مراجعة

الرياضيات المالية

المستوى الأول – تخصص المحاسبة

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية

- إعداد وتنسيق -

صادق سعيد

- المصادر-

كتاب مبادئ الرياضيات لـ (د. محمد القاضي + أ. أحمد أبو بكر)

أسئلة أ. أحمد أبو بكر بمنتدى المناقشة

" تم التحديث في ذو القعدة ١٤٣٦هـ"

المجموعات

تعريف المجموعات : هي مجموعة من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تحديدها بدقة، وتُدعى هذه الأشياء (عناصر المجموعة) .

*** مجموعة الأعداد الطبيعية N :**

هي الأعداد الموجبة التي يمكن كتابتها بدون كسور وأرقام عشرية .

$N = \{1,2,3,4,5,...\}$

*** مجموعة الأعداد الكلية W :**

هي الأعداد الموجبة التي يمكن كتابتها بدون كسور وأرقام عشرية، بالإضافة إلى الصفر .

$W = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

*** مجموعة الأعداد الصحيحة Z :**

هي الأعداد الموجبة والسالبة التي يمكن كتابتها بدون كسور وأرقام عشرية، بالإضافة إلى الصفر .

$Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

*** مجموعة الأعداد النسبية Q :**

هي الأعداد التي يمكن كتابتها على شكل بسط ومقام مِن أعداد صحيحة (أي أنها يمكن أن تكون أرقام عشرية عند تبسيط الكسر) .

$Q = \{\frac{m}{n}\}$ بشرط أن m,n ينتميان إلى مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

*** مجموعة الأعداد غير النسبية I :**

هي الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل بسط ومقام مِن أعداد صحيحة .

$I = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{2}+1, 0.12571093..., \pi, e, ...\}$

*** مجموعة الأعداد الحقيقية R :**

وهي تشمل الأعداد النسبية والأعداد الغير نسبية .

الانتماء

$2 \in N$ (أي أن العدد ٢ ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية N) .

$-1 \notin N$ (أي أن العدد -١ لا ينتمي لمجموعة الأعداد الطبيعية N) .

المجموعة الجزئية

إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{2,3\}$ و $C = \{1,2,3,4\}$ فإن : $B \subset A$ و $C \subseteq A$

نلاحظة أن العلاقة بين مجموعات الأعداد هكذا : $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

المجموعة الخالية Ø

هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ، ورمزها { } .

طرق التعبير عن المجموعات

١. طريقة كتابة العناصر.

مثلاً نكتب مجموعة أول خمسة أعداد فردية هكذا :

$A = \{1,3,5,7,9\}$

٢. طريقة الصفة المميزة .

مثلاً نكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية هكذا :

$A = \{x \in N \mid$ حيث x عدد فردي$\}$

٣. طريقة التسلسل النمطي .

مثلاً نكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية هكذا :

$A = \{2,4,6,8,...\}$ بحيث نكتب بعض العناصر ونترك للقارئ تخيل باقي العناصر .

جبر المجموعات

*** الاتحاد ∪ :**

عند اتحاد المجموعة A مع المجموعة B فإن المجموعة الناتجة C تحوي جميع عناصر المجموعتين A و B .

ومن خصائص الاتحاد :

$A \cup B = B \cup \mathrm{A}$
$A \cup A = A$
$A \cup \emptyset = A$

*** التقاطع ∩ :**

عند تقاطع المجموعة A مع المجموعة B فإن المجموعة الناتجة C تحوي العناصر المشتركة بين المجموعتين A و B .

ومن خصائص التقاطع :

$A \cap B = B \cap \mathrm{A}$
$A \cap A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

*** المجموعة الشاملة U والمجموعة المتممة A^c :**

المجموعة الشاملة : هي مجموعة تحوي عناصر جميع مجموعات أخرى .

مثلاً إذا كانت A = {1,2,5} و B = {0,2,3,4} و C = {5,6,7,8} فإن :

المجموعة الشاملة U هي : U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

المجموعة المتممة : هي العناصر التي تنتمي للمجموعة الشاملة ولا تنتمي إلى مجموعة تكون جزء من المجموعة الشاملة .

مثلاً إذا كانت A = {1,2,5} و B = {0,2,3,4} و C = {5,6,7,8} و U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} فإن :

المجموعة المتممة A^c هي : A^c = {0,3,4,6,7,8,9}

ومن خصائص المجموعة الشاملة والمجموعة المتممة :

١. $\mathrm{U} \cup A = \mathrm{U}$

٢. $A^c \cup A = \mathrm{U}$

٣. $A^c \cap A = \emptyset$

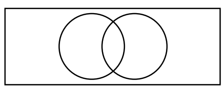
٤. $\mathrm{U} \cap A = A$

٥. $\mathrm{U}^c = \emptyset$

٦. $\emptyset^c = \mathrm{U}$

*** أشكال فن :**

حيث تُمَثَّل المجموعة الشاملة U بشكل مستطيل وبداخله المجموعات الواقعة A و B داخل المجموعة الشاملة بشكل دوائر .



مجموعة مضاعفات عدد صحيح

مجموعة مضاعفات العدد k ورمزها M_k كما يلي : $M_k = \{0, \pm k, \pm 2k, \pm 3k, \ldots\}$

مجموعة قواسم عدد صحيح

مجموعة قواسم العدد b ورمزها D_b كما يلي : $D_b = \{\pm 1, \pm a, \pm \mathrm{c}, \pm \mathrm{e}, \ldots\}$

الأعداد الأولية

تعريف الأعداد الأولية : هي الأعداد التي تقبل القسمة على نفسها وعلى واحد، كما يلي : $D_p = \{1, \mathrm{p}\}$

وهذه بعض الأعداد الأولية : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, ...} .

تحليل الأعداد الصحيحة إلى أعداد (عوامل) أولية

حيث نقوم بقسمة العدد على الأعداد الأولية حتى يصبح الناتج واحد، كما يلي :

2	**24**
2	12
2	6
3	3
	1

إذاً .. الأعداد الأولية للعدد 24 هي : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

القاسم المشترك الأكبر

خطوات إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :

١. نحلل الأعداد إلى عواملها الأولية .

٢. نأخذ العوامل المشتركة صاحبة الأس الأصغر .

٣. نضرب العوامل التي أخذناها ببعضها، فيكون الناتج هو القاسم المشترك الأكبر .

المضاعف المشترك الأصغر

خطوات إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين :

١. نحلل العددين إلى عواملهما الأولية .

٢. نأخذ العوامل المشتركة صاحبة الأس الأكبر، ونأخذ بقية العوامل غير المشتركة أيضاً .

٣. نضرب العوامل التي أخذناها ببعضها، فيكون الناتج هو المضاعف المشترك الأصغر .

جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد النسبية (الكسور)

*<u>في الجمع والطرح</u> : أولاً نوحد المقامات، ثانياً نأخذ المقام ونجري عملية الجمع أو الطرح على البسط فقط، كما يلي : $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$

*<u>في الضرب</u> : نضرب البسط في البسط والمقام في المقام، كما يلي : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

*<u>في القسمة</u> : نقلب القسمة إلى ضرب ونقلب بسط ومقام العدد النسبي الثاني ثم نكمل عملية الضرب، كما يلي : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$

التحقق من صحة العبارة النسبية

للتحقق من صحة العبارة النسبية $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نقوم باستخدام طريقة المقص $ad = cb$ ، وعند تساوي الناتجين ستكون العبارة صحيحة .

تبسيط الكسور

نقوم بإجراء عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة على الكسور للوصول إلى أبسط عدد صحيح (أو كسر بسطه ومقامه عددان صحيحان) ممكن .

مقارنة الأعداد النسبية

للمقارنة بين العددين النسبيين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نقوم بِـ:

١. جعل إشارة المقامات موجبة إذا لزم الأمر .

٢. نستخدم طريقة المقص $ad = cb$.

٣. نقارن الناتج كما يلي :

* إذا كان $ad > cb$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
* إذا كان $ad < cb$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
* إذا كان $ad = cb$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

تحويل الأعداد الكسرية والعشرية والمئوية

*** لتحويل العدد الكسري إلى عدد عشري .**

فإننا نقسم بسط العدد الكسري $\frac{a}{b}$ على المقام فنحصل على ناتجَين :

أ) عدد عشري منتهي، مثل : $\frac{1}{4} = 0.25$

ب) عدد عشري دوري غير منتهي، مثل : $\frac{5}{6} = 0.8333 \ldots = 0.8\overline{3}$ (حيث يعني الخط أن العدد 3 هو الجزء الدوري المكرر إلى ما لا نهاية)

*** لتحويل العدد العشري إلى عدد كسري .**

أ) لتحويل العدد العشري المنتهي فإننا نجعل العدد بدون الأصفار التي على اليسار في البسط ثم نكتب في المقام الرقم واحد وعلى يمينه أصفار بعدد الخانات التي بعد الفاصلة العشرية، مثل : $\frac{13}{10000} = 0.0013$ ومثال آخر $\frac{27}{50} = \frac{54}{100} = 0.54$

ب) لتحويل العدد العشري الدوري الغير منتهي فإن هناك حالتين :

في حال لَم يحوي العدد الدوري جزء ثابت فإننا نجعل العدد بدون الأصفار التي على اليسار في البسط ثم نكتب في المقام الرقم تسعة مكرراً بعدد الخانات التي بعد الفاصلة العشرية، مثل : $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0.\overline{3}$ ومثال آخر $\frac{5}{11} = \frac{15}{33} = \frac{45}{99} = 0.\overline{45}$

في حال كان العدد الدوري يحوي جزء ثابت نتبع الخطوات التالية :

١. نفترض العدد العشري المطلوب في السؤال (مثلاً $0.8\overline{3}$) هو : $x = 0.8333 \ldots$

٢. نضرب الطرفين في 10 فتصبح المعادلة السابقة : $10x = 8.333 \ldots$

٣. نضرب الطرفين في 10 مرة أخرى فتصبح المعادلة السابقة : $100x = 83.33 \ldots$

٤. نطرح معادلة الخطوة ٢ مِن معادلة الخطوة ٣ كما يلي : $\begin{array}{l} 100x = 83.33\ldots \\ \underline{10x = 8.333\ldots \quad -} \\ 90x = 75 \end{array} \Longrightarrow 90x = 75 \Longrightarrow x = \frac{75}{90} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

*** لتحويل العدد الكسري إلى نسب مئوية .**

فإننا نضرب العدد الكسري في 100 ونضع في الناتج رمز النسبة المئوية %، مثل : $\frac{16}{25} \times 100\% = \frac{1600}{25} = 64\%$

*** لتحويل النسبة المئوية إلى عدد كسري .**

فإننا نقسم النسبة المئوية على 100 ثم نبسط الناتج إلى أبسط عدد كسري، مثل : $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

*** لتحويل العدد العشري إلى نسب مئوية .**

فإننا نضرب العدد العشري في 100 بتحريك الفاصلة خانتين لليمين ونضع في الناتج رمز النسبة المئوية %، مثل : $0.08 \times 100\% = 8\%$

*** لتحويل النسبة المئوية إلى عدد عشري .**

فإننا نقوم بتحريك الفاصلة خانتين لليسار ونحذف في الناتج رمز النسبة المئوية %، مثل : $25\% = 0.25$

خصائص (جمع وضرب) الأعداد الحقيقية

١. الإبدال .

* في الجمع : $a + b = b + a$ * في الضرب : $ab = ba$

٢. التجميع .

* في الجمع : $a + (b + c) = (a + b) + c$ * في الضرب : $a(bc) = (ab)c$

٣. التوزيع .

$a(b + c) = (ab) + (ac)$

٤. العنصر المحايد .

* في الجمع هو 0 لأن : $a + 0 = 0 + a = a$ * في الضرب هو 1 لأن : $a1 = 1a = a$

٥. المعكوس .

* المعكوس الجمعي للعدد : a هو $-a$ * المعكوس الضربي للعدد : a هو $-\frac{1}{a}$

طرح وقسمة الأعداد الحقيقية

* $a - b = a + (-b)$

* $a \div b = a\left(\frac{1}{b}\right)$

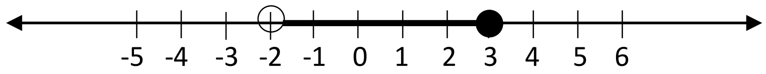
خط الأعداد الحقيقية

* **العبارات الرياضية (أو المتباينات أو المتراجحات) .**

$a > b$	a أكبر من b
$a \geq b$	a أكبر من أو يساوي من b
$a < b$	a أصغر من b
$a \leq b$	a أصغر من أو يساوي من b

* **الفترات الحقيقية .**

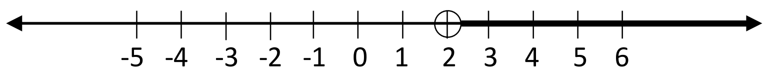
مثلاً نمثل المتباينة $-2 < x \leq 3$ في خط الأعداد الحقيقية كما يلي :



ونكتب المتباينة السابقة على صورة فترة كما يلي : $(-2,3]$ وتُسَمَّى فترة نصف مغلقة من اليمين ونصف مفتوحة من اليسار .

* **نصف الفترة .**

مثلاً نمثل المتباينة $x > 2$ في خط الأعداد الحقيقية كما يلي :



ونكتب المتباينة السابقة على صورة فترة كما يلي : $(2, \infty[$ وتُسَمَّى فترة نصف مفتوحة من اليسار .

القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هي إزالة الإشارة السالبة منه فقط كما يلي : $|a| = a$ ، $|-a| = a$

القوى والأسس وقوانينها

الحالة	القانون
الأس هو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه	$a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{n} \quad , \quad a^0 = 1$
عند الضرب نجمع الأسس	$a^m a^n = a^{m+n}$
عند القسمة نطرح الأسس	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
عند تفكيك عدد مرفوع إلى أُسَّين	$(a^m)^n = a^{m.n}$
عند تفكيك أس عددين مضروبين	$(ab)^m = a^m b^m$
عند تفكيك أس عددين مقسومين	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
عند تفكيك الأس السالب	$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{b^m}{a^m}$

الجذور وقوانينها

الحالة	القانون
عند تحويل الأس الكسري لعدد موجب إلى جذر	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad , \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
عند تحويل الأس الكسري لعدد سالب إلى جذر	$(-a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-a} \quad , \quad -a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{a}$
عند تفكيك جذر يحوي عددين مضروبين	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
عند تفكيك جذر يحوي عددين مقسومين	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

اللوغاريتمات وقوانينها

الصورة الأسية $a^b = c$ يمكن كتابتها بالصورة اللوغاريتمية $\log_a c = b$ وتُقرأ (لوغاريتم العدد c للأساس a هو b) .

الحالة	القانون
لوغاريتم العدد واحد لأي أساس = صفر	$\log_a 1 = 0$
لوغاريتم عدد لأساس نفس العدد يساوي واحد	$\log_a a = 1$
عند تفكيك لوغاريتم عددين مضروبين في بعضهما	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
عند تفكيك لوغاريتم عددين مقسومين من بعضهما	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
عند تفكيك لوغاريتم عدد مرفوع إلى أس	$\log_a b^r = r\log_a b$
عند كتابة اللوغاريتم العشري فإننا لا نكتب أساسه	$\log_{10} b = \log b$

العبارة الجبرية

*** الحد الجبري .**

الحد الجبري	5	x	$-3x^2y^3$	$7xy^2z$
معامله	5	1	-3	7
درجته	0	1	5	4

<u>ملاحظة :</u> درجة الحد الجبري هي مجموع أسس متغيراته .

*** العبارة الجبرية المركبة (وهي عبارة عن جمع أو طرح الحدود الجبرية) .**

العبارة الجبرية المركبة	$x^3 - 2x^2 + 5$	$4x^2y^3 - 5xy^2$	$-2xy + 2z + 3x^2$
درجتها	3	5	2

<u>ملاحظة :</u> درجة العبارة الجبرية المركبة هي أعلى درجة حد من حدودها .

جمع وطرح وضرب وقسمة العبارات الجبرية

*** جمع/طرح العبارات الجبرية .**

عند جمع/طرح العبارات الجبرية نقوم بجمع/بطرح معاملات الحدود المتشابهة التي لها نفس المتغيرات ونفس الدرجة فقط .

*** حد جبري × حد جبري .**

نضرب المعاملات معاً ونجمع أسس المتغيرات المتشابهة .

*** حد جبري × عبارة جبرية .**

نضرب الحد الجبري في كل حد من حدود العبارة الجبرية بنفس طريقة ضرب حد جبري في حد جبري .

*** عبارة جبرية × عبارة جبرية .**

نضرب كل حد من العبارة الجبري الأولى في كل حد من العبارة الجبرية الثانية بنفس طريقة ضرب حد جبري في حد جبري .

*** الفرق بين مربعين .**

$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

*** حد جبري ÷ حد جبري .**

نقسم المعاملات ونطرح أسس المتغيرات المتشابهة .

*** عبارة جبرية ÷ حد جبري .**

نقسم كل حد من حدود العبارة الجبرية على الحد الجبري بنفس طريق قسمة حد جبري على حد جبري .

تحليل العبارات الجبرية

*** التحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر.**

سنشرح خطوات إيجاد العامل المشترك الأكبر لحدود عبارة جبرية ثم تحليل تلك العبارة الجبرية باستخدام العبارة الجبرية التالية : $8x^3 + 10x$

١. نحلل كل حد إلى عوامله الأولية .

$$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x = 2^3 \times x^3$$
$$10x = 2 \times 5 \times x = 2 \times 5 \times x$$

٢. نأخذ العوامل المشتركة صاحبة الأس الأصغر .

$$2 \times x$$

٣. نضرب العوامل التي أخذناها بعضها، فيكون الناتج هو العامل المشترك الأكبر .

$$2x$$

٤. نقسم العبارة الجبرية على العامل المشترك الأكبر .

$$\frac{8x^3 + 10x}{2x} = 4x^2 + 5$$

٥. يكون تحليل العبارة الجبرية عبارة عن عملية ضرب العامل المشترك الأكبر في ناتج القسمة في الخطوة (٤) .

$$8x^3 + 10x = (2x)(4x^2 + 5)$$

*** تحليل ثلاثي الحدود (أي كثيرة حدود من الدرجة الثانية) في حال معامل x^2 يساوي 1 .**

١. نرتب الحدود تنازلياً حسب قوى x كما يلي : $x^2 + bx + c$.

٢. نبحث عن عددين d و e بحيث أن ناتج ضربهما في بعضهما يساوي c وناتج جمعهما مع بعضهما يساوي b .

٣. يصبح التحليل في النهاية كما يلي : $x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$ ولكن هناك ملاحظات :

في حال $+c$ فإن d و e لهما نفس الإشارة، وإشارتهما نفس إشارة b .

في حال $-c$ فإن d و e لهما إشارتين مختلفتين، والأكبر بينهما له نفس إشارة b .

*** تحليل الفرق بين مربعين .**

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

*** تحليل فرق ومجموع مكعبين .**

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \pm xy + y^2)$$

المعادلات

*** حل معادلة خطية في مجهول واحد $ax + b = 0$.**

١. نضع الحدود التي تحوي المجهول x في جهة، والقيم الثابتة في جهة .

٢. نستخدم عمليات جمع وطرح وضرب وقسمة العبارات الجبرية للوصول إلى $x = c$.

*** حل معادلتين خطيتين في مجهولين $a_1x + b_1y = c_1$ و $a_2x + b_2y = c_2$.**

<u>الطريقة الأولى:</u> استنتاج أحد المجهولين بدلالة المجهول الآخر، ثم إيجاد المجهول الثاني بتعويض قيمة المجهول الأول .

مثلاً: المعادلة (١) هي : $2x + 3y = 2$ ، المعادلة (٢) هي : $x - y = 6$

١. من المعادلة (٢) نجد أن $x = y + 6$.

٢. نعوض $x = y + 6$ في المعادلة (١) لنجد أن $2(y + 6) + 3y = 2$ وبالتالي فإن $y = -2$.

٣. نعوض $y = -2$ في المعادلة (١) أو (٢) لإيجاد قيمة المجهول الثاني فنحصل على $x = 4$.

<u>الطريقة الثانية:</u> استبعاد أحد المجهولين بطرح المعادلتين بعد توحيد إشارة وقيمة معامل المجهول الذي نستهدف استبعاده .

مثلاً: المعادلة (١) هي : $3x - y = 5$ ، المعادلة (٢) هي : $x + 2y = 4$

١. نضرب المعادلة (١) في العدد -2 لتوحيد إشارة وقيمة معامل y فتنتج المعادلة (٣) وهي $-6x + 2y = -10$.

٢. نطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) فنحصل على $x = 2$.

٣. نعوض $x = 2$ في المعادلة (١) أو (٢) لإيجاد قيمة المجهول الثاني فنحصل على $y = 1$.

*** حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد $ax^2 + bx + c = 0$.**

١. نحول المعادلة إلى الصورة العامة $ax^2 + bx + c = 0$.

٢. نوجد المميز = $b^2 - 4ac$.

في حال كان المميز > الصفر فإن للمعادلة جذرين (حلّين) .

في حال كان المميز = الصفر فإن للمعادلة جذرين (حل واحد) .

في حال كان المميز < الصفر فإن المعادلة لا جذور لها (ليس لها حل) .

٣. في حال كان المميزة ≤ الصفر فإننا نوجد حل المعادلة باستخدام القانون العام وهو : $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

تمثيل نقطة في المستوى الديكارتي

النقطة P في المستوى الديكارتي عبارة عن زوج مرتب (a, b) ، حيث a هو الإحداثي السيني x بينما b هو الإحداثي الصادي y ، فمثلاً النقطة $P(3,1)$ لتحديدها على المستوى الديكارتي فإننا نحدد موقعها على المحور X وموقعها على المحور Y فتكون نقطة تقاطعهما هي موقع النقطة P، ومن ذلك نلاحظ أن :

١. النقطة $P(+x, +y)$ تقع في الربع الأول .

٢. النقطة $P(-x, +y)$ تقع في الربع الثاني .

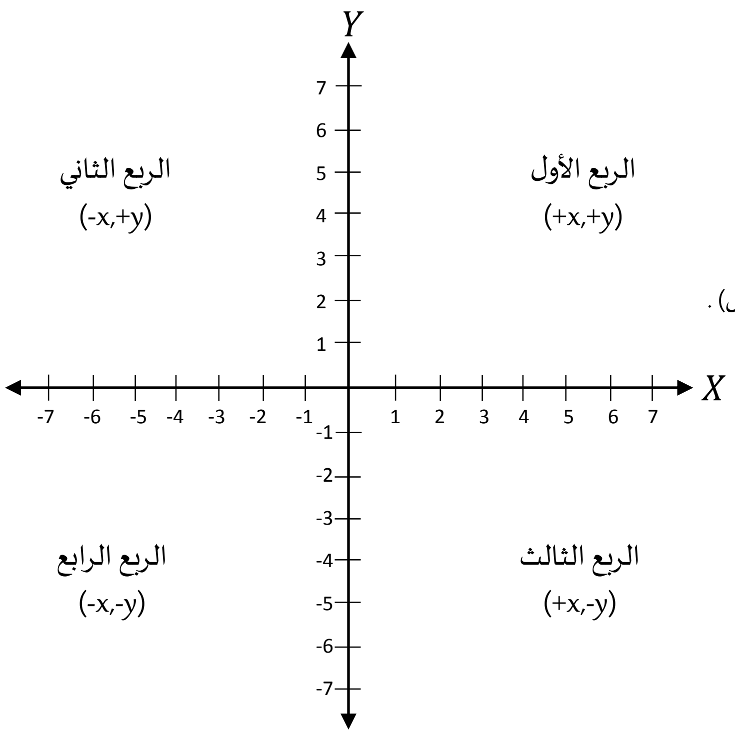
٣. النقطة $P(+x, -y)$ تقع في الربع الثالث .

٤. النقطة $P(-x, -y)$ تقع في الربع الرابع .

٥. النقطة $P(0, \pm y)$ تقع على المحور Y .

٦. النقطة $P(\pm x, 0)$ تقع على المحور X .

٧. النقطة $P(0,0)$ تقع على المحورين X, Y (أي تقع في نقطة الأصل) .



معادلة المستقيم في المستوى الديكارتي

أي نقطة $P(x, y)$ تقع على مستقيم في المستوى الديكارتي فإن تلك النقطة لابد أن تحقق معادلة المستقيم $ax + by + c = 0$.

تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي بمعرفة نقطتين تقعان عليه ثم رسم خط مستقيم يصل النقطتين معاً وذلك بالخطوات التالية :

١. نفترض أن $x = 0$ ثم نوجد y من المعادلة المطلوبة (مثلاً $ax + by = c$) فنعرف النقطة الأولى $P_1(x_1, y_1)$.

٢. نفترض أن $x = 1$ ثم نوجد y من المعادلة المطلوبة (مثلاً $ax + by = c$) فنعرف النقطة الثانية $P_2(x_2, y_2)$.

٣. نرسم النقطتين في المستوى الديكارتي ثم نوصل بينهما بخط مستقيم .

ميل المستقيم بمعلومية معادلته

١. نحول المعادلة إلى الصورة العامة $ax + bx + c = 0$.

٢. نوجد الميل : $m = -\frac{a}{b}$.

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه

إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين تقعان على مستقيم ما، فإن ميله : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه

إذا كان لدينا ميل مستقيم m ونقطة $P(x_1, y_1)$ واقعة عليه، فإن معادلة المستقيم : $y - y_1 = m(x - x_1)$

معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه

إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين تقعان على مستقيم ما، فإننا لمعرفة معادلة المستقيم نتبع الخطوات التالية :

١. نوجد ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه كما ذكرنا في درس سابق : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

٢. نوجد معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه كما ذكرنا في درس سابق : $y - y_1 = m(x - x_1)$.

المتتالية

تعريف المتتالية : هي مجموعة من العناصر المرتبة بطريقة معينة، وقد تكون منتهية أو غير منتهية، مثل متتالية الأعداد الفردية (... ,1,3,5,7,9,11,13,15) .

*** حدود المتتالية .**

في المثال السابق نجد أن الحد الأول هو (1) والحد الثاني هو (3) والحد الخامس هو (9) .

*** الحد العام للمتتالية .**

في المثال السابق نجد أن الحد العام هو $(2n - 1)$ ويمكن أن نرمز لهذه العلاقة الجبرية بالرمز a_n ، أي أن $a_n = 2n - 1$.

*** طرق كتابة المتتالية .**

أ) المتتالية المنتهية يمكن أن تُكتَب على الصورة $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ أو $\{a_k\}_{k=1}^{n}$.

ب) المتتالية الغير منتهية يمكن أن تُكتَب على الصورة $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ أو $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

*** كيفية إيجاد حدود متتالية .**

في المتتالية الحسابية إذا علمنا الحد العام (مثلاً $a_n = 6n - 20$) يمكننا إيجاد أي حد (أو أي عدد من الحدود) مطلوب، وذلك بتعويض n بأرقام الحدود المطلوبة (مثلاً $1, 2, 3, 4, 5$) فحصل على قيم الحدود المطلوبة (مثلاً $-14, -8, -2, 4, 10$) .

*** كيفية إيجاد حاصل جمع حدود متتالية .**

إذا كانت $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ متتالية فإن مجموعها $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ واختصار هذا المجموع) كما يلي : $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

مثلاً : نوجد مجموع $S = \sum_{k=1}^{4}(k^2 - k)$.

$$S = \sum_{k=1}^{4}(k^2 - k) = (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) = 0 + 2 + 6 + 12 = 20$$

المتتالية الحسابية

تكون المتتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه عدداً ثابتاً، ويُسَمَّى العدد الثابت d (أساس المتتالية الحسابية) .

مثلاً : المتتالية $(10, 7, 4, 1, -2, \dots)$ أساسها $d = -3$ ، والمتتالية $(3, 3, 3, 3, 3, \dots)$ أساسها $d = 0$.

*** الحد العام للمتتالية الحسابية (الحد النوني) .**

في المتتالية الحسابية إذا علمنا الحد الأول a_1 والأساس d ، يمكننا إيجاد الحد العام بالقانون التالي : $a_n = a_1 + d(n - 1)$

مثلاً : لدينا متتالية حسابية فيها $a_1 = 3$ و $d = 2$ ، فإننا لإيجاد حدها العشرون a_{20} نوجد أولاً الحد العام بالقانون أعلاه ثم نوجد الحد العشرون.

*** مجموع أول n حداً من متتالية حسابية .**

أ) في المتتالية الحسابية إذا علمنا الحد الأول والحد الأخير، يمكننا إيجاد مجموع أول n حد بالقانون التالي : $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ب) في المتتالية الحسابية إذا علمنا الحد الأول والأساس، يمكننا إيجاد مجموع أول n حد بالقانون التالي : $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n - 1)$

حيث أن : n هو عدد حدود المتتالية، a_1 هو الحد الأول، a_n هو الحد الأخير، d هو الأساس .

المتتالية الهندسية

تكون المتتالية هندسية إذا كان حاصل قسمة أي حد والحد الذي يسبقه عدداً ثابتاً، ويُسَمَّى العدد الثابت r (أساس المتتالية الحسابية) .

مثلاً: المتتالية $(2, -4, 8, -16, 32, \ldots)$ أساسها $r = -2$.

*** الحد العام للمتتالية الهندسية (الحد النوني) .**

في المتتالية الهندسية إذا علمنا الحد الأول a_1 والأساس r يمكننا إيجاد الحد العام بالقانون التالي : $a_n = a_1 r^{n-1}$

مثلاً: لدينا متتالية هندسية فيها $a_1 = 5$ و $r = 2$ فإننا لإيجاد حدها الخامس a_5 نوجد أولاً الحد العام بالقانون أعلاه ثم نوجد الحد الخامس .

*** مجموع أول n حداً من متتالية هندسية.**

في المتتالية الهندسية إذا علمنا الحد الأول والأساس، يمكننا إيجاد مجموع أول n حد بالقانون التالي : $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$

حيث أن: n هو عدد حدود المتتالية، a_1 هو الحد الأول، r هو الأساس .

الدالة

تعريف الدالة: الدالة من مجموعة A إلى المجموعة B (وتُكتَب $f: A \to B$) هي علاقة تربط كل عنصر من عناصر A بعنصر وحيد من عناصر B .

*** شرطا تعريف الدالة .**

١. أن كل عنصر في A يجب أن يكون له صورة في B .

٢. لا يمكن أن يكون لعنصر في A صورتين مختلفتين في B .

الدالة كأزواج مرتبة

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 5, 8, 1\}$ وكانت الدالة $f: A \to B$ معرفة بالقاعدة $f(a) = 5a - 2$ يمكننا إيجاد الدالة f كأزواج مرتبة باتباع الخطوات التالية :

١. نعوض a في القاعدة $f(a) = 5a - 2$ بعنصر من عناصر المجموعة A ، ثم نضعه مع الناتج في زوج مرتب .

مثلاً: العنصر 1 عند تعويضه في القاعدة $f(1) = (5 \times 1) - 2 = 5 - 2 = 3$ نحصل على الزوج المرتب الأول $(1, 3)$

٢. بعد تعويض جميع عناصر a في القاعدة، نكتبها مع نواتجها في أزواج مرتبة كما يلي : $f = \{(1, 3), (2, 8), (3, 13), (4, 18)\}$

الدالة الخطية

هي أي دالة على الصورة $f(x) = ax + b$

مثلاً: إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 5x - 10$ يمكننا إيجاد قيمة $f(2)$ و $f(-3)$ باتباع الخطوات التالية :

١. نعوض قيمة x الأولى في القاعدة $f(2) = (3 \times 2^2) + (5 \times 2) - 10 = 12 + 10 - 10 = 12$

٢. نعوض قيمة x الثانية في القاعدة $f(-3) = (3 \times -3^2) + (5 \times -3) - 10 = 27 - 15 - 10 = 2$

٣. نكتب الناتج وهو : $(f(-3) = 2)$, $(f(2) = 12)$.

الدالة التربيعية

هي أي دالة على الصورة $f(x) = \boldsymbol{ax^2} + bx + c$

وعند تمثيل الدالة بيانياً على المستوى الديكارتي فإن الشكل الناتج يُسمَّى (**قطع مكافئ**) وله حالتين :

أ) قطع مكافئ مفتوح للأعلى : عندما يكون $\boldsymbol{a > 0}$.

أ) قطع مكافئ مفتوح للأسفل : عندما يكون $\boldsymbol{a < 0}$.

معيار تمثيل منحنى الدالة

للتأكد من أن المنحنى المُعطَى في المستوى الديكارتي دالة أم لا فإننا نتبع الخطوات التالية :

١. نرسم عمود على المحور السيني X في أي نقطة بحيث يكون موازياً طبعاً للمحور الصادي Y .

٢. إن كان العمود المرسوم يقطع المنحنى المُعطَى في نقطة واحدة فقط فهو دالة، وإن كان العمود المرسوم يقطع المنحنى المُعطَى في أكثر من نقطة فهو ليس دالة .

نهاية الدالة

<u>تعريف نهاية الدالة</u>: هو وصف سلوك الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من قيمة معينة .

المثال الأول : الدالة $f(x) = 2x + 3$ سنوجد نهايتها عندما تقترب x من القيمة (2)، ويُعَبَّر عن هذا رمزياً كما يلي :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2x + 3$$

أولاً : نكون الجدول التالي :

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	7	7.002	7.02	7.2

ثانياً : نلاحظ في الجدول السابق بأن قيمة x كلما اقتربت من (2) فإن قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من (7) وفي النهاية تأخذ (7) كما يلي ..

$$\lim_{x\to 2} f(2) = \lim_{x\to 2} 2x + 3 = (2\times 2) + 3 = 4 + 3 = 7$$

المثال الثاني : الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ سنوجد نهايتها عندما تقترب x من القيمة (1)، ويُعَبَّر عن هذا رمزياً كما يلي :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

أولاً : نكون الجدول التالي :

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	-	2.001	2.01	2.1

ثانياً : نلاحظ في الجدول السابق بأن قيمة x كلما اقتربت من (1) فإن قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من (2) لكنها في النهاية لا تأخذ (1) كما يلي :

$$\lim_{x\to 1} f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

ثالثاً : لتلافي ذلك الناتج نقوم بتحليل البسط والمقام ثم اختصار العوامل المشتركة ثم نوجد قيمة الدالة $f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

المشتقات وقوانينها

*** المشتقة الأولى .**

يستخدم للمشتقات الرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ أو y' أي أن $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ هي المشتقة الأولى للدالة y للمتغير x .

*** المشتقة الثانية أو الثالثة وهكذا .**

إذا قمنا باشتقاق الدالة $f(x)$ فإننا سنحصل على المشتقة الأولى $f'(x)$ وإذا قمنا باشتقاق المشتقة الأولى فإننا سنحصل على المشتقة الثانية $f''(x)$.

نوع الدالة	الدالة	قانون اشتقاق الدالة
دالة العدد الثابت	$y = f(x) = k$	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$
دالة القوة	$y = f(x) = x^a$	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = ax^{a-1}$
دالة مرفوعة لأس ثابت	$y = \left(f(x)\right)^a$	$y' = \frac{dy}{dx} = a\left(f'(x)\right)^{a-1} f'(x)$
دالة مضروبة بعدد ثابت	$y = kf(x)$	$y' = \frac{dy}{dx} = kf'(x)$
جمع/طرح دالتين	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$
ضرب دالتين	$y = f(x)g(x)$	$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
قسمة دالتين	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

<u>ملاحظة</u>: لدينا دالة $f(x)$ وطُلِب منا إيجاد قيمة (مثلاً $f'(2)$ أو $f''(5)$)، هنا نوجد المشتقة الأولى ثم القيمة الأولى والمشتقة الثانية ثم القيمة الثانية .

القيم الحرجة للدوال

يمكننا إيجاد القيم الحرجة للدالة (مثلاً $f(x) = x^2 + 8x + 2$) باتباع الخطوات التالية :

١. نوجد المشتقة الأولى للدالة .

$$f(x) = x^2 + 8x + 2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x + 8$$

٢. نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة x .

$$2x + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -4$$

٣. قيم x التي نحصل عليها (قد تكون أكثر من قيمة) هي القيم الحرجة .

القيمة الحرجة هي : $\{-4\}$

التكامل الغير محدود وقوانينه

يستخدم للتكامل الغير محدود الرمز $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ونقرأه : تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x ، بينما C ثابت التكامل الاختياري .

نوع الدالة	قانون تكامل الدالة
دالة العدد الثابت	$\int a\,dx = ax + c$
دالة القوة	$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$
دالة مضروبة بعدد ثابت	$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
جمع/طرح دالتين	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

<u>ملاحظة</u> : لا نكتب ثابت التكامل C إلا مرة واحدة فقط .

التكامل المحدود وقوانينه

يستخدم للتكامل المحدود الرمز $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ ونقرأه : تكامل الدالة $f(x)$ من الحد $x = a$ إلى الحد $x = b$.

نوع الدالة	قانون تكامل الدالة
عند تساوي حَدَّي التكامل	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
دالة مضروبة بعدد ثابت	$\int_a^b af(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx$
جمع/طرح دالتين	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
عند عكس حدود التكامل	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

<u>ملاحظة</u> : يجب إيجاد تكامل الدالة المُعطاة باستخدام قوانين التكامل غير المحدود، وذلك قبل إيجاد قيمة التكامل المحدود .

والحمد لله ،،،