التاريخ :	**اختبار في المتتاليات ـ النموذج الأول** **للثالث الثانوي العلمي ـ دورة عام 2017**	**المدة : ساعة واحدة** **الدرجة : 150**

السؤال الأول : (20 درجة)

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق الصيغة : $u_n = \frac{n+1}{n-1}$

السؤال الثاني : (30 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها (2 -) وفيها $u_1 = -2$. اكتب u_n بدلالة n .

واستنتج قيمة المجموع : $u_4 + u_8 + \ldots\ldots + u_{4n}$

السؤال الثالث : (30 درجة)

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ في حالة $n \in N$.

أثبت بالتدريج أن : $u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

السؤال الرابع : (70 درجة)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_n \ ; n \geq 1 \end{cases}$$

1) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - u_n$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية جد أساسها .

ثم بين أنها غير مطردة .

2) لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $t_n = u_{n+1} + 2u_n$ أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ مطردة .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

انتهت الأسئلة

فيصل خالد ـ عبد الحميد السيد ـ محمد غزول ـ محمد الحاج زين ـ حمزة اسماعيل ـ محمد سوتل ـ عبد الرحمن بكور ـ منذر جعيلة ـ عبد المنعم ايمو

السؤال الأول : (20 درجة)

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق الصيغة : $u_n=\frac{n+1}{n-1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{n}-\frac{n+1}{n-1}$$
$$=\frac{n^2+2n-n-2-n^2-n}{n(n-1)}$$
$$=\frac{-2}{n(n-1)}$$

وفي حالة $n\geq 2$ يكون : $u_{n+1}-u_n<0$

فالمتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=2$

طريقة ثانية : في حال $n\geq 2$ تكون حدود المتتالية موجبة تماماً

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}=\frac{n^2+n-2}{n^2+n}$$

وبما أن : $n^2+n-2<n^2+n$

فإن : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

فالمتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=2$

السؤال الثاني : (30 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها (2 -) وفيها $u_1=-2$. اكتب u_n بدلالة n .

واستنتج قيمة المجموع : $u_4+u_8+\ldots\ldots+u_{4n}$

نعلم أن : $u_n=u_1+r(n-1)$

نعوض : $u_n=-2-2(n-1)$ ومنه : $u_n=-2n$

نفرض $u_{4n}=v_n$ أي : $v_n=-8n$

يصبح المجموع $S=v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n$

عدد الحدود هذا المجموع : n

لدينا : $a=v_1=-8$ و $\ell=v_n=-8n$

نعلم أن : $S=\dfrac{n(a+\ell)}{2}$

وبالتالي $S=\dfrac{n(-8-8n)}{2}$ ومنه : $S=-4n(n+1)$

<u>السؤال الثالث</u> : (30 درجة)

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$u_0=2\cos\theta$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ في حالة $n\in N$.

أثبت بالتدريج أن : $u_n=2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$

نفترض أن $E(n)$ هي الخاصة : ($u_n=2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$)

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $u_0=2\cos\theta$

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : ($u_n=2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$)

ولنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $u_{n+1}=2\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$u_{n+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2\times 2^n}}=2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\ ;\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة

إذن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال الرابع : (70 درجة)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ \ , u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_n \ \ ; n \geq 1 \end{cases}$$

1) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - u_n$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية جد أساسها .

ثم بين أنها غير مطردة .

2) لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $t_n = u_{n+1} + 2u_n$ أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ مطردة .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

1) إن : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_n - u_{n+1} - u_{n+1} = -2\left(u_{n+1} - u_n\right)$

ومنه : $v_{n+1} = -2\,v_n$

وبما أن : $v_0 = u_1 - u_0 = 1$ فإن $v_0 \neq 0$

إذن : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها الوحيد $q = -2$.

لدينا : $v_n = v_0\,(q)^n$ ومنه : $v_n = (-2)^n$

حدودها ذات الدليل الزوجي موجبة وذات الدليل الفردي سالبة فهي غير مطردة .

2) إن : $t_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} = 2u_n - u_{n+1} + 2u_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n$

ومنه : $t_{n+1} = t_n$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ثابتة فهي مطردة .

3) لدينا : $t_0 = u_1 + 2u_0 = 1$, إذن $t_n = 1$

بطرح العلاقة : $v_n = u_{n+1} - u_n$ من $t_n = u_{n+1} + 2u_n$

نجد : $t_n - v_n = 3u_n$ ومنه : $1 - (-2)^n = 3u_n$

إذن : $u_n = \frac{1}{3}\left[1 - (-2)^n\right]$

انتهت حلول اختبار المتتاليات – النموذج الأول

فيصل خالد - عبد الحميد السيد - محمد غزول - محمد الحاج زين - حمزة اسماعيل - محمد سوتل - عبد الرحمن بكور - منذر جعيلة - عبد المنعم ايمو

المدة : ساعة واحدة	اختبار في المتتاليات ـ النموذج الثاني	
الدرجة : 150	للثالث الثانوي العلمي ـ دورة عام 2017	التاريخ :

السؤال الأول : (30 درجة)

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$, ليكن $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$

أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً .

السؤال الثاني : (40 درجة)

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث ($a > c$)

تحقق العلاقتين : (1) ... $a + b + c = 6$ و (2) ... $a \cdot b^2 \cdot c = -48$

احسبها ثم حدد علاقة u_n بدلالة n باعتبار $u_1 = 6$ واحسب المجموع $u_6 + u_9 + u_{12} + ... + u_{63}$

السؤال الثالث : (40 درجة)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = -2u_n + 3$ أياً كان $n \in N$

1) عين تابعاً f يحقق $f(u_n) = u_{n+1}$ أياً كان $n \in N$ ثم احسب ℓ حل المعادلة $f(x) = x$.

2) نعرف متتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_n - 1$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

واستنتج u_n بدلالة n .

السؤال الرابع : (40 درجة)

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية $[\ (n+1)! \geq 2^{n+1}\ ]$

1) أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(2)$ و $E(3)$ صحيحة ؟

2) أثبت بالتدريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

انتهت الأسئلة

فيصل خالد ـ عبد الحميد السيد ـ محمد غزول ـ محمد الحاج زين ـ حمزة اسماعيل ـ محمد سوتل ـ عبد الرحمن بكور ـ منذر جعيلة ـ عبد المنعم ايمو

السؤال الأول : (30 درجة)

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$, ليكن $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$

أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً .

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً أياً كانت $n \geq 1$.

السؤال الثاني : (40 درجة)

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث ($a > c$)

تحقق العلاقتين : $(1)\ldots \quad a + b + c = 6$ و $(2)\ldots \quad a \cdot b^2 \cdot c = -48$

احسبها ثم حدد علاقة u_n بدلالة n باعتبار $u_1 = 6$ واحسب المجموع $u_6 + u_9 + u_{12} + \ldots + u_{63}$

لدينا : $a + c = 2b$ نعوض في (1) : $3b = 6$ ومنه $b = 2$

أصبح لدينا : $(1)\ldots \quad a + c = 4$ و $(2)\ldots \quad a \cdot c = -12$

أي لدينا عددان جداؤهما -12 (فهما مختلفان بالإشارة) ومجموعهما $+4$ (فالأكبر موجب) (فهما 6 و -2)

إما $a = 6$ ومنه $c = -2$ أو : $a = -2$ ومنه $c = 6$

إذن الحل المقبول : $(a, b, c) = (6, 2, -2)$

2 النموذج الثاني

أساس المتتالية : $r = b - a = -4$

صيغة الحد ذي الدليل n هي : $u_n = u_1 + r(n-1)$ ومنه : $u_n = 10 - 4n$

نفرض $u_{3n} = v_n$ أي : $v_n = 10 - 12n$

فيصبح المجموع : $u_6 + u_9 + \ldots + u_{63} = v_2 + v_3 + \ldots + v_{21}$

عدد الحدود : $n = 21 - 2 + 1 = 20$

لدينا : $v_2 = 10 - 24 = -14$ و $v_{21} = 10 - 252 = -242$

المجموع : $S = \dfrac{n(v_2 + v_{21})}{2} = \dfrac{20 \times -256}{2}$ ومنه : $S = -2560$

<u>السؤال الثالث</u> : (40 درجة)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = -2u_n + 3$ أياً كان $n \in N$

1) عين تابعاً f يحقق $f(u_n) = u_{n+1}$ أياً كان $n \in N$ ثم احسب ℓ حل المعادلة $f(x) = x$.

2) نعرف متتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_n - 1$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

واستنتج u_n بدلالة n .

1) التابع f يحقق $f(u_n) = u_{n+1}$ فالتابع f هو : $x \mapsto -2x + 3$

المعادلة : $f(x) = x$ تكافئ $-2x + 3 = x$ ومنه : $x = 1 = \ell$

2) إن : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1)$ ومنه : $v_{n+1} = -2v_n$

نستنتج أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية تقبل العدد 2 - أساساً لها .

$$v_n = v_0 \cdot (-2)^n$$

حيث $v_0 = u_0 - 1 = -1$

ومنه : $v_n = -(-2)^n$

$u_n = 1 + v_n$ ومنه : $u_n = 1 - (-2)^n$

السؤال الرابع : (40 درجة)

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية [$(n+1)! \geq 2^{n+1}$]

1) أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(2)$ و $E(3)$ صحيحة ؟

2) أثبت بالتدريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

1) جدول :

n	الطرف الأيسر	الطرف الأيمن	القضية
0	$1! = 1$	$(2)^1 = 2$	خاطئة
1	$2! = 2$	$(2)^2 = 4$	خاطئة
2	$3! = 6$	$(2)^3 = 8$	خاطئة
3	$4! = 24$	$(2)^4 = 16$	صحيحة

2) الخاصة $E(n)$ هي : [$(n+1)! \geq 2^{n+1}$]

(1) الخاصة $E(3)$ صحيحة كما سبق .

(2) نفترض صحة $E(n)$ أي : $(n+1)! \geq 2^{n+1}$ ... (*)

ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن : $(n+2)! \geq 2^{n+2}$

نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(n+2) > 0$

إن : $(n+2)(n+1)! \geq (n+2)2^{n+1}$

ومنه : $(n+2)! \geq (n+2)2^{n+1}$

ولأن $n \geq 3$ فإن أصغر قيمة لـ $n+2$ هي 5 أو نضرب ونهمل $n \times 2^{n+1}$

$(n+2)! \geq 5 \times 2^{n+1}$ ومنه : $(n+2)! \geq 2 \cdot 2^{n+1}$

أي : $(n+2)! \geq 2^{n+2}$

إذن $E(n+1)$ صحيحة .

وبالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \geq 3$

انتهت حلول اختبار المتتاليات – النموذج الثاني

السؤال الأول : (15 درجة)

احسب المجموع : $S = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + 10$

السؤال الثاني : (20 درجة)

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق الصيغة : $u_n = \frac{2^n}{n}$

السؤال الثالث : (40 درجة)

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$

تحقق العلاقتين : $(1) \ldots\ 3a + 2b + c = -18$ و $(2) \ldots\ a \cdot b \cdot c = -27$

احسب q أساس المتتالية .

السؤال الرابع : (75 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$ عند كل $n \geq 0$

1) أثبت أن التابع $x \mapsto \frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً واستنتج أن $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

انتهت الأسئلة

فيصل خالد ـ عبد الحميد السيد ـ محمد غزول ـ محمد الحاج زين ـ حمزة اسماعيل ـ محمد سوتل ـ عبد الرحمن بكور ـ منذر جعيلة ـ عبد المنعم ايمو

السؤال الأول : (15 درجة)

احسب المجموع : $S=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+10$

- طريقة أولى : $S'=12S=1+2+3+4\ldots\ldots+120$

وهي حدود لمتتالية حسابية : $S'=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{120\times 121}{2}$ ومنه : $S=605$

- طريقة ثانية : بما أن الفرق بين أي حدين متتاليين هو العدد $\frac{1}{12}$ نفسه .

فهي حدود متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{12}$

عدد الحدود في المجموع : $n=\frac{\ell-a}{r}+1=12\left(10-\frac{1}{12}\right)+1=120$

نعلم أن : $S=\frac{n(a+\ell)}{2}$ وبالتالي $S=\frac{120\left(\frac{1}{12}+10\right)}{2}$ ومنه : $S=605$

السؤال الثاني : (20 درجة)

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق الصيغة : $u_n=\frac{2^n}{n}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}=\frac{2^n[2n-n-1]}{n(n+1)}=\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

في حال $n\geq 1$ يكون $u_{n+1}-u_n\geq 0$

فالمتتالية متزايدة بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=1$

السؤال الثالث : (40 درجة)

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$

تحقق العلاقتين : $3a+2b+c=-18\ \ldots(1)$ و $a\cdot b\cdot c=-27\ \ldots(2)$

احسب q أساس المتتالية .

نعوض $a \cdot c = b^2$ في (2) : $b^3 = -27 \Rightarrow b = -3$

ومن (1) نجد : $3a + c = -12$

ولكن : $b = a \cdot q$ ومنه $a = -\dfrac{3}{q}$ و $c = a \cdot q^2 = -3q$

وبالتالي : $-\dfrac{9}{q} - 3q = -12$ ومنه $3 + q^2 = 4q$ أي : $q^2 - 4q + 3 = 0$

إذن : $(q-3)(q-1) = 0$ وبالتالي $q \in \{1,3\}$.

السؤال الرابع : (75 درجة)

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ عند كل $n \geq 0$

1) أثبت أن التابع $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً واستنتج أن $1 < u_n \leq \dfrac{3}{2}$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً .

---

1) التابع f حيث $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ المعرف على $R \setminus \{0\}$

واشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ فالتابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

نفترض $E(n)$ هي الخاصة : $(1 < u_n \leq \dfrac{3}{2})$

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $1 < u_0 = \dfrac{3}{2} \leq \dfrac{3}{2}$.

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $(1 < u_n \leq \dfrac{3}{2})$

بالاستفادة من تزايد التابع f نستنتج أن : $f(1) < f(u_n) \leq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

وبما أن : $f\left(\frac{3}{2}\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ و $f(1)=1$

فإن : $1<u_{n+1}\leq\frac{4}{3}$ وبالتالي : $1<u_{n+1}\leq\frac{3}{2}$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة

إذن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

2) الاطراد : $u_{n+1}-u_n=2-\frac{1}{u_n}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n}=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$

ومنه : $u_{n+1}-u_n<0$, إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

انتهت حلول اختبار المتتاليات – النموذج الثالث

السؤال الأول : (20 درجة)

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = 1+\frac{1}{10}+\ldots\ldots+\frac{1}{10^n}$

السؤال الثاني : (40 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها (-2) وفيها $u_0 = 3$. اكتب u_n بدلالة n .

واستنتج قيمة المجموع : $u_4+u_6+\ldots\ldots+u_{2n}$

السؤال الثالث : (35 درجة)

ليكن $x > -1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال الرابع : (55 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$

1 – تحقق أن $u_n < 0$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2 – أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n = \frac{1}{u_n}+2$ متتالية حسابية .

3 – استنتج عبارة u_n بدلالة n .

انتهت الأسئلة

فيصل خالد ـ عبد الحميد السيد ـ محمد غزول ـ محمد الحاج زين ـ حمزة اسماعيل ـ محمد سوتل ـ عبد الرحمن بكور ـ منذر جعيلة ـ عبد المنعم ايمو

السؤال الأول : (20 درجة)

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = 1+\frac{1}{10}+......+\frac{1}{10^n}$

$$u_{n+1}-u_n = \left(1+\frac{1}{10}+......+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{10^{n+1}}\right)-\left(1+\frac{1}{10}+......+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{10^{n+1}} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 0$

السؤال الثاني : (40 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها (-2) وفيها $u_0 = 3$. اكتب u_n بدلالة n .

واستنتج قيمة المجموع : $u_4 + u_6 + ...+ u_{2n}$

$$u_n = u_0 \cdot q^n = 3(-2)^n$$

نفترض $v_n = u_{2n}$

وبالتالي : $v_n = 3(-2)^{2n}$

ومنه $v_n = 3(4)^n$

وهي متتالية هندسية أساسها $q = 4$.

أصبح المجموع : $S = v_2 + v_3 + ...+ v_n$

وبالتالي عدد الحدود : $k = n-2+1 = n-1$

الحد الأول من المجموع هو $a = v_2 = 3(4)^2 = 48$

نعلم أن : $S = a\cdot\frac{1-q^k}{1-q}$

ومنه $S = 48\frac{1-4^{n-1}}{1-4} = 4\left(4^n - 4\right)$

السؤال الثالث : (35 درجة)

ليكن $x > -1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0$.

2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \quad \ldots(*)$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

نضرب طرفي المتراجحة (*) بـ $1+x>0$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+n\cdot x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+n\cdot x+x+n\cdot x^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+n\cdot x^2$$

بما أن $n\cdot x^2 \geq 0$ فإن حذفه لا يؤثر على المتراجحة

إذن : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

وبالتالي $E(n+1)$ صحيحة .

مما سبق نستنتج أن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال الرابع : (55 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-2u_n}$

1 – تحقق أن $u_n < 0$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2 – أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n = \dfrac{1}{u_n}+2$ متتالية حسابية .

3 – استنتج عبارة u_n بدلالة n .

1 – الخاصة $E(n)$ هي : $u_n < 0$

1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $u_0 = -1 < 0$.

2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $u_n < 0$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن : $u_{n+1} < 0$

بما أن $u_n < 0$ فإن $-2u_n > 0$ ومنه $1 - 2u_n > 1$

وبالتالي : $\frac{u_n}{1-2u_n} < 0$ ومنه : $u_{n+1} < 0$

إذن $E(n+1)$ صحيحة .

مما سبق نستنتج أن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

2 – لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = -2$

إذن $v_{n+1} - v_n$ ثابت أياً كان العدد الطبيعي n .

وبالتالي $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية

أساسها $r = -2$ وحدها الأول $v_0 = 1$.

3 – بما أن v_n الحد ذو الدليل n لمتتالية حسابية فإن : $v_n = v_0 + n \cdot r = 1 - 2n$

ومنه أياً كان $n \geq 0$ فإن : $u_n = \frac{1}{v_n - 2} = -\frac{1}{2n+1}$.

انتهت حلول اختبار المتتاليات – النموذج الرابع