المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك خالد المجمع الاكاديمي بمحايل		العام الدراســـــي :1436-1437هـ كليـــــــــــــة : العلوم قســــــــــــم:الرياضيات المقـــــــــــرر: 424 ريض3 الشعبـــــــــــة: 396 المـــــــــــــــدة: ساعة ونصف

الاختبار الأول في مادة: التحليل في عدة متغيرات(نموذج إجابة)

(الفصل الدراسي الأول)

التمرين الأول (10 درجات)

ضعي علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يأتي مع تبرير النقطة الأخيرة:

ا. ليكن $n \in \mathbb{N}$. المسافة بين عنصرين مختلفين في $\mathbb{R}^n$ يمكن أن تكون مساوية للصفر. (X)

ب- في $\mathbb{R}^2$ معيار المتجه $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ يساوي صفر. (X)

ج- الضرب الداخلي للمتجهين $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ هو صفر. (X)

د- في $\mathbb{R}^3$ المتجهان $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ متعامدان. (√)

هـ - إذا كانت A مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n$ و كانت $B \subset \mathbb{R}^n$ فإن $A + B$ تكون مغلقة. (X)

ج- في $\mathbb{R}$، المجموعات المترابطة هي ....الفترات..................والمجموعات المتراصة هي التي تكون محدودة و.......مغلقة..

د- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لاصقة المجموعة A الجزئية من $\mathbb{R}^n$ هي أصغرمجموعة..........مغلقة... تحوي ...A..

ونجد بالتالي أن لاصقة المجموعة $B = \{300\} \cup]-90,200[$ في $\mathbb{R}$ هي المجموعة

$\bar{B} =$.... $\{300\} \cup [-90,200]$...

التمرين الثالث (9درجات)

ا- ليكن $n, m \in \mathbb{N}$ و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ متراصة. إذا كانت $f : A \to \mathbb{R}^m$ دالة متباينة ومتصلة فبيني أن f^{-1} متصلة على $B = f(A)$.

ب- بالاعتماد على مفهوم التراص بالتعاقب بيني أن المجموعة $]1,2]$ غير متراصة.

الحـــــــــــل

ا- لتبيان أن الدالة f^{-1} متصلة يكفي أن نبين بأن $(f^{-1})^{-1}(G)$ مغلقة في $B = f(A)$ لكل G مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n$.

والآن إذا كانت G مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n$ ووضعنا في الحسبان كون A مجموعة متراصة لوجدنا أن $A \cap G$ مجموعة متراصة في $\mathbb{R}^n$. ونحصل بالتالي على أن المجموعة

$$(f^{-1})^{-1}(G) = f(A \cap G)$$

متراصة مما يعني أنها مغلقة في $B = f(A)$.

ب- من الواضح أن المتتالية $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_n$ محتواة في المجموعة $]1,2]$ وهي متتالية متقاربة في $\mathbb{R}$ نحو العدد 1 ونجد بالتالي أن جميع متتالياتها الجزئية تتقارب نحو العدد 1 مما يبين أنه لا توجد أي متتالية جزئية من $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_n$ تتقارب نحو عنصر من $]1,2]$. إذا $]1,2]$ ليست متراصة بالتعاقب وبالتالي ليست متراصة.

و- إذا كانت $A \subset \mathbb{R}^n$ مترابطة وكانت $f: A \to \mathbb{R}^n$ متصلة فإن $f(A)$ متراصة. (X)

ز- النقطة اللاصقة إما أن تكون نقطة معزولة أو نقطة تراكم. (√)

ح- ليكن $n, m \in \mathbb{N}$ و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$. كل دالة $f: A \to \mathbb{R}^m$ تكون متصلة عند كل نقطة معزولة. (√)

ط- $\frac{1}{2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$. (X)

<u>التبرير</u>

بملاحظة أن

$$\lim_{x=y\to 0} \frac{x(x)}{x^2+(x)^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{y=-x\to(0,0)} \frac{x(-x)}{x^2+(-x)^2}$$

يظهر ان النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غير موجودة.

<u>التمرين الثاني</u> (6درجات)

إملئي الفراغات التالية بكلمات مناسبة:

ا- ليكن $n \in \mathbb{N}$ و A مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^n$. تكون A مترابطة إذا وفقط إذا كانت كل نقطتين في A.............يمكن وصلهما بمضلع يقع بأكمله في A......

ب- ليكن $n, m \in \mathbb{N}$ و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ متراصة. نقول إن $f: A \to \mathbb{R}^m$ متصلة عند $a \in A$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$\forall x \in A, \quad \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$