الباب الثالث

التفاضل

مخرجات التعلم :

بالانتهاء من دراسة هذا الباب يتوقع أن يكون الطالب قادرا على أن:

- يُعرف تفاضل الدالة و يحسب المشتقة الأولى والمشتقات من رتب أعلى.
- يذكر ويطبق قاعدة السلسلة.
- يذكر قواعد اشتقاق الدوال المثلثية واللوغاريتمية والأسية.
- يُطبق قواعد اشتقاق الدوال المثلثية واللوغاريتمية والأسية.
- يُعرف الصور غير المحددة و قواعد لو بيتال.
- يُطبق قواعد لو بيتال في حساب النهايات.
- يُعرف و يوجد التقريب الخطي للدوال غير الخطية.

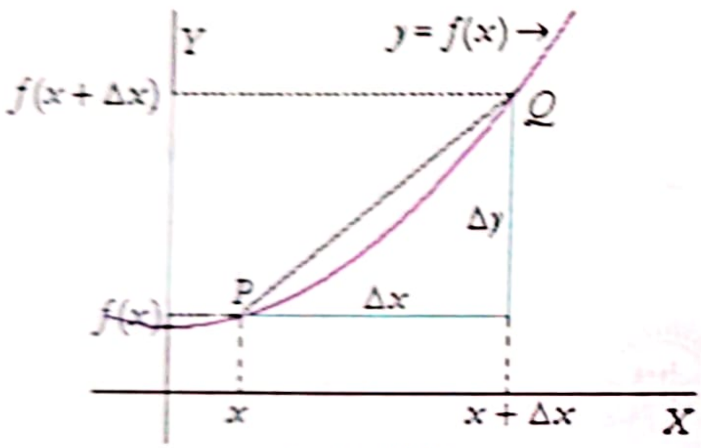
حساب التفاضل ويسمى أيضاً الاشتقاق (Differential Calculus) هو أحد فروع الرياضيات يندرج تحت حساب التفاضل والتكامل (Calculus)، يختص بدراسة معدل تغير دالة ما (ولتكن $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير المستقل x. أول المسائل التي يعنى هذا الفرع الرياضي بدراستها هو الاشتقاق. مشتقة الدالة $y=f(x)$ عند نقطة ما تصف السلوك الرياضي والهندسي للدالة عند هذه النقطة أو عند النقاط القريبة جدًا منها، والمشتقة الأولى للدالة عند نقطة معينة تساوي قيمة ميل المماس للدالة عند هذه النقطة، وبصفة عامة فإن المشتقة الأولى للدالة عند نقطة معينة تمثل أفضل "تقريب خطي" للدالة عند هذه النقطة.

للتفاضل تطبيقات متعددة، ففي الفيزياء مثلا: المعدل الزمني للتغير في إزاحة جسم متحرك هي سرعة الجسم والمعدل الزمني للتغير في الإزاحة هو تفاضلها بالنسبة للزمن، أما تفاضل السرعة بالنسبة للزمن فيعطي العجلة، وللتفاضل أهمية أيضاً في قوانين نيوتن فالقانون الثاني ينص على أن القوة هي المعدل الزمني للتغير في كمية التحرك (أي تفاضل كمية التحرك بالنسبة للزمن)، كذلك من تطبيقاته إيجاد معدل التفاعل لتفاعل كيميائي، وفي بحوث العمليات تحدد المشتقات أو التفاضلات الطرق المثلى لتصميم المصانع ونقل المواد أو الخامات أو المنتجات.

تستخدم المشتقات في إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة. المعادلات التي تتضمن تفاضلات (مشتقات) تسمى المعادلات التفاضلية، وهي من المعادلات الأساسية والهامة في توصيف الظواهر الطبيعية. تظهر المشتقات في العديد من مجالات الرياضيات كالتحليل العددي، التحليل الدالي، الهندسة التفاضلية، نظرية القياس والجبر المجرد.

3.1 قابلية التفاضل و خط التماس: Differentiability and Tangent Line

سنتناول في هذا الجزء كيفية استنتاج مشتقة الدالة هندسيا. بفرض الدالة المتصلة $y = f(x)$،
بفرض نقطة اختيارية P على منحنى الدالة إحداثياتها $(x, f(x))$.
نفرض أن x تتغير بمقدار Δx ، فإن الإحداثي السيني الجديد للنقطة Q هو $x + \Delta x$. انظر الشكل (3-1).
ولكن عندما تتغير قيمة x، يكون هناك تغير Δy في قيمة y ، أي في قيمة $f(x)$ و تكون لها القيمة الجديدة $f(x + \Delta x)$. إحداثيات النقطة Q هي: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



الشكل (3-1)

إذن

$$\text{ميل } mPQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

لدينا الآن تعريف الميل لخط المماس عند P :

يكون ميل خط المماس عند P هو نهاية التغير في الدالة مقسوما على التغير في المتغير المستقل عندما يزول هذا التغير إلى الصفر.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ تسمى مشتقة الدالة $f(x)$ ، وأحيانا تكتب المشتقة f بالرموز التالية :

$$f', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad f^{(1)}, \quad Df, \quad y'(x),$$

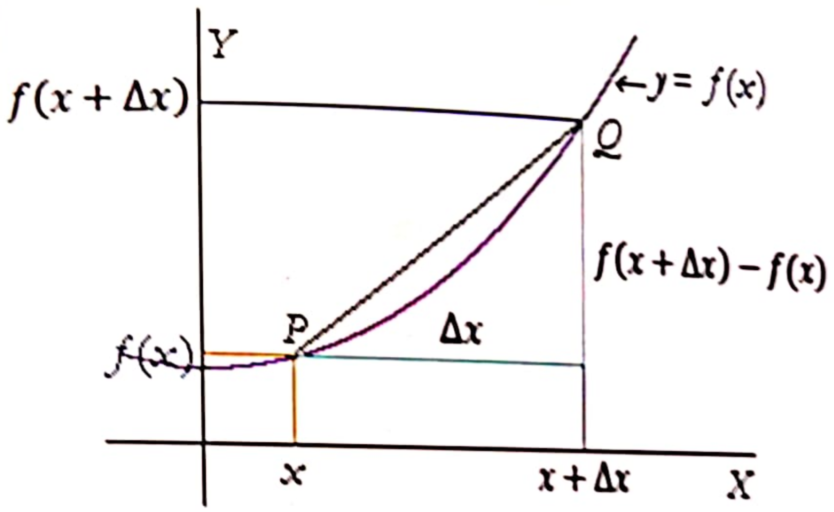
$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}y, \quad Dy$$

المقدار

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

يسمى قسمة نيوتن Newton quotient أو خارج قسمة الفرق difference quotient.

مرة أخرى ، خارج قسمة الفرق هو دالة في Δx، كما بالشكل (3-2).



الشكل (3-2)

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

خارج قسمة الفرق يصبح:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

الآن سوف نعبر عن تعريف المشتقة كما يلي:

تعريف 3.1.1 (المشتقة)

$f'(x)$ تسمى مشتقة الدالة $f(x)$ إذا كانت نهاية الدالة موجودة :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ونقول حينئذ أن الدالة f قابلة للتفاضل عند x (differentiable at x) ،أي أن f لها مشتقة.

مثال 3.1.1:

باستخدام تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

1) $f(x) = x$

الحل:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

2) $f(x) = x^2$

الحل:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2(\Delta x)x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

مثال 3.1.2:

باستخدام تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$y = 3x^2 - x.$$

الحل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 3x^2 + x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((6x-1) + 3(\Delta x)) = 6x - 1.$$

مثال 3.1.3:

في المثال 3.1.1 أوجد $f'(1)$.

الحل:

$$f'(x) = 2x$$

$$\therefore f'(1) = 2$$

مثال 3.1.4:

باستخدام التعريف أوجد $f'(4)$ إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$.

الحل:

$$f'(4) = \lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

مثال 3.1.5:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = x^n$.

الحل:

باستخدام النظرية 2.4.1.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x+\Delta x\to x}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x} = nx^{n-1}.$$

مثال 3.1.6:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = sinx$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{sin(x+\Delta x)-sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{2cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x\to0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = cosx.$$

مثال 3.1.7:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = cosx$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos(x+\Delta x) - cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -sinx.$$

مثال 3.1.8:

باستخدام المبادئ الأولية أوجد مشتقة الدالة $y = \sqrt{x}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} . \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - (x)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نظرية 3.1.1:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإنّ f تكون متصلة عند x_0.

البرهان:

حيث أنّ f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإنّ $f'(x_0)$ موجودة أي أنّ النهاية:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تكون موجودة. عليه فلابدّ أن تكون $f(x_0)$ موجودة، إذا لم تكن موجودة فلن يكون للنهاية معنى وبذلك تكون الدالة f معرفة عند x_0 .

لكن:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[(x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = 0 . f'(x_0)$$

وحيث أنّ

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وعليه فالدالة f متصلة عند x_0.

3.2 المشتقة من جهة واحدة: One Sided Derivative

تعريف 3.2.1: (المشتقة من جهة اليمين Right Hand Derivative)

إذا كانت الدالة f معرفة عند x_0 فإن مشتقة f عند x_0 من جهة اليمين والتي يرمز لها بالرمز $f'_+(x_0)$ تعرف كالتالي:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

تعريف 3.2.2: (المشتقة من جهة اليسار Left Hand Derivative)

وبالمثل يمكن تعريف المشتقة من جهة اليسار والتي يرمز لها بالرمز $f'_-(x_0)$ وتعرف كالتالي:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

نظرية 3.2.1:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \neq \infty$ هو أن تكون للدالة f مشتقة f' عند النقطة x_0.

مثال 3.2.1:

أدرس وجود مشتقة الدالة $f(x) = |x|$ عند $x = 0$.

الحل:

نوجد كلاً من $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ ، ثم نقارن بين قيمتيهما.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

وحيث أنّ $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

مثال 3.2.2:

ادرس قابلية اشتقاق $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 3x - 4 & x < 2 \end{cases}$ عند $x = 2$.

الحل:

نوجد كلاً من $f'_+(2), f'_-(2)$ ثم نقارن بين قيمتيهما.

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(2 + \Delta x)^2 - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 2^+} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

وحيث أنّ $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

3.3 قواعد الاشتقاق لبعض الدوال الجبرية: Differentiation Formula of Some Algebraic Functions

نظرية 3.3.1:

(a) إذا كان a عدداً ثابتاً، وكانت $f(x) = a$ لكلّ قيم x ، فإنّ $f'(x) = 0$.

الإثبات:

لنفرض أنّ f دالة ثابتة، أي أنّ $f(x) = a$ لكل قيم x في نطاق الدالة.

حسب تعريف المشتقة فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x} = 0.$$

(b) إذا كانت $f(x) = x$ ، فإنّ $f'(x) = 1$.

الإثبات:

لنفرض أنّ $f(x) = x$ حسب تعريف المشتقة فإنّ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = 1.$$

(c) إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

الإثبات:

لتكن $f(x) = x^n$. حسب تعريف المشتقة، فإنّ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

نفك الحد الأول من البسط باستخدام مبرهنة ذات الحدين لنحصل على:

$$f'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right]}{\Delta x}$$

$$= nx^{n-1} + 0 + 0 + \cdots + 0 = nx^{n-1}.$$

مثال 3.3.1:

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = 4x^5 - \frac{2}{x^2} + 7^3$.

الحل:

$$f(x) = 4x^5 - \frac{2}{x^2} + 7^3 = 4x^5 - 2x^{-2} + 7^3$$

$$f'(x) = 20x^4 + 4x^{-3} + 0 = 20x^4 + \frac{4}{x^3}$$

مثال 3.3.2:

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5x + 8$.

الحل:

$$f'(x) = 36x^2 - 12x + 5 + 0 = 36x^2 - 12x + 5.$$

مثال 3.3.3:

أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2\sqrt{x} + 7$.

الحل:

$$f(x) = 3x^{-2} - 2x^{\frac{1}{2}} + 7$$

$$f'(x) = -6x^{-3} - x^{\frac{-1}{2}} + 0 = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

مثال 3.3.4:

أوجد تفاضل كل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \pi x$ 2) $g(y) = 5y^3$ 3) $y = -\frac{8}{x^2}$ 4) $v(t) = \sqrt{32}t^{\sqrt{2}}$

الحل:

1) $f'(x) = \pi$

2) $g'(y) = 15y^2$

3) $y' = 16x^{-3} = \dfrac{16}{x^3}$

4) $v'(t) = \sqrt{32}\sqrt{2}(t)^{\sqrt{2}-1} = \sqrt{64}(t)^{\sqrt{2}-1} = 8(t)^{\sqrt{2}-1}.$

النظرية التالية تعطي قواعد الاشتقاق لمجموع، وحاصل ضرب، وخارج قسمة دالتين.

نظرية 3.3.2:

(1) إذا كانت $h(x) = f(x) \pm g(x)$ ، فإن $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

الاثبات:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

2) إذا كانت $h(x) = f(x)g(x)$ فإنّ $h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

3) إذا كانت $g(x) \neq 0$, $h(x) = \frac{f(x)}{(x)}$ ، فإنّ $h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ حيث

كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق.

<u>الإثبات:</u>

2) متروك كتمرين للطالب.

(3

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - [f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)]}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$h'(x)$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}$$

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)}$$

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

مثال 3.3.5:

أوجد y' في كلٍّ من الحالات التالية:

1) $y(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة خارج القسمة:

$$y'(x) = \frac{(x^2 + 1)(5) - (5x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x^2 + 5 - 10x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5 - 5x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

2) $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة خارج القسمة:

$$y'(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

3) $y(x) = (3x^2 - 2)(3x^3 - 5x)$

الحل:

بتطبيق قاعدة حاصل الضرب:

$$y'(x) = (3x^2 - 2)(9x^2 - 5) + (3x^3 - 5x)(6x)$$

4) $y(x) = x^{-n}$.

الحل:

بتطبيق قاعدة خارج القسمة:

$$y(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$y'(x) = \frac{x^n.0 - 1.nx^{n-1}}{[x^n]^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

3.4 مشتقات الدوال المثلثية : Derivatives of Trigonometric Functions

تعطي مشتقات الدوال المثلثية في الجدول الآتي:

الدالة	المشتقة
$f(x) = sinx$	$f'(x) = cosx$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -sinx$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = sec^2x$
$f(x) = cotx$	$f'(x) = -csc^2x$
$f(x) = secx$	$f'(x) = secx\ tanx$
$f(x) = cscx$	$f'(x) = -cscx\ cotx$

مثال 3.4.1:

أوجد y' في كلٌ من الحالات التالية:

1) $y = tanx = \dfrac{sinx}{cosx}.$

الحل:

تفاضل خارج قسمة دالتين،

$$y'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = sinx,\quad g(x) = cosx \quad ,f'(x) = cosx \qquad g'(x) = -sinx$

$$y'(x) = \frac{cosx.cosx - sinx.(-sinx)}{[cosx]^2} = \frac{cos^2x + sin^2x}{[cosx]^2} = \frac{1}{[cosx]^2}$$

$$= sec^2x.$$

2) $y = cotx = \frac{cosx}{sinx}$.

الحل:

$$y'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = cosx, \;\; g(x) = sinx \quad , f'(x) = -sinx \qquad g'(x) = cosx$

$$y'(x) = \frac{sinx.(-sinx) - cosx.(cosx)}{[sinx]^2} = -\frac{sin^2x + cos^2x}{[sinx]^2} = \frac{-1}{[sinx]^2}$$

$$= -csc^2x.$$

3) $y = cscx = \frac{1}{sinx}$.

الحل:

تفاضل خارج قسمة دالتين،

$$y'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = 1, \;\; g(x) = sinx \quad , f'(x) = 0 \qquad g'(x) = cosx$

$$y'(x) = \frac{sinx.(0) - 1.(cosx)}{[sinx]^2} = -\frac{cosx}{[sinx]^2} = \frac{-1}{sinx}.\frac{cosx}{sinx}$$

$$= -cscx \; cotx.$$

4) $y = secx = \frac{1}{cosx}$.

تفاضل خارج قسمة دالتين

الحل:

$$y'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = 1, \quad g(x) = cosx \qquad , f'(x) = 0$

$g'(x) = -sinx$

$$y'(x) = \frac{cosx \cdot 0 - 1.(-sinx)}{[cosx]^2} = \frac{sinx}{[cosx]^2} = \frac{1}{cosx}.\frac{sinx}{cosx} = secxtanx.$$

مثال 3.4.2:

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية:

1) $y = x^2 sinx.$

الحل:

بتطبيق قاعدة حاصل الضرب نحصل على:

$$y' = x^2 cosx + sinx\ .2x = x^2 cosx + 2xsinx.$$

2) $y = \frac{cosx}{1+sinx}.$

الحل:

بتطبيق قاعدة خارج القسمة نحصل على:

$$y' = \frac{(1 + sinx)(-sinx) - cosx(0 + cosx)}{(1 + sinx)^2}$$

$$\frac{-sinx - sin^2x - cos^2x}{(1 + sinx)^2} = -\frac{sinx + 1}{(1 + sinx)^2} = \frac{-1}{1 + sinx}.$$

3) $y = secx\ tanx.$

الحل:

بتطبيق قاعدة حاصل ضرب دالتين نحصل على:

$$y' = secx sec^2 x + tanx secx tanx = sec^3 x + secx tan^2 x.$$

مثال 3.4.3:

أوجد تفاضل الدوال الآتية:

1) $y = 3\sin x - 4\cos x$ 2) $y = x^3 \tan x$

3) [illegible] 4) $y = \sin(2x) + \cos^2 x.$

الحل:

1) $y' = 3\cos x + 4\sin x.$

2) $y' = x^3 sec^2 x + 3x^2 \tan x = x^2(x\, sec^2 x + 3\tan x).$

3) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x = (\tan x)^2$

$$y' = 2\tan x . sec^2 x = 2 sec^2 x \tan x.$$

4) $y = \sin(2x) + \cos^2 x = 2\sin x \cos x + \cos x \cos x$

$$y' = 2\sin x . (-\sin x) + (2\cos x). \cos x + \cos x . (-\sin x)$$

$$+ (-\sin x)\cos x = -2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin(2x) = 2\cos(2x) - \sin(2x).$$

3.5 مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) : The Chain Rule

نظرية 3.5.1:

إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند x ، والدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ ، فإنّ الدالة المركبة fog تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ومشتقة الدالة المركبة تعطى بالعلاقة

$$(fog)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

فإذا وضعنا $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإنّ قاعدة السلسلة تأخذ الصورة المكافئة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

البرهان:

نفرض أن المتغير المستقل x قد اخذ ازاحة صغيرة مقدارها Δx حول النقطة x_0 فتبعا لذلك يحدث ازاحة في u مقدارها Δu واثر ذلك يحدث تغير في y مقداره Δy ويكون:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وحيث أن g دالة مستمرة. اذن $\Delta u \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ وعليه فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

مثال 3.5.1:

إذا كانت $y = (2x^4 + 3x + 1)^5$ فأوجد قيمة y' .

الحل:

بوضع $u = 2x^4 + 3x + 1$ ، فإنّ $y = u^5$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 \ , \ \frac{du}{dx} = 8x^3 + 3$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=5u^4(8x^3+3)=5(2x^4+3x+1)^4(8x^3+3)$$
$$=5(8x^3+3)(2x^4+3x+1)^4.$$

ملاحظة: عند تطبيق قاعدة السـلسـلة يمكننا تطبيق هذه القاعدة مبتدئين من الخارج (خارج القوس) ومتجهين إلى الداخل حتى ننتهي من إيجاد المشتقة.

ففي المثال السابق مثلاً.

$$y=(2x^4+3x+1)^5$$
$$y'=5(8x^3+3)(2x^4+3x+1)^4.$$

مثال 3.5.2:

أوجد مشتقات الدوال التالية:

1) $y=sin5x.$

الحل:

بوضع $u=5x$، فإنّ $y=sinu$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du}=cosu\ ,\ \frac{du}{dx}=5$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=cosu.5=5cos5x.$$

2) $y=sin(x^2)$

الحل:

بوضع $u=x^2$، فإنّ $y=sinu$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du}=cosu\ ,\ \frac{du}{dx}=2x$$

وبالتالي فإنّ:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=cosu.2x=2xcosx^2.$$

3) $y=sin(\sqrt{x})$.

الحل:

بوضع $u=\sqrt{x}$، فإنّ $y=sinu$ وعليه فإنّ
$$\frac{dy}{du}=cosu\ ,\ \ \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وبالتالي فإنّ:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=cosu.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

4) $y=sin\left(\sqrt{x^2+3x+1}\right)$.

الحل:
$$\frac{dy}{dx}=cos\left(\sqrt{x^2+3x+1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}\right)(2x+3).$$

5) $y=\dfrac{1+sin2x}{1-sin2x}$.

الحل:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-sin2x)2cos2x-(1+sin2x)(-2cos2x)}{(1-sin2x)^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4cos2x}{(1-sin2x)^2}.$$

مثال 3.5.3:

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$(a)\ y = sin^2(4x+1).$

الحل:

الدالة مكّونة من تركيب ثلاث دوال وهي من الداخل إلى الخارج $4x+1$، sin، sin^2 أي أنّ

$$y = sin^2(4x+1) = [sin(4x+1)]^2$$

ولذلك نبدأ بإيجاد مشتقة هذه الدالة من الخارج كما يلي:

$$y' = 2[sin(4x+1)]cox(4x+1) * 4$$
$$= 8cox(4x+1).sin(4x+1).$$

$(b)\ y = tan^3(x^2-1).$

الحل:

الدالة مكّونة من تركيب ثلاث دوال وهي من الداخل إلى الخارج x^2-1، tan، tan^3 أي أنّ

$$y = tan^3(x^2-1) = [tan(x^2-1)]^3$$

ولذلك نبدأ بإيجاد مشتقة هذه الدالة من الخارج كما يلي:

$$y' = 3[tan(x^2-1)]^2.sec^2(x^2-1).2x$$
$$= 6xsec^2(x^2-1)tan^2(x^2-1).$$

$(c)\ y = (1+x^2cscx)^{-5}.$

الحل:

بتطبيق قاعدة السلسلة نحصل على:

$$y' = -5(1 + x^2 cscx)^{-6}(0 + x^2.-cscxcotx + cscx.2x)$$
$$= -5(2xcscx - x^2.cscxcotx)(1 + x^2cscx)^{-6}.$$

$(d)\ y = sin(tan^2 4x^2).$

الحل:

مرة أخرى نطبق قاعدة السلسلة لنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = cos(tan^2 4x^2).2tan(4x^2).sec^2(4x^2).8x$$
$$= 16xsec^2(4x^2)tan(4x^2)cos(tan^2 4x^2).$$

مثال 3.5.4:

بفرض أن

$$f(x) = cos^3 x$$

حل المعادلة $f'(x) = 0$ حيث $x \in [0,2\pi]$.

الحل:

لإيجاد مشتقة f نستخدم قاعدة السلسلة :

$$f'(x) = 3cos^2 x.D\{cos\,x\} = 3cos^2 x(-\sin x) = -3\sin x\cos^2 x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{أو} \quad \cos x = 0$$

إذا كانت $\sin x = 0$ ، الحلول الوحيدة $x \in [0,2\pi]$ هي

$$x = 0,\ \ x = \pi \quad \text{أو} \quad x = 2\pi$$

إذا كانت $\cos x = 0$ ، الحلول الوحيدة $x \in [0,2\pi]$ هي

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

الحلول الوحيدة $x \in [0,2\pi]$ للمعادلة $f'(x) = 0$ هي:

$$x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \pi, \qquad x = \frac{3\pi}{2}.$$

مثال 3.5.5:

أوجد تفاضل الدوال الآتية:

1) $y = cos(2x) + sin^2 x$

2) $y = tan(sin\, x)$

3) $y = \frac{sin(3x)}{4+5\, cos(2x)}$

4) $y = x\, sec^2\,(\pi x)$

5) $y = cos^3\,(tan(3x))$

6) $y = \frac{x\, sec(x)}{3\, csc(x)}$

الحل:

1) $y' = -sin(2x).(2) + 2\, sin\, x\, cos\, x = -2\, sin(2x) + sin(2x)$

$= -sin(2x).$

2) $y' = sec^2\,(sin\, x)(cos\, x) = sec^2\,(sin\, x)\, cos\, x.$

3) $y'(x)$

$$= \frac{(4 + 5\, cos(2x))\big(cos(3x).(3)\big) - sin(3x).(-5sin(2x).(2))}{(4 + 5\, cos(2x))^2}$$

$$= \frac{12\, cos(3x) + 15\, cos(2x)\, cos(3x) + 10\, sin(2x)\, sin(3x)}{(4 + 5\, cos(2x))^2}.$$

4) $y'(x) = x * 2\, sec(\pi x)\, sec(\pi x)\, tan(\pi x)\,(\pi) + sec^2\,(\pi x)$

$= 2\pi x\, sec^2\,(\pi x)\, tan(\pi x) + sec^2\,(\pi x)$

$= sec^2\,(\pi x)[2\pi x\, tan(\pi x) + 1].$

5) $y'(x) = 3(\cos(\tan(3x)))^2 - \sin(\tan n(3x))\sec^2(3x)(3)$

$$= -9(\cos(\tan(3x)))^2 \sin(\tan n(3x)) \sec^2(3x).$$

6) $y'(x)$

$$= \frac{3\csc(x)[x.\sec(x)\tan(x) + \sec(x)] - x\sec(x)(-3\csc(x)\cot(x))}{(3\csc(x))^2}$$

$\Rightarrow y'(x)$

$$= \frac{3x\sec(x)\tan(x)\csc(x) + 3\sec(x)\csc(x) + 3x\sec(x)\cot(x)\csc(x)}{(3\csc(x))^2}$$

$$= \frac{3x\sec(x)\tan(x)\csc(x) + 3\sec(x)\csc(x) + 3x\sec(x)\cot(x)\csc(x)}{(3\csc(x))^2}.$$

3.6 مشتقة الدوال اللوغاريتمية والأسية: The Derivatives of The Logarithmic and Exponential Functions

مشتقة الدوال اللوغاريتمية

في هذا الجزء سوف نوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية $y = log_b\, x$، $x > 0$، مستخدمين الحقيقة التالية:

$$\lim_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}} = e$$

$$\frac{d}{dx}[\, log_b\, x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_b(x+\Delta x) - log_b\, x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\, log_b\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\, log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

بوضع $v = \frac{\Delta x}{x}$، فانّ $\frac{1}{xv} = \frac{1}{\Delta x}$ وعليه فإذا كانت $\Delta x \to 0$، فإنّ $v \to 0$ وبالتالي فإنّ:

$$\frac{d}{dx}[\, log_b\, x] = \lim_{v\to 0}\ \frac{1}{vx}\, log_b(1+v)$$

$$= \lim_{v\to 0}\ \frac{1}{x}\, log_b(1+v)^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{x}\, log_b \lim_{v\to 0}\ (1+v)^{\frac{1}{v}}$$

وذلك لأن الدالة $log_b\, x$ متصلة فإنّه بالإمكان تبديل ترتيب النهاية مع الدالة لنحصل على:

$$\frac{d}{dx}[\, log_b\, x] = \frac{1}{x}\, log_b\, e\, , \qquad ....(1)$$

من خواص اللوغاريتمات نعرف أنّ $log_b x = \frac{lnx}{lnb}$ ، وعليه فإنّ:

$$log_b e = \frac{lne}{lnb} = \frac{1}{lnb}$$

وعليه فإنّ (1) تصبح على الصورة:

$$\frac{d}{dx}[\,log_b x] = \frac{1}{xlnb} \quad ,x > 0.$$

إذا كانت $b = e$ ، فإنّ $lne = 1$ وعليه فإنّ:

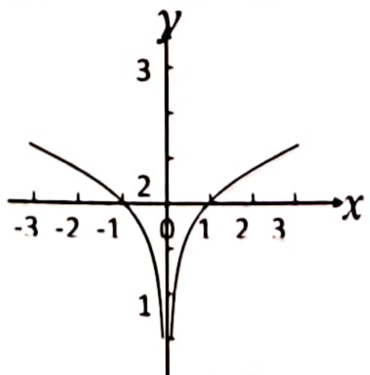
$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} \quad ,x > 0 \quad \dots.(2)$$

مثال 3.6.1:

أوجد $\frac{d}{dx}[ln|x|]$.

الحل:

حيث أنّ الدالة $ln|x|$ معرفة لجميع الأعداد الحقيقية عدا عند $x = 0$، لذلك سوف نعتبر الحالتين $x > 0$ و $x < 0$ (انظر شكل 3-3).



الشكل (3-3)

في الحالة $x > 0$: نجد أن $ln|x| = lnx$ وعليه فإنّ $\frac{d}{dx}ln|x| = \frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$

في الحالة $x < 0$: نجد أن $ln|x| = ln(-x)$ وعليه فإنّ:

$$\frac{d}{dx}ln|x| = \frac{d}{dx}ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

وعليه نجد في كلا الحالتين أن: فإنّ $\frac{d}{dx}ln|x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

مثال 3.6.2:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كلّ من الحالات التالية:

1) $y = sin(ln(x))$.

الحل:

بوضع $u = lnx$، فإنّ $y = sinu$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du} = cosu \quad , \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = cosu\frac{1}{x} = \frac{cos(lnx)}{x}.$$

2) $y = ln(x^2 + 5x + 2)$.

الحل:

بوضع $u = x^2 + 5x + 2$، فإنّ $y = ln(u)$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x + 5$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2x + 5)\frac{1}{u} = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 2}.$$

3) $y = ln\left(\frac{x^3 sinx}{\sqrt{2+x}}\right)$.

الحل:

نقوم أولاً بتبسيط الدالة المعطاة وذلك باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية على النحو التالي:

$$y = ln\left(\frac{x^3 sinx}{\sqrt{2+x}}\right) = ln(x^3 sinx) - ln(2+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= lnx^3 + lnsinx - ln(2+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3lnx + lnsinx - \frac{1}{2}ln(2+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{cosx}{sinx} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x} + cotx - \frac{1}{2(x+2)}.$$

4) $y = ln|cosx|$.

الحل:

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosx}\frac{d}{dx}(cosx) = \frac{-sinx}{cosx} = -tanx.$$

5) $y = ln(x^2+1)$.

الحل:

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

ملاحظة:

التفاضل اللوغاريتمي وهي وسيله لتبسيط إيجاد مشتقات الدوال والتي تكون على صورة حاصل ضرب أو خارج قسمة أو قوى لعدة دوال كما سنوضح ذلك في الأمثلة التالية:

مثال 3.6.3:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = \frac{x^2\sqrt[3]{4x-12}}{(x^2+1)^3}.$$

الحل:

لاحظ أولاً بأنّه إذا حاولنا إيجاد المشتقة مباشرة، فإنّ العمليات الجبرية النّاتجة سوف تكون [illegible] نظراً لوجود حاصل ضرب دالتين في البسط ودالة مرفوعة لقوة في المقام. ولذلك [illegible] اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة السابقة ثم نستخدم خواص اللوغاريتم لتبسيط الناتج وأخيراً نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x

$$lny = ln\left(\frac{x^2\sqrt[3]{4x-12}}{(x^2+1)^3}\right) = lnx^2 + ln\sqrt[3]{4x-12} - ln(x^2+1)^3$$

$$= 2lnx + \frac{1}{3}ln(4x-12) - 3ln(x^2+1)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{4}{3(4x-12)} - \frac{3(2x)}{x^2+1} = \frac{2}{x} + \frac{4}{3(4x-12)} - \frac{6x}{x^2+1}$$

$$y' = y\left[\frac{2}{x} + \frac{4}{3(4x-12)} - \frac{6x}{x^2+1}\right]$$

$$y' = \left(\frac{x^2\sqrt[3]{4x-12}}{(x^2+1)^3}\right)\left[\frac{2}{x} + \frac{4}{3(4x-12)} - \frac{6x}{x^2+1}\right].$$

مثال 3.6.4:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات التالية:

$$(1)\ y = x^r, \quad r \in \mathbb{R} \qquad\qquad (2)\ y = x^x, \quad x > 0$$

الحل:

(1) بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على: $lny = lnx^r = rlnx$

وبمفاضلة الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على: $\frac{y'}{y} = \frac{r}{x}$ وبالتالي فإنّ:

$$y' = \frac{ry}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}$$

(2) بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على: $lny = lnx^x = xlnx$

وبمفاضلة الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x} + lnx.1$$

$$y' = y(1 + lnx) = x^x(1 + lnx).$$

ثانيا: مشتقة الدوال الأسية Derivative of the Exponential functions

ننتقل الآن لإيجاد مشتقات الدوال الأسية. ولنفرض أنّ $y = b^x$ ، نبدأ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس $b > 0$ ،

$$log_b\, y = log_b\, b^x = x\, log_b\, b = x$$

ثم نقوم بمفاضلة الطرفين بالنسبة للمتغير x فنحصل على $\frac{y'}{ylnb} = 1$ ، و عليه فإنّ $y' = b^x lnb$

أي أنّ: $\frac{d}{dx}[b^x] = b^x lnb$ فإذا كان $b = e$ فإنّ $lne = 1$ وبالتالي فإنّ:

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x.$$

مثال 3.6.5:

أوجد y' في كل من الحالات التالية:

$$1)\ y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

الحل:

$$y' = 0 + 1 + x + + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

الدالة e^x هى الدالة الوحيدة الذي تفاضلها بالنسبة x يكون مساويًا لها وهنا تكمن قيمة الدالة e^x.

الحل:

بوضع $u = 5x$، فإنّ $y = e^u$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du} = e^u \ , \ \frac{du}{dx} = 5$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u.5 = 5e^{5x}.$$

$$3)\ y = e^{-x^2}.$$

الحل:

بوضع $u = -x^2$، فإنّ $y = e^u$ وعليه فإنّ

$$\frac{dy}{du} = e^u \ , \ \frac{du}{dx} = -2x$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=e^{u}.-2x=-2xe^{-x^2}.$$

4) $y=e^{\sin x^2}$.

الحل:

$$y'=e^{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)=e^{\sin x^2}.2x\cos x^2=2x\cos x^2 e^{\sin x^2}$$

5) $y=3^{\tan x}$.

الحل:

$$y'=3^{\tan x}\ln 3\frac{d}{dx}(\tan x)=\ln 3.3^{\tan x}\sec^2 x$$

تذكر أن:

إذا كانت $y=f(u)$ ، $u=u(x)$ فإن مشتقة الدوال الأسية واللوغاريتمية تعطى بالجدول التالي:

	الدالة $y=$	المشتقة $y'=$
1	$\ln(u)$	$\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$
2	$\log_a(u)$	$\frac{1}{u.\ln(a)}.\frac{du}{dx}$
3	e^u	$e^u.\frac{du}{dx}$
4	a^u	$\ln(a)\,a^u.\frac{du}{dx}$

5	u^v	$vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln(u)\frac{dv}{dx}$

نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}(u^v)=\frac{d}{dx}(e^{v\ln u})=e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u)=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln(u)\frac{dv}{dx},$$

كما نعرف الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس $a>0$ بأنها :

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}, a\neq 1.$$

3.7 مشتقة الدوال المثلثية العكسية: Derivative of Inverse Trigonometric Functions

إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = u(x)$ فإن مشتقة الدوال المثلثية تعطي بالجدول التالي:

الدالة $y =$	المشتقة $y' =$
$\sin^{-1}(u)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}, \lvert u \rvert < 1$
$\cos^{-1}(u)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}, \lvert u \rvert < 1$
$\tan^{-1}(u)$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
$\cot^{-1}(u)$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$
$\sec^{-1}(u)$	$\frac{1}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}, \lvert u \rvert > 1$
$\csc^{-1}(u)$	$-\frac{1}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}, \lvert u \rvert > 1$

مثال 3.7.1:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

الإثبات:

نفرض أن:

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\sin y = x$$

بتفاضل الطرفين ضمنيا بالنسبة لـ x

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

مثال 3.7.2:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

الإثبات:

نفرض أن $y = \cos^{-1} x$

$$\cos y = x$$

بتفاضل الطرفين ضمنيا بالنسبة لـ x

$$\frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

مثال 3.7.3:

أثبت أن $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$

الإثبات:

نفرض أن

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\tan y = x$$

بتفاضل الطرفين ضمنيا بالنسبة لـ x

$$\frac{d}{dx}(\tan y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

مثال 3.7.4:

أثبت أن $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

الإثبات: نفرض أن

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x$$

بتفاضل الطرفين ضمنيا بالنسبة لـ x

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

تمرين: اثبت كل من الآتي:

$$(1)\ \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (2)\ \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

مثال 3.7.5:

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(1) $y = \sin^{-1}(2x)$ (2) $y = \tan^{-1}(3x)$ (3) $y = \sec^{-1}(3x)$

(4) $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ (5) $y = \sin^{-1} x^3$ (6) $y = \sec^{-1}(x^2+1)$

(7) $y = x^2 \tan^{-1} x^2$.

الحل:

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin^{-1}(2x)] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}.$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+(3x)^2}.$$

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x\sqrt{(3x)^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}.$$

$$(4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{(3x^2)}{\sqrt{1-x^6}}.$

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}}=\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

(7) $\frac{dy}{dx}=2x\tan^{-1}x^2+x^2\frac{2x}{1+(x^2)^2}=2x\tan^{-1}x^2+\frac{2x^3}{1+x^4}.$

مثال 3.7.6:

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية

(1) $y=\tan^{-1}\frac{-1}{x+1}$ (2) $y=x^2\cot^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(3) $y=x\csc^{-1}\frac{1}{x}.$

الحل:

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\left[\frac{-1}{(x+1)}\right]^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$

(2) $\frac{dy}{dx}=x^2\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}+\cot^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).2x=2x\cot^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2x^2}{4+x^2}.$

(3) $\frac{dy}{dx}=x.\frac{-1}{\left|\frac{1}{x}\right|\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}\cdot\frac{-1}{x^2}+\csc^{-1}\frac{1}{x}.1=\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}+\csc^{-1}\frac{1}{x}.$

3.8 مشتقة الدوال الزائدية Derivative of The Hyperbolic Functions:

	الدالة $y=$	المشتقة $y'=$
(a)	$sinhx$	$coshx$
(b)	$coshx$	$sinhx$
(c)	$tanhx$	$sech^2x$
(d)	$cothx$	$-csch^2x$
(e)	$sechx$	$-sechxtanhx$
(f)	$cschx$	$-cschxcothx$

البرهان:

سوف نبرهن الفقرات (a) ، (c) ، (e) ونترك بقية الفقرات كتمارين للطالب لبرهنتها.

$$(a)\frac{d}{dx}(sinhx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=coshx.$$

$$(c)\frac{d}{dx}(tanhx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{sinhx}{coshx}\right)=\frac{coshx.coshx-sinhx.sinhx}{cosh^2x}$$

$$=\frac{cosh^2x-sinh^2x}{cosh^2x}=\frac{1}{cosh^2x}=sech^2x.$$

$$(e)\frac{d}{dx}(sechx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{coshx}\right)=\frac{coshx(0)-sinhx}{cosh^2x}$$

$$=\frac{-sinhx}{cosh^2x}=\frac{-1}{coshx}\frac{sinhx}{coshx}=-sechxtanhx.$$

مثال 3.8.1:

أوجد y' في الحالات التالية:

$$(1)\ y = \ln(\sinh x^3) \quad (2)\ y = \tan^{-1}(\cosh x^2) \quad (3)\ y = (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$$

الحل:

$$(1)\ y' = \frac{1}{\sinh x^3}.\cosh x^3.3x^2 = 3x^2 \coth x^3.$$

$$(2)\ y' = \frac{1}{1+\cosh^2 x^2}.\sinh x^2.2x = \frac{2x\sinh x^2}{1+\cosh^2 x^2}.$$

$$(3)\ y = (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln y = \ln(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(\cosh x)$$

وبمفاضلة الطرفين بالنسبة للمتغير x ينتج:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\cosh x}\sinh x + \ln(\cosh x)\frac{-1}{x^2} = \frac{\tanh x}{x} - \frac{\ln(\cosh x)}{x^2}$$

$$y' = y\left[\frac{\tanh x}{x} - \frac{\ln(\cosh x)}{x^2}\right] = (\cosh x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{\tanh x}{x} - \frac{\ln(\cosh x)}{x^2}\right].$$

مثال 3.8.2:

إذا كان $u = x^2$ ، $y = \sinh u$ ، فأوجد y' .

الحل:

باستخدام قاعدة السلسلة (مشتقة دالة الدالة):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cosh u\,(2x) = 2x\cosh u = 2x\cosh(x^2).$$

مثال 3.8.3:

إذا كان $y = coth\left(\frac{1}{x}\right)$ ، فأوجد y' .

الحل:

باستخدام قاعدة السلسلة (مشتقة دالة الدالة):

$$y' = \left(coth\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -csch^2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -csch^2\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{csch^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

مثال 3.8.4:

إذا كان $y = sech^2(ln\, x)$ ، فأوجد y' .

الحل:

باستخدام قاعدة السلسلة (مشتقة دالة الدالة):

$$y' = (sech^2(ln\, x))' = 2sech\big((ln\, x)\big)\Big(sech\big((ln\, x)\big)\Big)'$$

$$= 2sech\big((ln\, x)\big)\big(-sech\big((ln\, x)\big)tanh\big((ln\, x)\big)(ln\, x)'\big)$$

$$= -\frac{2}{x}sech^2(ln\, x)\tanh(lnx).$$

مثال 3.8.5:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = (sinh\, x)^2$.

الحل:

$$y' = 2(sinh\, x)(cosh\, x).$$

حل آخر:

نفرض أن $u = sinh\, x$ ، $y = u^2$ ، ثم نستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة y كما يلي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2u \cosh x = 2 \sinh x \cosh x.$$

مثال 3.8.6:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(1) $f(x) = \sinh(x)^3.$

(2) $g(x) = -\sinh x + 4\cosh(x+2).$

(3) $h(x) = {\cosh x^2}/{\sinh x} + 4\tanh(x^2+2).$

الحل:

(1) $f'(x) = (3x^2)\cosh(x)^3.$

(2) $g'(x) = -\cosh x + 4\sinh(x+2).$

(3) $$h'(x) = \frac{\sinh x\,[(2x)\sinh x^2] - (\cosh x^2)(\cosh x)}{(\sinh x)^2}$$

$$+ 4\,\text{sech}^2(x^2+2)(2x).$$

3.9 مشتقة الدوال الزائدية العكسية: Derivative of The Inverse Hyperbolic Functions

الجدول التالي يعطي مشتقات الدوال الزائدية العكسية.

إذا كانت الدالة $u = u(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن:

الدالة	المشتقة
$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1}u]$	$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$\frac{d}{dx}[\cosh^{-1}u]$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, u>1$
$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}u]$	$\frac{u'}{1-u^2}, \lvert u\rvert<1$
$\frac{d}{dx}[\coth^{-1}u]$	$\frac{-u'}{u^2-1}, \lvert u\rvert>1$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1}u]$	$\frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}, 0<u<1$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1}u]$	$\frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}, u\neq 0$

مثال 3.9.1:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

الإثبات:

نفرض أن:

$$y = \sinh^{-1} x$$

$$\sinh y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

مثال 3.9.2:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

الإثبات:

نفرض أن: $y = \cosh^{-1} x$

$$\cosh y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

مثال 3.9.3:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

الإثبات:

نفرض أن:

$$y = \tanh^{-1}x$$

$$\tanh y = x$$

$$\operatorname{sech}^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

مثال 3.9.4:

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

الإثبات:

نفرض أن:

$$y = \operatorname{sech}^{-1}x$$

$$\operatorname{sech} y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\operatorname{sech} y \tanh y} = \frac{-1}{\operatorname{sech} y\sqrt{1-\sec^2 y}} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

تمرين:

اثبت كل من الآتي:

$$(1)\ \frac{d}{dx}(coth^{-1}x) = \frac{-1}{x^2-1}.$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}(csch^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.$$

مثال 3.9.5:

أوجد مشتقة كلاً من الدوال الآتية:

$(1)\ y = sinh^{-1}x^2$ $\quad (2)\ y = x^2cosh^{-1}x^2$ $\quad (3)\ y = coth^{-1}(coshx)$

$(4)\ y = ln\sqrt{1+x^2} - xtanh^{-1}x.$

الحل:

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx} = x^2.\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}.2x + cosh^{-1}x^2.2x = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}} + 2xcosh^{-1}x^2.$$

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-cosh^2x}.sinhx = \frac{sinhx}{-sinh^2x} = \frac{-1}{sinhx}.$$

$$(4)\ y = \frac{1}{2}ln(1+x^2) - xtanh^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} - \left[\frac{x}{1-x^2} - tanh^{-1}x\right]$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - \left(\frac{x}{1-x^2} - tanh^{-1}x\right).$$

مثال 3.9.6:

إذا كان $y = tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ، فأوجد y'.

الحل:

$$y'(x) = \left(\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad = -\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2} \qquad = \frac{1}{1-x^2}.$$

3.10 مشتقة الدوال البارامترية: Derivative of The Parametric Functions

إذا كانت $x\,,y$ دالتين متصلتين في المتغير t ، أي أن

$$\begin{cases} x = \emptyset(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

فإن هاتين المعادلتين تسميان معادلات بارامترية. وإذا تمكنا من حذف t منهما نحصل على علاقة مباشرة بين $x\,,y$.

وذلك بفرض أن $\emptyset$ لها دالة عكسية مستمرة ، او ψ لها دالة عكسية مستمرة.

إذا فرضنا أن $\emptyset$ لها دالة عكسية متصلة فيمكن الحصول على $\frac{d}{dx}$ للدوال البارامترية كما يلي:

بفرض أن Δt هو تغير بسيط في t فإنه تبعا لذلك يحدث تغير بسيط في x مقداره Δx ويحدث تغير بسيط في y مقداره Δ ونلاحظ أنه من استمرارية $\emptyset^{-1}$ عندما $0 \to \Delta x$ فإن $\Delta t \to 0$

وعليه فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \bigg/ \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}.$$

مثال 3.10.1:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

$$\begin{cases} x = a\ \cos t\,, \\ y = a\ \sin t\,. \end{cases}$$

و a مقدار ثابت.

الحل:

نوجد

$$\frac{dx}{dt} = -a\ \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a\ \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\ \cos t}{-a\ \sin t} = -\cot t.$$

مثال 3.10.2:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $x = sint$ و $y = cos\,t$ عند $t = \frac{\pi}{4}$.

الحل:

$$y = \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -sint$$

$$x = sint \Rightarrow \frac{dx}{dt} = cost$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-sint}{cost} = -tant$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = -tan\frac{\pi}{4} = -1.$$

مثال 3.10.3:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $x = at - a\ sint$ و $y = a - a\ cos\,t$ عند $t = \pi$ حيث a مقدار ثابت.

الحل:

$$y = a - a\ cos\,t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = asint$$

$$x = at - a\ sint \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a - acost$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{asint}{a - acost} = \frac{sint}{1 - cost} = \frac{2sin\frac{t}{2}cos\frac{t}{2}}{2sin^2\frac{t}{2}} = cot\frac{t}{2}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = cot\frac{\pi}{2} = 0.$$

3.11 مشتقة الدالة الضمنية: Derivative of The Implicit Functions

إذا كانت العلاقة بين x, y تعطي ضمنيا

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

لكي نحصل على مشتقة هذه الدالة في الحالات البسيطة، فإنه يكفي أن

نحسب التفاضل بالنسبة للمتغير x للطرف الأيسر للعلاقة (1) ، باعتبار y كدالة في x ،

بمساواة هذا التفاضل بالصفر، أي أنه بوضع

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0 \qquad (2)$$

بحل المعادلة الناتجة.

مثال 3.11.1:

أوجد مشتقة الدالة

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

الحل:

بتفاضل الطرف الأيسر للمعادلة ومساواتها بالصفر، نحصل

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3a\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

مثال 3.11.2:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $x^3 + y^3 = 9xy$.

الحل:

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 9x\frac{dy}{dx} + 9y$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 9x\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9y - 3x^2}{(3y^2 - 9x)} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

مثال 3.11.3:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y^3 - 3x^2y + 1 = 0$.

الحل:

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 6xy - 3x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^2\frac{dy}{dx} = 6xy$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x^2) = 6xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6xy}{3y^2 - 3x^2} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}.$$

مثال 3.11.4:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

1) $\sin(xy) = xy + x^2$ 2) $xy - \sqrt{xy} - 3x^2 = 0.$

$$1)\ sin(xy) = xy + x^2$$

الحل:

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$cos(xy)\left[y + x\frac{dy}{dx}\right] = y + x\frac{dy}{dx} + 2x$$

$$ycos(xy) + x\frac{dy}{dx}cos(xy) = y + x\frac{dy}{dx} + 2x$$

$$\frac{dy}{dx}[xcos(xy) - x] = y + 2x - ycos(xy)$$

$$2)\ xy - \sqrt{xy} - 3x^2 = 0$$

الحل:

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$x\frac{dy}{dx} + y - \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - 6x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x - \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right) = 6x - y + \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2x\sqrt{xy} - x\right) = 2\sqrt{xy}(6x - y) + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{xy}(6x - y) + y}{2x\sqrt{xy} - x}.$$

3.12 المشتقات من الرتب العليا: Higher Order Derivatives

لنفرض أن المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = f(x)$ موجودة. وإذا كانت مشتقة الدالة $\frac{dy}{dx}$ موجودة فإنه يطلق عليها المشتقة الثانية للدالة $y = f(x)$ وإذا كانت مشتقة الدالة $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجودة فإنه يطلق عليها المشتقة الثالثة للدالة $y = f(x)$ ويرمز للمشتقات بأحد الرموز التالية

المشتقة الثانية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = f^{(2)}(x) = y^{(2)} = f''.$$

المشتقة الثالثة:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = f^{(3)}(x) = y^{(3)} = f'''.$$

المشتقة النونية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}.$$

بعض الكتب ترمز للمشتقة النونية بالرمز

$$D^n(y) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

مثال 3.12.1:

أوجد المشتقة الثانية للدالة

$$y = ln(1-x).$$

الحل:

$$y' = \frac{-1}{1-x}, \quad y'' = \left(\frac{-1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

مثال 3.12.2:

أوجد المشتقة الثانية في الحالات التالية:

$$1)\ y = 4x^2 - 5x + 8 - \frac{3}{x} \qquad 2)\ y = \frac{x^2}{x^2+4}$$

$$3)\ y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

الحل:

(1) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 5 + \frac{3}{x^2} = 8x + 3x^{-2} - 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8 - \frac{6}{x^3}.$$

(2) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+4)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3 + 8x - 2x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^2+4)[8(x^2+4) - 32x^2]}{(x^2+4)^4} = \frac{32 - 24x^2}{(x^2+4)^3}.$$

(3) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x ينتج:

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 12x^2 = 5$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 + 3) = 12x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24x(4y^3+3) - (12x^2+5)\left(12y^2\frac{dy}{dx}\right)}{(4y^3+3)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24x(4y^3+3) - 12y^2(12x^2+5)\left(\frac{12x^2+5}{4y^3+3}\right)}{(4y^3+3)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24x(4y^3+3)^2 - 12y^2(12x^2+5)^2}{(4y^3+3)^3}.$$

مثال 3.12.3:

إذا كانت $x^3 + y^3 = 1$ فأثبت أنّ: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{y^5}$.

الحل:

بمفاضلة الطرفين بالنسبة لـِ x نحصل على: $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

وعليه فإنّ $3y^2\frac{d}{dx} = -3x^2$ وبالتالي فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2}$

وبمفاضلة الطرفين مرة أخرى نحصل على:

$$y'' = \frac{-[y^2.2x - x^2 2yy']}{y^4} = \frac{-y\left[y.2x - x^2 2\frac{-x^2}{y^2}\right]}{y^4} = \frac{-[2xy^3 + 2x^4]}{y^5}$$

$$= \frac{-2x[y^3 + x^3]}{y^5} = \frac{-2x}{y^5}.$$

إذا كانت الدالتين $u = \emptyset(x)$ ، $v = \psi(x)$ لهما مشتقات من الرتبة n ، يمكن استخدام قاعدة ليبنتز Leibnitz's rule لإيجاد قيمة المشتقة النونية لحاصل ضرب هاتين الدالتين:

قاعدة ليبنتز: (المشتقة العليا لحاصل الضرب):

Higher derivative for the product (Leibnitz's rule)

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)=\frac{d^n}{dx^n}(f)g+\binom{n}{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f)\frac{d}{dx}(g)$$

$$+\binom{n}{2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(f)\frac{d^2}{dx^2}(g)+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{d}{dx}(f)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(g)$$

$$+f\frac{d^n}{dx^n}(g).$$

حيث $\binom{n}{n-1}$ معاملات كثيرة الحدود. على سبيل المثال، نحصل على

$$\frac{d^2}{dx^2}(fg)=f\frac{d^2g}{dx^2}+2\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}+g\frac{d^2f}{dx^2},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(fg)=f\frac{d^3g}{dx^3}+3\frac{df}{dx}\cdot\frac{d^2g}{dx^2}+3\frac{dg}{dx}\cdot\frac{d^2f}{dx^2}+g\frac{d^3f}{dx^3}.$$

المشتقات العليا للدوال البارامترية:

Higher-order-derivatives of parametrically represented functions

إذا كان

$$\begin{cases}x=\varnothing(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

المشتقات

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\ldots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

يمكن حسابها باستخدام الصيغ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(y)}{\frac{dx}{dt}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}},\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}},\ldots.$$

مثال 3.12.4:

أوجد المشتقة الثانية إذا كان

$$\begin{cases} x = a\ \cos t\,, \\ y = b\ \sin t\,. \end{cases}$$

الحل:

نوجد

$$\frac{dx}{dt} = -a\ \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b\ \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\ \cos t}{-a\ \sin t} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)}{-a\ \sin t} = -\frac{b}{a^2}\frac{\csc^2 t}{\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

مثال 3.12.5:

إذا كانت $x = 4cos^2\theta$ ، $y = 2sin\theta$ فأثبت أنّ هاتين المعادلتين تمثلان القطع المكافئ $x + y^2 = 4$. ومن ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

بالتعويض عن قيم x ، y نحصل على:

$$x + y^2 = 4cos^2\theta + (2sin\theta)^2 = 4cos^2\theta + 4sin^2\theta$$

$$= 4cos^2\theta + 4sin^2\theta = 4(cos^2\theta + sin^2\theta) = 4$$

وعليه فإنّ المعادلتين تحققان معادلة القطع المكافئ.

$$x = 4cos^2\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -8cos\theta sin\theta$$

$$y = 2\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{2\cos\theta}{-8\cos\theta\sin\theta} = -\frac{1}{4\sin\theta} = -\frac{1}{4}\csc\theta.$$

مثال 3.12.6:

إذا كانت $x = \sqrt{t}$ ، $y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$ فأوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل:

$$\because x = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$y = t - t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)t^{\frac{-3}{2}} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2\sqrt{t}\left(2t\sqrt{t}+1\right)}{2t\sqrt{t}} = \frac{2t\sqrt{t}+1}{t} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{t} + t^{-1}\right) = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t} + t^{-1}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \left(\frac{2}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{1/2\sqrt{t}}$$

$$= 2\sqrt{t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right) = 2 - \frac{2}{t\sqrt{t}}.$$

3.13 الصيغ غير المحددة و قاعدة لو بيتال : Indeterminate Forms an L' Hopital's Rule

عرفنا فيما سبق دراسته من قواعد النهايات بأنّه إذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

أمّا إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ فإنّه يقال بأن النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير محددة (أو غير معينة) وتكتب على الصورة $\frac{0}{0}$ فمثلاً:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}\ ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

وتعلّمنا أيضاً إيجاد مثل هذه النهايات باستخدام بعض الحيل الرياضية مثل تحليل المقادير الجبرية أو الضرب بالمرافق أو استخدام بعض المتطابقات المثلثية.

وسوف ندرس هنا طريقة تسمى بقاعدة لو بيتال (*L'Hopital's Rule*) نسبة إلى أحد النبلاء الفرنسيين عرف بهذا الاسم وقام بنشر كتاب عن التفاضل في نهاية القرن السابع عشر وظهرت هذه القاعدة في ذلك الكتاب. وكما سنرى فيما بعد أن تطبيق هذه القاعدة يسهل إيجاد قيمة النهايات التي قد يصعب أو يستحيل إيجادها بالطرق التي سبق دراستها.

نظرية 3.13.1:

لنفرض أنّ الدالتين f , g قابلتان للتفاضل في فترة مفتوحة I، مع احتمال عدم تحقق ذلك عند العدد $a \in I$. لنفرض أيضاً أنّ $x \in I$ ، وأنّ $g'(x) \neq 0$ فإذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ، $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ فإنّ: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

مثال 3.13.1:

أوجد قيمة كل من النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}.$$

الحل:

إذا كان التعويض المباشر على الصيغة $\frac{0}{0}$ فإننا نفاضل كلاً من البسط والمقام كلاً على حده ثم نوجد النهاية بعد الاشتقاق وبشرط أن تكون مشتقة المقام لا تساوي الصفر. وهذه هي قاعدة لو بيتال.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{1}=2-1=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}.$$

ملاحظة (1):

عندما تكون نهاية $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ كمية غير معينة $\frac{0}{0}$ فإننا نستخدم قاعدة لو بيتال مرة ثانية و ثالثة كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 3.13.2:

أوجد قيمة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}.$$

الحل:
بالتعويض المباشر نحصل على الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$.
نفاضل البسط والمقام كلاً على حده ونعوض عن قيمة x نحصل على النهاية

$$\lim_{x\to1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi sin\pi x}$$

بالتعويض المباشر نحصل مرة أخرى على الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$.
ثم نفاضل كلاً من البسط والمقام مرة أخرى ونعوض عن قيمة x فنحصل على:

$$\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\pi^2 cos\pi x}=\frac{-1}{\pi^2}$$

وعليه فإن:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x+lnx}{1+cos\pi x}=\frac{-1}{\pi^2}$$

ملاحظة (2):
قاعدة لو بيتال تظل صحيحة إذا زادت قيمة x أو تناقصت دون حد كما تنص عليه المبرهنة التالية:

نظرية 3.13.2:
لنفرض أنّ الدالتين f ، g قابلتان للاشتقاق لكل قيم $N<x$ حيث N عدد ثابت موجب ولنفرض أيضاً أنه لكل قيم $N<x$ ، $g'(x)\neq0$ فإنّه إذا كانت $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ، $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ فإن $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

مثال 3.13.3:
أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

الحل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

ملاحظة (3):

قاعدة لو بيتال تظل صحيحة أيضاً إذا كانت النهاية من جهة اليمين أو من جهة اليسار موجودة كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 3.13.4:

أوجد النهاية: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x}{1}=1.$$

ملاحظة (4):

النظرية 2.13.3 تظل صحيحة إذا استبدلنا $+\infty$ بـ $-\infty$.

مثال 3.13.5:

أوجد قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{-2}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}2\cos\left(\frac{2}{x}\right)=2.$$

نظرية 3.13.3:

لنفرض أنّ f ، g دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة المفتوحة I مع احتمال عدم تحقق ذلك عند $a\in I$ ولنفرض أيضاً أنّ $x\neq a\in I$ ، $g'(x)\neq 0$ وكانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ كما أنّ: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ ، فإن $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

مثال 3.13.6:

أوجد النهاية: $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{\sec^2x}{\sec^2 3x}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على الكمية غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$.

بتطبيق قاعدة لو بيتال ثم التعويض المباشر نحصل على نفس الكمية:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{2\sec x.\sec x.\tan x}{2\sec3x\sec3x\tan3x.3}=\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{\sec^2x.\tan x}{3\sec^2 3x\tan3x}$$

وإذا حاولنا تطبيق المبرهنة السابقة فسوف نحصل على الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ مهما بلغت عدد مرات تطبيق المبرهنة وبالتالي فهذا الاتجاه لن يفيد في الحصول على قيمة النهاية المطلوبة غير أنه لو أعدنا كتابة الدالة الأصلية بصورة أخرى نحصل على ما يلي:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{\sec^2x}{\sec^2 3x}=\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

بتطبيق قاعدة لو بيتال ثم التعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{-2\cos3x.\sin3x.3}{-2\cos x.\sin x}$$

وباستخدام متطابقة ضعف الزاوية في كلّ من البسط والمقام نحصل على الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{3\sin6x}{\sin2x}$$

ثم بتطبيق قاعدة لو بيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{3\cos6x.6}{\cos2x.2} = \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{9\cos6x}{\cos2x} = \frac{9\cos3\pi}{\cos2\pi} = \frac{9(-1)}{-1} = 9.$$

المبرهنة التالية تعطي صيغة أخرى لقاعدة لوبتال عندما تؤول نهاية كل من البسط والمقام إلى∞.

نظرية 3.13.4:

بفرض أنّ ، g دالتان قابلتان للاشتقاق لكل قيم $N < x$ ، $0 < N$ ، ولنفرض أيضاً أنّه لكل $N < x$ ، $g'(x) \neq 0$ فإنّه إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(-\infty)$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = \infty(-\infty)$ وكانت $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ فإن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

مثال 3.13.7:

أوجد قيمة النهاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل علي الكمية غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ وبمفاضلة البسط والمقام كلّ على حدة نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^x)}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{2+e^x}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3(2+e^x)}$$

وبمفاضلة كلٌ من البسط والمقام كلٌ على حدة مرةً أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3e^x}=\frac{1}{3}.$$

ملاحظة (5):

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ فإنّه يقال بأنّ حاصل الضرب $f(x).g(x)$ له الصيغة غير المحددة $0.\infty$ عند $x=a$ ولإيجاد نهاية حاصل الضرب $f(x).g(x)$ عند $x=a$ نعيد كتابة المسألة لتأخذ الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك بكتابة حاصل الضرب على الصورة:

$$f(x).g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)} \quad \text{او} \quad f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}.$$

وبذلك يمكن تطبيق قاعدة لو بيتال كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 3.13.8:

أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} sin^{-1}x\,cscx$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل علي الكمية غير المعينة $0.\infty$، وبإعادة كتابة الدالة المعطاة على الصورة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^{-1}x}{sinx}$$

وبالتعويض المباشر نحصل على $\frac{0}{0}$، وبتطبيق قاعدة لو بيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2}}{\cos x} = 1.$$

ملاحظة (6):

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ فإنه يقال بأنّ $f(x) - g(x)$ لها الصيغة غير المحددة $\infty - \infty$ عند $x = a$. ولإيجاد نهاية المقدار $f(x) - g(x)$ عند $x = a$ نعيد كتابة المسألة لتأخذ الصيغة غير المحددة $0/0$ أو ∞/∞ وذلك بتوحيد المقامات إذا كان المقدار $f(x) - g(x)$ على صورة كسور وقد نحتاج إلى التحليل واخذ المضاعف المشترك كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 3.13.9:

أوجد قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل علي الكمية غير المعينة $\infty - \infty$.

بتوحيد المقامات ثم التعويض المباشر نحصل على الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

وبتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x}$$

وبتطبيق قاعدة لو بيتال مرةً أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x\sin x+\cos x+\cos x}=\frac{0}{2}=0$$

ملاحظة (7):

أيُّ حالة من حالات عدم التعيين التالية:

$$(1)^{\pm\infty},(\pm\infty)^0,(0)^0$$

يمكن التخلص منها كما هو موضح في الأمثلة التالية:

مثال 3.13.10:

أوجد قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على الصيغة غير المعينة وهي 0^0، وللتخلص منها نضع $y=x^x$

ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x$$

ثم نأخذ نهاية الطرفين ونطبق قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=0$$

ولما كانت الدالة الأسية متصلة فإن:

$$\lim_{x\to 0^+} y=e^0=1.$$

مثال 3.13.11:

أثبت أن:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على الصيغة غير المعينة وهي: ∞^0 وللتخلص منها نضع:

$$y = x^{1/x}$$

ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على: $\ln y = \frac{1}{x}\ln x$

ثم نأخذ نهاية الطرفين ونطبق قاعدة لو بيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ولما كانت الدالة الأسّية متصلة فإنّ:

$$\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1.$$

مثال 3.13.12:

أوجد قيمة النهاية: $\lim_{x\to 1^+} (x)^{1/\ln(2x-1)}$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على الصيغة غير المعينة وهي: 1^∞ وللتخلص منها نضع:

$$y = (x)^{1/\ln(2x-1)}$$

ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\ln y = \frac{1}{\ln(2x-1)}\ln x$$

ثم نأخذ نهاية الطرفين ونطبق قاعدة لو بيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to1^+} \ln y = \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{\ln(2x-1)}$$

و تعطي الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$ وبتطبيق قاعدة لو بيتال مرةً أخرى نحصل على:

$$\lim_{x\to1^+} \ln y = \lim_{x\to1^+} \frac{1/x}{2/_{2x-1}} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

ولما كانت الدالة الأسية متصلة فإنّ:

$$\lim_{x\to1^+} y = e^{\frac{1}{2}}.$$

3.14 التقريب الخطي: Linear Approximation

سوف نناقش في هذا الجزء كيفية تقريب الدالة غير الخطية بدالة خطية. بفرض الدالة f قابلة للتفاضل عند x_0 فإن أفضل تقريب خطي لمنحنى الدالة في جوار النقطة $(x_0, f(x_0))$ هو خط تماس لمنحنى الدالة عند x_0 والذي يعطى من:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

و بالتالي فإنه للقيم x القريبة من x_0 نستطيع تقريبها باستخدام المعادلة :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

و تسمى تلك المعادلة بالتقريب الخطي المحلي للدالة f عند x_0 و بفرض أن $\Delta x = x - x_0$ يمكن كتابتها على الصورة:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

مثال 3.14.1:

أوجد تقريب خطي للدالة $f(x) = \sqrt[4]{x}$ عند $x_0 = 1$ ثم استخدمه في ايجاد قيمة تقريبية المقدار $\sqrt[4]{1.1}$ ثم قارن الناتج بقيمته المحسوبة باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل:

أن: $f'(x) = \frac{1}{4}(\sqrt[4]{x})^{-3}$ حيث فإن $f'(1) = \frac{1}{4}$ وبوضع $x_0 = 1$ و $\Delta x = 0.1$ في معادلة التقريب الخطي نحصل على:

$$\sqrt[4]{1.1} = f(1 + 0.1) \approx f(1) + f'(1)(0.1).$$

و تكون القيمة التقريبية لـ $\sqrt[4]{1.1}$ هي 1.025.

باستخدام الآلة الحاسب نجد أن $\sqrt[4]{1.1} = 1.02411$.

مثال 3.14.2:

أوجد تقريب خطي للدالة $f(x) = sinx$ عند $x_0 = 0$ ثم استخدمه في ايجاد قيمة تقريبية المقدار $sin2°$ ثم قارن الناتج بقيمته المحسوبة باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل:

حيث أن $f'(x) = cosx$ فإن:

$$sinx \approx sin(0) + cos(0)(x - 0).$$

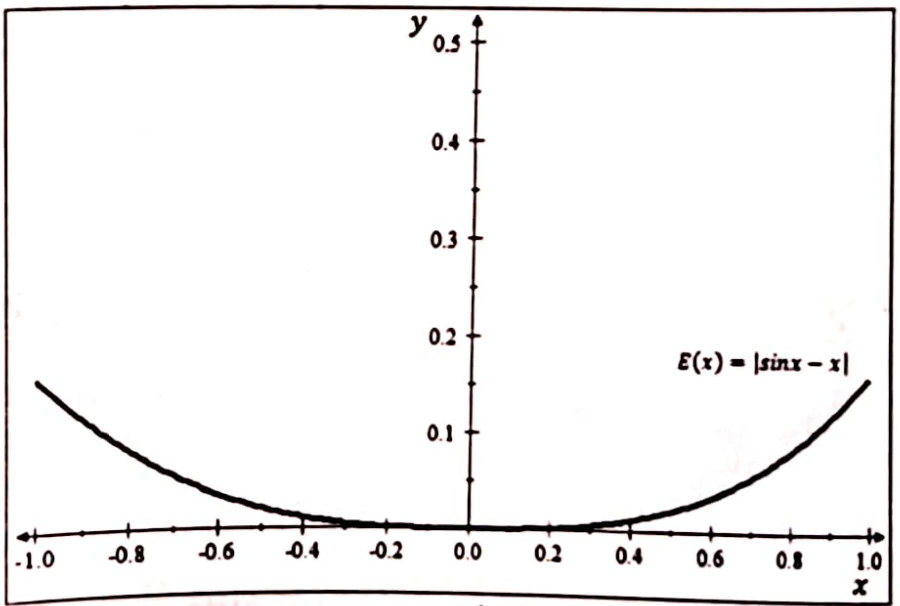
و بالتالي فإن: $sinx \approx x$.

نستطيع أن نقول أنه عندما تكون x قريبة بالدرجة الكافية من الصفر فإن $sinx \approx x$.

حيث أن 2° قيمتها بالتقدير الدائري هي $2 * \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0.03492$ فإن: $sin2^\circ \approx 0.03492$.

باستخدام الحاسبة فإن $sin2^\circ \approx 0.03489$.

من الواضح أن دقة التقريب الخطي المحلي للدالة f عند x_0 سوف تقل مع بعد قيمة x عن x_0 الخطأ المطلق على أنه القيمة المطلقة للفرق بين الدالة و قيمتها التقريبية إذا رمزنا له بالرمز $E(x)$ فإن قيمته في المثال السابق هي $E(x) = |sinx - x|$ و بملاحظة منحنى هذه الدالة نجد أنه كلما بعدت قيمة x عن الصفر تزداد قيمة الخطأ المطلق انظر الشكل (3-4).



الشكل 3-4

3.15 العوامل التفاضلية: Differentials

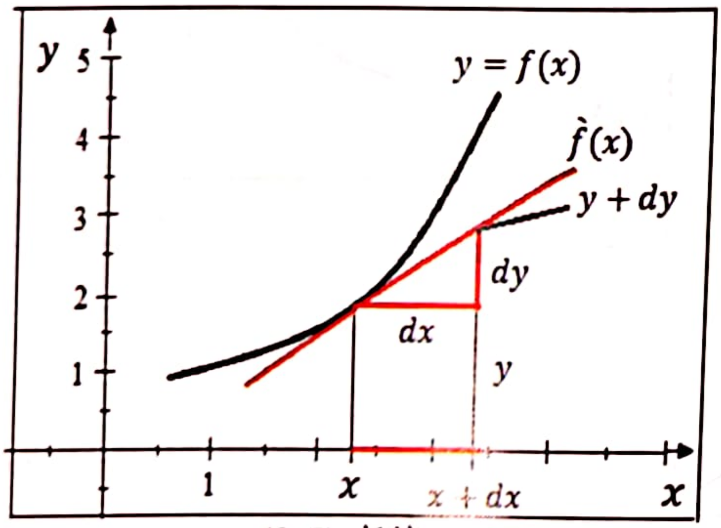
استخدمنا سابقا الرمز $\frac{dy}{dx}$ ليرمز إلى تفاضل الدالة $y = f(x)$ و في هذه الحالة فإن ما سوف نسميه بالمعاملات التفاضلية dy و dx ليس لأحدهما معنى منفصلا عن الآخر. سنحاول في هذا الجزء إيجاد معنى لهما في هذه الحالة. بفرض أن dx هو متغير مستقل يستطيع أن يأخذ أي قيمة حقيقية و بفرض أن dy يمكن كتابته على الصورة:

$$dy = f'(x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

و بفرض أن $dx \neq 0$ وبالتالي نستطيع قسمة طرفي المعادلة (i) على dx و نحصل على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

و في هذه الحالة فإن المشتقة الأولى للدالة هي النسبة بين dy و dx لاحظ الشكل (5-3).
والمعادلة (i) تسمى بالصورة التفاضلية.



الشكل (5-3)

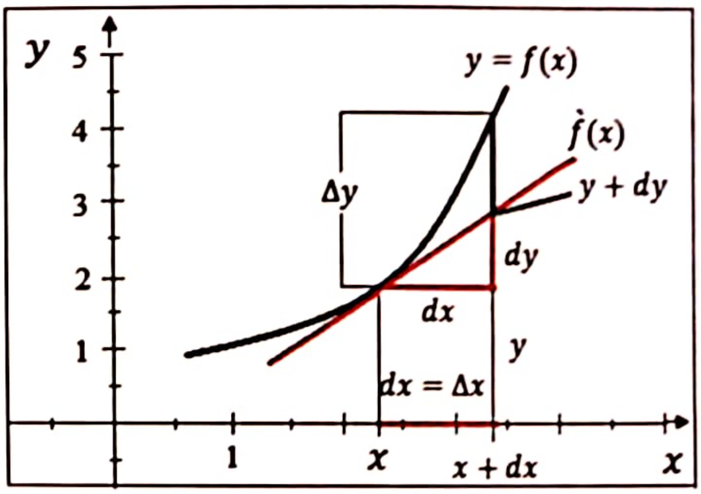
مثال 3.15.1:

عبر عن التفاضل بالنسبة لـ x للدالة $y = x^3$ في الصورة التفاضلية و ناقش العلاقة بين dy و dx عند $x = 1$.

الحل:

حيث أن $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ فإن: $dy = 3x^2dx$ عند $x = 1$ فإن $dy = 3dx$ أي أنه كلما تغيرت x بمقدار dx تغيرت y بمقدار $3dx$ على طول المماس لمنحنى الدالة $y = x^3$ عند $x = 1$، لاحظ الشكل (3-5).

يجب أن نلاحظ أن هناك فرق بين الزيادة Δy والمعامل التفاضلي dy لملاحظة هذا الفرق بفرض $dx = \Delta x$ و بالتالي فإن مقدار التغير dx ينتج عنه مقدار في التغير قيمته dy و هو التغير إلى المماس و Δy و هو التغير إلى منحنى الدالة انظر الشكل(3-6).



الشكل (3-6)

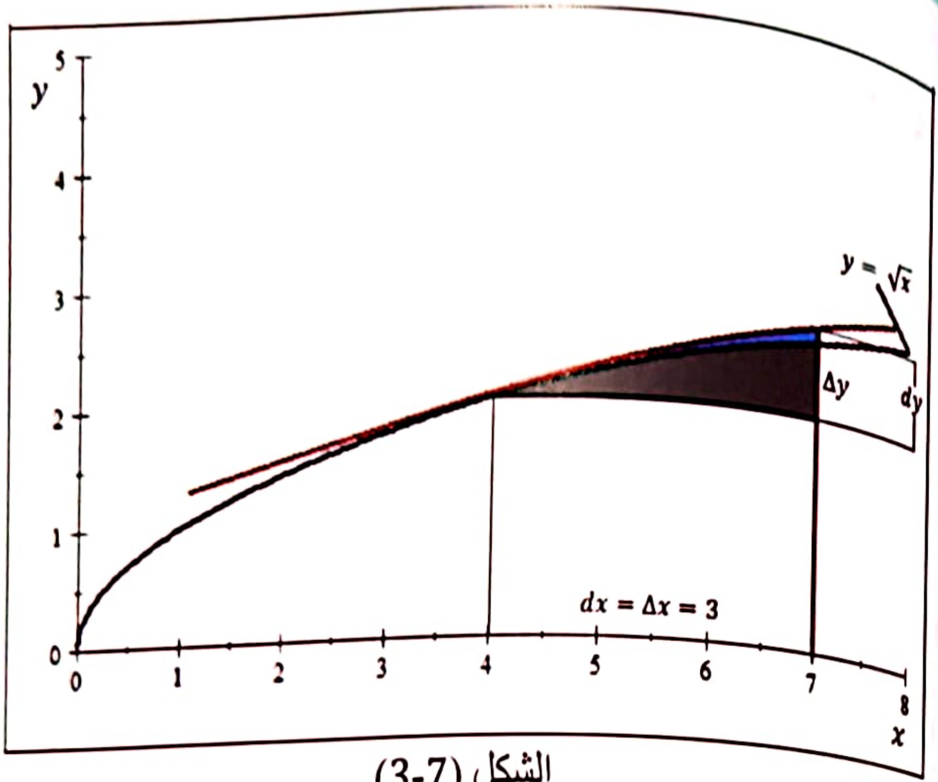
مثال 3.15.2:

إذا كانت $y = \sqrt{x}$ أوجد معادلة لـ Δy وأخرى لـ dy ثم احسب قيمتهما عند $x = 4$ و $dx = \Delta x = 3$.

الحل:

حيث أن: $y = \sqrt{x}$ و $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ فإن: $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ عند $x = 4$ و $\Delta x = 3$ فإن $\Delta y \approx 0.65$.

بينما $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ عند $x = 4$ و $\Delta x = 3$ فإن $dy = 0.75$. لاحظ الشكل (3-7).



الشكل (3-7)

تمارين

(1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الآتي:

$(i)\ y = 10x^2 + 9x - 4$

$(ii)\ y = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$

$(iii)\ y = (2x^2 - 4x + 1)(6x + 3)$

$(iv)\ y = \frac{4x - 5}{3x + 5}$

$(v)\ y = \frac{8x^2 - 4x + 10}{x - 2}$

$(vi)\ y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$(vii)\ y = 2x^2 + \sqrt{x}$

(2) لكل من الدوال الآتية أوجد f' عند $x = a$

$(i)\ f(x) = x^3 + 5x - 2\sqrt{x}$, $at\ x = 4$

$(ii)\ f(x) = (x^3 - 5)(2x - 5)$, $at\ x = 2$

$(iii)\ f(x) = \frac{3}{x + 2}$, $at\ x = -5$

(3) أوجد معادلة مماس المنحنى $y = x^3 - 4$ عند النقطة $(2,4)$.

(4) أوجد معادلة العمودي للمنحنى $y = \frac{10}{14 - x^2}$ عند النقطة $(4, -5)$.

(5) أوجد معادلة مماس المنحنى $y = 3x^2 - 4x$ الموازي للمستقيم $2x - y + 3 = 0$.

(6) أوجد معادلة مماس المنحنى $y = x^4 - 6x$ العمودي على المستقيم $x - 2y + 6 = 0$.

(7) أوجد قيمة k إذا كان المنحنى $y = x^2 + k$ يمس المستقيم $y = 2x$

(8) إذا كانت $f(4) = 3$ و $f'(4) = -5$ ، فأوجد $g'(4)$ في الحالتين:

(1) $g(x) = \sqrt{x}\, f(x)$ (2) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

(9) أوجد $F'(2)$ إذا كانت $f(2) = -1$ و $f'(2) = 4$ و $g(2) = 1$ و $g'(2) = -5$ في الحالات التالية:

(i) $F(x) = 5f(x) + 2g(x)$ (ii) $F(x) = f(x) - 3g(x)$

(iii) $F(x) = f(x)g(x)$ (iv) $F(x) = f(x)/g(x)$

(10) أوجد y' لكلٍّ من الدوال التالية:

(i) $y = \frac{sinx}{x}$ (ii) $y = sinx\, cosx$ (iii) $y = 3cosx - 2sinx$

(iv) $y = \frac{tanx}{1 + secx}$ (v) $y = cosecx\, cotx$ (vi) $y = \frac{cosx}{xsinx}$

(vii) $y = \frac{sinxsecx}{1 + xtanx}$ (viii) $y = \frac{cosecx}{tanx}$ (ix) $y = \frac{secx}{1 + tanx}$

(x) $y = (x - sinx)(x + cosx)$ (xi) $y = \frac{1 + tanx}{1 - tanx}$

(11) أوجد y' لكلٍّ من الدوال التالية:

(i) $y = (x^2 - 3x + 8)^3$ (ii) $y = (8x - 8)^{-3}$ (iii) $y = \frac{x}{(x^2 - 1)^3}$

(iv) $y = (6x - 7)^3(8x^2 + 9)^2$ (v) $y = \frac{1}{(8 - 5x + 7x^2)^{10}}$

(12) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

(i) $y = \sqrt{u}$ $, u = 2x^2 - 3$ (ii) $y = u\sqrt{u + 1}$ $, u = x^2 + 1$

(13) عند أي نقطة يكون ميل مماس الدالة $y = 2x^3 - 2x^2 + 1$ مساوياً 12 .

(14) أوجد y' عند $x = 2$ حيث $y = \frac{(x^2-3)^2}{(3x^2-1)^3}$.

(15) أوجد f' لكل من الاتي:

(i) $f(x) = sinx^3$ (ii) $f(x) = sin^3x$ (iii) $f(x) = tan^4x^3$

(iv) $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{2x}}$ (v) $f(x) = \sqrt{3x - sin^2 4x}$

(vi) $f(x) = x^3 sin^2 3x$

(vii) $f(x)=\dfrac{sinx}{sec(3x+1)}$ (viii) $f(x)=[x^2-sec(4x^2-2)]^{-4}$

(16) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الدوال التالية:

(i) $y=\dfrac{x}{lnx}$ (ii) $ln\dfrac{y}{x}+xy=1$ (iii) $lnxy+x+y=2$

(iv) $x=ln(x+y+1)$ (v) $y=e^{-3x^2}$ (vi) $y=e^{x}(x^2+e^{x})$

(vii) $y=ln(e^{x}+e^{-x})$ (viii) $e^{y}=ln(x^3+3y)$

(ix) $y=2^{\sqrt{x}}$ (x) $ye^{2x}+xe^{2y}=1$

(xi) $y=3^{\sqrt{1-x^2}}$ (xii) $y=log_3(2^x)$ (xiii) $y=log_{10}(e^x)$

(17) مستخدماً التفاضل اللوغاريتمي أوجد y' للدوال التالية

(i) $y=\dfrac{\sqrt[3]{3-x^2}}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ (ii) $y=x^{lnx}$ (iii) $y=(1+x)^{1/x}$

(iv) $y=\sqrt{lnx}$ (v) $y=\sqrt{x+2}\,\sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[4]{x^2+2}$

(vi) $y=x^2(x^2-3)^3(x+1)^4$ (vii) $y=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x-4)^3}$

(viii) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}}$ (ix) $y=cos(lnx)$

(x) $y=ln|tanx|$ (xi) $y=\dfrac{x^2}{1+logx}$ (xii) $y=ln(sinx)$

(xiii) $y=(lnx)^{tanx}$ (xiv) $y=x^{sinx}$

(xv) $y=\sqrt{2+ln^2x}$ (xvi) $y=sin^2(lnx)$

(xvii) $y=x^3e^x$ (xviii) $y=e^{1/x^2}$ (xix) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$(xx)\ y = (sine^{x})$ $(xxi)\ y = exp\left(\sqrt{1+5x^3}\right)$

$(xxii)\ y = e^{xtanx}$ $(xxiii)\ y = ln(1 - xe^{-x})$

$(xxiv)\ y = ln(cose^{x})$ $(xxv)\ y = \dfrac{sinxcosxtan^3x}{\sqrt{x}}$

$(xxvi)\ y = log_x e$ $(xxvii)\ y = log_x 2$

(18) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الدوال التالية

$(i)\ x^2 + y^2 = 9$ $(ii)\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x}{y} = 1$ $(iii)\ x^2 = \dfrac{x+2y}{x-2y}$

$(iv)\ x^2y^2 = x^2 + y^2$ $(v)\ \sqrt{xy} + 2x = 1$ $(vi)\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

$(vii)\ (y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$ $(viii)\ (x - y)^2 = 4$

$(ix)\ xsiny + ycosx = 1$ $(x)\ \dfrac{xy^2}{1 + secy} = 1 + y^4$

$(xi)\ sin(x^2y^2) = x$ $(xii)\ tan^3(xy^2 + y) = x$

$(xiii)\ x^2 = \dfrac{coty}{1 + secy}$ $(xiv)\ x^4 + 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

(19) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الدوال التالية معتبراً y المتغير المستقل:

$(i)\ x^4 + y^4 = 12x^2y$ $(ii)\ y = 2x^3 - 5x$ $(iii)\ y^2 = 2x - 3$

(20) في كلٍّ من الدوال التالية استخدم التفاضل الضمني للحصول على ميل مماس المنحنى عند النقطة المعطاة:

$(i) x^4 + y^4 = 16\ ,\ \left(1, \sqrt[4]{15}\right)$

$(ii)\ y^3 + yx^2 + x^2 - 3y^2 = 0, (0,3)$

$(iii)\ x^{2/3} + y^{2/3} = 4,\ \left(1, 3\sqrt{3}\right)$

(iv) $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)\,,(3,1)$

(21) أوجد قيمة كل من a و b في معادلة المنحنى $x^2y+ay^2=b$ إذا كانت النقطة (1,1) تقع على المنحنى والمماس عند هذه النقطة هو $4x+3y=7$.

(22) أوجد $\frac{d}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ في كلٍّ من الحالات التالية:

(i) $x=t^2+t \quad ,y=t+1$ (ii) $x=t^2+t \quad ,y=t^2-t$

(iii) $x=1+cost \;,y=-2+sint$ (iv) $x=2+cosht\,,y=-1+$
$sinht$

(v) $x=e^t+t \quad ,y=e^t+e^{-t}$ (vi) $x=3cost \quad ,y=2sint$

(vii) $x=4t \quad ,y=3\sqrt{1-t^2}$ (viii) $x=3sin^2t \quad ,y=3cott$

(ix) $x=e+t \quad ,y=ln(t+e^t)$ (x) $x=4e^{-t} \quad ,y=2e^t$

(xi) $x=ln(1+t) \quad ,y=t-tan^{-1}t$

(xii) $x=asin^3t \quad ,y=acos^3t \quad , \; a\equiv const$

(23) مستخدماً قاعدة لو بيتال احسب قيمة النهايات التالية:

(i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-5x+1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+sinx}{tan4x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-sinx}{(xsinx)^{3/2}}$

(iv) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{sin3x}$ (v) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}2x-2sin^{-1}x}{x^3}$ (vi) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tan^2x}{sec2x-1}$

(vii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln(1+2x^2)}{ln(1+3x)}$ (viii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-4x-3}{3x^3+8x^2+7x+2}$ (ix) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{lnx}$

(x) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(lnx)}{ln(x+1)}$ (xi) $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}$

(xii) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^2+2x-3}\right)$ (xiii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{xsinx}-\frac{1}{x^2}\right)$

(xiv) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (xv) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

(xvii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ (xviii) $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{1/x}$

(xix) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x\ln x}$ (xx) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{\sqrt{x}-1}$

(xxi) $\lim_{x\to 0} (1+\sinh x)^{2/x}$ (xxii) $\lim_{x\to 0^+} (\sinh x)^{\tan x}$

(xxiii) $\lim_{x\to \pm\infty} \tanh x$ (xxiv) $\lim_{x\to \pm\infty} (\cosh x-\sinh x)$.

(24) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x = 9$ ، فأوجد قيمة n .

(25) في كلٍّ من التمارين التالية بيّن إنّ قاعدة لو بيتال لا يمكن تطبيقها لحساب قيمة النهاية، ثم احسب قيمة النهاية إن وجدت باستخدام أي طريقة أخرى:

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\sin x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\sin 2x)}{x+1}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\sin 2x)}{x^2+1}$

(26) إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{\frac{k}{x}}, & x \neq 0 \\ 5 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

أوجد قيمة k بحيث تكون f متصلة عند $x = 0$.