٨س + ١٦$.

ب) الحد الأوسط = $\pm ٢ \times$ الجذر التربيعي للحد الأول $\times$ الجذر التربيعي للحد الثالث

$= \pm ٢ \times ٢أ \times ٣ جـ = \pm ١٢أ جـ$.

$\therefore$ المقدار هو : $٤أ^{٢} + ١٢أ جـ + ٩ جـ^{٢}$.

جـ) الجذر التربيعي للحد الأول = $\frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \times \text{الجذر التربيعي للحد الثالث}}$

$= \frac{١٠ س ص}{٢ \times ٥ ص} = \frac{١٠ س ص}{١٠ ص} = س$

الحد الأول = س^{٢}

∴ المقدار هو : س^{٢} + ١٠ س ص + ٢٥ ص^{٢}

ء) الجذر التربيعي للحد الثالث = $\frac{\text{الحد الأوسط}}{\text{٢ × الجذر التربيعي للحد الأول}}$

= $\frac{\text{–١٤ م ن}}{\text{٢ × م}}$ = – ٧ ن

∴ الحد الثالث = (–٧ ن)^{٢} = ٤٩ ن^{٢}

∴ المقدار هو : م^{٢} – ١٤ م ن + ٤٩ ن^{٢}

مثال (٨) حلل ما يأتي :

أ) هـ^{٢} – ١٢ هـ + ٣٦ ، ب) ٤ ل^{٢} + ١٢ ل م + ٩ م^{٢} ،

جـ) أ^{٢} – ٢ $\sqrt{٧}$ أ + ٧ ، ء) $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$ + ٥س + $\frac{٢٥}{٤}$ ص^{٢} .

الحــل :

أ) هـ^{٢} – ١٢ هـ + ٣٦ = (هـ – ٦)^{٢} .

ب) ٤ ل^{٢} + ١٢ ل م + ٩ م^{٢} = (٢ ل + ٣ م)^{٢} .

جـ) أ^{٢} – ٢ $\sqrt{٧}$ أ + ٧ = (أ – $\sqrt{٧}$)^{٢} .

ء) $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$ + ٥س + $\frac{٢٥}{٤}$ ص^{٢} = ($\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ + $\frac{٥}{٢}$ ص)^{٢} .

مثال (٩) حديقة أطفال مربعة الشكل مساحتها(س^{٢} + ٢٠س + ١٠٠) متراً مربعاً .

حيث س ≥ صفر . أوجد طول ضلع هذه الحديقة بدلالة س .

الحل :

تعلم أن مساحة الحديقة المربعة = (طول ضلعها)^{٢} .

∴ (س^{٢} + ٢٠س + ١٠٠) = (س + ١٠)^{٢} .

∴ طول ضلع الحديقة = (س + ١٠) متراً .

تمارين ومسائل

أكمل ما يأتي لتحصل على متساويات صحيحة :

[١] س^{٢} − ٣س + ٢ = (س − ...) (... − ٢) .

[٢] أ^{٢} + ٥أ + ٦ = (... + ٣) (أ + ...) .

[٣] س^{٢} + س − ٣٠ = (س − ...) (س + ...) .

[٤] م^{٢} + ٧ م هـ + ١٠ هـ^{٢} = (... + ...) (م + ٢ هـ) .

[٥] ل^{٢} − ٩ ل م − ١٠م^{٢} = (... + م) (ل − ١٠ م) .

[٦] ٣ س^{٢} + ٤ س − ٤ = (٣ س − ...) (... + ٢) .

[٧] ٦أ^{٢} + ١١أ + ٤ = (٢أ + ...) (... + ٤) .

حلل المقادير فيما يلي :

[٨] م^{٢} − ١٠ م + ١٦ .

[٩] أ^{٢} + ٨أ + ١٥ .

[١٠] ع^{٢} + ١٣ ع م − ٣٠ م^{٢} .

[١١] ب^{٢} − ٢٥ ب جـ + ٢٤ جـ^{٢} .

[١٢] أ^{٢} − ١٠أ ب − ٢٤ ب^{٢} .

[١٣] س^{٢}ص^{٢} − ٣ س ص − ١٠ .

[١٤] ل^{٢} + ٥ ل م + ٤ م^{٢} .

[١٥] هـ^{٢} − ٢٠ هـ م + ١٠٠ م^{٢} .

[١٦] ٢ م^{٢} + ٧ م + ٣ .

[١٧] ٣س^{٢} – ١٦ س + ٥ .

[١٨] ٤ل^{٢} – ٨ ل م – ٥ م^{٢} .

[١٩] ٦ هـ^{٢} + ٧ هـ و – ٣ و^{٢} .

[٢٠] ٤ + ١٩ ع – ٥ ع^{٢} .

[٢١] ١٢ ب – ٨٥ + ب^{٢} .

[٢٢] ل^{٢} – ٣٠م^{٢} – ٧ل م .

[٢٣] ٤ س^{٢} + ٢٠ س + ٢٥ .

[٢٤] ١٤ س^{٢}ص^{٢} + ١٩س ص + ٦ .

[٢٥] $\frac{س^{٢}}{٤}$ – ٣ س + ٩ .

[٢٦] أ^{٢} – ٢$\sqrt{٥}$ أ + ٥ .

[٢٧] ل^{٢} – $\frac{٢}{٣}$ ل م + $\frac{م^{٢}}{٩}$.

[٢٨] ٥ ب^{٢} + ٦٠ ب جـ + ١٠٠ جـ^{٢} .

[٢٩] ٣ س^{٢} – ٢٤ س + ٤٥ .

[٣٠] ١٥ س^{٢} – ١٤ س ص + ٣ ص^{٢} .

[٣١] ٠,٢٥ أ^{٢} + أ ب + ب^{٢} .

[٣٢] قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها (س^{٢} + ١٤ س + ٤٩) متراً مربعاً ، أوجد طول هذه القطعة بدلالة س .

[٣٣] حديقة أطفال مربعة الشكل مساحتها (س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤) متراً مربعاً أوجد طول هذه الحديقة بدلالة س . إذا علمت أن طول الحديقة ١٦٥ م . فما قيمة س ؟

٢ : ٣ التحليل بإكمال المربع

تأمل المقدارين : س^{٢} + ٢ ب س + ب^{٢} ، س^{٢} + ٤ س ، كيف يمكن وضع المقدارين في صورة حاصل ضرب لأبسط عواملهما ؟

نجد أن المقدار الأول : س^{٢} + ٢ ب س + ب^{٢} يمثل مربعاً كاملاً . لماذا؟

إذن $س^٢ + ٢ ب س + ب^٢ = (س + ب)^٢$.

أما المقدار الثاني فيحلل على النحو التالي : $س^٢ + ٤ س = س (س + ٤)$.

كما نستطيع تحليله بطريقة أخرى وباستخدام خواص جبرية لإكمال المربع ، فمثلاً : $س^٢ + ٤ س$ ، لايمثل مربعاً كاملاً ولكي يصبح مربعاً كاملاً يجب أن نضيف حداً وليكن $ب^٢$ ، بحيث يكون الحد الأوسط $٤ س = ٢ ب س$ ، ويتحقق ذلك إذا كان $ب = ٢$.

لاحظ أن العدد ٢ هو نصف معامل س في هذا المقدار ، وبإضافة $(٢^٢)$ إلى $س^٢ + ٤ س$ يكون لدينا $س^٢ + ٤ س + ٢^٢ = (س + ٢)^٢$.

لإكمال المقدار $س^٢ + ب س$ إلى مربع كامل ، نضيف إليه مربع نصف معامل س ، أي $(\frac{ب}{٢})^٢$ فنحصل على :

$س^٢ + ب س + (\frac{ب}{٢})^٢ = (س + \frac{ب}{٢})^٢$ وهو مربع كامل.

مثال (١) أكمل المقدار : $س^٢ + ١٤ س$ إلى مربع كامل .

الحل: نريد أن نكمل المربع فقط ، ولذا يتغير لدينا المقدار ولإكمال المقدار : $س^٢ + ١٤ س$ إلى مربع كامل نضيف مربع نصف معامل س ،

أي $(\frac{١٤}{٢})^٢ = ٧^٢$.

$\therefore س^٢ + ١٤ س + ٧^٢ = (س + ٧)^٢$.

مثال (٢) أكمل المقدار : $س^٢ - ٩ س$ إلى مربع كامل .

الحل : نضيف مربع نصف معامل س لكي يتحول المقدار إلى مربع كامل .

$$\therefore س^٢ - ٩ س + \left(- \frac{٩}{٢} \right)^٢ = \left(س - \frac{٩}{٢} \right)^٢ .$$

ولتحليل المقدار $س^٢ + ٤ س$ باستخدام طريقة إكمال المربع نضيف مربع نصف معامل س ثم نطرحه للمحافظة على قيمة المقدار كما يلي :

$$س^٢ + ٤ س + ٢^٢ - ٢^٢ = (س + ٢)^٢ - ٤$$

$$= [(س + ٢) - ٢] [(س + ٢) + ٢]$$

$$= س (س + ٤) .$$

في الأمثلة الآتية سوف نوضح طريقة تحليل المقادير الثلاثية بإكمال المربع .

مثال (٣) حلّل : $س^٢ + ٢ س - ٨$ بالطرق المعتادة السابقة ثم حلّله مرة أخرى بطريقة إكمال المربع . قارن النتيجتين .

الحل :

أولاً : $س^٢ + ٢ س - ٨ = (س + ٤) (س - ٢)$

ثانياً : التحليل بطريقة إكمال المربع :

نلاحظ أن : $س^٢ + ٢ س - ٨$ ليس مربعاً كاملاً (لماذا؟)

معامل س $= ٢$

نصف معامل س $= ١$

مربع نصف معامل س $= ١^٢$.

لإكمال هذا المقدار إلى مربع كامل : نضيف إليه حداً يساوي مربع نصف معامل س وهو$(١)^٢$ ، وحتى لايتغير المقدار المطلوب تحليله يلزم طرح $(١)^٢$ أيضاً .

$\therefore$ س^٢ + ٢ س −٨ = س^٢ + ٢ س + ١ − ١ −٨

= (س^٢ + ٢ س + ١) − ٩ = (س + ١)^٢ − ٩

= [(س + ١) − ٣] [(س + ١) + ٣]

= (س − ٢) (س + ٤) .

مثال (٤) حلل المقدار : س^٢ + $\frac{٣}{٢}$س − ١ .

الحل : المقدار : س^٢ + $\frac{٣}{٢}$ س − ١ . ليس مربعاً كاملاً (لماذا؟)

لإكمال هذا المقدار إلى مربع كامل نضيف إليه مربع نصف معامل س وهو $= (\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢})^٢ = (\frac{٣}{٤})^٢$ ، ثم نطرح منه $(\frac{٣}{٤})^٢$ أيضاً حتى

لايتغير المقدار المطلوب تحليله .

$\therefore$ س^٢ + $\frac{٣}{٢}$ س − ١ = س^٢ + $\frac{٣}{٢}$س + $(\frac{٣}{٤})^٢ - (\frac{٣}{٤})^٢$ −١

= (س + $\frac{٣}{٤}$)^٢ − $\frac{٩}{١٦}$ −١

= (س + $\frac{٣}{٤}$)^٢ − $\frac{٢٥}{١٦}$

= [(س + $\frac{٣}{٤}$) − $\frac{٥}{٤}$] [(س + $\frac{٣}{٤}$) + $\frac{٥}{٤}$]

= (س − $\frac{١}{٢}$) (س + ٢) .

مثال (٥) حلّل المقدار : $س^٢ - ٤ س - ٧$.

الحـل : لاحظ أن هذا المقدار لايمكن تحليله بالطرق السابقة، ولذا نحلّله

بإِكمال المربع :

معامل س = -٤

نصف معامل س = -٢

مربع نصف معامل س = $(-٢)^٢ = ٤$

∴ $س^٢ - ٤ س - ٧ = س^٢ - ٤ س + ٤ - ٤ - ٧$.

$= (س - ٢)^٢ - ١١$

$= [(س - ٢) - \sqrt{١١}][(س - ٢) + \sqrt{١١}]$

$= (س - ٢ - \sqrt{١١})(س - ٢ + \sqrt{١١})$

قد يصادفنا أحياناً مقدار ثلاثي كل من حدَّيه الأول والثالث مربع كامل ولايمكننا تحليله بالطرق السابقة فنلجأ إِلى تحليله بطريقة إِكمال المربع ، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٦) حلّل : $س^٤ + ٢ س^٢ + ٩$.

الحـل : لاحظ هذا المقدار الثلاثي لايمكن تحليله بالطرق المباشرة السابقة،

إِذ لايوجد عددان حاصل ضربهما ٩ ومجموعهما ٢ .

ولكن تلاحظ أن :

الحدُّ الأول = س^{٤} = (س^{٢})^{٢} مربع كامل .

الحدُّ الثالث = ٩ = (٣)^{٢} مربع كامل .

فيكون الحد الأوسط الذي يُكوِّن مع الحدَّين الأول والثالث مقداراً ثلاثياً على صورة مربع كامل هو : ٢ × س^{٢} × ٣ = ٦ س^{٢} .

لذلك إِذا أضفنا الحد ٦ س^{٢} ثم طرحناه من المقدار المفروض نحصل على :

س^{٤} + ٢ س^{٢} + ٩ = (س^{٤} + ٢ س^{٢} + ٩) + ٦س^{٢} − ٦س^{٢} .

= (س^{٤} + ٦ س^{٢} + ٩) + ٢ س^{٢} − ٦س^{٢}

= (س^{٢} + ٣)^{٢} − ٤ س^{٢}

= [(س^{٢} + ٣) − ٢ س] [(س^{٢} + ٣) + ٢ س]

= (س^{٢} − ٢ س +٣) (س^{٢} + ٢ س +٣) .

مثال (٧) حلّل المقدار: ٣٦س^{٤} − ١٠٠ س^{٢} ص^{٢} + ٤٩ ص^{٤} .

الحــل:

∵ الحدَّ الأول : ٣٦س^{٤} = (٦ س^{٢})^{٢} مربع كامل .

الحـدّ الأخيــر : ٤٩ ص^{٤} = (٧ ص^{٢})^{٢} مربع كامل .

∴ الحد الأوسط الذي يُكوِّن مع الحدين ٣٦س^{٤} ، ٤٩ ص^{٤} .

مربعاً كاملاً هو = ٢ × ٦ س^{٢} × ٧ ص^{٢} .

= ٨٤ س^{٢}ص^{٢} .

∴ ٣٦س^{٤} − ١٠٠ س^{٢}ص^{٢} + ٤٩ ص^{٤}

= ٣٦س^{٤} − ٨٤ س^{٢}ص^{٢} + ٤٩ ص^{٤} − ١٠٠ س^{٢}ص^{٢} + ٨٤ س^{٢}ص^{٢}

= (٦س^{٢} – ٧ص^{٢})^{٢} – ١٦ س^{٢} ص^{٢}

= [(٦س^{٢} – ٧ ص^{٢}) –٤ س ص] [(٦س^{٢} – ٧ ص^{٢}) + ٤ س ص]

= (٦ س^{٢} – ٤ س ص – ٧ص^{٢}) (٦ س^{٢} + ٤ س ص – ٧ ص^{٢})

لاحظ : أننا اخترنا (–٨٤ س^{٢} ص^{٢}) حداً أوسطاً للحدين الأول والثالث لكي يؤول المقدار الأصلي إلى فرق بين مربعين لكي نتمكن من متابعة التحليل .

مثال (٨) حلّل : ٤ ٲ^{٤} + ٨١ ب^{٤}

الحــل :

∵ ٤ ٲ^{٤} = (٢ ٲ^{٢})^{٢} ، ٨١ ب^{٤} = (٩ ب^{٢})^{٢}

∴ الحد الأوسط الذي يكوّن مع الحدين ٤ ٲ^{٤} ، ٨١ ب^{٤}

مربعاً كاملاً هو : ٢ × ٢ٲ^{٢} × ٩ ب^{٢}

= ٣٦ ٲ^{٢} ب^{٢}

∴ ٤ ٲ^{٤} + ٨١ ب^{٤} = ٤ ٲ^{٤} + ٣٦ ٲ^{٢} ب^{٢} + ٨١ ب^{٤} – ٣٦ ٲ^{٢} ب^{٢}

= (٢ ٲ^{٢} + ٩ ب^{٢})^{٢} – ٣٦ ٲ^{٢} ب^{٢}

= [(٢ ٲ^{٢} + ٩ ب^{٢}) – ٦ ٲ ب] [(٢ ٲ^{٢} + ٩ ب^{٢}) + ٦ ٲ ب]

= (٢ ٲ^{٢} – ٦ ٲ ب + ٩ ب^{٢}) (٢ ٲ^{٢} + ٦ ٲ ب + ٩ ب^{٢})

تمارين ومسائل

[١] أكمل كل مقدار فيما يأتي إلى مربع كامل :

١) ب^{٢} + ٤ب ٢) س^{٢} – ١٠ س

٣) $أ^{٢} ب^{٢} - ٢ أ ب$ ‏ ‏ ٤) $م^{٤} + ٤ م^{٢}$

٥) $ل^{٢} + ٨١$ ‏ ‏ ٦) $ل^{٢} - ٣ ل$

٧) $ص^{٢} + ٦ ص$ ‏ ‏ ٨) $ع^{٢} + ٨ ع$

[٢] استخدم طريقة إكمال المربع الكامل في تحليل كل مقدار مما يأتي :

١) $س^{٢} + \frac{١٠}{٣} س + ١$ ‏ ‏ ٢) $ص^{٢} - \frac{٥}{٦} ص - ١$

٣) $٥ أ^{٢} - ٢٢ أ + ٨$ ‏ ‏ ٤) $ص^{٢} - ٥ ص + ٦$

٥) $س^{٢} + ٢ س - ٢٤$ ‏ ‏ ٦) $٢ س^{٢} - ٣ س - ٢٠$

٧) $٢٥ ص^{٢} - ١١٠ ص + ٤٠$ ‏ ‏ ٨) $٣ س^{٢} + ١١ س + ٦$

٩) $س^{٢} + \frac{٣}{٤} س + \frac{١}{٨}$ ‏ ‏ ١٠) $٥ أ^{٢} - ٢٥ أ + ٣٠$

[٣] عيّن قيمة جـ التي تجعل كلاً من المقادير التالية مربعاً كاملاً :

١) $١٦ س^{٢} + جـ س ص + ٤٩ ص^{٢}$

٢) $جـ ص^{٢} + ٢٨ ص + ٤٩$

٣) $٩ س^{٢} - ١٢ س ص + جـ$

[٤] حلّل ما يأتي :

١) $س^{٤} + ٩ س^{٢} ص^{٢} + ٨١ ص^{٤}$

٢) $١٦ س^{٤} + ٢٤ س^{٢} ص^{٢} + ٢٥ ص^{٤}$

٣) $٨ ل^{٤} - ٥٠ ل^{٢} م^{٢} + ٧٢ م^{٤}$

٤) $١٢ س^{٤} + ٧٥ ص^{٤} - ٧٢ س^{٢} ص^{٢}$

٥) $أ^{٤} + ٤ ب^{٤}$

٦) ٦٢٥ س^{٤} + ٤ص^{٤}

٧) ٦٤ ﺃ^{٤} + ب^{٤}

٨) ص^{٤} − ٧ ص^{٢}ع^{٢} + ع^{٤}

٩) ﺃ^{٤} + ٣ ﺃ^{٢} + ٣٦

١٠) جـ^{٤} + ٣ جـ^{٢} ء − ٤ ء^{٢}

٢ : ٤ مجموع مكعبين والفرق بينهما

أولاً : مجموع مكعبين :

تأمل المقادير التالية :

س^{٣} ، ٨ﺃ^{٣} ، (٥ م)^{٣} ، $\frac{١}{٢٧}$ س^{٣} ص^{٣} ، ($\frac{١}{٢}$ﺃ − جـ)^{٣} .

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن كلاً منها عبارة عن مكعب .

والمقـدار ﺃ^{٣} + ب^{٣} يسمى مجموع مكعبين .

تدريب

أوجد ما يأتي :

(س^{٣} + ص^{٣}) ÷ (س + ص)

نجد أن خارج القسمة :

(س^{٣} + ص^{٣}) ÷ (س + ص) = س^{٢} − س ص + ص^{٢} .

من ذلك نستنتج أن :

$$\text{س}^{3} + \text{ص}^{3} = (\text{س} + \text{ص})(\text{س}^{2} - \text{س ص} + \text{ص}^{2})$$

أي أن :

مجموع مكعبي حدين =

(الحد الأول+الحد الثاني) (مربع الحد الأول - الحد الأول×الحد الثاني +مربع الحد الثاني)

تلاحظ أن : $(\text{س} + \text{ص})$ ، $(\text{س}^{2} - \text{س ص} + \text{ص}^{2})$ عاملان للمقدار $(\text{س}^{3} + \text{ص}^{3})$.

مثال (١) حلّل المقادير التالية :

أ) $\text{ص}^{3} + ٢٧$ ب) $\text{س}^{3}\text{ص}^{3} + ٦٤$

جـ) $١٦\,\text{س}^{4} + \frac{٢}{٢٧}\,\text{س ص}^{3}$

الحــل: أ) $\text{ص}^{3} + ٢٧ = \text{ص}^{3} + ٣^{3}$

$$= (\text{ص} + ٣)(\text{ص}^{2} - ٣\,\text{ص} + ٩) .$$

ب) $\text{س}^{3}\text{ص}^{3} + ٦٤ = (\text{س ص})^{3} + ٤^{3}$

$$= (\text{س ص} + ٤)(\text{س}^{2}\text{ص}^{2} - ٤\,\text{س ص} + ١٦) .$$

جـ) نلاحظ أن ٢ س عامل مشترك بين حدي المقدار لذلك نكتب :

$$١٦\,\text{س}^{4} + \frac{٢}{٢٧}\,\text{س ص}^{3} = ٢\,\text{س}\,(٨\,\text{س}^{3} + \frac{١}{٢٧}\,\text{ص}^{3})$$

$$= ٢\,\text{س}\,[(٢\,\text{س})^{3} + (\frac{١}{٣}\,\text{ص})^{3}]$$

$$= ٢\,\text{س}\,(٢\,\text{س} + \frac{١}{٣}\,\text{ص})(٤\,\text{س}^{2} - \frac{٢}{٣}\,\text{س ص} + \frac{١}{٩}\,\text{ص}^{2}) .$$

ثانياً : الفرق بين مكعبين :

عرفت أن : $أ^٣ + ب^٣$ ، يُسمَّى مجموع مكعبين ، فما يسمى $أ^٣ - ب^٣$
يُسمَّى المقدار ($أ^٣ - ب^٣$) الفرق بين مكعبين ، وباستخدام قواعد الإشارة
نحصل على أن :

$أ^٣ - ب^٣ = أ^٣ + (-ب)^٣$ ومن هنا يمكن الاستفادة من قاعدة تحليل
مجموع مكعبين لتحليل الفرق بين مكعبين وذلك على النحو التالي :

$$أ^٣ - ب^٣ = أ^٣ + (-ب)^٣ = [أ + (-ب)][أ^٢ - أ(-ب) + (-ب)^٢]$$

من ذلك نستنتج أن :

$$أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

أي أن :

الفرق بين مكعبي حدين =

(الحد الأول–الحد الثاني) (مربع الحد الأول+ الحد الأول×الحد الثاني +مربع الحد الثاني)

تدريب اقسم ($أ^٣ - ب^٣$) على (أ – ب)

ماذا تلاحظ ؟

مثال (٢) حلّل المقادير التالية :

أ) $٦٤ع^٣ - ٢٧$ ب) $\frac{١}{٨}أ^٦ - ٢٧$

جـ) $ص^٦ - ٦٤$ د) $(س + ٥)^٣ - (س - ٥)^٣$

الحل : أ) $٦٤ع^٣ - ٢٧ = (٤ع - ٣)(١٦ع^٢ + ١٢ع + ٩)$

ب) $\frac{١}{٨} أ^{٦} - ٢٧ = (\frac{١}{٢} أ^{٢} - ٣)(\frac{١}{٤} أ^{٤} + \frac{٣}{٢} أ^{٢} + ٩)$.

جـ) $ص^{٦} - ٦٤ = (ص^{٢})^{٣} - (٤)^{٣}$

$= (ص^{٢} - ٤)(ص^{٤} + ٤ ص^{٢} + ١٦)$

$= (ص - ٢)(ص + ٢)(ص^{٤} + ٤ص^{٢} + ١٦)$.

ويمكن تحليل المقدار نفسه ، بالفرق بين مربعين كما يلي :

$ص^{٦} - ٦٤ = (ص^{٣})^{٢} - ٨^{٢}$

$= (ص^{٣} + ٨)(ص^{٣} - ٨)$

$= (ص + ٢)(ص^{٢} - ٢ ص + ٤)(ص - ٢)(ص^{٢} + ٢ ص + ٤)$

ملحوظة :

إِذا كان هناك مقدار يمكن تحليله كفرق بين مكعبين وكفرق بين مربعين ، فيستحسن تحليله كفرق بين مربعين أولاً ، ثم يستكمل التحليل.

د) $(س + ٥)^{٣} - (س - ٥)^{٣}$

$= [(س+٥) - (س-٥)][(س+٥)^{٢} + (س+٥)(س-٥) + (س-٥)^{٢}]$

$= (س + ٥ - س + ٥)(س^{٢} + ١٠س + ٢٥ + س^{٢} - ٢٥ + س^{٢} - ١٠س + ٢٥)$

$= ١٠ (٣ س^{٢} + ٢٥)$.

تمارين ومسائل

[١]عيّن المقادير التي هي مجموع مكعبين ثم حلّلها :

أ) $س^{٣} + ٨ أ^{٣}$ ب) $ب^{٣} + \frac{٨}{٢٧}$

جـ) $م^{٣} + ١$ د) $٩ + ٨ س^{٣}$

هـ) س^{٦} + ٣^{٦} 　　　　 و) ٢٧ ع^{٣} + ٢٥

[٢] عيّن المقادير التي هي فرق بين مكعبين ثم حلّلها :

أ) ع^{٣} − ٢٧ د^{٣} 　　　　 ب) م^{٣} − ١٦

جـ) $\frac{٨}{٩}$ − س^{٣} 　　　　 ء) ٢٧ و^{٣} − ٦٤

هـ) ٨ ل^{٣} − ٢٥ 　　　　 و) م^{٦} − ١

[٣] حلّل كلاً من المقادير الآتية :

١) ف^{٣} + ١ 　　　　 ٢) س^{٣} ص^{٣} ع^{٣} + ٣٤٣

٣) $\frac{١}{س^{٣}}$ + $\frac{١}{ص^{٣}}$ 　　　　 ٤) ٦٤ أ^{٣} − ٨ب^{٣}

٥) ٢١٦ س^{٣} + ٨ ع^{٣} 　　　　 ٦) ١٠٠٠ ص^{٣} − ١

٧) ل^{٣} − $\frac{٨}{١٢٥}$ 　　　　 ٨) س ع^{٣} − س ل^{٣}

٩) ٢١٦ ك^{٣} + ٦٤ ل^{٣} 　　　　 ١٠) $\frac{٢٧}{ص^{٣}}$ + $\frac{أ^{٣}}{س^{٣}}$

١١) ٠,٠٦٤ أ^{٣} − ٠,٠٠٨ ص^{٣} 　　　　 ١٢) ٢ − ٢ (س − ١)^{٣}

١٣) ٨ (م + ن)^{٣} − ن^{٣}

١٤) ٥٠٠ س^{٨} ص^{٢} + ٢٥٦ س^{٥} ص^{٥}

١٥) ٠,٠٢٧ أ^{٣} + $\frac{١٢٥}{٧٢٩}$ ب^{٣}

١٦) (أ − ٢ ب)^{٣} − ٦٤ ب^{٦}

١٧) ٢٧ س^{٣} ص^{٣} − ٨ أ^{٣} ب^{٣}

١٨) (س − ٣ ص)^{٣} + (س + ٣ ص)^{٣}

١٩) ٨م^{٣} − (م + ن)^{٣} ٢٠) ٣٤٣ أ^{٦} − ١٢٥

[٤] حلل المقادير الآتية :

أ) أ^{٦} − ب^{٦} ب) س^{٦} − ٧٢٩

جـ) ٧٢٩ أ^{٦} − ٦٤ص^{٦}

[٥] خزانا ماء مكعبي الشكل ، حجم الأول (س + ٣)^{٣} متراً مكعباً وحجم الآخر (س − ٣)^{٣} متر مكعب . أوجد مجموع حجميهما والفرق بينهما كحاصل ضرب .

[٦] صندوقان مكعبا الشكل حجم الأول (٢ س + ١)^{٣} متراً مكعباً وحجم الآخر ٨ أمتار مكعبة . أوجد مجموع حجميهما .

[٧] كرة حجمها ٣٤٣سم^{٣} وضعت داخل صندوق حجمه (٨ + س)^{٣} سم^{٣} ما الفرق بين حجميهما كحاصل ضرب ؟

٢ : ٥ التحليل بالتجميع

تأمل المقدار التالي : س^{٢} + أ س + ب س + أ ب ، ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أنه ليس للمقدار المعطى عامل مشترك لجميع حدوده ، كما تلاحظ أنه مقدار مكوّن من أربعة حدود .

كيف يمكنك تحليل هذا المقدار ؟

تجد أنك بحاجة إلى طريقة مناسبة تقوم من خلالها بتجميع بعض الحدود

معاً ، غالباً بوضع كل حدين معاً ، ثم تقوم بتحليل كل تجمع بأي أسلوب تراه مناسباً .

ولتحليل المقدار : $س^٢ + ٲ س + ب س + ٲ ب$ نقوم بتجميع كل حدين منه معاً بحيث نحصل على عامل مشترك في كل تجمع كما يلي :

$$س^٢ + ٲ س + ب س + ٲ ب = (س^٢ + ٲ س) + (ب س + ٲ ب)$$

$$= س (س + ٲ) + ب (س + ٲ)$$

$$= (س + ٲ) (س + ب)$$

وهناك طريقة أخرى للتحليل توصلنا إلى النتيجة نفسها فمثلاً باخذ الحد الأول والحد الثالث معاً والحد الثاني مع الرابع أي :

$$س^٢ + ٲ س + ب س + ٲ ب = (س^٢ + ب س) + (ٲ س + ٲ ب)$$

$$= س (س + ب) + ٲ (س + ب)$$

$$= (س + ب) (س + ٲ)$$

مثال (١) حلّل المقدار : $س^٣ + س^٢ + س + ١$.

الحــل : نقسم جميع حدود هذا المقدار إلى قسمين نجد :

$$س^٣ + س^٢ + س + ١ = (س^٣ + س^٢) + (س + ١)$$

$$= س^٢ (س + ١) + (س + ١)$$

$$= (س + ١) (س^٢ + ١)$$

حل آخر :

س^{٣} + س^{٢} + س + ١ = (س^{٣} + س) + (س^{٢} + ١)

ونترك تكملة الحل كنشاط للطالب .

مثال (٢) حلّل المقدار : ٨ س^{٢} + ٣ س ص − ٦ ص − ١٦ س .

الحــل :

٨س^{٢} + ٣س ص −٦ص −١٦س = (٨ س^{٢} −١٦س) + (٣س ص − ٦ص)

= ٨ س (س − ٢) + ٣ ص (س − ٢)

= (س − ٢) (٨س + ٣ص)

مثال (٣) حلّل المقدار : ص^{٤} + ص^{٣} − ص^{٢} − ص

الحــل :

ص^{٤} + ص^{٣} − ص^{٢} − ص = (ص^{٤} + ص^{٣}) − (ص^{٢} + ص)

= ص^{٣} (ص + ١) − ص (ص + ١)

= (ص + ١) (ص^{٣} − ص)

= (ص + ١) ص (ص^{٢} − ١)

= (ص + ١) ص (ص − ١)(ص + ١)

= ص (ص + ١)^{٢} (ص − ١)

مثال (٤) حلّل المقدار : س^{٢} − ٤س + ٢ ل س − ٤ ل + ٤

الحـل : تلاحظ أن المقدار مكوّن من خمسة حدود كما تلاحظ أن :

س^{٢} – ٤س + ٤ تمثل مربعاً كاملاً ولذلك يتم التجميع للحدود على النحو التالي :

س^{٢} –٤س + ٢ ل س –٤ ل + ٤ = (س^{٢} –٤س +٤) + (٢ل س – ٤ل)

= (س –٢)^{٢} + ٢ ل (س –٢)

= (س – ٢) [(س –٢) + ٢ ل]

= (س – ٢) (س + ٢ ل – ٢)

تمارين ومسائل

حلل كلاً مما يلي :

[١] أ س + ب س + أ ص + ب ص . [٢] أ ب – ب ء + أ هـ – ء هـ .

[٣] س ص + ٥ص + ٧س + ٣٥ . [٤] أ^{٢} ب^{٢} – ١ – أ^{٢} + ب .

[٥] ٢ص^{٢} + ٤ أ ص – ص – ٢أ . [٦] ٣ س^{٣} + ٢س^{٢} + ٨ + ١٢س .

[٧] ٤أ^{٣} + ١٢أ + ٩ – أ^{٤} .

[٨] ٢٥ س^{٢} + ٤٠ س ص + ١٦ص^{٢} + ٥ أ س + ٤ أ ص .

[٩] ٢ أ – ٣ ب + ٤ أ^{٢} – ١٢ أ ب + ٩ ب^{٢} .

[١٠] ٦ س – ١٠ س ص + ١٢ ص – ٢٠ ص^{٢} .

[١١] س^{٣} + ٧ س – ٣ س^{٢} – ٢١ .

[١٢] ١٢ أ^{٣} ب – ٧٢ أ^{٢} ب – ٨ أ^{٢} ب^{٢} + ٤٨ أ ب^{٢} .

[١٣] ٢ س^{٣} (س + ٣) – ١٨ س^{٢} – ٥٤ س .

[١٤] (٢أ + ب)^{٣} – ٨أ – ٤ ب .

[١٥] ٤ ص^{٢} + ٢٠ ص ع + ٢٥ ع^{٢} – ٩ .

[١٦] ٨ ل + ٢٠ م – (٢ ل + ٥ م)^{٣} .

[١٧] ٢٥ س^{٢} ص^{٢} + ٥ س ص ع + ٣٦ + ٦ ع + ٦٠ س ص .

[١٨] ١٠٠ ل^{٢} – ٤م^{٢} + ٤٠ ل + ٤ .

[١٩] س^{١٣} + س^{٧} + س^{٦} + ١ .

[٢٠] س^{٦} – س^{٤} – س^{٢} + ١ .

٢ : ٦ ضرب وقسمة الكسور الجبرية

أولاً : اختصار الكسور الجبرية :

تعلمت سابقاً اختصار الكسور العددية وتبسيطها، فمثلاً : $\frac{٢٤}{٣٦} = \frac{٢}{٣}$

وبالمثل يمكن اختصار الكسور الجبرية ، فمثلاً :

$$\frac{٢٥ س^{٣} ص^{٢}}{١٥ س^{٢} ص^{٣}} = \frac{٥ س}{٣ ص}$$

تلاحظ أنه قد تم اختصار كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأعلى للحدين وهو (٥ س^{٢} ص^{٢}) ، وهذا ما يكافئ قسمة بسط ومقام الكسر على العامل المشترك ، تواجهنا أحياناً مقادير في البسط والمقام ، نقوم أولاً بتحليلها لإيجاد العامل المشترك الأعلى بينهما حتى يمكننا اختصارها .

مثال (١) أكتب كلاً من الكسور الآتية في أبسط صورة :

أ) $\dfrac{\text{٣س}^{\text{٢}}\text{ ص}}{\text{٦س ص}^{\text{٣}}}$ ، ب) $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣ س} - \text{١٠}}$ ،

جـ) $\dfrac{\text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٤ س}}{\text{٦ س}^{\text{٣}} + \text{٦ س}^{\text{٢}} - \text{٣٦ س}}$.

الحـل :

أ) $\dfrac{\text{٣س}^{\text{٢}}\text{ ص}}{\text{٦س ص}^{\text{٣}}} = \dfrac{\text{س}}{\text{٢ ص}^{\text{٢}}}$.

ب) $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣ س} - \text{١٠}} = \dfrac{\cancel{(\text{س} - \text{٢})}\,(\text{س} + \text{٢})}{\cancel{(\text{س} - \text{٢})}\,(\text{س} + \text{٥})} = \dfrac{\text{س} + \text{٢}}{\text{س} + \text{٥}}$.

جـ) $\dfrac{\text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٤ س}}{\text{٦ س}^{\text{٣}} + \text{٦ س}^{\text{٢}} - \text{٣٦ س}} = \dfrac{\text{٢ س}\,(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢})}{\text{٦س}\,(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦})}$

$= \dfrac{\overset{\text{١}}{\cancel{\text{٢ س}}}\,(\text{س} - \text{١})\,\cancel{(\text{س} - \text{٢})}}{\underset{\text{٣}}{\cancel{\text{٦س}}}\,\cancel{(\text{س} - \text{٢})}\,(\text{س} + \text{٣})}$

$= \dfrac{\text{س} - \text{١}}{\text{٣}\,(\text{س} + \text{٣})}$

مثال (٢) اختصر إِلى أبسط صورة :

أ) $\frac{أ^{٢} + أ\,ب - أ - ب}{أ + ب}$ ، ب) $\frac{س^{٣} + ٨ص^{٣}}{س^{٢} - ٢\,س\,ص + ٤\,ص^{٢}}$.

الحــل :

أ) $\frac{أ^{٢} + أ\,ب - أ - ب}{أ + ب} = \frac{(أ^{٢} + أ\,ب) - (أ + ب)}{(أ + ب)}$

$= \frac{أ(أ + ب) - (أ + ب)}{(أ + ب)}$

$= \frac{\cancel{(أ + ب)}(أ - ١)}{\cancel{(أ + ب)}} = (أ - ١)$

ب) $\frac{س^{٣} + ٨ص^{٣}}{س^{٢} - ٢\,س\,ص + ٤\,ص^{٢}} = \frac{(س + ٢ص)\cancel{(س^{٢} - ٢س\,ص + ٤ص^{٢})}}{\cancel{(س^{٢} - ٢س\,ص + ٤ص^{٢})}}$

$= (س + ٢\,ص)$

ثانياً : الضرب والقسمة :

تدريب أوجد ناتج الآتي :

$\frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٢} = ...$ ، $\frac{٦}{٧} \times \frac{١٤}{٩} = ...$

وبالمثل يمكن ضرب وقسمة الكسور الجبرية .

تذكر : ١)يتم اختصار أي عامل من البسط مع أي عامل مشترك معه في المقام .

٢) عند القسمة تتحول عملية القسمة إلى ضرب مع قلب القاسم (أي يصبح بسطه مقاماً ومقامه بسطاً) .

مثال (١) أوجد حاصل ضرب ما يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{\text{أ ب}^{٢}}{\text{٦ أ جـ}} \times \frac{\text{٣ ب}^{٢}\text{ جـ}}{\text{٢ ب}^{٣}\text{ جـ}^{٢}}$ ، ب) $\frac{\text{٦ س + ١٢}}{\text{٣ س + ٦}} \times \frac{\text{س − ٢}}{\text{س}^{٢}\text{ − ٤}}$

الحـــل :

أ) $\frac{\cancel{\text{أ}}\text{ ب}^{\cancel{٢}}}{\cancel{٦}_{٢}\ \cancel{\text{أ}}\ \cancel{\text{جـ}}} \times \frac{\cancel{٣}^{١}\text{ ب}^{\cancel{٢}^{١}}\ \cancel{\text{جـ}}}{\text{٢ }\cancel{\text{ب}^{٣}}\text{ جـ}^{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٤ جـ}^{٢}}$

ب) $\frac{\text{٦ س + ١٢}}{\text{٣ س + ٦}} \times \frac{\text{س − ٢}}{\text{س}^{٢}\text{ − ٤}} = \frac{\cancel{٦}^{٢}\text{ (}\cancel{\text{س + ٢}}\text{)}}{\cancel{٣}_{١}\text{ (}\cancel{\text{س + ٢}}\text{)}} \times \frac{\text{(}\cancel{\text{س − ٢}}\text{)}}{\text{(}\cancel{\text{س − ٢}}\text{)(س + ٢)}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{س + ٢}}$

مثال (٢) **ضع حاصل الضرب لما يلي في أبسط صورة :**

أ) $\frac{\text{س}^{٢}\text{ − ٤ س − ٥}}{\text{س}^{٣}\text{ + ١}} \times \frac{\text{س}^{٢}\text{ − س + ١}}{\text{س}^{٢}\text{ − ١٢ س + ٣٥}}$

ب) $$\frac{٣\,\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} \times \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}} \times \frac{٢\,\text{س} - ٢}{٣\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ٦} .$$

الحـــل :

أ) $$\frac{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ٥}{\text{س}^{٣} + ١} \times \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٣٥}$$

$$= \frac{\cancel{(\text{س} - ٥)}\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{(\text{س} + ١)}\cancel{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}} \times \frac{\cancel{(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}}{(\text{س} - ٧)\cancel{(\text{س} - ٥)}}$$

$$= \frac{١}{\text{س} - ٧} .$$

ب) $$\frac{٣\,\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١} \times \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}} \times \frac{٢\,\text{س} - ٢}{٣\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ٦} .$$

$$= \frac{٣\,(\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ١)} \times \frac{٢\,(\text{س} - ١)}{٣\,(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)}$$

$$= \frac{\overset{١}{\cancel{٣}}\,\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}} \times \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}\cancel{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}}{\text{س}^{٢}\,\cancel{(\text{س} - ١)}} \times \frac{٢\,(\text{س} - ١)}{\underset{١}{\cancel{٣}}\,(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ١)}}$$

$$= \frac{٢\,(\text{س} - ١)}{\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ٢)} .$$

مثال (٣) أوجد خارج القسمة في كل مما يأتي في أبسط صورة :

أ) $\dfrac{\text{٣٥ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{\text{٨ أ ب}^{٢}} \div \dfrac{\text{٥ س}^{٢}\text{ص}^{٢}}{\text{٨ ب}}$.

ب) $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٤س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} \div \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$.

الحـل :

أ) $\dfrac{\text{٣٥ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{\text{٨ أ ب}^{٢}} \div \dfrac{\text{٥ س}^{٢}\text{ص}^{٢}}{\text{٨ ب}} = \dfrac{\overset{٧}{\cancel{٣٥}}\ \cancel{\text{س}^{٢}}\ \overset{١}{\cancel{\text{ص}^{٣}}}}{\underset{١}{\cancel{٨}}\ \text{أ}\ \overset{١}{\cancel{\text{ب}^{٢}}}} \times \dfrac{\overset{١}{\cancel{٨}}\ \cancel{\text{ب}}}{\underset{١}{\cancel{٥}}\ \cancel{\text{س}^{٢}}\ \cancel{\text{ص}^{٢}}}$

$= \dfrac{\text{٧ ص}}{\text{أ ب}}$.

ب) $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٤س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} \div \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

$= \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٤س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} \times \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

$= \dfrac{(\text{س} + ٢)^{\cancel{٢}}}{\cancel{(\text{س} + ٢)}\ \cancel{(\text{س} - ٢)}} \times \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}\ \cancel{(\text{س} + ١)}}{\text{س}\ \cancel{(\text{س} + ١)}} = \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س}}$.

مثال (٤) منطقة مستطيلة الشكل طولها $\frac{س^٢ + ٢س + ١}{س + ١}$ سم ،

وعرضها $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ سم . أوجد مساحة هذه المنطقة بدلالة س ،

ثم أوجد قيمتها العددية عندما تكون س = ١٤ سم .

الحل :

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$= \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س + ١} \times \frac{س^٢ - ١}{س - ١} .$$

$$= \frac{(س + ١)^٢}{\cancel{(س + ١)}} \times \frac{\cancel{(س - ١)}\,\cancel{(س + ١)}}{\cancel{(س - ١)}} .$$

$= (س + ١)^٢$ سم^٢ .

وعندما س = ١٤سم

فإن مساحة المنطقة المستطيلة = $(س + ١)^٢$ سم^٢

$= (١٤ + ١)^٢$ سم^٢

$= (١٥)^٢$ سم^٢

$= ٢٢٥$ سم^٢ .

تمارين ومسائل

أولاً : اختصر كلاً من الكسور التالية إلى أبسط صورة :

[١] $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٣س - ١٠}$ [٢] $\frac{٤س + ١٦ ص}{س^٣ + ٦٤ص^٣}$

[٣] $\frac{ع^٢ + ٧ع + ١٠}{ع^٢ - ع - ٦}$ [٤] $\frac{٢ س ص^٢ + ٢ س^٢ ص}{٤س^٢ - ٤ ص^٢}$

[٥] $\frac{س^٢ - ٨س + ١٥}{س^٢ - ٢س - ١٥}$ [٦] $\frac{ص^٢ - ص - ٦}{ص^٢ + ٥ص + ٦}$

[٧] $\frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٣ + ١}$ [٨] $\frac{س (س - ٥) + ٢٥}{س^٣ + ١٢٥}$

[٩] $\frac{أ^٤ - ١٠ أ^٢ ب^٢ + ٩ب^٤}{أ^٢ - ٢ أ ب - ٣ ب^٢}$ [١٠] $\frac{٨س^٤ - ٥٨س^٢ + ٥٠}{٢ (٤س^٢ - ٢٥)(س + ١)}$

ثانياً : قم بإجراء العمليات التالية :

[١] $\frac{٢٥ س^٢ ص ع}{٤ أ ب^٣ جـ} \times \frac{٣٠ أ^٢ ب^٢}{١٥ س ص^٣}$

[٢] $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٩} \times \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٤}$

[٣] $$\frac{٢ص^{٢} - ٣٢}{ص^{٣} - ٢٧} \times \frac{ص^{٢} + ٣ص + ٩}{ص^{٢} - ص - ٢٠}$$

[٤] $$\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ١٧س + ٧٢} \div \frac{س^{٢} + ٤س - ٥}{س^{٢} - ٩س + ٨}$$

[٥] $$\frac{س^{٢} + ٥س + ٦}{س^{٢} - ٤} \div \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$$

[٦] $$\frac{٦س + ٦}{(س + ١)^{٢} - س} \times \frac{س^{٣} - ١}{س^{٣} - ٣س^{٢}} \div \frac{س^{٤} - ١}{س^{٣} + س^{٢}}$$

[٧] $$\frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - ١} \div \left[\frac{س^{٢} + ٢}{س^{٣} + س^{٢} + س} \times \frac{س^{٤} - ٤}{س^{٢} - ٢}\right]$$

[٨] $$\left[\frac{س^{٣} - ٢٧ص^{٣}}{٣ص} \div \frac{٢س^{٢} + ٦س ص + ١٨ص^{٢}}{س^{٢} + ٤س ص + ٣ص^{٢}}\right] \times \frac{٦س}{س^{٢} - ٩ص^{٢}}$$

[٩] $$\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٢٥} \div \left[\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٦س + ٥} \times \frac{س - ٣}{س - ٥}\right]$$

[١٠] $$\frac{٤س^{٢} - ص^{٢}}{س^{٣} - ص^{٣}} \div \frac{٢س^{٢} + س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص + ص^{٢}} \div \frac{٤س + ٢ص}{س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}}$$

[١١] $$\left[\frac{٢س^{٢} - ١٠س + ١٢}{٢س - ٦} \times \frac{٢س^{٢} + ٧س + ٣}{س^{٣} - ٨}\right] \div \frac{٣س + ٩}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

[١٢] $\frac{٣ س + ٥}{٢ س^٢ - ١٧ س + ٢١} \times \left[\frac{٢ س^٢ - ١٤ س}{٦ س^٣ + ٧ س^٢ - ٥ س} \div \frac{٤ س^٢ + ٦ س + ٩}{٨ س^٣ - ٢٧} \right]$

٢ : ٧ المضاعف المشترك الأصغر

تدريب

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لما يلي : ٨ ، ١٢ ، ١٨

عند إِيجاد المضاعف المشترك الأصغر لبعض الأعداد يستخدم التحليل ، وكذلك نستخدم التحليل في إِيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية .

المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين أو أكثر هو أصغر مقدار يقبل القسمة على هذه المقادير ، ويرمز له بالرمز (م . م . أ) .

مثال (١) أوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقدارين التاليين :

$س^٢ + س$ ، $س^٢ - ١$

الحــل :

$س^٢ + س = س (س + ١)$

$س^٢ - ١ = (س + ١) (س - ١)$

$\therefore$ المضاعف المشترك الأصغر للمقدارين ($س^٢ + س$) ، ($س^٢ - ١$)

هو $س (س + ١) (س - ١)$.

مثال (٢) أوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الآتية :

س^{٢} – ا^{٢} ، س^{٣} – ا^{٣} ، س^{٢} – ٢ ا س + ا^{٢} .

الحـل :

س^{٢} – ا^{٢} = (س + ا) (س – ا)

س^{٣} – ا^{٣} = (س – ا) (س^{٢} + س ا + ا^{٢})

س^{٢} – ٢ ا س + ا^{٢} = (س – ا)^{٢} .

∴ م . م . أ للمقادير هو (س – ا)^{٢} (س + ا) (س^{٢} + س ا + ا^{٢})

مثال (٣) أوجد م . م . أ للمقدارين الآتيين :

١٠ س^{٢} – ٩ س – ٩ ، ٤ س^{٢} – ١٢ س + ٩ .

الحـل :

١٠ س^{٢} – ٩ س – ٩ = (٢ س – ٣) (٥ س + ٣) .

٤ س^{٢} – ١٢ س + ٩ = (٢ س – ٣)^{٢} .

∴ م . م . أ = (٢ س – ٣)^{٢} (٥ س + ٣) .

مثال (٤) أوجد م . م . أ للمقادير الآتية :

س^{٢} – ٤ س ص + ٤ ص^{٢} ، ٦ س^{٤} – ٢٤ س^{٢} ص^{٢} ، ٢ س^{٢} – ٤ س ص

الحـل :

س^{٢} – ٤ س ص + ٤ ص^{٢} = (س – ٢ ص)^{٢} .

٦ س^٤ – ٢٤ س^٢ ص^٢ = ٦ س^٢ (س^٢ – ٤ ص^٢)

= ٦س^٢ (س – ٢ص) (س + ٢ ص)

٢س^٢ – ٤ س ص = ٢س (س – ٢ ص)

∴ م . م . أ للمقادير = ٦ س^٢ (س – ٢ ص)^٢ (س + ٢ ص)

تمارين ومسائل

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مما يأتي :

[١] ا ب^٢ ، ب جـ^٢ ، ا ب^٢ جـ .

[٢] ٩ س ص ، ١٨ س^٢ ص ع ، ٢٧ ع^٢ .

[٣] ب^٣ – ب ، ب^٢ – ١ ، ٣ ب^٢ – ب – ٢ .

[٤] س^٣ – ٨ ، ٤ س^٢ + ٤س – ٨ ، س^٢ – ٢ س .

[٥] ٢٧ س^٣ – ٨ ، ٦ س^٣ – ١٣ س^٢ + ٦ س ، ٤ س^٢ – ٩ .

[٦] ٢ س^٢ + ٣ س ص + ص^٢ ، س^٢ – ص^٢ .

[٧] ٤ – س^٢ ، ٢ س – س^٢ ، ٢ – س – س^٢ .

[٨] ٦ س^٢ + ٢س – ٤ ، ٥٤ س^٣ – ١٦ ، س^٣ + ١ .

[٩] س^٤ – ١٠ س^٢ + ٢٥ ، ٢٥ س^٤ + ٥ س^٣ – س – ١ ،
٢٠س^٤ + س^٢ – ١ .

[١٠] ٢٤س^٤ ص – ٨١ س ص^٤ ، ١٢ س^٣ + ٢٧ س ص^٢ – ٣٦ س^٢ ص ،
٤٠ س^٤ ص – ٦٠ س^٣ ص^٢ + ١٣٥ س ص^٤ – ٩٠ س^٢ ص^٣ .

[١١] $س^٢ - ٣س + ٢$ ، $س^٤ - ١٣ س^٢ + ٣٦$ ، $٢ س^٤ - ٣٢$ ، $س^٤ + ٤س^٣ + ٤س^٢$.

[١٢] $٣ س^٢ + ٣ س - ٦$ ، $١٨ + ٣س - ٣ س^٢$ ، $٢ س^٢ - ٨$ ، $٥ س^٢ + ١٠ س$.

٢ : ٨ جمع وطرح الكسور الجبرية

تدريب احسب ما يلي :

أ) $\frac{٥}{٦} + \frac{١}{٦} - \frac{٧}{٦}$ ، ب) $\frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}$

عند إجراء عمليتي جمع وطرح الكسور فإننا نوحد المقامات أولاً ، وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ، ثم نجري عمليتي الجمع ، والطرح ويتم الشيء نفسه عند جمع وطرح الكسور الجبرية حيث نتبع الخطوات التالية :

١) نوجد م . م . أ للمقامات .

٢) نقسم م . م . أ على مقام كل كسر ونضرب الناتج في بسطه .

٣) نجري عملية الاختصار .

مثال (١) أوجد المجموع في أبسط صورة :

$$\frac{٥ س}{س^٢ - ١} + \frac{٥}{س^٢ - ١} = \frac{٥س + ٥}{(س^٢ - ١)} = \frac{٥ \cancel{(س + ١)}}{\cancel{(س + ١)}(س - ١)} = \frac{٥}{س - ١}$$

مثال (٢) احسب في أبسط صورة :

$$\frac{س + ٤}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{س^{٢} - ٩}$$

الحــل :

$$\frac{س + ٤}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{س^{٢} - ٩} = \frac{س + ٤}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

م . م . أ للمقامات = (س − ٣) (س + ٣)

$$\therefore \frac{س + ٤}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{س^{٢} - ٩} = \frac{(س - ٣)(س + ٤) - (س + ٣) + ٦}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \frac{س^{٢} - ٣س + ٤س - ١٢ - س - ٣ + ٦}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \frac{س^{٢} - ٩}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{\cancel{(س - ٣)}\cancel{(س + ٣)}}{\cancel{(س - ٣)}\cancel{(س + ٣)}} = ١$$

تذكر عند إِجراء العمليات نتبع التسلسل التالي :

أولاً : نجري العمليات التي في الأقواس .

ثانياً : نجري عمليتي الضرب أو القسمة أيهما يسبق «أي العملية التي تأتي أولاً على اليمين» .

ثالثاً : نجري عمليتي الجمع أو الطرح أيهما يسبق « أي العمليــة التي تأتي أولاً على اليمين» .

مثال (٣) اختصر إِلى أبسط صورة :

$$\frac{\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15} - \left[\frac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 18}{\text{س}^2 - 9} + \frac{4\text{س} + 12}{9 - \text{س}^2} \right]$$

الحـــل :

$$\frac{(\cancel{\text{س} + 5})}{(\cancel{\text{س} + 5})(\text{س} - 3)} - \left[\frac{(\text{س} - 6)(\cancel{\text{س} + 3})}{(\text{س} - 3)(\cancel{\text{س} + 3})} - \frac{4(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)} \right]$$

$$= \frac{1}{\text{س} - 3} - \left[\frac{\text{س} - 6}{\text{س} - 3} - \frac{4}{\text{س} - 3} \right]$$

$$= \frac{1}{\text{س} - 3} - \left[\frac{\text{س} - 6 - 4}{\text{س} - 3} \right] = \frac{1}{\text{س} - 3} - \left[\frac{\text{س} - 10}{\text{س} - 3} \right]$$

$$= \frac{1}{\text{س} - 3} - \frac{\text{س} - 10}{\text{س} - 3}$$

م . م . أ للمقامات = س − ٣

$$= \frac{1 - \text{س} + 10}{\text{س} - 3}$$

$$= \frac{-\text{س} + 11}{\text{س} - 3}$$

مثال (٤) أوجد ناتج الآتي في أبسط صورة :

$$\frac{٥\text{س} - ١٥}{٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٣} - \frac{(٢٥ - \text{س}^٢)}{٢\text{س}^٢ - ٩\text{س} - ٥} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٥\text{س}}$$

الحـــل :

$$\frac{٥\text{س} - ١٥}{٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٣} - \frac{(٢٥ - \text{س}^٢)}{٢\text{س}^٢ - ٩\text{س} - ٥} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٥\text{س}}$$

$$= \frac{٥\,\cancel{(\text{س} - ٣)}}{(٢\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ٣)}} + \frac{\cancel{(\text{س} - ٥)}\cancel{(\text{س} + ٥)}}{\cancel{(\text{س} - ٥)}(٢\text{س} + ١)} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}\,\cancel{(\text{س} + ٥)}}$$

$$= \frac{٥}{٢\text{س} + ١} + \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}\,(٢\text{س} + ١)}$$

$\therefore$ م . م . أ للمقامات = س (٢ س + ١)

$$= \frac{٥\text{س} + \text{س} + ٣}{\text{س}\,(٢\text{س} + ١)} = \frac{٦\text{س} + ٣}{\text{س}\,(٢\text{س} + ١)} = \frac{٣\,\cancel{(٢\text{س} + ١)}}{\text{س}\,\cancel{(٢\text{س} + ١)}}$$

$$= \frac{٣}{\text{س}}$$

تمارين ومسائل

في التمارين من [١] إلى [٦] اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\frac{٣\,س}{س + ١} - \frac{٢\,س - ١}{س + ١}$.

[٢] $\frac{س + ٥}{س^{٢} + ٧\,س + ١٠} - \frac{س - ١}{س^{٢} + ٥\,س + ٦}$.

[٣] $\frac{س^{٢} + ٦\,س}{س} - \frac{٢٤\,س - ٦}{١٢\,س^{٢} + ٥\,س - ٢} - \frac{س}{٣\,س + ٢}$.

[٤] $\frac{٣\,س - ٦}{س^{٢} - ٥\,س + ٦} + \frac{٨ - ٢\,س}{س^{٢} - س - ١٢} - \frac{١٨}{س^{٢} - ٩}$.

[٥] $\frac{٢\,س + ١}{س^{٢} + س - ٦} + \left[\frac{٦}{س^{٢} - ٩} - \frac{س}{س^{٢} - ٥\,س + ٦}\right]$.

[٦] $\frac{٣\,س - ٥}{٢\,س^{٢} - ٣\,س - ١٤} - \left[\frac{٣ - ٤\,س}{١٠ - س - ٣\,س^{٢}} + \frac{٥\,س - ١٢}{٣١\,س - ٦\,س^{٢} - ٣٥}\right]$

[٧] إذا كانت :

$م = \frac{٣\,س + ٦}{س^{٢} + س - ٢}$ ، $ل = \frac{س^{٢} - ٢\,س + ١}{س^{٢} + ٤\,س - ٥}$.

أ) ضع كلاً من م ، ل في أبسط صورة .

ب) أوجد كلاً من : ١) م + ل . ٢) م − ل .

٣) م × ل . ٤) م ÷ ل .

بسط التمارين من [٨] إلى [١٢] :

[٨] $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٩} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩}{\text{س}^{٢} - ٤} + \frac{٣}{\text{س} - ٢}$.

[٩] $\frac{\text{أ}^{٢} + ٥\,\text{أ}}{\text{أ} + ١} \div \left[\frac{\text{أ}^{٢} - ٢٥}{\text{أ}^{٢} - \text{أ} - ٢٠} \times \frac{\text{أ}^{٢} - \text{أ} - ٢}{\text{أ}^{٢} - ٢\,\text{أ} - ٨} \right]$.

[١٠] $\frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\,\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} + ٥} \times \frac{٤\,\text{س}^{٢} - ٢٥}{٢\,\text{س}^{٢} - ١١\,\text{س} + ١٥} - \frac{٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

[١١] $\left[\frac{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} + ١٥} + \frac{\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨}{٤ - \text{س}^{٢}} \right] \times \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٤}$

[١٢] $\frac{\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} - \frac{\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} + ٢١}{\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} - ١٤} \times \left[\frac{\text{س} + ٧}{\text{س} - ٧} - \frac{\text{س} - ٦}{٢\,\text{س}} \right]$

[١٣] أجمع $\frac{٤\,\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}$ ، $\frac{٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣}{\text{س}^{٣} + ١}$.

[١٤] اطرح $\frac{١٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$ من $\frac{٣\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}}$.

[١٥] اجمع $\frac{س^٣ - ١}{س^٢ + س - ٢}$ ، $\frac{س^٢ - س - ٢}{٤ - س^٢}$ ثم اقسم الناتج على

$$\frac{س^٣ + ٢ س^٢}{س (س + ٤) + ٤}$$

[١٦] مستطيل طوله $\frac{ص^٢ + ٢ ص + ١}{ص + ١}$ سم ، وعرضه $\frac{ص^٢ - ١}{ص - ١}$ سم .

فما محيطه بدلالة ص ؟

٢ : ٩ تمارين ومسائل عامة

حلل ما يأتي :

[١] $أ^٢ - ١٢أ - ٢٨$.

[٢] $م^٢ + ٨ م + ٧$

[٣] $ع^٢ - ٥٠ ع + ٩٦$.

[٤] $هـ^٢ - ٢ هـ م - ٣٥م^٢$.

[٥] $أ^٢ + ١٨أ + ٤٥$.

[٦] $أن^٢ - ٢أن - ٣أ$.

[٧] $٣أ^٢ ب^٢ - ٦أ ب - ٢٤$.

[٨] $٢ س^٢ + ٧ س + ٥$.

[٩] $٢ ص^٢ - ٧ ص ع + ٦ ع^٢$.

[١٠] $٣ س^٢ - ٤ س - ١٥$.

[١١] $٥أ^٢ - ١ - ٤أ$.

[١٢] $٣ ع + ٢٨ - ع^٢$.

[١٣] $١٨ + ٣أ - أ^٢$.

[١٤] $س^٢ + ١٢س + ٣٦$.

[١٥] $٤س^٢ - ١٢ س ص + ٩ ص^٢$.

[١٦] $م^٢ + \frac{٥}{٢} م + \frac{٢٥}{١٦}$.

[١٧] ل^{٢} + ٢$\sqrt{٥}$ ل + ٥ .

[١٨] ا^{٢} − ٢$\sqrt{٣}$ ا ب + ٣ ب^{٢} .

[١٩] ل^{٣} + ٦٤ م^{٣} .

[٢٠] ٢٧ س^{٣} − ٨ ص^{٣} .

[٢١] س^{٣} + $\frac{٢٧}{٨}$ ص^{٦} .

[٢٢] ا^{٣} − (ب − ا)^{٣} .

[٢٣] ٠,١٢٥ ا^{٣} + ٨ ب^{٣} .

[٢٤] ا^{١٢} − ب^{١٢} .

[٢٥] ا − ا (س − ١)^{٣} .

[٢٦] (س − ص) + (س − ص)^{٤} .

[٢٧] ٢س^{٣} − $\frac{٢٧}{٤}$ ص^{٣} .

[٢٨] ٠,٠١٦ س^{٣} + ٥٤ ص^{٣} .

[٢٩] س^{٤} − ٧ س^{٢} + ١ .

[٣٠] س^{٤} + ٥ س^{٢} + ٩ .

[٣١] س^{٤} − ١٢ س^{٢} + ٤ .

[٣٢] ا^{٤} − ١٠ ا^{٢} ب^{٢} + ٩ ب^{٤} .

[٣٣] ٩م^{٤} + ٨ م^{٢} + ٤ .

[٣٤] ٤ س^{٤} + ٩ ص^{٤} .

[٣٥] ٣ ل + ل م − م − ٣ .

[٣٦] ٨ ا س − ٥ ب ص + ١٠ ب س − ٤ ا ص

[٣٧] س^{٢} − ص^{٢} + ٦ س + ٩ .

[٣٨] ل^{٢} − م^{٢} + ٢ م ن − ن^{٢} .

[٣٩] س^{٣} + س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٣} + ص^{٢} .

[٤٠] ل^{٣} + ل^{٢} − ٦ ل م + ٩ م^{٢} − ٢٧ م^{٣} .

[٤١] ا^{٤} + ا^{٢} − ٤ ا ب + ٤ ب^{٢} − ١٦ ب^{٤} .

اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة :

[٤٢] $\frac{٤}{س^{٢} - ٢\ س - ٣}$ + $\frac{٢}{س^{٢} + ٤\ س + ٣}$ − $\frac{٥}{س^{٢} - ٩}$

[٤٣] $\dfrac{4\text{أ}^2+\text{ب}^2}{4\text{أ}^3\text{ب}-\text{أ}\text{ب}^3}-\left[\dfrac{2}{2\text{أ}\text{ب}-\text{ب}^2}+\dfrac{1}{4\text{أ}\text{ب}+2\text{ب}^2}\right]$

[٤٤] $\dfrac{\text{س}+5}{\text{س}^2+6\text{س}+5}+\dfrac{\text{س}+\text{س}^2}{1-\text{س}^2}+\dfrac{\text{س}^2+\text{س}+1}{\text{س}^2-1}$

[٤٥] $\dfrac{1}{2(\text{س}-1)}-\left[\dfrac{\text{س}-5}{\text{س}^2-7\text{س}+10}+\dfrac{\text{س}-6}{2(\text{س}^2-9\text{س}+18)}\right]$

[٤٦] $\dfrac{\text{س}^2-\text{س}-30}{\text{س}^3+125}\times\left[\dfrac{25+\text{س}(\text{س}-5)}{\text{س}^3-36\text{س}}\div\dfrac{11}{\text{س}}\right]$

[٤٧] $\dfrac{\text{س}^3+2\text{س}^2}{\text{س}^3+1}\times\dfrac{\text{س}^2-\text{س}+1}{\text{س}^2}-\dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2+2\text{س}+1}$

[٤٨] $\dfrac{\text{ص}^2+5\text{ص}+4}{(\text{ص}+1)^2}-\dfrac{\text{ص}^2+6\text{ص}}{\text{ص}^3+1}+\dfrac{\text{ص}^2-1}{\text{ص}^2-\text{ص}+1}$

[٤٩] $\dfrac{\text{س}+5}{\text{س}^2+2\text{س}-15}-\dfrac{\text{س}^2-3\text{س}-18}{\text{س}^2-9}+\dfrac{4\text{س}+12}{9-\text{س}^2}$

[٥٠] $\dfrac{\text{س}^3-27\text{ص}^3}{3\text{ص}}\div\left[\dfrac{2\text{س}^2+6\text{س}\text{ص}+18\text{ص}^2}{\text{س}^2+4\text{س}\text{ص}+3\text{ص}^2}\times\dfrac{6\text{س}}{\text{س}^2-9\text{ص}^2}\right]$

[٥١] $\frac{س - ١}{س^٣ - ١} \times \frac{س^٢ + س + ١}{س^٢ - ٥س + ٦} + \left[\frac{س^٢ - ٢ س}{س^٢ - س - ٢} \div \frac{س^٢ + ٢ س - ٨}{٣ س + ٣} \right]$

[٥٢] إذا كانت $س = \frac{أ^٢ + ٣ أ}{أ^٣ - ١} \times \frac{أ^٣ + أ^٢ + أ}{أ^٢ + ٤ أ + ٣}$ ،

$ص = \frac{٣}{٣ أ^٢ - ١٨ أ + ١٥} \div \frac{أ^٢ + ٦ أ + ٥}{أ^٢ - ٢٥}$ ، فأثبت أن $س - ص = ١$

[٥٣] غرفة مربعة الشكل مساحتها ($س^٢ + ١٨ س + ٨١$) متراً مربعاً ، أوجد طول الغرفة بدلالة س .

[٥٤] سجادة مربعة الشكل مساحتها($س^٢ - ١٠ س + ٢٥$) متراً مربعاً ، حيث س > ٥ . أوجد محيطها بدلالة س .

[٥٥] حديقة أطفال مربعة الشكل مساحتها ($س^٢ + ٥٠ س + ٦٢٥$) متراً مربعاً ، أوجد طول الحديقة بدلالة س ، وإذا علمت أن س = ١٥٠ فما طول الحديقة ؟

[٥٦] غرفة مربعة الشكل مساحتها ($س^٢ + ٦ س + ٩$) متراً مربعاً ، أوجد طول ضلع الغرفة المربعة ، إذا علمت أن مساحة الغرفة تساوي ١٤٤ $م^٢$ ، فما قيمة س ؟

[٥٧] خزانا مـــاء مكعبي الشكل حجـــم الأول $(٢ س + ٦)^٣$ متراً مكعباً ، وحجـــم الآخر ٦٤ متراً مكعباً ،أوجد مجموع حجميهما كحاصل ضرب .

٢ : ١٠ اختبـــار الوحـــدة

[١] ﺃ) أوجد العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للآتي :

٣ $س^٢$ ، ٦ س ص ، ١٥ $س^٢$ $ص^٢$.

ب) أكمل الفراغ بحيث يكون المقدار مربعاً كاملاً :

$س^٢$ + ... + ٣٦ $ص^٢$.

[٢] حلل ما يأتي :

ﺃ) $س^٢$ + ٧ س – ٣٠ .

ب) ٨ $س^٣$ – ٢٧ $ص^٣$.

جـ) ل م – ٢ ل ن + ٣ م هـ – ٦ ن هـ .

ء) $س^٤$ – ٣ $س^٢$ + ٩ .

[٣] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة :

ﺃ) $\frac{٤}{س^٢ - س} + \frac{٣}{س - ١} - \frac{١}{س}$.

ب) $\left(\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} \right) \times \frac{س ص}{س - ص} \div \left(\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{ص^٢} \right)$.

[٤] غرفة مربعة الشكل مساحتها ($ل^٢$ + ٤ ل + ٤) متراً مربعاً ، أوجـد طـول ضلعها إذا كانت ل = ٥٠ .

الوحدة الثالثة

المعادلات

٣ : ١ معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين

تأمل المعادلات التالية :

٣ س = ٦ (١)

٣ س + ٢ص = ٤ (٢)

تجد أن المعادلة الأولى على صورة : ا س + ب = صفر ، حيث ا ≠ .

تُسمَّى معادلة من الدرجة الأولى ذات متغير واحد ، ولها حل وحيد في مجموعة الأعداد الحقيقية هو س = $\frac{-\text{ب}}{\text{ا}}$.

أما المعادلة الثانية فتتكون من متغيرين هما س ، ص ؛ درجة كل منهما هي الأولى، وتُسمَّى مثل هذه المعادلة معادلة من الدرجة الأولى ذات متغيرين، وتُعَدُّ مجموعة التعويض لها هي مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) أو أي مجموعة جزئية منها .

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين هي :

ا س + ب ص = جـ

حيث : ا ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، ا ≠ ٠ ، ب ≠ .

تدريب صنّف المعادلات التالية : من الدرجة الأولى (ذات متغير واحد أو ذات متغيرين) .

أ) 5س $-$ 2س $+ 3 = 0$ ب) 5ل $-$ 2م $+ 3 = 0$

جـ) 5س $-$ 2ص$^3 = 3$ ء) 5س^2 $-$ 2ص $= 3$

هـ) 5س $-$ 2س$^2 = 3$

حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين :

تعرف أن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى في متغيرين هي : أ س + ب ص = جـ وبالتالي فإن للمتغيرين س ، ص قيم كثيرة من ح ، وأحياناً تكون لانهائية .

مثلاً ٢ س – ص = ٤ لها عدد لانهائي من الحلول حتى في مجموعة الأعداد الطبيعية ويمثل حل معادلة الدرجة الأولى في متغيرين بأزواج مرتبة (س ، ص) ، يمثل المسقط الأول منها قيم المتغير الأول ، ويمثل المسقط الثاني منها قيم المتغير الثاني وكما تعرف أن الزوج المرتب يمثل نقطة في المستوى الإحداثي وبالتالي فإن معادلة الدرجة الأولى في متغيرين هي عبارة عن نقاط غير منتهية تقع على خط مستقيم واحد ، أي أن الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة جميعها نقاط على استقامة واحدة ولهذا تسمى أيضاً معادلة الدرجة الأولى في متغيرين معادلة خطية .

مثال (١) لتكن المعادلة : س + ص = ٥ ، عين أياً من الأزواج التالية يمثل حلاً لها ؟

أ) (٣ ، ٢) ب) (–٣ ، ٥)

جـ) (٧ ، –٢) ء) (٣,٥ ، ١,٥)

الحـل : عوض عن كل زوج مرتب في المعادلة :

أ) الطرف الأيمن = س + ص = ٣ + ٢ = ٥ = الطرف الأيسر

∴ الزوج المرتب (٣ ، ٢) يمثل حلاً للمعادلة .

ب) الطرف الايمن = س + ص

= – ٣ + ٥ = ٢ ≠ الطرف الأيسر

∴ الزوج المرتب (– ٣ ، ٥) لايمثل حلاً للمعادلة .

جـ) الطرف الأيمن = س + ص

= ٧ + (–٢) = ٥ = الطرف الأيسر

∴ الزوج المرتب (٧ ، –٢) يمثل حلاً للمعادلة .

د) الطرف الأيمن = س + ص

= ٣,٥ + ١,٥ = ٥ = الطرف الأيسر

∴ الزوج المرتب (٣,٥ ، ١,٥) يمثل حلاً للمعادلة .

مثال (٢) اذكر خمسة حلول للمعادلة : س + ص = ٧ ، في ح × ح .

الحــل : نكتب المعادلة بدلالة أحد المتغيرين وليكن س .

س + ص = ٧ (بطرح س من طرفي المعادلة)

س – س + ص = ٧ – س

ص = ٧ – س

نختار بعض القيم للمتغير س مثل :

–٥ ، –٢ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، وكتابتها في جدول ، ونوجد القيم المقابلة لها للمتغير ص كمايلي :

ص = ٧ − س		
س	ص	(س ، ص)
−٥	١٢	(−٥ ، ١٢)
−٢	٩	(−٢ ، ٩)
٠	٧	(٠ ، ٧)
$\frac{١}{٢}$	٦$\frac{١}{٢}$	($\frac{١}{٢}$ ، ٦$\frac{١}{٢}$)
٣	٤	(٣ ، ٤)

مثال (٣) إذا كانت ص ∈ { ٠ ، ٠ ، −٢ ، ٣ ، −$\frac{١}{٢}$ ، −٤ }

فأوجد مجموعة الحل للمعادلة : س − ٢ص = ٤

الحل: نكتب المعادلة بدلالة أحد المتغيرين وليكن ص كما يلي :

س − ٢ص = ٤ (بإضافة ٢ص إلى طرفي المعادلة)

س − ٢ص + ٢ص = ٤ + ٢ص

∴ س = ٤ + ٢ص

نعوض عن قيمة ص في المعادلة

كما في الجدول المجاور :

س = ٤ + ٢ص		
س	ص	(س ، ص)
٤	٠	(٤ ، ٠)
٠	−٢	(٠ ، −٢)
١٠	٣	(١٠ ، ٣)
٣	−$\frac{١}{٢}$	(٣ ، −$\frac{١}{٢}$)
−٤	−٤	(−٤ ، −٤)

∴ مجموعة الحل هي :

{ (٤ ، ٠) ، (٠ ، −٢) ،

(١٠ ، ٣) ، (٣ ، −$\frac{١}{٢}$) ،

(−٤ ، −٤) } .

مثال (٤) عددان حقيقيان مجموعهما (٧) اكتب المعادلة ثم اذكر خمسة أزواج تحقق المعادلة .

الحـــل :

نفرض أن العدد الأول = س ، العدد الثاني = ص

∴ س + ص = ٧

نكتب المعادلة بدلالة أحد المتغيرين وليكن ص

∴ س = ٧ − ص

نختار بعض القيم للمتغير الآخر ص لإيجاد قيمة المتغير س مثلاً :

٢ ، ٣,٧ ، ٠ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، −٤ ، وكتابتها في جدول ، ونوجد القيمة المقابلة لها للمتغير س كما يلي :

س = ٧ − ص		
س	ص	(س ، ص)
٥	٢	(٥ ، ٢)
٣,٣	٣,٧	(٣,٣ ، ٣,٧)
٧	٠	(٧ ، ٠)
$٨\frac{١}{٢}$	$-\frac{٣}{٢}$	($٨\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$)
١١	−٤	(١١ ، −٤)

التمثيل البياني لمجموعة حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين :

التمثيل البياني لمجموعة حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين خط مستقيم، وكل نقطة تقع عليه تحقق المعادلة، وبما أن كل مستقيم يتحدّد على الأقل بنقطتين فإنه يمكن الاكتفاء بنقطتين لرسم المستقيم الذي يمثل المعادلة .

مثال (٥)

مثَّل بيانياً مجموعة حل المعادلة : س – ص – ١ = ٠

الحـــل :

لتمثيل مجموعة حل المعادلة بيانياً ، نتبع الخطوات التالية :

(١) نكتب المعادلة بدلالة أحد المتغيرين ، وليكن س ،

∴ ص = س –١ .... (١)

(٢) نختار قيمتين للمتغير س لإيجاد قيمة المتغير ص ، مثل القيم ٠ ، ٤ (تفضل قيم متباعدة بعض الشئ ويسهل عند التعويض بها حساب المتغير الآخر) .

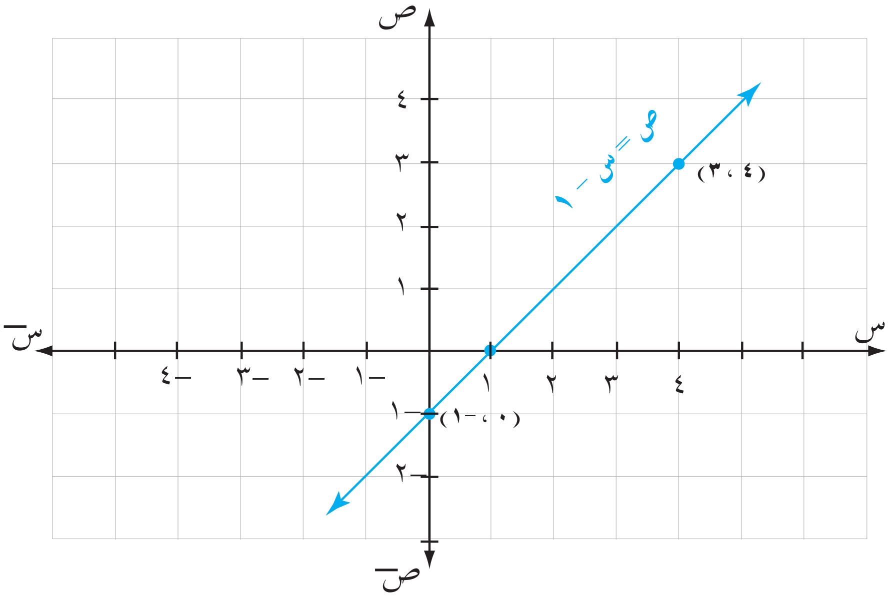
(٣) وننشئ جدول القيم المجاور :

نوجد قيم المتغير ص بالتعويض عن قيم المتغير س في المعادلة (١) لإيجاد نقطتين في المستوى .

ص = س – ١		
س	ص	(س ، ص)
٤	٣	(٤ ، ٣)
٠	– ١	(٠ ، –١)

(٤) نمثل الزوجين المرتبين كنقطتين في المستوى ح × ح
انظر الشكل (٣ – ١)

(٥) نصل النقطتين باستخدام المسطرة، والمستقيم يمثل مجموعة حل المعادلة .



شكل (٣ – ١)

التحقق :

نأخذ أي زوج مرتب مثل (١ ، ٠) يحقق المعادلة وإذا وقعت النقطة على الخط المستقيم فيُعدُّ ذلك تحققاً من صحة الرسم .

مثال (٦) مثل بيانياً مجموعة حل المعادلة : س – ص = ٥ .

الحل :

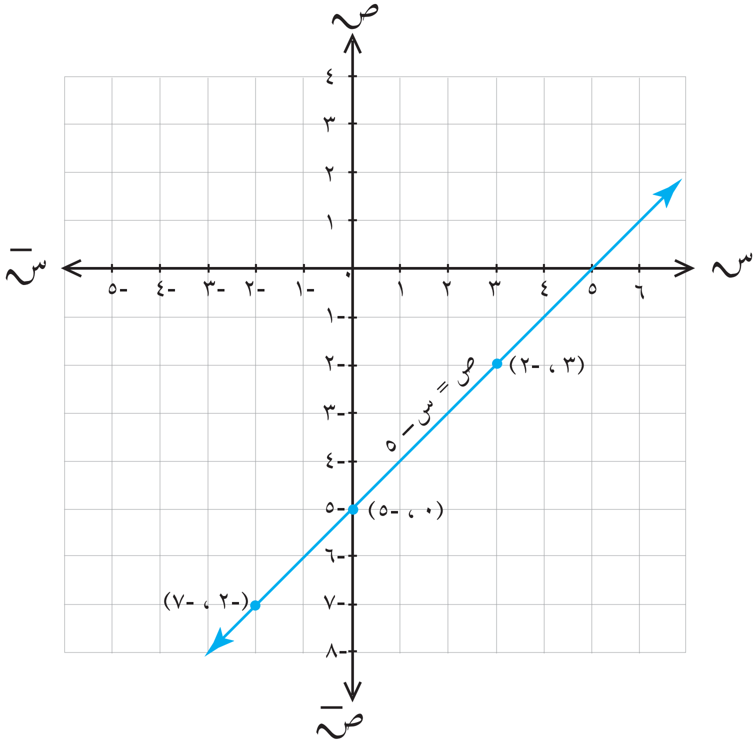
نكتب المعادلة : س – ص = ٥ بدلالة أحد المتغيرين وليكن س

ص = س – ٥

ننشئ جدول القيم ، على النحو التالي :

ص = س − ٥		
س	ص	(س ، ص)
−٢	− ٧	(−٢ ، −٧)
٣	− ٢	(٣ ، −٢)
٠	− ٥	(٠ ، −٥)

تُمثل النقاط (−٢ ، −٧) ، (٣ ، −٢) ، (٠ ، −٥) في المستوى ح × ح ونرسم المستقيم كما في الشكل (٣ − ٢) .



شكل (٣ − ٢)

من الشكل السابق يتضح أن الخط المستقيم يمثل المعادلة س – ص = ٥

وأن الأزواج المرتبة (–٢ ، –٧) ، (٣ ، –٢) ، (٠ ، –٥) تمثل حلولاً للمعادلة .

مثال (٧) مثّل بيانياً مجموعة حل المعادلة : ٢س + ٣ ص = ٠

الحــل :

نكتب المعادلة : ٢ س + ٣ ص = ٠ بدلالة ص كما يلي :

٢س + ٣ص – ٣ ص = ٠ – ٣ ص (بإضافة – ٣ ص لطرفي المعادلة) .

٢ س = – ٣ ص .

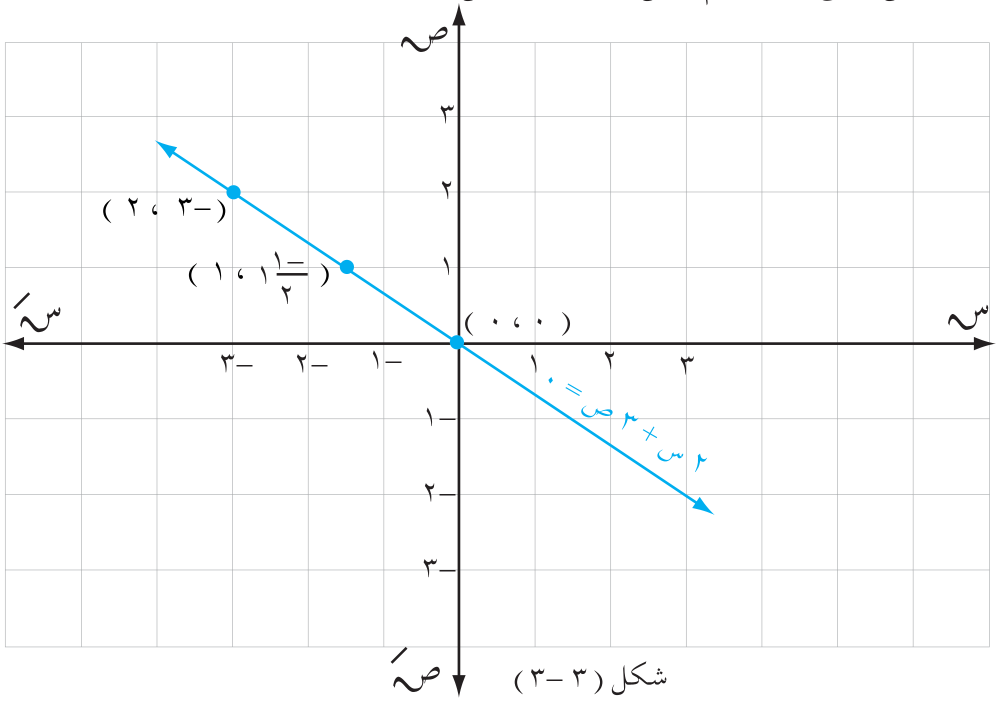
$$\therefore \text{س} = \frac{-٣ \text{ ص}}{٢}$$

ننشئ جدول القيم على النحو التالي :

$\text{س} = \frac{-٣}{٢} \text{ ص}$		
س	ص	(س ، ص)
$\frac{-٣}{٢}$	١	$(\frac{-٣}{٢} ، ١)$
٠	٠	(٠ ، ٠)
– ٣	٢	(–٣ ، ٢)

نُمثّل الأزواج المرتبة $(-\frac{٣}{٢} ، ١)$ ، (٠ ، ٠) ، (–٣ ، ٢)

كنقاط في المستوى ح × ح ، ونصل النقاط كما في الشكل (٣ – ٣)
ونحصل على مستقيم يمثل مجموعة حل المعادلة .



شكل (٣ –٣)

مثال (٨) مثّل بيانياً مجموعة حل المعادلة : $\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

الحــل :

نوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات في طرفي المعادلة :

$\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ وهو العدد (٤)

$\therefore$ $\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ تصبح $\frac{\text{٢س}}{\text{٤}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

(بضرب الطرفين في ٤) ينتج أن :

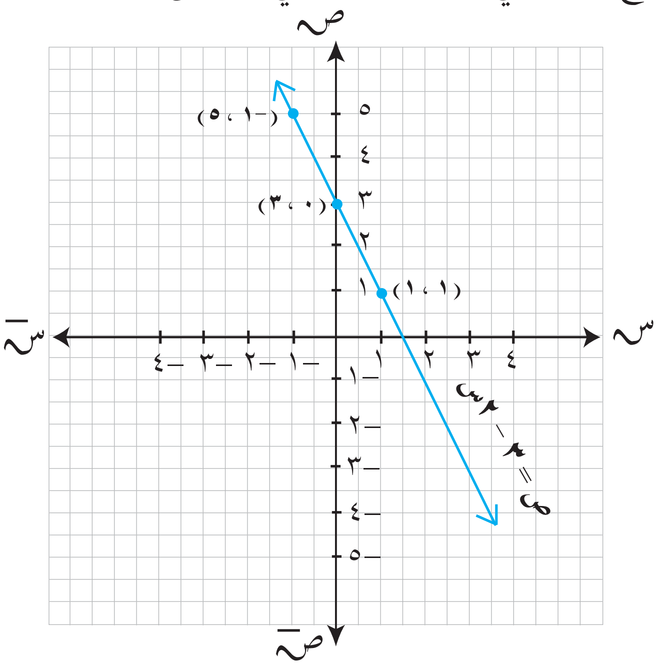
٢س + ص = ٣ نكتب المعادلة بدلالة س :

ص = ٣ − ٢س

ننشئ جدول القيم على النحو التالي :

ص = ٣ − ٢س		
س	ص	(س ، ص)
−١	٥	(−١ ، ٥)
٠	٣	(٠ ، ٣)
١	١	(١ ، ١)

نمثّل الأزواج المرتبة في المستوى كما في الشكل (٣−٤)



شكل (٣ −٤)

من الشكل السابق يتضح أن المستقيم الناتج يمثل مجموعة حل المعادلة :

$$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

تماريـن ومسائـل

[١] عيّن فيمايلي معادلات الدرجة الأولى في متغيرين :

أ) $٢س - ص = ٤$ ب) $س^{٢} - ٣ص = ٧$

جـ) $س (١ + س ص) = ٠$ ء) $ل + ٥م + ٩ = ٠$

هـ) $\frac{١}{٤} س + \frac{١}{٣} ص = ٣٠$ و) $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$

[٢] اكتب المعادلات التالية بدلالة المتغير س مرة، وبدلالة المتغير ص مرة أخرى .

أ) $س + ص = ٥$ ب) $ص - ٤س = ١٥$

جـ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = \frac{١}{٦}$ ء) $٢ص + ٣س = -٦$

هـ) $٥س - ص + ٥ = ٠$ و) $٢(س+١) = ٣(ص - ١)$.

[٣] عيّن أيّاً من الأزواج المرتبة التالية تُعدُّ حلاً للمعادلة : $٢س + ٣ص = ٥$

أ) $(٤ ، -١)$ ب) $(-٢ ، ١)$

جـ) $(-\frac{١}{٢} ، ٢)$ ء) $(\frac{٣}{٢} ، \frac{٢}{٣})$

[٤] أوجد الأزواج المرتبة التي تمثل حلولاً للمعادلة .

$٣س - ٢ص = ٤$ ، إذا كانت ص ∈ $\{٤ ، ٢ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، ٠ ، -١ ، -٤\}$

[٥] اذكر خمسة حلول لكل من المعادلات التالية :

أ) $س - ٣ص = ١$ ب) $٢س + ص = ٧$

جـ) $٢س + ٣ص = ٩$ ء) $\frac{١}{٢}س + ٢ص + ٣ = ٠$

[٦] مثّل بيانياً مجموعة الحل لكلٍّ من المعادلات التالية في (ح × ح)

أ) $٣س - ٤ص = -١٢$ ب) $٣س = ١$

جـ) $٤س + ص = ٠$ ء) $س = ص$

هـ) $٢ص = ٧$ و) $\frac{ص}{٣} + \frac{س}{٢} = ٢$

٣ : ٢ نظام المعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين

تأمل المعادلتين التاليتين :

$س + ص + ١ = ٠$ ، $٢س - ص + ٨ = ٠$

تجد أن كلاً منهما معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين وعندما يشترط إيجاد الحلول المشتركة لهما ؛ فإننا نقول بأنهما تمثلان نظاماً من المعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين ، والصورة العامة لهذا النظام هي :

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ = ٠$

$أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ = ٠$

ومبدأ حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين هو حذف أحد المتغيرين باستخدام التحويلات المكافئة للحصول على معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد، وبالتالي يسهل حلها لتحصل على قيمة أحد المتغيرين ، وعن طريق التعويض به في إِحدى المعادلتين نوجد قيمة المتغير الآخر ، وقيمة المتغيرين التي تكتب كزوج مرتب تمثل الحل المشترك للمعادلتين في آنٍ واحد .

ومن أهم طرق الحل لمعادلتين آنيتين جبرياً طريقة المقابلة وطريقة التعويض وطريقة الحذف .

أولاً : طريقة المقابلة :

لإِيجاد حل نظام المعادلات في متغيرين عن طريق المقابلة اتبع الخطوات التالية :

(١) اكتب كلاً من المعادلتين بدلالة أحد المتغيرين .

(٢) ساوِ قيمتى المتغير في المعادلتين للحصول على معادلة في متغير واحد ثم حلّها لإِيجاد قيمة المتغير .

(٣) عوّض عن قيمة المتغير المعلوم في إِحدى المعادلتين للحصول على قيمة المتغير الآخر، للحصول على حل للنظام .

مثال (١) حِل المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

٤س + ٣ص = ٢ .... (١)

٢س − ٥ص = ١٤ .... (٢)

الحـــل : نكتب كلاً من المعادلتين بدلالة ص فنحصل على :

من المعادلة (١) : س $=$ $\frac{٢ - ٣ص}{٤}$ .... (٣)

من المعادلة (٢) : س $=$ $\frac{١٤ + ٥ص}{٢}$ .... (٤)

من (٣) ، (٤) نجد أن :

$\frac{٢ - ٣ص}{٤} = \frac{١٤ + ٥ص}{٢}$ (بضرب طرفي المعادلة بالعدد ٤)

$٤ \times (\frac{٢ - ٣ص}{٤}) = ٤ \times (\frac{١٤ + ٥ص}{٢})$

٢ – ٣ص = ٢٨ + ١٠ ص (بطرح ١٠ص من طرفي المعادلة)

٢ – ٣ ص – ١٠ص = ٢٨ + ١٠ ص – ١٠ص

٢ – ١٣ص = ٢٨ (بطرح العدد ٢ من طرفي المعادلة)

٢ – ٢ – ١٣ص = ٢٨ – ٢

–١٣ص = ٢٦ (بالقسمة على العدد –١٣)

$\frac{-١٣ص}{-١٣} = \frac{٢٦}{-١٣}$

∴ ص = –٢

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة ص = –٢ نحصل على :

٤س + (٣ × –٢) = ٢

٤س – ٦ = ٢ (بإضافة العدد (٦) إلى طرفي المعادلة)

٤س − ٦ + ٦ = ٢ + ٦

٤س = ٨ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد (٤))

$$\frac{٤س}{٤} = \frac{٨}{٤}$$

∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل هي : {(٢ ، −٢)}

التحقق : يتم التعويض عن الحل بالزوج المرتب (٢ ، −٢) في المعادلة (٢) أو المعادلة (١).

ثانياً : طريقة التعويض :

لإيجاد حل نظام معادلات من الدرجة الأولى في متغيرين بطريقة التعويض اتبع الخطوات التالية :

(١) اكتب إحدى المعادلتين بدلالة أحد المتغيرين [ولتكن المعادلة (١)] .

(٢) عوّض عن المعادلة الجديدة [ولتكن المعادلة (٣)] في المعادلة (٢) فتحصل على قيمة المتغير الثاني .

(٣) عوّض عن قيمة المتغير الثاني في المعادلة (٣) فتحصل على قيمة المتغير الأول.

(٤) تحقق من صحة الحل .

مثال (٢) حل المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام طريقة التعويض:

٢س − ص = ٥ .... (١)

س + ٣ص = −١ .... (٢)

الحـــل :

(١) نكتب إِحدى المعادلتين [ولتكن المعادلة (١)] بدلالة أحد المتغيرين وليكن س فتصبح المعادلة : ص = ٢س – ٥ .... (٣)

(٢) نعوّض عن المتغير ص [المعادلة (٣)] في المعادلة (٢)

س + ٣ (٢س – ٥) = –١

س + ٦س – ١٥ = –١ (بإِضافة العدد (١٥) إِلى طرفي المعادلة)

٧س – ١٥ + ١٥ = –١ + ١٥

٧ س = ١٤ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد (٧))

$$\frac{\text{٧س}}{\text{٧}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٧}}$$

∴ س = ٢

(٣) نعوّض عن قيمة المتغير س في المعادلة (٣) فنحصل على :

ص = (٢ × ٢) – ٥

ص = ٤ – ٥

ص = –١

∴ مجموعة حل المعادلتين هي : { (٢ ، –١) }

(٤) تحقق من صحة الحل بالتعويض عن (٢ ، –١) في كلاً المعادلتين (١) ، (٢) كما يلي :

المعادلة (٢) :

الطرف الأيمن = س + ٣ص = ٢ + ٣ (–١) = ٢ – ٣ = –١

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

المعادلة (١) :

الطرف الأيمن = ٢ س – ص = ٢ × ٢ + ١ = ٥ = الطرف الأيسر.

مثال (٣) حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

س + ٢ص = ١ ، ٣س = ٧ – ٤ ص

الحــل :

س + ٢ص = ١ .... (١)

٣س = ٧ – ٤ ص .... (٢)

نكتب المعادلة (١) بدلالة أحد المتغيرين وليكن ص على النحو التالي :

س = ١ – ٢ص .... (٣)

بالتعويض عن قيمة س [المعادلة (٣)] في المعادلة (٢) ينتج أن :

٣ (١ – ٢ص) = ٧ – ٤ ص

٣ – ٦ص = ٧ – ٤ ص (بإضافة ٤ ص إلى طرفى المعادلة)

٣ – ٦ص + ٤ص = ٧ – ٤ص + ٤ ص

٣ – ٢ص = ٧ (بطرح العدد (٣) من طرفي المعادلة)

٣ – ٣ – ٢ص = ٧ – ٣

– ٢ ص = ٤ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد (–٢))

$$\frac{٢ص}{–٢} = \frac{٤}{–٢}$$

∴ ص = –٢

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (٣) ينتج أن :

س = ١ – ٢ × –٢ = ١ + ٤ = ٥

∴ س = ٥ ، مجموعة الحل هي : { (٥ ، −٢) } .

التحقق : تحقق بنفسك من صحة الحل .

ثالثاً : طريقة الحذف :

لإيجاد حل نظام معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى في متغيرين عن طريق الحذف اتبع الخطوات التالية :

(١) ضع كلاً من المعادلتين في الصورة العامة .

$أ_١$ س + $ب_١$ ص = $جـ_١$

$أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $جـ_٢$

(٢) وحّد معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين عن طريق الضرب في عدد مناسب لتتمكن من حذف أحد المتغيرين .

(٣) قم بإجراء عملية الجمع أو الطرح للمعادلتين معاً لتحصل على معادلة فيها متغير واحد .

(٤) حل المعادلة ذات المتغير الواحد ، لتحصل على قيمة المتغير .

(٥) عوّض عن قيمة المتغير في أي من المعادلتين فتحصل على قيمة المتغير الآخر وبذلك تكون قد حليت النظام .

(٦) تحقق من صحة الحل .

مثال (٤) حل المعادلتين الآتيتين :

٣ص + ٥س = ١١ ، ٢س − ٧ص = ٢٩

الحـــل :

نضع المعادلتين على الصورة العامة للنظام كما يلي :

٥س + ٣ص = ١١ .... (١)

٢س − ٧ص = ٢٩ .... (٢)

لحذف المتغير ص ، نضرب طرفي المعادلة (١) بالعدد ٧ ونضرب طرفي المعادلة (٢) بالعدد ٣ فينتج أن :

٧ X ٥س + ٧ X ٣ص = ٧ X ١١

٣٥س + ٢١ ص = ٧٧ .... (٣)

٣ X ٢س − ٣ X ٧ص = ٣ X ٢٩

٦س − ٢١ص = ٨٧ .... (٤)

بجمع (٣) ، (٤) ينتج أن :

٤١س + ٠ = ١٦٤ (بقسمة الطرفين على العدد (٤١))

$$\frac{٤١س}{٤١} = \frac{١٦٤}{٤١}$$

∴ س = ٤

ولإِيجاد قيمة المتغير ص عوّض عن س = ٤ في احدى المعادلتين ولتكن المعادلة (١) ينتج أن :

٥ X ٤ + ٣ص = ١١

٢٠ + ٣ص = ١١ (بطرح العدد (٢٠) من طرفي المعادلة)

٢٠ − ٢٠ + ٣ص = ١١ − ٢٠

٣ص = −٩ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد (٣))

$$\frac{٣ص}{٣} = \frac{-٩}{٣}$$

∴ ص = −٣

مجموعة الحل = {(٤ ، −٣)} .

التحقق : تحقق بنفسك في المعادلة (٢) .

مثال (٥) مستطيل محيطه ٢٤سم ، وطوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤سم

فما طوله وعرضه ؟

الحـــل :

نفرض أن : طول المستطيل = س ، عرض المستطيل = ص

محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) = ٢٤ .

٢س + ٢ص = ٢٤ .... (١)

∵ طول المستطيل − عرض المستطيل = ٤سم

∴ المعادلة : س − ص = ٤ .... (٢)

لحذف أحد المتغيرين وليكن س من المعادلتين نضرب طرفى المعادلة (٢)

بالعدد (−٢) فيصبح النظام :

٢س + ٢ص = ٢٤

−٢س + ٢ص = −٨

بالجمع ٤ص = ١٦ (بالقسمة على ٤)

∴ ص = ٤

بالتعويض عن ص = ٤ في المعادلة (٢) ينتج أن :

س − ٤ = ٤

س = ٨

∴ طول المستطيل = ٨سم ، عرض المستطيل = ٤سم .

التحقق : ∵ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

= ٢ (٨سم + ٤سم)

= ٢ × ١٢سم = ٢٤سم (كما هو معطى)

حل المعادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

نشــاط مَثِّل بيانياً مجموعتي حل كل من المعادلتين :

س + ص = ١ ، س − ص = ١

ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أن المعادلتين السابقتين يمثل مجموعة حل كل منهما مستقيم .

والمستقيمان يتقاطعان في النقطة (١ ، ٠) ، وإِحداثي هذه النقطة يمثلان الحل المشترك للمعادلتين معاً (س = ١ ، ص = ٠) .

مثال (٦) حل المعادلتين التاليتين بيانياً .

س − ص + ١ = ٠ ، ص + ٢س = ٤

الحــل :

أولاً : تمثيل مجموعة حل المعادلة : س − ص + ١ = ٠

نكتب المعادلة بدلالة س أي أن : ص = س + ١

نكوّن جدول القيم للمعادلة ثم نرسم المستقيم كما في الشكل (٣–٥).

ص = س + ١		
س	ص	(س ، ص)
١–	٠	(١–، ٠)
٠	١	(٠ ، ١)
١	٢	(١ ، ٢)

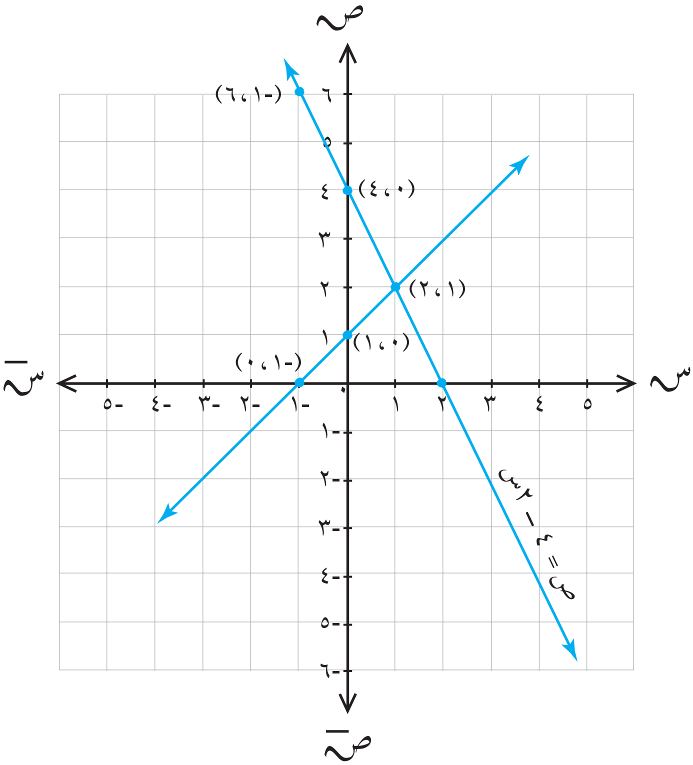
ثانياً : تمثيل مجموعة حل المعادلة ص + ٢س = ٤

نكتب المعادلة بدلالة س فينتج ان :

ص = ٤ – ٢س

نكوّن جدول القيم للمعادلة ثم نرسم المستقيم كما في الشكل (٣–٥).

ص = ٤ – ٢س		
س	ص	(س ، ص)
١–	٦	(١–، ٦)
٠	٤	(٠ ، ٤)
١	٢	(١ ، ٢)



شكل (٣ – ٥)

من الشكل السابق نجد أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (١ ، ٢)

إِذن حل المعادلتين هو الزوج المرتب (١ ، ٢) .

أى أن مجموعة الحل = $\{$(١ ، ٢)$\}$.

التحقق :

تحقق من صحة الحل بالتعويض عن الزوج المرتب (١ ، ٢) في كِلا المعادلتين المعطاة .

مثال (٧) حل المعادلتين التاليتين بيانياً :

س + ص = ٥ ، ٣ س – ص = ٣

الحـــل :

لحل المعادلتين نكوّن لكلٍ منهما جدولاً مستقلاً ، ثم نرسم المستقيمين المثلين لهما كمايلي :

جدول المعادلة : ص = ٥ – س		
س	ص	(س ، ص)
٠	٥	(٠ ، ٥)
١	٤	(١ ، ٤)
٢	٣	(٢ ، ٣)

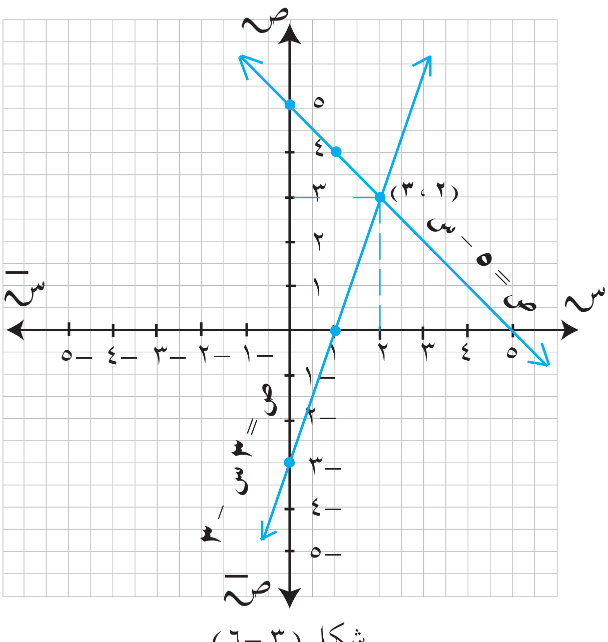
جدول المعادلة : ص = ٣س – ٣		
س	ص	(س ، ص)
٠	–٣	(٠ ، –٣)
١	٠	(١ ، ٠)
٢	٣	(٢ ، ٣)

من الشكل (٣–٦) نجد أن المستقيمين قد تقاطعا في النقطة (٢ ، ٣)

إذن مجموعة حل المعادلتين الآنيتين هي { (٢ ، ٣) } .

التحقق :

تحقق بنفسك من صحة الحل .



شكل (٣ –٦)

مثال (٨) حل المعادلتين التاليتين بيانياً .

س − ص = ٣ ، ص − س + ٥ = ٠

الحـل:

نكوّن لكلٍ من المعادلتين جدولاً مستقلاً ، ثم نرسم المستقيمين الممثلين لهما كما يلي :

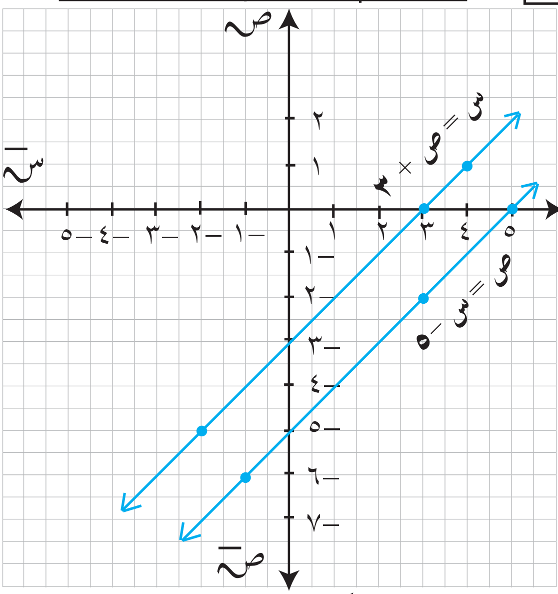
جدول المعادلة : س = ص + ٣

س	ص	(س ، ص)
٣	٠	(٣ ، ٠)
٤	١	(٤ ، ١)
−٢	−٥	(−٢ ، −٥)

جدول المعادلة : ص = س − ٥

س	ص	(س ، ص)
−١	−٦	(−١ ، −٦)
٣	−٢	(٣ ، −٢)
٥	٠	(٥ ، ٠)

من الشكل (٣ − ٧) نجد أن المستقيمين لا يتقاطعان أي لاتوجد نقطة مشتركة بينهما إذن مجموعة حل المعادلتين هي ∅ (مجموعة خالية).



شكل (٣ −٧)

مثال (٩) حل المعادلتين التاليتين بيانياً :

س + ص = ٣ ، ٢س + ٢ص = ٦

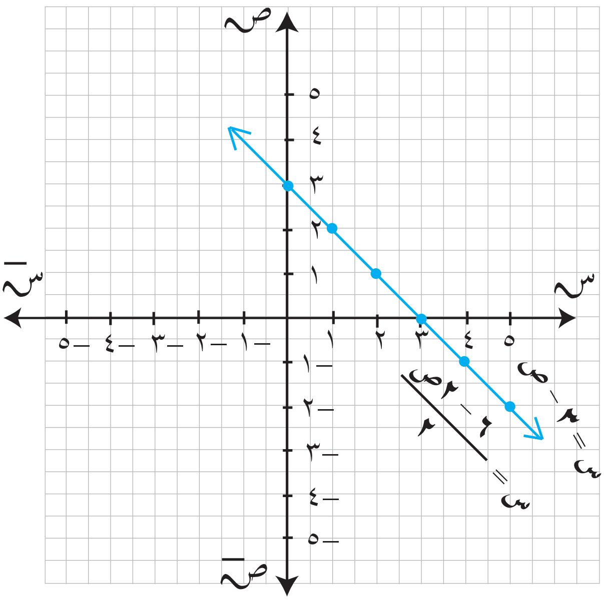
الحل : نكوّن لكل من المعادلتين جدولاً مستقلاً ، ثم نرسم المستقيمين الممثلين لكل منهما كمايلي :

جدول المعادلة : س = ٣ – ص

س	ص	(س ، ص)
٣	٠	(٣ ، ٠)
١	٢	(١ ، ٢)
٥	–٢	(٥ ، –٢)

جدول المعادلة : س = $\frac{٦ - ٢ص}{٢}$

س	ص	(س ، ص)
٠	٣	(٠ ، ٣)
٢	١	(٢ ، ١)
٤	–١	(٤ ، –١)



شكل (٣ –٨)

من الشكل (٣–٨) تلاحظ أن المستقيمين منطبقين إذن مجموعة الحل للمعادلتين تتكون من عدد لانهائي من الحلول .

سبق أن عرفت أنه إذا كان المستقيمان متقاطعين فنقطة التقاطع هي الحل الوحيد، ومن المثالين ٨ ، ٩ تلاحظ الآتي :

(١) إذا كان المستقيمان متوازيين فإن مجموعة الحل مجموعة خالية .

(٢) إذا كان المستقيمان منطبقين فإن مجموعة الحل تتكون من عدد لانهائي من الحلول .

تماريـن ومسائـل

أولاً : حل أنظمة المعادلات التالية مرة باستخدام طريقة المقابلة ومرة أخرى باستخدام طريقة التعويض وتحقق من صحة الحل :

[١] س − ص = ٥ ، ٤س + ٢ص = ٢

[٢] ٣س + ٤ص + ٦ = ٠ ، س + ٦ص + ١٦ = ٠

[٣] ٢س − (−٣ص) = ١٥ ، ٣س −٣ = ٢ص

[٤] ٣ص + ٢س = ٧ ، س − ص = ٦

ثانياً : حل أنظمة المعادلات التالية باستخدام طريقة الحذف وتحقق من صحة الحل :

[١] ٤س + ٣ص = ٩ ، ٢س + ٥ ص = ١٥

[٢] س − ص = ٤ ، ٣ص − ٥س = ٠

[٣] ٢س + ص = ٩ ، ٣س − ٢ص = −٤

[٤] $\frac{٣}{٢}$ ص + ٦ = $\frac{١}{٢}$ س ، ٠,٥س + ص = ٠

ثالثاً : حل أنظمة المعادلات التالية بيانياً وتحقق من صحة الحل :

[١] ٢س − ص = ٥ ، س − ٣ص = ١٠

[٢] ٣س + ٢ص = ١٢ ، ٥س − ٣ص = ١

[٣] س = ص ، س + ٢ص = ٣

[٤] ص = ١ ، س + ص = ٣

[٥] س − ٢ص = ٧ ، $\frac{٢}{٣}$س + ص = ٠

[٦] س + ص = ٥ ، س = ٣ + ص

[٧] ٢س + ص = ٧ ، ٦س = ٢١ − ٣ص

[٨] ٣س − ص = ٤ ، ص = ٣س − ١

رابعاً : حل أنظمة المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل :

[١] $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢} = ٣$ ، $\frac{\text{س}}{٢} + \text{ص} = \frac{١١}{٢}$

[٢] ٢س − ٤ = ٢ص ، ٣س + ص = ١١

[٣] $\text{س} - \frac{٣\text{ص} + ١}{٢} + ٤ = ٠$ ، $\text{ص} + \frac{٢\text{س} + ١}{٣} = ٠$

٣ : ٣ معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

تأمل المعادلات التالية :

١) ٥ع^{٢} − ٢٠ = ٠ ، ٢) س^{٢} − ٧س = ٠ ،

٣) ٣ص^{٢} − ٢ص + ٥ = ٠.

ماذا تلاحظ ؟ تلاحظ أن كل معادلة تحتوي على متغير واحد ، وأعلى قوة له هي القوة الثانية،فالمعادلة (١) فيها المتغير ع مرفوع للقوة ٢، والمعادلة (٢)

فيها المتغير س مرفوع للقوة ٢ ، والمعادلة (٣) فيها المتغير ص مرفوع للقوة ٢ ، وتسمى هذه المعادلات بمعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد ويمكن كتابتها على الصورة : ا س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، حيث ا ≠ ٠

وسبق أن قمنا بحل معادلات الدرجة الأولى، ويمكننا باستخدام بعض الطرق حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد، وفي هذا الدرس سنقتصر على طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات هما :

(١) طريقة التحليل   (٢) طريقة القانون العام

أولاً : حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد بطريقة التحليل :

تدريب

اكمل مايلي :

ا) س^{٢} + ٢س – ١٥ = (س + ...) (... – ٣)

ب) ٤ص^{٢} + ١٨ص + ٨ = ... (ص + ...) (... + ...)

جـ) ٦ع^{٢} – ١٧ع + ١٢ = (... – ...)(... – ...)

مثال (١) حل المعادلة (س + ١) (س – ٣) = ٠

الحل : نلاحظ في هذه المعادلة أنها تتكون من مقدارين جبريين حاصل ضربهما يساوي صفراً .

تذكر : إن حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صفراً :

فأما المقدار الأول يساوي صفراً أو المقدار الثاني يساوي صفراً .

أي أن : إِما $\quad$ س + ١ = ٠

س = −١

أو $\quad$ س − ٣ = ٠

س = ٣

∴ مجموعة الحل = { −١ ، ٣ }

مثال (٢) حل المعادلة : ٢س^{٢} + ٧س − ١٥ = ٠

الحـــل: ٢س^{٢} + ٧س − ١٥ = ٠

(٢س − ٣) (س + ٥) = ٠

إِما ٢س − ٣ = ٠

٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

أو $\quad$ س + ٥ = ٠

∴ س = −٥

∴ مجموعة الحل = { −٥ ، $\frac{٣}{٢}$ }

مثال (٣) حل المعادلة : ٣ل^{٢} − ٥ل − ٢ = ٠

الحـــل: ٣ل^{٢} − ٥ل − ٢ = ٠

$(٣ل + ١)(ل - ٢) = ٠$

إما $٣ل + ١ = ٠$

$٣ل = -١$

$\therefore ل = \frac{-١}{٣}$

أو $ل - ٢ = ٠$

$\therefore ل = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{-١}{٣} ، ٢\}$

مثال (٤) حل المعادلة : $س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$ علماً بأن $\sqrt{٧} \approx ٢,٦٥$

الحل: لاحظ المقدار $س^٢ + ٢س - ٦$ لايتحلل مباشرة ، وبالتالي فإننا

نقوم باستخدام إكمال المربع لحل هذه المعادلة

$س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$ (بإضافة ٦ الى الطرفين)

$س^٢ + ٢س = ٦$ (بإضافة مربع نصف معامل س الى الطرفين)

$س^٢ + ٢س + (\frac{٢}{٢})^٢ = ٦ + (\frac{٢}{٢})^٢$

$س^٢ + ٢س + ١ = ٦ + ١$

$(س + ١)^٢ = ٧$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$س + ١ = \pm\sqrt{٧} \approx \pm ٢,٦٥$

إما $س + ١ \approx ٢,٦٥$

$س \approx ٢,٦٥ - ١$

$\approx ١,٦٥$

أو $س + ١ \approx -٢,٦٥$

$س \approx -٢,٦٥ - ١$

$\approx -٣,٦٥$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٣,٦٥ ، ١,٦٥\}$

تمارين ومسائل

حل المعادلات الآتية :

[١] $س^٢ - ١٦ = ٠$

[٢] $٥ص^٢ - ٢٠ص = ٠$

[٣] $س^٢ - ١٦س + ٦٣ = ٠$

[٤] $٦س^٢ - ٢٣س + ٢٠ = ٠$

[٥] $٧س^٢ + ١٤س - ٦ = ٩ - ٢س$

[٦] $(س + ١)(س - ٢) = ٢ + ١٠س - ٢س^٢$

[٧] $ص^٢ - ص - ١ = ٠$ علماً بأن $\sqrt{٥} \approx ٢,٢٤$

[٨] $٢ع^٢ - ٢ع - ٣ = ٠$ علماً بأن $\sqrt{٧} \approx ٢,٦٥$

[٩] $٣س^٢ - ٨س + ٢ = ٠$ علماً بأن $\sqrt{١٠} \approx ٣,١٦$

[١٠] $٢س^٢ - ٤س - ٣ = ٠$ علماً بأن $\sqrt{١٠} \approx ٣,١٦$

[١١] $س^٢ - س = \frac{٣}{٤}$

[١٢] $س + ٢ = \frac{٢}{س}$ علماً بأن $\sqrt{٣} \approx ١,٧٣$

ثانياً : حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد بطريقة القانون العام :

تدريب حل المعادلة التالية : $٢س^٢ - ٨س + ٢ = ٠$

علماً بأن $\sqrt{٣} = ١,٧$ تقريباً

تلاحظ أن : معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد التي لايمكن حلها بالتحليل تأخذ وقتاً طويلاً في حلها بإكمال المربع ؛ وقد اكتشف قانون عام يسهل حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد التي صورتها العامة هي :

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq ٠$

ويمكن حل هذه المعادلة بإكمال المربع كالآتي :

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ (بالقسمة على معامل $س^٢$)

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = \frac{٠}{أ}$$

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$$ (بطرح $\frac{جـ}{أ}$ من الطرفين)

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س = \frac{-جـ}{أ}$$ (بإكمال المربع إضافة مربع نصف معامل س)

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \frac{-جـ}{أ} + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢$$

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^٢}{٤أ^٢} = \frac{-جـ}{أ} + \frac{ب^٢}{٤أ^٢}$$

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} = \frac{-٤\,\text{أ}\,\text{جـ} + \text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\text{جـ}}{٤\text{أ}^{٢}}$$

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}{٤\text{أ}^{٢}}$$

$$\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} = \pm \sqrt{\frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}{٤\text{أ}^{٢}}}$$

$$\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$$

$\therefore$ $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$ **وهذا هو القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد سواء أمكن حلها بالتحليل أم لم يمكن.**

حيث أ معامل س^{٢} ، ب معامل س ، جـ الحد المطلق .

وتسمى الكمية التي تحت الجذر التربيعي (ب^{٢} − ٤أجـ) بالمميز ويرمز لها عادة بالرمز Δ .

مثال (١) حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام .

أ) س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠ ، ب) س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

جـ) س^{٢} − ٤س + ٦ = ٠ .

الحل: أ) ا = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −٥

$$\because \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{ا}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{ا}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٢٠}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm ٦}{٢}$$

$$\therefore \text{إما س} = \frac{٤ + ٦}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

$$\text{أو س} = \frac{٤ - ٦}{٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-١ ، ٥\}$

ب) ا = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٤

باستخدام القانون العام :

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ١٦}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٠}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٢\}$

جـ) أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٦

باستخدام القانون العام :

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٢٤}}{٢}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{-٨}}{٢}$$

لاحظ في هذه الحالة لايوجد عدد حقيقي مربعة يساوي -٨ ؛ وبالتالي فإنه لايوجد حل للمعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية .

$\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$

من المثال السابق نلاحظ مايلي :-

* إذا كانت $\Delta > ٠$ فيكون للمعادلة حلان حقيقيان غير متساويين .

* إذا كانت $\Delta = ٠$ فيكون للمعادلة حلان حقيقيان متساويين .

* إذا كانت $\Delta < ٠$ فيكون للمعادلة حلان غير حقيقيين أي لايوجد لها حل في ح .

مثال (٢) حل المعادلة : ١٢س$^{٢} + ٥$س $- ٢ = ٠$ باستخدام القانون العام .

الحــل :

من المفيد في حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد حساب قيمة المميز Δ في بداية الحل لمعرفة إذا كان هناك حل للمعادلة أم لا ونوعية الحلول، إن وجدت .

أ $= ١٢$ ، ب $= ٥$ ، جـ $= -٢$

نوجد أولاً قيمة المميز :

$\Delta =$ ب$^{٢} - ٤$ أ جـ

$= (٥)^{٢} - ٤ \times ١٢ \times -٢$

$= ٢٥ + ٩٦ = ١٢١$

$\therefore \Delta > ٠$ وبالتالي فإن للمعادلة حلين حقيقيين غير متساويين .

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ء}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٢١}}{٢ \times ١٢}$$

$$= \frac{-٥ \pm ١١}{٢ \times ١٢}$$

$$\text{أما س} = \frac{-٥ + ١١}{٢٤}$$

$$= \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{أو س} = \frac{-٥ - ١١}{٢٤}$$

$$= \frac{-١٦}{٢٤} = \frac{-٢}{٣}$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٤}\}$.

تمارين ومسائل

حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

[١] $\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢ = ٠$ [٢] $\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩ = ٠$

[٣] ص^{٢} + ٥ص + ٣ = ٠ علماً بأن $\sqrt{١٣}$ ≈ ٣,٦ .

[٤] ٢ع^{٢} + ٣ع − ٣ = ٠ علماً بأن $\sqrt{٣٣}$ ≈ ٥,٧٤

[٥] هـ^{٢} − هـ + ١ = ٤ هـ − ١ علماً بأن $\sqrt{١٧}$ ≈ ٤,١٢

[٦] ٦ل^{٢} + ٤ل − ١ = ٠ علماً بأن $\sqrt{١٠}$ ≈ ٣,١٦

[٧] ٩س^{٢} + ١٢ س + ٢ = ٠ علماً بأن $\sqrt{٢}$ ≈ ١,٤

[٨] ٢ س^{٢} − ٨ = ٠ . [٩] ٣ س^{٢} + ٩ س = ٠

[١٠] س + ٣ = $\frac{١}{٢س}$ علماً بأن $\sqrt{١١}$ ≈ ٣,٣

[١١] ٢ص + $\frac{٣}{ص}$ = ٧

[١٢] ٠,٥ س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠ علماً بأن $\sqrt{٣}$ ≈ ١,٧

[١٣] ١,٦س^{٢} − ٠,٤ س − ٢ = ٠

[١٤] س^{٢} − ٠,٥ س − ١٠٥ = ٠

٣ : ٤ مسائل تطبيقية

في المسائل التطبيقية التي تواجهنا في حياتنا اليومية توجد علاقة أو أكثر بين متغيرين ؛ وفي هذا الدرس نقوم بدراسة المسائل التي تؤول الى أحد الأنواع التالية من المعادلات .

١) معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

٢) معادلتان من الدرجة الأولى في متغيرين .

٣) معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد .

والخطوة الأولى والهامة في المسائل التطبيقية هي تكوين المعادلة ثم حل هذه المعادلة باحدى الطرق المختلفة التي سبق لك دراستها وبعد ذلك يتم التحقق من الحل والتأكد من صحة تكوين المعادلة .

مثال (١) كوّن المعادلات المعبرّة عما يأتي ، ثم حلها :

أ) إذا كان ثمن كتاب ومجلة ٧٥ ريالاً فأوجد ثمن كل منهما .

ب) إذا كان ثمن كتاب ومجلة ٧٥ ريالاً ويقل ثمن المجلة عن ثمن الكتاب بمبلغ ٢١ ريالاً ، فأوجد ثمن كل منهما .

جـ) مستطيل محيطه ٧٤سم ويزيد طوله عن عرضه بمقدار ٧سم فما طوله وعرضه ؟

الحــل :

أ) نفرض أن ثمن المجلة = س ريالاً .

ونفرض أن ثمن الكتاب = ص ريالاً .

العلاقة أن ثمن الكتاب والمجلة ٧٥ ريالاً

∴ المعادلة هي : س + ص = ٧٥ (بطرح ص من الطرفين)

∴ س = ٧٥ – ص

وفي هذه الفقرة نلاحظ أن لدينا معادلة واحدة في متغيرين وبالتالي فإن قيمة أحد المتغيرين تعتمد على قيمة المتغير الثاني . فإذا كانت قيمة المتغير ص (ثمن الكتاب) يساوي ٥٠ ريالاً مثلاً فإن قيمة المتغير س (ثمن المجلة) يساوي ٢٥ ريالاً ، وإذا كانت قيمة المتغير س تساوي ٤٠ ريالاً فإن قيمة المتغير ص تكون ٣٥ ريالاً ، وهكذا .

ويمكن أن تكتب مجموعة الحل على صورة أزواج مرتبة (س ، ص)

حيث س + ص = ٧٥ .

مجموعة الحل = {(٠ ، ٧٥) ، ($\frac{١}{٢}$ ، ٧٤ $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ٧٤)،....، (٧٥ ، ٠)}

ب) نفرض أن ثمن المجلة = س

ونفرض أن ثمن الكتاب = ص

العلاقة الأولى أن ثمن المجلة والكتاب يساوي ٧٥ ريالاً .

∴ س + ص = ٧٥

العلاقة الثانية يقل ثمن المجلة عن ثمن الكتاب بمبلغ ٢١ ريالاً .

∴ ص – س = ٢١

وتكون لدينا المعادلتين :

س + ص = ٧٥ .... (١)

ص – س = ٢١ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج ٢ ص = ٩٦ (بالقسمة على ٢)

ص = ٤٨

بالتعويض في المعادلة (١) بقيمة ص .

س + ٤٨ = ٧٥ (بطرح العدد ٤٨ من الطرفين)

س = ٧٥ – ٤٨

س = ٢٧

∴ ثمن المجلة = س = ٢٧ ريالاً

وثمن الكتاب = ص = ٤٨ ريالاً

التحقق :

ثمن المجلة + ثمن الكتاب = ٢٧ + ٤٨ = ٧٥ ريالاً .

ثمن الكتاب – ثمن المجلة = ٤٨ – ٢٧ = ٢١ ريالاً .

جـ) نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طول المستطيل = س + ٧

محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) .

٧٤ = ٢ (س + ٧ + س) .

٧٤ = ٢ (٢س + ٧) .

٧٤ = ٤ س + ١٤ (بطرح العدد ١٤ من الطرفين) .

٤س = ٧٤ – ١٤

٤س = ٦٠ (بقسمة الطرفين على العدد ٤) .

س = $\frac{٦٠}{٤}$ = ١٥

∴ عرض المستطيل = ١٥سم

طول المستطيل = ١٥ + ٧

= ٢٢ سم

التحقق : تحقق بنفسك من صحة الحل .

مثال (٢) اشترى عادل عدداً من اللعب لأطفاله بثمن إجمالي قدره ١٢٠٠ ريال فإذا خُفض ثمن اللُّعبة بمقدار ١٠ ريالات لزاد عدد اللعب التي اشتراها بمقدار ٤ لعب ، فأوجد ثمن اللَّعبة قبل التخفيض .

الحـــل :

نفرض أن ثمن اللعبة قبل التخفيض = س

، ثمن اللعبة بعد التخفيض = س − ١٠

∴ عدد اللُّعب قبل التخفيض = $\frac{١٢٠٠}{س}$

، عدد اللُّعب بعد التخفيض = $\frac{١٢٠٠}{س - ١٠}$

∵ عدد اللُّعب قبل التخفيض + ٤ = عدد اللُّعب بعد التخفيض

∴ $\frac{١٢٠٠}{س} + ٤ = \frac{١٢٠٠}{س - ١٠}$ (بتوحيد المقام للطرف الأيمن)

$\frac{١٢٠٠ + ٤س}{س} = \frac{١٢٠٠}{س - ١٠}$ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

(١٢٠٠ + ٤س) (س − ١٠) = ١٢٠٠س

١٢٠٠س − ١٢٠٠٠ + ٤س^٢ − ٤٠س = ١٢٠٠س (بطرح ١٢٠٠س من الطرفين

٤س^٢ − ٤٠ س − ١٢٠٠٠ = ٠

٤(س^٢ − ١٠ س − ٣٠٠٠) = ٠ (بقسمة الطرفين على العدد ٤)

س^٢ − ١٠ س − ٣٠٠٠ = ٠

(س − ٦٠) (س + ٥٠) = ٠

إِما س − ٦٠ = ٠ ∴ س = ٦٠

أو س + ٥٠ = ٠ ∴ س = −٥٠ مرفوض لماذا ؟

ثمن اللَّعبة قبل التخفيض = ٦٠ ريالاً .

التحقق : على الطالب التحقق من صحة الحل .

مثال (٣) في روضة أطفـال كان عدد البنات يزيد عن عدد الأولاد بمقدار ١٠ ؛ وإذا زاد عدد البنات واحدة سيكون عدد البنات ضعف عدد الأولاد ؛ فأوجد عدد كل من البنات والأولاد .

الحـــل :

نفرض أن عدد البنات = س

ونفرض أن عدد الأولاد = ص

∴ س − ص = ١٠   (١)

، س + ١ = ٢ص   (٢)   (بطرح ٢ص من الطرفين)

س + ١ − ٢ص = ٠   (بطرح ١ من الطرفين)

س − ٢ ص = −١   (٣)

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) ينتج :

(س − ص) − (س − ٢ص) = ١٠ − (−١)

س − ص − س + ٢ص = ١٠ + ١

ص = ١١

بالتعويض بقيمة ص في المعادلة (١) ينتج :

س − ١١ = ١٠   (بإضافة (١١) إلى الطرفين)

س = ١٠ + ١١

= ٢١

∴ عدد البنات = س = ٢١ بنتاً .

عدد الأولاد = ص = ١١ ولداً .

التحقق من الحل .

عدد البنات – عدد الأولاد = ٢١ – ١١ = ١٠

عدد البنات + ١ = ٢١ + ١ = ٢٢

ضعف عدد الأولاد = ٢ × ١١ = ٢٢

∴ عدد البنات + ١ = ضعف عدد الأولاد .

تماريـن ومسائـل

[١] إذا كان ثمن قلمين وأربع مساطر يساوي ١٠٠ ريال ، أوجد ثمن كل من المسطرة والقلم .

[٢] المثلث ا ب جـ فيه ق(∢ ا) = ٢٠° ، ق(∢ ب) يزيد عشرون درجة عن تسعة أمثال ق (∢ جـ) فاوجد قياس كلاً من : ∢ ب ، ∢ جـ .

[٣] قسمت قطعة حبل إلى قطعتين بحيث كان طول القطعة الأولى يزيد بمقدار ١٨ متراً عن طول القطعة الثانية ، وطول القطعة الأولى أيضاً يساوي ثلاثة أمثال طول القطعة الثانية ، فأوجد طول كل قطعة ، ثم أوجد طول القطعة الأصلية .

[٤] إذا كان قياس زاوية يساوي ثلاثة أمثال قياس مكملتها ، أوجد قياس هذه الزاوية .

[٥] عدد مكون من رقمين : « آحاد وعشرات »، مجموعهما ١٣ ، فإذا عُكس العدد كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٢٧ ، أوجد العدد الأصلي .

[٦] الفرق بين عددين يساوي ٧ وحاصل ضربهما يساوي ١٤٤ فما العدد الأصغر؟

[٧] مجموع عدد ومقلوبه يساوي $٢ \frac{١}{١٢}$ ، أوجد العدد .

[٨] مساحة مثلث تساوي ٢٤ سم^{٢} ، وارتفاعه يزيد بمقدار ٢سم عن قاعدته. أوجد طول القاعدة .

[٩] س = ٣ هو أحد حلول المعادلة : ٢س^{٢} + ب س = ١٥ أحسب قيمة ب ثم أوجد الحل الآخر .

[١٠] مجموع عددين يساوي ١٨ ومجموع مربعيهما يساوي ١٩٤ فما العددان؟

[١١] مزرعة بها مجموعة من الأغنام والدجاج ؛ فإذا كان عدد الرؤوس فيها يساوي ٤٥ رأساً بينما عدد الأرجل ١٥٠ رجلاً ؛ أوجد عدد كل من الأغنام والدجاج

[١٢] اذا كان عُمر رجل الآن يساوي ٣ أمثال عُمر ابنه . وقبل ٦ سنوات كان حاصل ضرب عمريهما يساوي ١٨٠ ، فما عمراهما الآن ؟

[١٣] عددان فرديان متتابعان ؛ مربع مجموعهما يزيد على مجموع مربعيهما بمقدار ١٢٦ ، فما العددان ؟

٣ : ٥ تمارين ومسائل عامة

مثّل بيانياً مجموعة حل كلٍ من المعادلات في التمارين من [١] إلى [٦].

[١] س + ص = ٥ [٢] ص − ٤س = ١٥

[٣] ٢ص + ٣س = −٦ [٤] ٨س + ص = ٠

[٥] $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٥} = ٠$ [٦] $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{١٠} = \frac{١}{٥}$.

[٧] إذا كان الزوج المرتب (−١ ، ل) يحقق المعادلة : ٢س − ل ص + ٣ = ٠

فما قيمة ل ؟

[٨] ما قيمة م التي تجعل النقطة هـ (٥ ، −٥) تحقق المعادلة ٧س + م ص = ٥

[٩] اكتب ٣ معادلات تكافيء المعادلة : س − ٢ص = ٣

[١٠] صِل كل معادلة من العمود الأيمن بمجموعة حلها من العمود الأيسر

في الجدول التالي :

س + ص = ٧	(٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣)
٣س + $\frac{ص}{٢}$ = ٥	(٢ ، ٥) ، (٤ ، ٤)
٢س − ٣ص = ٣	(١ ، ٤) ، (٢ ، −٢)
$\frac{س}{٢}$ + ص = ٦	(١ ، ٤) ، (٤ ، ١)
	(٣ ، ١) ، (٠ ، −١)

حل نظام المعادلات في التمارين من [١١] إلى [١٧] جبرياً وبيانياً وتحقق من صحة الحل .

[١١] س – ص = ٤ ، س + ص = ٢

[١٢] س + ٢ص = ١١ ، ٦س – ص = ١٤

[١٣] ٣س – ٤ص = ٥ ، ٢س + ٣ص = ٢٦

[١٤] ٢ص – س = ٠ ، س – ص = ١

[١٥] س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ١

[١٦] س – ٢ ص = ٧ ، $\frac{٢}{٣}$س + ص = ٠

[١٧] ٣$\frac{١}{٢}$س + ٢$\frac{١}{٢}$ص = ٢٠ ، ٠,٥ص – ٠,٥س = ١٠

حل كلاً من المعادلات في التمارين من [١٨] إلى [٢٩] وتحقق من صحة الحل :

[١٨] س^{٢} – ٦س – ٧ = ٠

[١٩] ٤س^{٢} + ٣س – ١ = ٠

[٢٠] ٧س^{٢} – ٢٥س + ٢٣ = ٠

[٢١] ٣م = ٥ – ٢ م^{٢}

[٢٢] ٢ س + $\frac{٣}{\text{س}}$ = ٧

[٢٣] $٨س\,(س - ٢) = ٣(٢س - ٥)$.

[٢٤] $\frac{٣س - ٨}{س - ٢} = \frac{٥س - ٨}{س + ٥}$.

[٢٥] $\frac{س^٢ - ١}{٢} - ٢س = ٢$.

[٢٦] $\frac{س^٢ - ٤}{٢} - \frac{٢س - ٣}{٤} = ٠$.

[٢٧] $٢\,(س + ١)^٢ - س = ٤$

[٢٨] $\frac{٥س - ٧}{س - ١} = ٣س + ٢$.

[٢٩] $\frac{٥}{١ - س} = \frac{٢\,س}{س^٢ - ١}$.

[٣٠] عددان طبيعيان متتاليان حاصل ضربهما يساوي ١٨٢ فما العددان؟

[٣١] ملعب للأطفال على شكل مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار خمسة أمتار فإذا كانت مساحة الملعب ١٥٠ متراً مربعاً ، فأوجد بُعديه .

[٣٢] مجموع عمري صفاء وبشار ٢٥ سنة ، ومنذ ثمان سنوات كان عمر صفاء ضعف عمر بشار ، فما عمر كلٌ منهما الآن؟

[٣٣] عددان موجبان مجموع مربعيهما يساوي ٣٤ ، فإذا كان الفرق بينهما يساوي اثنين، فما العددان؟

[٣٤] إذا كان مربع عمـــر ماهـــر الآن يزيد على ثلاثـة أمثال عمـره منـذ أربع سنوات بمقدار ١٩٢ فما عمره الآن ؟

[٣٥] النسبة بين عمري عماد وعبد الله (٥ : ٣) ومنذ سنتين كانت النسبة بين عمريهما (٧ : ٤) فما عمر كلٌ منهما الآن ؟

[٣٦] طول مستطيل يساوي ضعف طول ضلع مربع وطول ضلـع المربع يزيـد عن عرض المستطيل بمقدار ٥سم فإذا كانت مساحة المربع تساوي مساحة المستطيل ، فأوجد أبعاد المربع والمستطيل .

[٣٧] عددان مجموعهما ١١ ومجموع مقلوبيهما $\frac{١١}{٢٨}$ فما العددان ؟

[٣٨] اشترك مجموعـة من الطلبة في رحلة بلغــت تكاليفها (٩٠٠٠) ريالاً دفعها الطلبة فيما بينهم بالتساوي ، ولو زاد عدد الطلبة ستة لنقص اشتراك الطالب بمقدار ٥٠ ريالاً ، فكم كان عدد الطلبة الذين اشتركوا في الرحلة ؟

[٣٩] تكبّد العدو الصهيوني ١٨ آلية ومجنزرة فـي عمليـة جهاديـة لأبطـال فلسطين ولكن العدو صرح أن الخسارة خمس فقط ، وعنـدما سُئـل أحد المجاهدين عن السبب قال إن العدو قد احتسب $\frac{١}{٤}$ الآليات ، $\frac{١}{٣}$ المجنزرات . فما العدد الحقيقي لخسارة العدو ؟

[٤٠] قطعـة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٨٠ متـراً ، فإذا كـان ثلثا الطـول يزيد عن العرض بمقدار ٥ أمتار فما مساحتها ؟

٣ : ٦ اختبار الوحدة

[١] أ) أوجد خمسة حلول للمعادلة : $س - (\frac{ص}{٢} + ١) = ٠$

ب) حل المعادلة : $س + ٣ = \frac{٤}{س}$

[٢] حل نظام المعادلات التالية ، وتحقق من صحة الحل .

$س + ص = ١$ ، $س - (ص + ٣) = ٠$

[٣] حل نظام المعادلات التالية بيانياً ، وتحقق من صحة الحل .

$ن = م + ٣$ ، $٢ ن + م = ٠$

[٤] مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٤سم فإذا كانت مساحته تساوي ١٩٢سم^{٢}، أوجد بعدي المستطيل .

الوحـــدة الرابعـــة

حســـاب المثلثـــات

٤ : ١ العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية

تذكر أن « مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث » وتُعدُّ هذه المتباينة شرطاً أساسياً لرسم أي مثلث مهما كان نوعه .

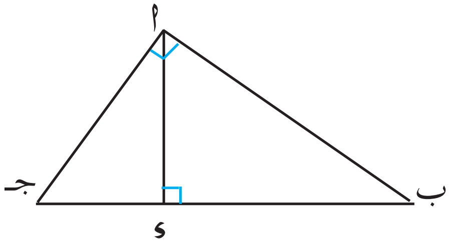
تدريب حدّد أياً من الثلاثيات التالية يمكن أن تشكل أطوال مثلث :

أ) ٢دسم ، ٣دسم ، ٤دسم ، ب) ١٢ سم ، ٦ سم ، ١٩ سم ،

جـ) ٤,٣ سم ، ٤,٧ سم ، ٩سم، ء) ١,٤ م ، ٤,٧ م ، ٢,٣ م .

– تأمل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

[انظر الشكل (٤–١)] .



شكل (٤ – ١)

– تُسمّى النقطة ء مسقط الرأس أ على الوتر ب جـ .

– القطعـــة المستقيمـــة ب ء تُسمّـــى مسقـــط الضلع أ ب على الوتر ب جـ .

– بالمثـــل تُسمّى القطعـــة المستقيمـــة ء جـ مسقـــط الضلع أ جـ على الوتر ب جـ .

توجد علاقات عددية في المثلث قائم الزاوية ، يمكننا أن نستنتجها ونبرهن عليها في المبرهنات التالية :

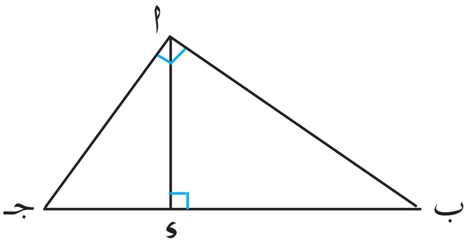
مبرهنة (١)

مربع ضلع قائم في مثلث يساوي حاصل ضرب الوتر في مسقط هذا الضلع على الوتر .

المعطيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية

في أ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب جـ}$.

[انظر الشكل (٤–٢)] .



شكل (٤ – ٢)

المطلوب : إثبات أن :

١) |أ ب|^2 = |ب جـ| × |ب ء|

٢) |أ جـ|^2 = |ب جـ| × |جـ ء|

البرهان :

١) $\Delta\Delta$ ب أ جـ ، ب ء أ

فيهما { ∡ ب مشتركة
ق (∡ ب أ جـ) = ق (∡ ب ء أ) (كل منهما قائمة)

يتشابه المثلثان وينتج من التشابه أن :

$$\frac{|أ ب|}{|ب جـ|} = \frac{|ب ء|}{|أ ب|}$$

ومنه |أ ب|^2 = |ب جـ| × |ب ء| .

٢) بالمثل يتشابه المثلثان جـ أ ب ، جـ ء أ ، وينتج أن :

|أ جـ|^2 = |ب جـ| × |جـ ء|

ملاحظة : في شكل (٤ – ٢) المثلثان ب أ ء ، أ جـ ء متشابهان (لماذا؟)

$$\frac{|أ ء|}{|ء جـ|} = \frac{|ب ء|}{|أ ء|}$$

ومنه $|أ ء|^{٢} = |ب ء| \times |ء جـ|$.

ومن ذلك نحصل على المبرهنه التالية :

مبرهنة (٢)

مربع الارتفاع في مثلث قائم يساوي حاصل ضرب جزأي الوتر المحددين بهذا الارتفاع .

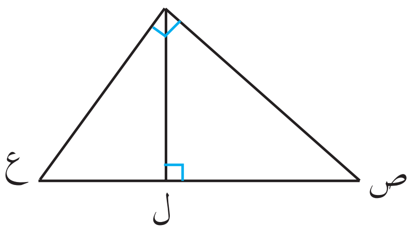
مثال (١) في الشكل (٤–٣) المثلث س ص ع قائم الزاوية في س ،

$\overline{س ل} \perp \overline{ص ع}$

إذا كان $|ص ع| = ٢٥$ سم ،

$|ص ل| = ١٦$ سم ، $|ل ع| = ٩$ سم

أوجد : $|س ص|$ ، $|س ل|$



شكل (٤ –٣)

الحـــل :

$\because \Delta$ س ص ع قائم في س ، $\overline{س ل} \perp \overline{ص ع}$

$\therefore |س ص|^{٢} = |ص ع| \times |ص ل|$ (مبرهنة ١)

$= ٢٥ \times ١٦$

$|س ص| = \sqrt{٢٥ \times ١٦} = ٥ \times ٤ = ٢٠$ سم

|س ل|^{2} = |ص ل| $\times$ |ل ع| (مبرهنة ٢)

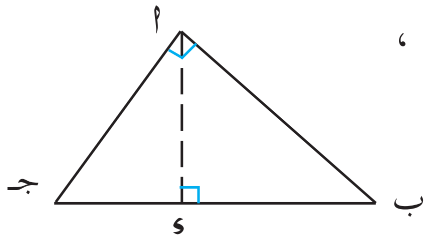
= ١٦ $\times$ ٩

$\therefore$ |س ل| = $\sqrt{١٦ \times ٩}$ = ٤ $\times$ ٣

= ١٢سم

مبرهنة (٣) (مبرهنة فيثاغورث)

> **في المثلث القائم الزاوية ، مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين .**



شكل (٤ – ٤)

المعطيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ،

شكل (٤ – ٤)

المطلوب : إِثبات أن :

|ب جـ|^{2} = |أ ب|^{2} + |أ جـ|^{2}

العمل : ننشىء $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان : $\measuredangle$ أ قائمة ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ |أ ب|^{2} = |ب جـ| $\times$ |ب ء| (١)

، |أ جـ|^{2} = |ب جـ| $\times$ |ء جـ| (٢)

} مبرهنة (١)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على

|أ ب|^{2} + |أ جـ|^{2} = |ب جـ| $\times$ |ب ء| + |ب جـ| $\times$ |ء جـ|

= |ب جـ| (|ب ء| + |ء جـ|)

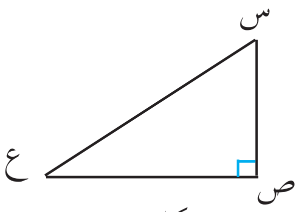
= |ب جـ| × |ب جـ| لماذا ؟

= |ب جـ|^{٢} وهو المطلوب .

مثال (٢) في الشكل (٤–٥) المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص ،

|س ص| = ٦سم ، |ص ع| = ٨سم .

أوجد |س ع|



شكل (٤ –٥)

الحــل:

∴ |س ع|^{٢} = |س ص|^{٢} + |ص ع|^{٢}

= ٦^{٢} + ٨^{٢}

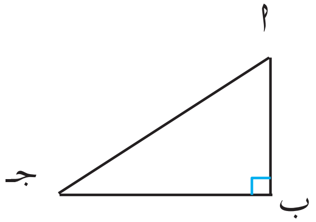
= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

|س ع| = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم .

مثال (٣) في الشكل (٤–٦) المثلث ا ب جـ قائم الزاوية في ب ،

|ا ب| = $\sqrt{٧}$ سم ، |ا جـ| = ٤سم .

أوجد |ب جـ| .



شكل (٤ –٦)

الحــل:

∵ |ا جـ|^{٢} = |ا ب|^{٢} + |ب جـ|^{٢}

١٦ = ٧ + |ب جـ|^{٢}

$\therefore$ $|ب جـ|^٢ = ١٦ - ٧ = ٩$

$|ب جـ| = \sqrt{٩} = ٣$سم .

نشــاط

– ارسم مثلث أطوال أضلاعه ٣سم ، ٤سم ، ٥سم .

– احسب مربعات أطوال أضلاعه . ماذا تلاحظ ؟

– باستخدام المنقلة أوجد قياس الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ٥سم .

ستلاحظ أن : $(٥)^٢ = (٤)^٢ + (٣)^٢$ ، قياس الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ٥سم هو ٩٠° .

من النشاط السابق نستنتج عكس المبرهنه (٣) :

عكس مبرهنة فيثاغورث :

في أي مثلث ، إذا كان مربع أحد أضلاعه يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية .

مثال (٤) الأعداد المعطاة فيما يلي تمثل أطوال أضلاع مثلث . بيّن أياً من هذه المثلثات قائم الزاوية ؟

أ) ٨ ، ١٥ ، ١٧ ب) ٣ ، ٥ ، ٦ جـ) $\sqrt{١٣}$ ، ٦ ، ٧ .

الحـل :

أ) مربعات أطوال الأضلاع هي ٦٤ ، ٢٢٥ ، ٢٨٩ :

$\because$ ٢٨٩ = ٦٤ + ٢٢٥ ، أي أن $(١٧)^٢ = (١٥)^٢ + (٨)^٢$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية .

ب) مربعات أطوال الأضلاع هي ٩ ، ٢٥ ، ٣٦ :

، ∵ ٣٦ ≠ ٢٥ + ٩

∴ المثلث ليس قائم الزاوية .

جـ) مربعات أطوال الأضلاع هي ١٣ ، ٣٦ ، ٤٩ :

، ∵ ٤٩ = ٣٦ + ١٣ إي أن $(٧)^٢ = (٦)^٢ + (\sqrt{١٣})^٢$

∴ المثلث قائم الزاوية .

تدريب ارسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٢}$ سم .

مثال (٥) بيّن أن : ٣ ، ٤ ، ٥ هي أطوال أضلاع مثلث قائم ، ثم أثبت أن ٣س ، ٤س ، ٥س هي أيضاً أطوال أضلاع مثلث قائم ، حيث س ∈ $ح^+$ (الأعداد الحقيقية الموجبة) .

الحل: ∵ $(٥)^٢ = (٤)^٢ + (٣)^٢$.

∴ ٣ ، ٤ ، ٥ هي أطوال أضلاع مثلث قائم .

∵ س ∈ $ح^+$ ، فإن ٣س ، ٤س ، ٥س هي أطوال أضلاع مثلث.

$(٣س)^٢ + (٤س)^٢ = ٩س^٢ + ١٦س^٢$

$= (٩ + ١٦)س^٢$

$= ٢٥س^٢$

$= (٥س)^٢$

وبحسب عكس نظرية فيثاغورث ، نجد أن ٣س ، ٤س ، ٥س هي أطوال أضلاع مثلث قائم .

تمارين ومسائل

[١] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا . في كلٍ من الحالات التالية معطى طولي ضلعين من المثلث ، أوجد طول الضلع الثالث :

ا) |ا ب| = ٣سم ، |ا جـ| = ٤سم ،

ب) |ا ب| = ٨سم ، |ب جـ| = ١٠سم ،

جـ) |ا جـ| = ٦,٥سم ، |ب جـ| = ٩,٥سم ،

[٢] أي من الثلاثيات الطولية التالية تمثل أضلاع مثلث قائم الزاوية :

ا) ٦سم ، ٦سم ، ٦سم ، ب) ٣سم ، ٤سم ، ٥سم ،

جـ) ٥سم ، ٥سم ، ٥,٧سم ، ء) ٦سم ، ٣سم ، ٣$\sqrt{3}$ سم .

هـ) ٣سم ، ٥سم ، ٧سم .

[٣] المثلث ا ب جـ قائم في جـ ، $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، فيه :

ا) |ب ء| = ٤سم ، |ا ب| = ١٦سم ، احسب |جـ ب| .

ب) |جـ ء| = ١٠سم ، |ب ء| = ٥سم ، احسب | ا ء | .

جـ) |ب ء| = ٦سم ، | ا ء | = ٨سم ، احسب |ب جـ| .

ء) |ا ب| = ١٨سم ، |ء ب| = ١٢سم ، احسب |ا جـ| .

[٤] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$. إذا كان |ا ب| = ٣سم، |ب ء| = ١,٨سم ، أوجد كلاً من |ب جـ| ، |جـ ء| ، |ا جـ| ، |ا ء| .

[٥] س ، ص ، ع هي أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ، مقاسه بالوحدة نفسها،

إذا كان ع هو أكبر الأضلاع ، أثبت أن حاصل ضرب هذه الأطوال بأي عدد موجب هي أيضاً أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية .

[٦] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ومتساوي الساقين ، فيه $|\text{أب}| = |\text{أجـ}| = \text{س}$

أوجد بدلالة س طول الوتر في هذا المثلث .

[٧] مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ل . أحسب ارتفاعه بدلالة ل .

[٨] أ ب جـ مثلث حاد الزاوية ، $|\text{أب}| < |\text{أجـ}|$ ، $\overline{\text{أء}}$ أحد ارتفاعاته ، النقطة ن منتصف $\overline{\text{بجـ}}$.

أ) أثبت أن : $|\text{أب}|^2 - |\text{أجـ}|^2 = |\text{ءب}|^2 - |\text{ءجـ}|^2$.

ب) أثبت أن : $|\text{ءب}| - |\text{ءجـ}| = 2\,|\text{نء}|$.

جـ) أثبت أن : $|\text{أب}|^2 - |\text{أجـ}|^2 = 2 \times |\text{نء}| \times |\text{بجـ}|$.

٤ : ٢ النسب المثلثية للزاوية الحادة

في الشكل (٤ – ٧) :

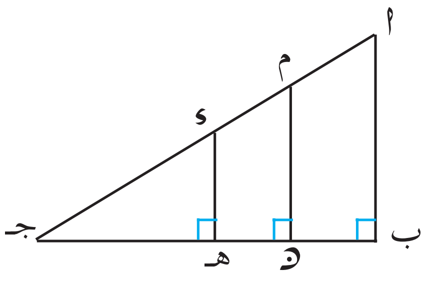
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

أنشأنا العمودين ء هـ ، م د على الضلع ب جـ .

المثلثان أ ب جـ ، ء هـ جـ متشابهان

لماذا ؟

ونتيجة لهذا التشابه ، نحصل على :



شكل (٤ – ٧)

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{ء جـ}|} \;\ldots\ldots (1) \text{ ،}$$

كذلك نجد من تشابه المثلثين أ ب جـ ، م ن جـ أن :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{م ن}|}{|\text{م جـ}|} \;\ldots\ldots (2) \text{ ،}$$

من (١) ، (٢) نحصل على :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \frac{|\text{م ن}|}{|\text{م جـ}|} .$$

وبالمثل يمكن ان نحصل على :

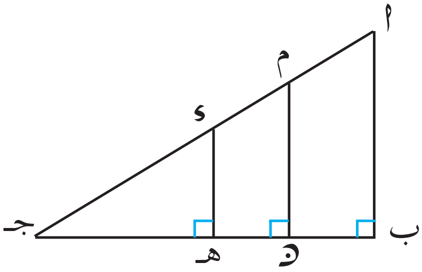
$$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{هـ جـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \frac{|\text{ن جـ}|}{|\text{م جـ}|} .$$

وأيضاً : $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{هـ جـ}|} = \frac{|\text{م ن}|}{|\text{ن جـ}|} .$

تلاحظ مما سبق أن جميع النسب متشابهة في كل حالة ، أي أن هذه النسب ثابتة لاتتغير .

في المثلث القائم أ ب جـ (شكل ٤ – ٧) ، نسمي $\overline{\text{أ ب}}$ الضلع المقابل للزاوية جـ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ الضلع المجاور للزاوية جـ . بالمثل يُسمّى $\overline{\text{ب جـ}}$ الضلع المقابل للزاوية أ ، $\overline{\text{أ ب}}$ الضلع المجاور للزاوية أ .

جيب الزاوية :



شكل (٤ – ٨)

في الشكل (٤ – ٨) لاحظ من تشابه المثلثات : أ ب جـ ، ء هـ جـ ، م د جـ ، أن :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \frac{|\text{م د}|}{|\text{م جـ}|} \text{ ،}$$

وهذا يعني أن نسبة طول الضلع المقابل للزاوية جـ في مثلث قائم الزاوية إلى طول الوتر في المثلث نفسه هو نسبة ثابتة .

نسمي هذه النسبة جيب الزاوية جـ .

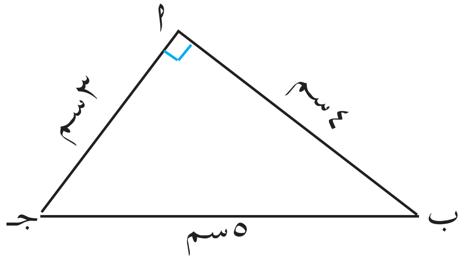
جيب الزاوية الحادة جـ في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول وتر المثلث ، ونرمز له بالرمز « جا جـ » .

لاحظ في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب أن :

$$\text{جا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|} \text{ ، } \text{جا أ} = \frac{\ldots\ldots}{\text{الوتر}} = \frac{\ldots\ldots}{|\text{أ جـ}|} \text{ (اكمل)}$$

مثال (١) من الشكل (٤ – ٩) :

أوجد كلاً من جا ب ، جا جـ



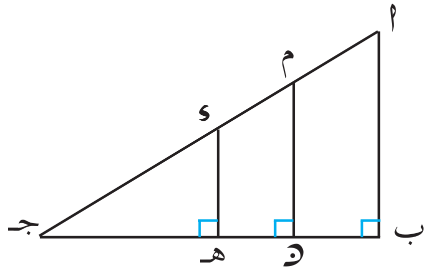
شكل (٤ – ٩)

الحــل :

$$\text{جا ب} = \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{٣}{٥} \ .$$

$$\text{جا جـ} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{٤}{٥} \ .$$

جيب تمام الزاوية :



شكل (٤ – ١٠)

في الشكل (٤–١٠) تلاحظ من

تشابه المثلثات : أ ب جـ ، ء هـ جـ، م ن جـ ، أن :

$$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{هـ جـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \frac{|\text{ن جـ}|}{|\text{م جـ}|} \ .$$

وهذا يعني أن نسبة طول الضلع المجاور للزاوية جـ في مثلث قائم الزاوية إلى طول الوتر في المثلث نفسه هو نسبة ثابتة .

نسمي هذه النسبة جيب تمام الزاوية جـ .

جيب تمام الزاوية الحادة جـ في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور للزاوية إلى طول وتر المثلث ، ونرمز له بالرمز « جتا جـ »

لاحظ في المثلث ٲ ب جـ القائم الزاوية في ب ، أن :

$$\text{جتا } ٲ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{|ٲ\ ب|}{|ٲ\ جـ|} \text{ ، جتا جـ} = \frac{\text{المجاور}}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{|ٲ\ جـ|} \text{ (أكمل)}$$

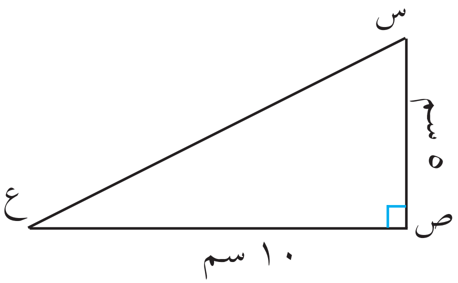
مثال (٢) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، فيه | س ص | = ٥سم، | ص ع | = ١٠سم ، أوجد كلاً من جتا س ، جتا ع

الحـــل:

انظر الشكل (٤ – ١١) تجد أن :

$$\text{جتا س} = \frac{|\text{س ص}|}{|\text{س ع}|} = \frac{٥}{|\text{س ع}|} \text{ ،}$$

$$\text{جتا ع} = \frac{|\text{ص ع}|}{|\text{س ع}|} = \frac{١٠}{|\text{س ع}|} \text{ .}$$



شكل (٤ – ١١)

ولإيجاد | س ع | نستخدم نظرية فيثاغورث .

$$|\text{س ع}|^٢ = |\text{س ص}|^٢ + |\text{ص ع}|^٢$$

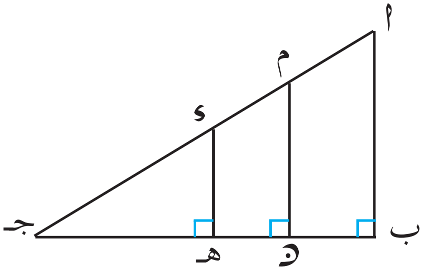
$$|\text{س ع}|^٢ = (٥)^٢ + (١٠)^٢ = ٢٥ + ١٠٠ = ١٢٥$$

$$\therefore |\text{س ع}| = \sqrt{١٢٥} = ٥\sqrt{٥} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{جتا س} = \frac{٥}{٥\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$$

$$\text{جتا ع} = \frac{١٠}{٥\sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$$

ظل الزاوية :



شكل (٤ – ١٢)

في الشكل (٤–١٢) تلاحظ تشابه

المثلثات : أ ب جـ ، ء هـ جـ، م ډ جـ

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{هـ جـ}|} = \frac{|\text{م ډ}|}{|\text{ډ جـ}|}$$

وهذا يعني أن نسبة طول الضلع المقابل للزاوية جـ في مثلث قائم الزاوية

إلى طول الضلع المجاور للزاوية جـ هي نسبة ثابتة .

نسمي هذه النسبة ظل الزاوية جـ .

> **ظل الزاوية الحادة جـ في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الضلع المجاور لها ونرمز له بالرمز « ظا جـ » .**

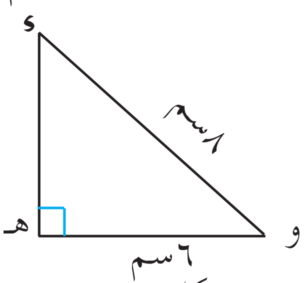
تسمى النسب جا جـ ، جتا جـ ، ظا جـ ، النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة جـ.

لاحظ في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، أن :

$$\text{ظا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} \text{، ظا أ} = \frac{....}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{....} \quad \text{(اكمل)}$$

مثال (٣) ء هـ و مثلث قائم الزاوية في هـ ، فيه | و هـ | = ٦سم ،

| ء و | = ٨سم ، أوجد ظا و .



شكل (٤ –١٣)

الحـــل :

نلاحظ في الشكل (٤ –١٣) أن :

ظا و $= \frac{|ء هـ|}{|و هـ|} = \frac{|ء هـ|}{٦}$ ، لإيجاد $|ء هـ|$ نستخدم نظرية فيثاغورث

$|ء و|^٢ = |ء هـ|^٢ + |و هـ|^٢$

$(٨)^٢ = |ء هـ|^٢ + (٦)^٢$

$٦٤ = |ء هـ|^٢ + ٣٦$

$\therefore |ء هـ|^٢ = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨$

ومنه $|ء هـ| = \sqrt{٢٨} = ٢\sqrt{٧}$ سم .

$\therefore$ ظا و $= \frac{٢\sqrt{٧}}{٦} = \frac{\sqrt{٧}}{٣}$

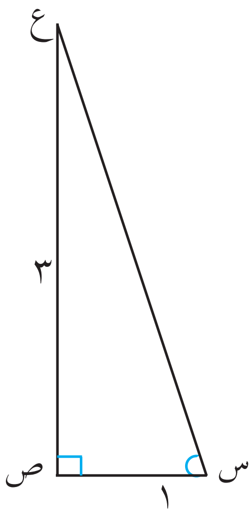
مثال (٤) إذا كان ظا س = ٣ ، حيث س زاوية حادة ، أوجد كلاً من:

جاس ، جتاس .

الحــل:

نرسم مثلثاً قائم الزاوية [كما في الشكل (٤–١٤)] بحيث تكون الزاوية س إحدى زواياه ، ويكون

$\frac{\text{طول الضلع المقابل لها}}{\text{طول الضلع المجاور لها}} = \frac{٣}{١}$



شكل (٤ –١٤)

لإِيجاد | ع س | نستخدم نظرية فيثاغورث :

$$|\text{ع س}|^{٢} = |\text{س ص}|^{٢} + |\text{ع ص}|^{٢}$$

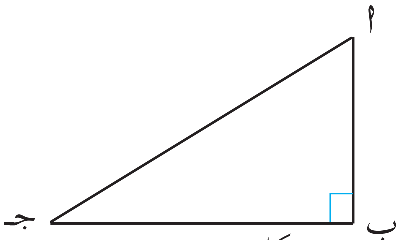
$$|\text{ع س}|^{٢} = ٩ + ١ = ١٠ \quad \text{ومنه} \quad |\text{ع س}| = \sqrt{١٠}$$

$$\therefore \ \text{جا س} = \frac{|\text{ع ص}|}{|\text{ع س}|} = \frac{٣}{\sqrt{١٠}} \quad ، \quad \text{جتا س} = \frac{|\text{س ص}|}{|\text{ع س}|} = \frac{١}{\sqrt{١٠}} \ .$$

العلاقات بين النسب المثلثية :

في الشكل (٤–١٥) : أ ب جـ

مثلث قائم الزاوية في ب .



شكل (٤ –١٥)

$$\therefore \ \text{جا جـ} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|}$$ ، وبالتربيع نجد :

$$(\text{جا جـ})^{٢} = \frac{|\text{أ ب}|^{٢}}{|\text{أ جـ}|^{٢}} \quad \ldots (١)$$

وكذلك $$\text{جتا جـ} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|}$$ ، وبالتربيع نجد :

$$(\text{جتا جـ})^{٢} = \frac{|\text{ب جـ}|^{٢}}{|\text{أ جـ}|^{٢}} \quad \ldots (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) نجد :

$$(\text{جا جـ})^{٢} + (\text{جتا جـ})^{٢} = \frac{|\text{أ ب}|^{٢}}{|\text{أ جـ}|^{٢}} + \frac{|\text{ب جـ}|^{٢}}{|\text{أ جـ}|^{٢}} \ .$$

$$(\text{جا جـ})^2+(\text{جتا جـ})^2=\frac{|\text{أب}|^2+|\text{ب جـ}|^2}{|\text{أجـ}|^2}=\frac{|\text{أجـ}|^2}{|\text{أجـ}|^2}=١ \quad (\text{لماذا؟}).$$

$$\boxed{\text{جا}^2\text{جـ}+\text{جتا}^2\text{جـ}=١}$$

ونكتب عادة : $(\text{جا جـ})^2$ على الشكل $\text{جا}^2\text{جـ}$ ، وكذلك نكتب $(\text{جتاجـ})^2$ على الشكل $\text{جتا}^2\text{جـ}$.

$$\because \text{جا جـ}=\frac{|\text{أب}|}{|\text{أجـ}|} \quad ، \quad \text{جتا جـ}=\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أجـ}|} .$$

$$\therefore \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}=\frac{\frac{|\text{أب}|}{|\text{أجـ}|}}{\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أجـ}|}}=\frac{|\text{أب}|}{|\cancel{\text{أجـ}}|}\times\frac{|\cancel{\text{أجـ}}|}{|\text{ب جـ}|} .$$

$$\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}=\frac{|\text{أب}|}{|\text{ب جـ}|}=\text{ظا جـ} .$$

$$\boxed{\text{ظاجـ}=\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}$$

مثال (٥) إذا كان جتا هـ $=٠,٨$ حيث هـ زاوية حادة . فأوجد جاهـ ،

ثم استنتج ظاهـ .

الحـل :

جا^{٢} هـ + جتا^{٢}هـ = ١

جا^{٢} هـ + (٠,٨)^{٢} = ١

جا^{٢} هـ + ٠,٦٤ = ١ ∴ جا^{٢} هـ = ١ – ٠,٦٤ = ٠,٣٦ .

ومنه جا هـ = ٠,٦ [لاحظ أننا أهملنا القيمة (–٠,٦) لأن هـ زاوية حادة ، ٠ > جا هـ > ١] .

ولايجاد ظاهـ . نستخدم العلاقة :

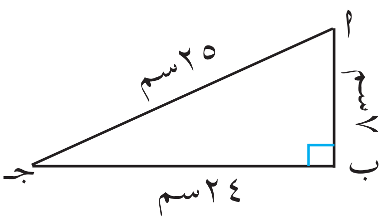
$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$$

$$\therefore \text{ظاهـ} = \frac{٠,٦}{٠,٨} = \frac{٣}{٤} \,.$$

تماريـن ومسائـل

[١] من الشكل (٤ –١٦) أوجد كلاً من :

جا جـ ، جتا جـ ، ظا جـ .



شكل (٤ –١٦)

[٢] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، فيه |ا ب| = ١٥ سم ، |ا جـ| = ١٢ سم ،
|ب جـ| = ٩ سم أوجد كلاً من : جا ا ، جتا ا ، ظا ا .

[٣] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه |س ص| = ٤ سم ، |ص ع| = ٢ سم
أوجد كلاً من جا س ، جتاس ، ظاس .

[٤] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا ، فيه |ب جـ| = ٨ سم ، |ا ب| = ٦ سم .
أوجد كلاً من : جاب ، جتاب ، ظاب .

[٥] ء هـ و مثلث قائم الزاوية في هـ ، فيه |هـ و| = ٣ √٣ ، |ء و| = ٦ سم . أوجد :
ا) النسب المثلثية الأساسية للزاوية و .
ب) النسب المثلثية الأساسية للزاوية ء .

[٦] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه |ا جـ| = ١٢ سم ، فإذا كان
جا ا = $\frac{٣}{٤}$ ، أوجد كلاً من |ب جـ| ، |ا ب| .

[٧] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه |ب جـ| = ١٥ سم ، فإذا كان
جتا جـ = $\frac{٥}{٦}$ ، أوجد كلاً من |ا جـ| ، |ا ب| .

[٨] ا ب جـ مثلث متســاوي الساقين ، فيه |ا ب| = |ا جـ| = ٧ سم ،
|ب جـ| = ٦ سم ، نصفت زاوية ا بالمستقيم ا ء بحيث يلاقي $\overline{\text{ب جـ}}$
في ء . أوجد كلاً من جا (ب ا ء) ، ظا (ا جـ ء) .

[٩] ا ب جـ ء مستطيل ، فيه |ا ء| = ٢٠ سم ، |ء جـ| = ١٥ سم . أوجد
جا (ب ا جـ) .

[١٠] إذا كان جا جـ = $\frac{١}{٥}$ ، حيث جـ زاوية حادة ، أوجد كلاً من جتا جـ ، ظاجـ .

[١١] إذا كان ظا س = $\frac{٧}{٣}$ ، حيث س زاوية حادة . أوجد كلاً من : جا س ، جتا س .

[١٢] ٱ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فإذا كان جتا ٱ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، أوجد كلاً من جا ٱ ، ظا ٱ .

[١٣] إذا كان جتا س = ٠,٤ حيث س زاوية حادة . أوجد كلاً من جاس ، ظا س .

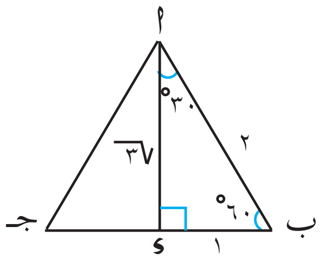
[١٤] إذا كان جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٥}٢}$ ، ٠ < هـ < °٩٠ ، أوجد قيمة $\frac{١}{ظا^٢ هـ}$.

[١٥] إذا كان جاس = ٢ جتاس حيث س زاوية حادة ، أوجد كلاً من ظاس ، جاس ، جتاس .

٤ : ٣ النسب المثلثية للزوايا : °٣٠ ، °٦٠ ، °٤٥

(١) النسب المثلثية للزاويتين °٣٠ ، °٦٠ ،

يمثل الشكل (٤–١٧) مثلثاً متساوي الأضلاع طول كل ضلع فيه وحدتا طول . أنشأنا من الرأس ٱ عموداً على القاعدة ب جـ .



شكل (٤ –١٧)

بما أن زوايا المثلث المتساوي الأضلاع متساوية، فقياس كل منها $60°$.

وتكون زوايا المثلث ا ب ء على التوالي : $30°$ ، $60°$ ، $90°$.

$$|ب ء| = \frac{|ا ب|}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

لإيجاد |ا ء| نستخدم نظرية فيثاغورث :

$$|ا ب|^2 = |ا ء|^2 + |ب ء|^2$$

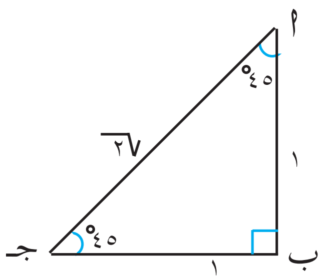
$$4 = |ا ء|^2 + 1$$

$\therefore$ $|ا ء|^2 = 4 - 1 = 3$ ومنه $|ا ء| = \sqrt{3}$

جا $30° = \frac{1}{2}$	، جا $60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
جتا $30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	، جتا $60° = \frac{1}{2}$
ظا $30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	، ظا $60° = \sqrt{3}$

(٢) النسب المثلثية للزاوية $45°$.

يمثل الشكل (٤ –١٨) مثلثاً متساوي الساقين وقائم الزاوية في ب طول كل من ضلعي القائمة وحدة طول واحدة .



شكل (٤ –١٨)

لاحظ أن : ق ($\measuredangle$ ا) = ق ($\measuredangle$ جـ) = $45°$

|ا جـ| = $\sqrt{2}$ (لماذا ؟)

$$جا ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$جتا ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$ظا ٤٥^\circ = ١$$

مثال (١) أوجد قيمة كلٍ مما يلي :

أ) جا ٦٠° + ٥ جتا ٣٠° .   ب) ٤ جا ٣٠° − ٣ ظا ٤٥° .

الحـــل :

أ) جا ٦٠° + ٥ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} + (٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{٦\sqrt{٣}}{٢} = ٣\sqrt{٣}$.

ب) ٤ جا ٣٠° − ٣ ظا ٤٥° = $٤ \times \frac{١}{٢} - (٣ \times ١) = ٢ - ٣ = -١$

مثال (٢) أثبت أن : ١ + ظا^٢ ٦٠° = $\frac{١}{جتا^٢ ٦٠^\circ}$.

البرهان :

الطرف الأيمن = ١ + ظا^٢ ٦٠° = $١ + (\sqrt{٣})^٢ = ١ + ٣ = ٤$ ← (١)

الطرف الايسر = $\frac{١}{جتا^٢ ٦٠^\circ} = \frac{١}{(\frac{١}{٢})^٢} = \frac{١}{\frac{١}{٤}} = ٤$ ← (٢)

بمقارنة المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على :

١ + ظا^٢ ٦٠° = $\frac{١}{جتا^٢ ٦٠^\circ}$ وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) ٩ جتا ٤٥ جا ٤٥ ، ب) جا °٣٠ جتا °٦٠ – جتا °٣٠ جا °٦٠ ،

جـ) ٣ظا^{٢}°٣٠ + جا°٣٠ ، ء) جتا^{٢} °٦٠ – جا^{٢} °٦٠ ،

هـ) $\dfrac{\text{١ – ظا}^{٢}\text{°٦٠}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{°٤٥}}$.

[٢] أثبت أن : $\dfrac{\text{١}}{\text{١ + جا°٣٠}} + \dfrac{\text{١}}{\text{١ – جا°٣٠}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{°٣٠}}$.

[٣] أثبت أن : ظا°٦٠ جا°٦٠ + جتا°٦٠ = ٢ جا°٣٠ + ظا °٤٥ .

[٤] أثبت أن : جتا°٦٠ = ١ – ٢ جا^{٢} °٣٠ .

[٥] أثبت أن : جا ٢س = $\dfrac{\text{٢ ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}$ ، حيث ق (∡ س) = °٣٠ .

٤ : ٤ تمارين عامة ومسائل

[١] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، فإذا كان | أ جـ | = ١٥سم ، | أ ء | = ٣سم ، أوجد | ب ء | ، | أ ب | .

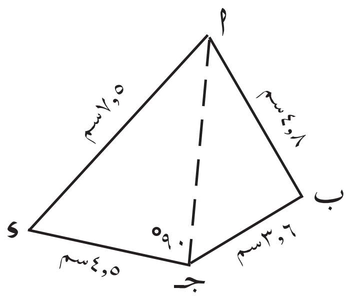
[٢] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص . أخذت أطوال أضلاعه القيم الموضوحة في الجدول . أكمل الجدول ، ثم قارن النتائج التي حصلت عليها في العمودين الآخرين . ماذا تلاحظ ؟

|س ص|	|ص ع|	|س ع|	|س ص|² + |ص ع|²	|س ع|²
٥	١٢	١٣	٢٥ + ١٤٤ = ١٩٦	١٦٩
٨	١٥	١٧		
٧	٢٤	٢٥		
١٢	١٦	٢٠		
٤	٧,٥	٨,٥		

[٣] الشكل (٤–١٩) يمثل شكلاً رباعياً .

أ) بين أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب.

ب) أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء .



شكل (٤–١٩)

[٤] س ص ع مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٢٤سم وارتفاعه ٥سم .

أحسب طول كلٍ من ساقيه .

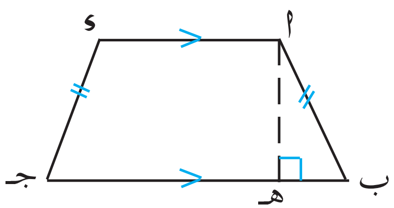
[٥] في الشكل (٤–٢٠)،

أ ب جـ ء شبه منحرف فيه

|أ ب| = |ء جـ| = ١٠سم ،

|ب جـ| = ٢١سم ، |أ هـ| = ٨سم

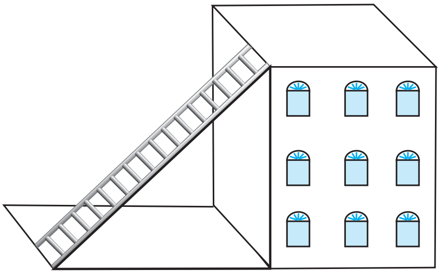
فأوجد كلاً من |ب هـ|، |أ جـ|، |أ ء| .



شكل (٤–٢٠)

[٦] على الشكل (٤ – ٢١) .

أوجد ارتفاع طرف السَّلم الملامس للحائط عن سطح الأرض ، علماً بأن طول السُّلم ١٠ أمتار وأن طرفه الآخر يبعد عن الحائط بمقدار ٣ أمتار .



شكل (٤ – ٢١)

[٧]حديقة أطفال مستطيلة الشكل طولها ٣٠ متراً ، وعرضها ١٦متراً .

أوجد طول قطرها .

[٨] د هـ و مثلث قائم الزاوية في هـ ، فيه د هـ = ٢٤سم ، ء و = ٣٠سم .

أوجد : ﺃ) النسب المثلثية الأساسية للزاوية و .

ب) النسب المثلثية الأساسية للزاوية ء .

[٩] مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩سم وطول أحد ضلعيه القائمين ٦سم .

ﺃ) أوجد النسب المثلثية الأساسية لزاويته الحادة الكبرى .

ب) أوجد النسب المثلثية الأساسية لزاويته الحادة الصغرى .

جـ) ما العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين الحادتين الكبرى والصغرى ؟

[١٠] ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ﺃ ، $\overline{\text{ﺃ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، فإذا كان

|ﺃ ب| = ٣سم ، |ء جـ| = ٣,٢سم ، أوجد :

ﺃ) جتا (ﺃ ب ء) ، ب) جا (ﺃ ب ء)

جـ) ظا (ﺃ ب ء) .

[١١] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، فيه |س ع| = ١٤سم ، فإذا كان جا ع = $\frac{٢}{٧}$ ، أوجد : |س ص| ، |ص ع| .

[١٢] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فإذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٨}$ ، أوجد كلاً من : جا أ ، ظا جـ .

[١٣] إذا كان جا ص = $\frac{١٢}{١٣}$ ، حيث ص زاوية حادة ، أوجد كلاً من جتا ص ، ظا ص .

[١٤] إذا علمت أن : ٠ < س < ٩٠° ، وأن جا س = $\frac{١}{٤}$ أوجد كلاً من جتا س ، ظا س .

[١٥] إذا كان جتا س = ٠,١ ، ٠ < س < ٩٠° ، أوجد كلاً من : جا س ، ظا س .

[١٦] إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، حيث أ زاوية حادة ، أوجد جا أ ، جتا أ .

[١٧] أ ب جـ مثلث متساوي الساقين ، فيه |أ ب| = |أ جـ| ، فإذا كان جا جـ = $\frac{٤\sqrt{٣}}{٧}$ ، فأثبت أن : $\frac{|ب جـ|}{|أ جـ|} = \frac{٢}{٧}$.

[١٨] أ ب جـ ء شبه منحرف ، فيه |أ ب| = |ء جـ| ، $\overline{أء} // \overline{ب جـ}$ ، فإذا كان |أ ب| = ١٠سم وارتفاعه ٢$\sqrt{١١}$ سم ، أوجد كلاً من: جتا ب ، ظا أ .

[١٩] إذا كان ظا هـ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢١}}$ ، حيث هـ زاوية حادة ، اثبت أن :

$$١ + ظا^٢ هـ = \frac{١}{جتا^٢ هـ}$$.

[٢٠] إذا كان : ٢ ظا هـ = ٣ جا هـ ، حيث هـ زاوية حادة ، أوجد كلاً

من ظاهـ ، جاهـ .

[٢١] أوجد قيمة كل من :

أ) جتا °٦٠ – جا^٢ °٤٥ .

ب) ٢ جا^٢ °٣٠ + ٢ جتا^٢ °٣٠ – $\frac{١}{٣}$ ظا^٢ °٦٠ .

جـ) (١ + ظا^٢ °٣٠) (جا^٣ °٦٠ – ظا °٦٠) .

ء) $\frac{جتا °٦٠}{١ - ٢ جتا^٢ °٣٠}$ + ٢ ظا °٤٥ .

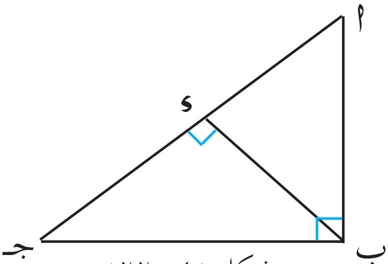
[٢٢] اثبت أن : $\left(\frac{١}{جا°٦٠} + \frac{١}{ظا°٦٠} \right)^٢ = \frac{١ + جتا°٦٠}{١ - جتا°٦٠}$.

[٢٣] اثبت أن : جا^٣ هـ + جاهـ جتا^٢ هـ = جا هـ .

[٢٤] اثبت أن : (جاس + جتاس)^٢ + (جاس – جتاس)^٢ = ٢ .

٤ : ٥ اختبـــار الوحـــدة

[١] في الشكل (٤ – ٢٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ،
أوجـد | ب ء | ، | ب جـ | ، إذا كان
| أ ب | = $\sqrt{٣٠}$ سم ، | أ ء | = ٣سم ،
| جـ ء | = ٧سم .



شكل (٤ – ٢٢)

[٢] اثبت أن الأعداد : ١ ، ٢ ، $\sqrt{٥}$ تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية .

[٣] س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، فيه | س ص | = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم ،
| ص ع | = ١٤سم ، أوجد كلاً من : جا ع ، جتا ع ، ظا ع .

[٤] إذا كان ظا هـ = $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$ ، حيث هـ زاوية حادة . أوجد كلاً من :
جا هـ ، جتا هـ .

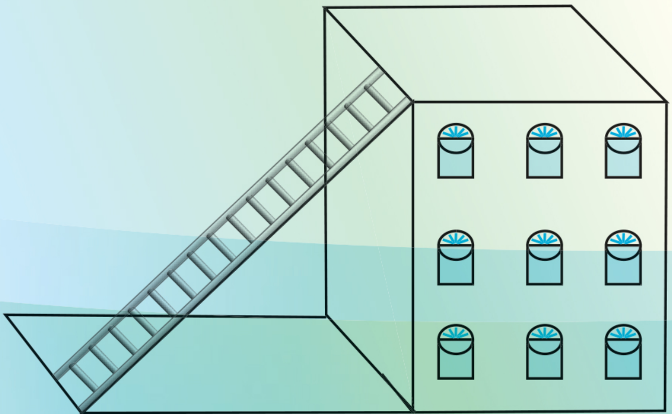
[٥] أ) احسب قيمة : $\frac{\text{ظا}^{٢}\,٦٠^\circ - ٢\ \text{جتا}\ ٦٠^\circ}{١ + \text{ظا}\ ٤٥^\circ}$.

ب) اثبت أن : (جا ٣٠° + جتا ٣٠°)^{٢} = ١ + جا ٦٠° .

بحمد الله تعالى

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net



الجمهورية اليمنية
المؤسسة العامة لمطابع الكتاب المدرسي