الوحدة الاولي

الأسس

قاعدة1:	$x^n = x.x.x \ldots x$ مرة n

تمرين1: أوجد قيمة ما يلي:

1. $(-4)^3 = (-4).(-4).(-4) = -64$
2. $(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

قاعدة2:	$x^0 = 1$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{y^m}{x^n}$

تمرين 2: أوجد قيمة ما يلي:

1. $10^0 = 1$
2. $\frac{3^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{3^3} = \frac{5\times5}{3\times3\times3} = \frac{25}{27}$
3. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4\times4} = \frac{1}{16}$

قاعدة3:	في حالة ضرب الأسس نجمع الأسس للأساس المتشابهة $x^n . x^m = x^{n+m}$

تمرين 3: أختصر ما يلي:

1. $x^3.x^2 = x^{3+2} = x^5$
2. $2^3.2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

3. $2x^3 . 3y^2 . x^2 . 2y = (2).(3).(2). x^{3+2}. y^{2+1} = 12x^5y^3$

في حالة قسمة الأسس نطرح الأسس للأساس المتشابهة $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	قاعدة4:

تمرين 4: أختصر ما يلي:

1. $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$
2. $\frac{x^3}{x^{-5}} = x^{3-(-5)} = x^{3+5} = x^8$
3. $\frac{16\ \ {}^4y^3}{4x^3y} = \frac{16}{4}\ x^{4-3}. y^{3-1} = 4\ x\ y^2$

$(x^n)^m = x^{m\times n}$	قاعدة5:

تمرين 5: أختصر ما يلي:

1. $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64$
2. $((x+1)^3)^4 = (x+1)^{3\times 4} = (x+1)^{12}$
3. $(2x^2)^2 = 2^2. x^{2\times 2} = 4x^4$

$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$	قاعدة6:

تمرين 6: أختصر ما يلي:

1. $\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^2 = \frac{2^2x^{3\times 2}}{3^2\times y^{2\times 2}} = \frac{4x^6}{9\ y^4}$

$$2.\ \left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^5 = \frac{(-2)^5x^{2\times5}}{y^{3\times2}} = \frac{-32x^{10}}{y^6}$$

الوحدة الثانية

كثيرات الحدود Polynomials

الحد الجبري : يتكون من عامل عددي وعامل رمزي(المتغير) مثل **6x** نجد أن ٦ عامل عددي و **x** متغير أو عامل رمزي

كثيرات الحدود تتكون من أكثر من حد بينهما إشارات العمليات الحسابية من جمع وطرح و ....

مثال(١): أوجد درجة كثيرة الحدود التالية:

$$\mathbf{2xy + 3x^2 + 5x^2y^2}$$

وتمثل درجة الحد بمجموع أسس كل حد على حدا كما يلي:

الحد	معامل الحد	درجة الحد
2xy	**٢**	**الثانية**
$3yx^2$	**٣**	**الثالثة**
$5x^2y^2$	**٥**	**الرابعة**

نلاحظ أن أكبر درجة هي الرابعة و هي تمثل درجة كثيرات الحدود.

درجة كثيرات الحدود: أكبر مجموع الأسس في أي حد من الحدود .

مثال(٢):أوجد درجة كثيرات الحدود التالية:

$$P1=3x^3 -6x^2 +12$$

$$P2= 6xy^3 + 3x^2y +7x - 8y -15$$

الحل :

النوع كثيرة الحدود	كثيرة الحدود	عدد الحدود	درجة كثيرة الحدود
متغير واحد	$P1=3x^3 -6x^2 - 4x +12$	٤	الثالثة
متعددة المتغيرات	$P2= 6x y^3 + 3x^2y + 7x- 8y -15$	٥	الرابعة

ملحوظة : درجة الحد الثابت تساوي صفراً

العمليات على كثيرات الحدود:

١- جمع وطرح:

الشرط : يشترط لجمع وطرح اى مقدارين جبريان أن يكونا من نفس النوع

الخطوات:

١- ترتيب الحدود المتشابهة

٢- إجراء عملية الجمع و الطرح بشكل عادي.

مثال(٣): أوجد ناتج

$$(5x + 2y + 6xy) + (3x - 6y)$$

الحل: نرتب الحدود المتشابهة أسفل بعضها البعض:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y \ + 6xy \\ \underline{3x \ - 6y \qquad\quad} \\ 8x - 4y \ \ +6xy \end{array}$$

مثال(٤): أوجد ناتج :

$$(\mathbf{2x + 7y}) + (\mathbf{-6y - 5x}) + (\mathbf{8x - 3y})$$

الحل:نرتب الحدود المتشابهة كما يلي:

$$\begin{array}{l} 2x + \ 7y \\ -5x \ \ - 6y \\ 8x - 3y \\ 5x \ - \ 2y \end{array}$$

مثال(٥): أوجد ناتج $(2x+7y)-(2y-4x)$

الحل: علينا أولا فك الأقواس وتغير إشارة القوس الثاني:

$$\begin{array}{r} 2x+7y \\ +4x-2y \\ \hline 6x\ +5y \end{array}$$

٢-ضرب المقادير الجبرية:

أ- ضرب حد فى كثيرة الحدود: يتم ضرب الحد فى كل حد من حدود كثيرة الحدود(المقدار الجبري)

مثال(٦):أوجد ناتج

$$3x(5x+6y)$$

الحل:

$$\begin{aligned} 3x(5x+6y) &= (3x.5x)+(3x\,.6y) \\ &= 15x^2+18\,xy \end{aligned}$$

ب-إيجاد مربع مقدار جبري ذي حدين:

مربع الحد الثاني + الحد الثاني× الحد الأول×**2** $\pm$ مربع الحد الأول = $(x\ \pm y)^2$

$$(x\pm y)^2 = x^2\ \pm 2.x.y+y^2$$

$$(2x+3y)^2 = 4x^2+12xy+9y^2$$

$$(7x-2)^2 = 49x^2-28x+4$$

ت- ضرب مجموع حدين × الفرق بينهما:

$$(x-y).(x+y) = x^2-\ y^2$$

$$(6x-5y)\ \ (6x+5y) = 36\ \ ^2-25\,y^2$$

ث- ضرب مقدارين بالنظر:

الأول **الأخير**

$$(2x+3).(5x-2)=10\,x^2+11x-6$$

+ الأوسط

ملحوظة:

$$(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)=x^3\pm\ y^3$$

٣- قسمة كثيرة الحدود على حد جبري:

نقوم بقسمة كل حد من حدود كثيرة الحدود على هذا الحد

مثال(٧) أوجد ناتج:

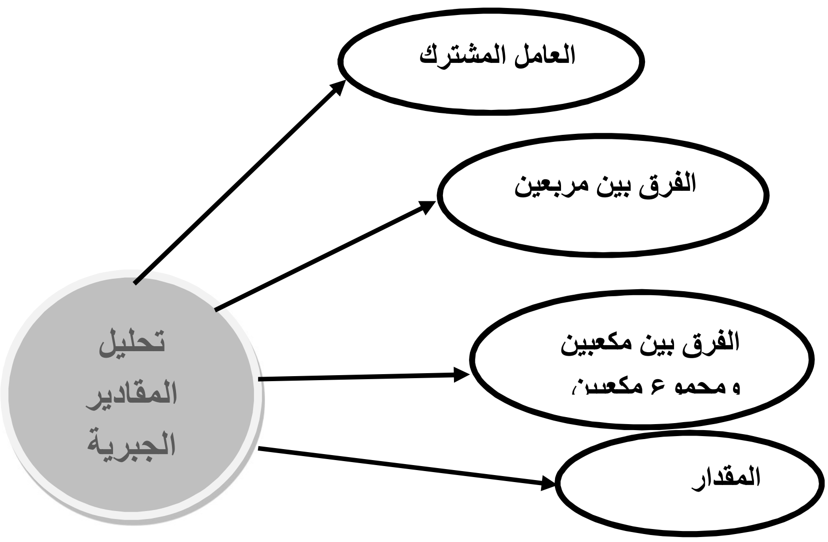
$$\frac{15\quad^{4}+6x^2-9x}{3x}$$

الحل:

$$\frac{15\quad^{4}}{3x}+\frac{6x^2}{3x}-\frac{9x}{3x}=5\,x^3+2x-3$$

الوحدة الثالثة

تحليل المقادير الجبرية



العامل المشترك: يعنى العنصر المكرر و الرقم المشترك في جميع المقادير الجبرية.

مثال(١): حلل المقدار

$$24\, x^3 y - 15\, x\, y^3$$

الحل:

$$= 3\, xy\, (8\, x^2 - 5\, y^2)$$

هنا نستخرج العامل المشترك وهو الأرقام و العناصر الأقل و المشتركة في المقدارين

الفرق بين مربعين :

مقدارين مربعين بينهما إشارة سالبة(مربع – مربع).

مثال (٢): حلل المقدار $25\,x^2 - y^2$

الحل:

$$= (5x - y)(5x + y)$$

لدينا مقدارين مربعين بينهما إشارة سالبة نستخدم قاعدة الفرق بين مربعين

(الجذر الأول – الجذر الثاني)(الجذر االأول + الجذر الثاني)

مثال (٣): حلل المقدار

$$64\,x^3 - 4\,x\,y^2$$

الحل: $= 4\,x\,(16\,x^2 - y^2) = 4x\,(4x - y)(4x + y)$

إرشاد: تم استخراج العامل المشترك ثم تطبيق قاعدة الفرق بين مربعين.

الفرق بين مكعبين أو مجوعهما :

اى مقدارين مكعبين بينهما إشارة سالبة(مكعب - مكعب) أو موجبة.

مثال(٤): حلل المقدار

$$x^3 - 125\,y^3$$

الحل:

$$= (x - 5y)(x^2 + 5y + y^2)$$

الإرشاد: مقدارين مكعبين بينهما إشارة سالبة تم تطبيق قاعدة الفرق بين مكعبين كما يلي:

(الجذر الأول – الجذر الثاني)(مربع الجذر االأول + جذرالأول ×جذر الثاني + مربع الجذر الثاني)

مثال(٥): حلل المقدار

$$27\, a^3 + 64\, b^3$$

الحل:

$$(3a + 4b)(9\, a^2 - 12\, ab + 16\, b^2)$$

الإرشاد: تم تطبيق قاعدة مجموع المكعبين كما يلي:

(الجذر الأول + الجذر الثاني)(مربع الجذر االأول – جذرالأول ×جذر الثاني + مربع الجذر الثاني)

تحليل المقدار الثلاثي: وهو مقدار مكون من ثلاثة حدود يتم تحليله الى قوسين ويتوقف على إشارة الحد الثالث (الحد المطلق أو الثابت) أما سالبة أو موجبة:

إشارة الحد الثالث موجب:

نبحث عن رقميين حاصل ضربهما يساوي الحد الثالث ومجموعهما يساوي الحد الأوسط ولهما نفس إشارة الحد الأوسط.

إشارة الحد الثالث سالبة:

نبحث عن رقميين حاصل ضربهما يساوي الحد الثالث و الفرق بينهما يساوي الحد الأوسط و إشارة الأكبر نفس إشارة الحد الأوسط و الأصغر إشارته مخالفة.

مثال(٦) : حلل المقدار

$$x^2 + 5\, x + 6$$

الحل: $= (x + 3)(x + 2)$

الحل نبحث عن رقميين حاصل ضربهما = ٦ و مجموعهما = ٥ (5=2+3 & 2.3=6)

مثال (٧): حلل المقدار

$$x^2 - 5\, x + 6$$

الحل:

$$= (x - 3)(x - 2)$$

نبحث عن عددين حاصل ربهما موجب ٦ وحاصل مجموعهما 5- ولهما نفس الإشارة السالبة

مثال(٨): حلل المقدار

$$x^2 - 5x - 6$$

الحل: $= (x-5)(x+1)$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما 6- و الفرق بينهما 5- وإشارتهما مختلفة الأكبر سالبة و الأصغر العكس.

مثال(٩): $x^2 + 6x - 16$

الحل: $= (x+8)(x-2)$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما = 16- و الفرق بينهما = ٦

حيث معاملات العدد ١٦ = 1*16   الفرق   = 16 – 1 = 15

١٦ = 4*4   الفرق   = 4 – 4 = 0

١٦= 2*8   الفرق   = 8 – 2 = 6 √

ويجب مراجعة الأسس و الجذور $3^2 = 9 \quad , 3^3 = 27$

$$4^2 = 16 \; , 4^3 = 64$$

$$5^2 = 25 \, , 5^3 = 125 \, , \ldots$$

حلل ما يلي:

i. $12\ \ ^2y + 8\,x\,y$
ii. $x^2y - \ x\,y^2$
iii. $4x^3 + 8\,x^{\,2} - 64\,x$
iv. $x^2 - 25$
v. $x^3 - 27$
vi. $x^3 + 64$
vii. $x^2 - 5x - 14$
viii. $x^2 - 10 \quad + 9$
ix. $x^2 - 8x - 9$
x. $x^2 + 3x - 54$

تبسيط المقادير النسبية:

تعامل معاملة الأعداد الكسرية من حيث اختصارها و كذلك ضربها و قسمتها .

مثال (١): بسط المقدار

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{x+1}$$

الحل: نستخدم طرق التحليل كما يلي:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-1}{x+1} = 1$$

مثال(٢): بسط المقدار:

$$\frac{(x+y)^2}{3xy} \div \frac{x^2-y^2}{xy}$$

الحل:

اولا نحول القسمة الى ضرب كما يلي:

$$\frac{(x+y)^2}{3xy} \times \frac{xy}{x^2-y^2}$$

ثانيا نحلل ثم نختصر :

$$\frac{(x+y)(x+y)}{3xy} \times \frac{xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x+y)}{3(x-y)}$$

الوحدة الرابعة

حل المعادلة الخطية أي من الدرجة الاولى :-

$$ax + b = 0$$

(١) يتم إضافة او طرح اي عدد من طرفي المعادلة

(٢) ضرب طرفى المعادلة أو قسمة طرفى المعادلة على عدد لا يساوى الصفر

بصفة عامة :-

إذا كان a ، b ، c أعداداً حقيقية وكان a = b فإن

$$a + c = b + c$$

$$a \times c = b \times c$$

إذا كان $a + c = b + c$ **فإن** $a = b$

إذا كان $a \times c = b \times c$ ، $c \neq 0$ **فإن** $a = b$

مثال(١) حل المعادلة $x + 2 = 5$

الحل: بإضافة 2- الي طرفي المعادلة نحصل على:

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 3$$

قيمة 3 تحقق طرفي المعادلة أي تجعل الطرفين متساويين

مثال(٢): حل المعادلة: $3x - 1 = x + 7$

الحل:

بإضافة x– الى طرفين المعادلة:

$$3x - 1 - x = x + 7 - x$$

$$2x - 1 = 7$$

بإضافة 1+ الى طرفي المعادلة:

$$2x - 1 + 1 = 7 + 1$$

$$2x = 8$$

بقسمة طرفي المعادلة على المعامل ٢:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

و للتحقق من الحل عن طريق التعويض فى المعادلة الأصلية نجد:

$$3 \times 4 - 1 = 4 + 7$$

$$11 = 11$$

مثال(٣): اوجد قيمة x فى المعادلة التالية:

$$3x + 4 = x + 20$$

الحل:

بإضافة x– الى كلا الطرفين :

$$3x + 4 - x = x + 20 - x$$

$$2x + 4 = 2$$

بإضافة 4- الى كلا الطرفين:

$$2x + 4 - 4 = 20 -$$

$$2x = 16$$

بقسمة كلا الطرفين على ٢ :

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

مثال(٤): حل المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x}$$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة فى المضاعف المشترك البسيط وهو 6x :

$$6x \cdot \frac{1}{2x} + 6x \cdot \frac{1}{3x} = 6x \cdot \frac{1}{6} - 6x \cdot \frac{1}{x}$$

$$3 + 2 = x - 6$$

$$5 = x - 6$$

بإضافة 6+ الى الطرفين :

$$5 + 6 = x - 6 + 6$$

$$11 = x$$

مثال(٥) : حل المعادلة التالية:

$$\frac{5}{\mathrm{x} - 4} = \frac{6}{x - 3}$$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة فى $(x-4)(\mathrm{x}-3)$:

$$(x-4)(\mathrm{x}-3) \cdot \frac{5}{\mathrm{x}-4} = (x-4)(\mathrm{x}-3) \cdot \frac{6}{x-3}$$

$$5(\mathrm{x}-3) = 6\,(x-4)$$

باستخدام خاصية التوزيع:

$$5x - 15 = 6\,x - 24$$

بإضافة 15 + الى كلا الطرفين:

$$5x - 15 + 15 = 6\,x - 24 +$$

$$5x = 6\,x - 9$$

بإضافة 6x- الى كلا الطرفين :

$$5x - 6x = 6\,x - 9 - 6x$$

$$-x = -9$$

بقسمة كلا الطرفين على 1- :

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-9}{-1}$$

فإن :

$$x = 9$$

مثال(٦): مجموع ثلاثة أعداد زوجية متتالية يساوي ٣٠ أوجد هذه الأعداد.

الحل:

نفرض أن الأعداد هي: x + 4 , x +2 , x مجموعهم يساوي 30

أي أن :

$$x + x + 2 + x + 4 = 30$$

$$3x + 6 = 30$$

بإضافة 6 – لطرفي المعادلة:

$$3x + 6 - 6 = 30 - 6$$

$$3x = 24$$

بقسمة طرفي المعادلة على ٣ :

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

حل المعادلة من الدرجة الثانية:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = \quad , \qquad a \neq 0$$

وتحل المعادلات التربيعية بطريقتين هما:

- طريقة التحليل.

- طريقة القانون العام(المميز).

أولا: طريقة التحليل: عن طريق تحليل المقدار الى عوامله الأولى ثم مساواة كل عامل بالصفر على حدا و حل المعادلة من الدرجة الأولي.

مثال(١): أوجد حل (جذري) المعادلات التالية :

$A.\ x^2 - 6x - 7 = 0$

$B.\ x^2 - 6x + 8 = 0$

$C.\ x^2 - 5x - 14 = 0$

الحل: باستخدام تحليل المقدار الثلاثي:

A: $\quad x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x - 7)(x + 1) = 0$

$x - 7 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$

$x = 7 \qquad\qquad x = -1$

إذا جذري المعادلة : $x = 7 , x = -1$

حل المعادلة : $\{7, -1\}$

B: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 4)(x - 2) = 0$

$x - 4 = 0$ $x - 2 = 0$

$x = 4$ $x = 2$

إذا جذري المعادلة : $x = 4 , x = 2$ ، حل المعادلة : $\{4, 2\}$

C: $x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x - 7)(x + 2) = 0$

$x - 7 = 0$ $x + 2 = 0$

$x = 7$ $x = -2$

إذا جذري المعادلة : $\{ x = 7 , x = -2 \}$ ، اي ان حل المعادلة : $\{7, -2\}$

ثانيا : طريقة القانون العام (المميز): وبتحديد معاملات الدالة التربيعية a,b,c ثم إيجاد المميز

$$m = b^2 - 4\,ac$$

ثم التطبيق فى القانون العام التالي للحصول على جذري المعادلة أو قيم x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{m}}{2a}$$

ومن الملاحظات على قيمة المميز:

١- إذا كان قيمة المميز موجبة يكون الحل هو عددين حقيقيين مختلفين.

٢- إذا كان قيمة المميز تساوي صفر فإن الحل هو عددين حقيقيين متشابهين.

٣- إذا كان قيمة المميز بالإشارة السالبة فإن المعادلة ليس لها حل حقيقي.

مثال(٢): اوجد حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

1. $x^2 - 13x + 22 = 0$
2. $x^2 - 5x - 24 = 0$

الحل:

1. $x^2 - 13x + 22 = 0$

$$a = 1\ , b = -13\ , c = 22$$

نوجد المميز m: بالتعويض فى القاعدة التالية:

$$m = b^2 - 4\,ac = (-13)^2 - 4(1)(22) = 169 - 88 = 81$$

نعوض فى القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{m}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{81}}{2(1)} = \frac{13 \pm 9}{2}$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة هما:

$$x = \frac{13+9}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$x = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

اي أن الحل هو : $x = \{2, 11\}$

2. $x^2 - 5x \; - 24 = 0$

$$a = 1 \;, b = -5 \;, c = -24$$

نوجد المميز m: بالتعويض فى القاعدة التالية:

$$m = b^2 - \; 4\,ac \qquad (-5)^2 - 4(1)(-24) = 25 + 96 = 121$$

نعوض فى القانون العام:

$$x = \frac{-b \;\pm\; \sqrt{m}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{121}}{2(1)} = \frac{5 \pm 11}{2}$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة هما:

$$x = \frac{5+11}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x = \frac{5-11}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

اي أن الحل هو : $x = \{-3, 8\}$

مثال(٣): حل المعادلة التالية : $8x^2 \; = 2x + 3$

الحل: يجب تحويل المعادلة الي معادلة صفرية $8x^2 - 2x - 3 = 0$

$$a = 8 \;, b = \; -2 \;, c = -3$$

نوجد المميز m: بالتعويض فى القاعدة التالية:

$$m = b^2 - \; 4\,ac = \; (-2)^2 - 4(8)(-3) = 4 + 96 = 100$$

نعوض فى القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{m}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2(8)} = \frac{2 \pm 10}{16}$$

وبالتالي فإن جذري المعادلة هما:

$$x = \frac{2+10}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{2-1}{16} = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$$

اي أن الحل هو : $x = \left\{\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}\right\}$

مثال(٤): حل المعادلة التالية: $\sqrt{3x^2 - 6x} = 3$

الحل: بالتخلص من الجذر بالطرف الأيسر عن طريق تربيع الطرفين:

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x}\right)^2 = (3)^2$$

$$3x^2 - 6x = 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0\,, \quad a = 3\,, b = -6\,, c = -9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

ومنها :

$$x = \frac{6+12}{6} = 3$$

$$x = \frac{6-12}{6} = -1$$

الوحدة الخامسة

قواعد مهمة لحل المعادلات الخطية فى مجهولين

١- يجب ان يكون عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

٢- يجب ترتيب المعادلات طبقا للأحرف المتشابهة تحب بعض و الاعداد تحت بعض.

٣- نضرب معامل المعادلة الأولي فى الثانية و نضرب معامل المعادلة الثانية فى الأولي.

٤- اجراء عملية طرح معاملات المتغيرات المتشابهة.

٥- بالتحليل نوجد قيمة أحد المتغيرين و نعوض فى إحدي المعادلتين للحصول على المتغير الآخر.

مثال(١):

حل المعادلتين: $5\,x + 2y = 12\ ,\ \ 7x - 3y = 11$

الحـل: بضرب المعادلة الأولي في ٧ وضرب المعادلة الثانية فى ٥

$$35\,x + 14\,y = 84$$

$$35x - 15y = 55$$

وبطرح المعادلتين للتخلص من المتغير x:

$$35\,x + 14\,y = 84$$

$$-35 \quad +15 \quad = -55$$

$$29\,y = 29$$

ومنها فإن : $y = 1$

وبالتعويض عن قيمة y فى المعادلة الأولي:

$$5\,x + 2y = 1$$

$$5\,x + 2(1) = 12$$

$$5\,x + 2 = 1 \quad , \quad 5x = 12 -$$

$$5\,x = 10$$

$$x = 2$$

إذا الحل هو : $\{x = 2\,,\ y = 1\}$

مثال(٢): اوجد حل النموذج الخطي التالي:

$$5\,x + y = 12\,,\ \ 3x - y = 4$$

الحل: يمكننا التخلص من المتغير y و ذلك بجمع المعادلتين نظرا لتساوي معاملهما العددي و اختلاف إشارتهما .

$$\begin{array}{l} 5\,x + y = 1 \\ \underline{3x\ - y = \ \ 4} \\ 8x \quad = \ 16 \end{array}$$

ومنها فإن: $x = 2$

و بالتعويض في إحدي المعادلتين عن قيمة x:

$$3x - y = 4$$

$$3(2) - y = 4$$

$$6 - y = 4$$

$$-y = 4 - 6$$

$$-y = -2$$

$$y = 2$$

الحل هو :

$$\{y = 2 , x = 2\}$$

مثال (٣): حل النظام الخطي التالي:

$$x + y = 4$$

$$x + 2y = 5$$

الحل: يمكننا التخلص من المتغير x و ذلك بطرح المعادلتين:

$$x + y = 4$$

$$-x - 2y = -5$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

و لايجاد المتغير x يتم التعويض عن قيمة y فى أي معادلة وليكن الأولي:

$$x + y = 4 , \qquad 1 + y = 4$$

$$y = 3$$

الحل هو :

$$\{y = 3 , x = 1\}$$

مثال(٤): إذا كان عدد ركاب رحلة جوية لإحدي شركات الطيران ٢٢٠ راكبا موزعا على الدرجتين الأولي و الضيافة ، وكانت تكلفة تذكرة الرحالة ٧٠٠ ريال للدرجة الأولي ، و ٣٠٠ ريال لدرجة الضيافة. إذا كان اجمالي ايرادات التذاكر على هذه الرحلة ٨٢٠٠٠ ريال، فما عدد كل من ركاب الدرجة الأولي و درجة الضيافة؟

الحل: بفرض أن عدد ركاب الدرجة الأولي x ، و عدد ركاب درجة الضيافة y ومن ثم:

$$x + y = 220 \quad \ldots (1)$$

$$700x + 300y = 82 \qquad \ldots (2)$$

و بحل المعادلتين مع و ذلك بضرب المعادلة الأولي فى ٣٠٠ و طرحها من المعادلة الثانية:

$$700x + 300y = 8200$$

$$-300x - 300y = -660$$

$$400x = 1600$$

$$x = 40$$

و بالتعويض فى المعادلة الأولي: $x + y = 2$

$$40 + y = 220$$

$$y = 180$$

اي ان عدد ركاب الضيافة ١٨٠ راكب و عدد راكب الدرجة الأولي ٤٠ .

مثال(٥): عددين مجموعهما ٤٠ و الفرق بينهما ٣٦، فما هو العدد الأكبر؟

الحل: نرمز الى العددين x, y.

$$x + y = 4 \qquad (1)$$

$$x - y = 36 \qquad (2)$$

و بجمع المعادلتين نحصل على:

$$2x = 76$$

ومنها العدد الأكبر يساوي:

$$x = 38$$

العدد الأصغر يساوي:

$$y = 2$$

حل المتباينات

إذا كانت a , b عددين حقيقين فإن:

المتباينة	التعريف
$a > b$	متباينة مطلقة a أكبر من b دائماً.
$a < b$	متباينة مطلقة a أصغر من b دائماً.
$a \geq b$	متباينة غير مطلقة a أكبر من أو تساوي b.
$a \leq b$	متباينة غير مطلقة a أصغر من أو تساوي b.
$a < x < b$	متباينة غير مطلقة x أكبر من أ تساوي a و أصغر من b.
$a \leq x \leq b$	متباينة غير مطلقة x أكبر من أو تساوي a و أصغر من أو تساوي b.

حل المتباينة من الدرجة الأولي:

$$ax + b \leq c \quad , x \leq \frac{c-b}{a}$$

$$ax + b > \quad , x > \frac{c-b}{a}$$

مثال(١): أوجد حل المتباينة:

$$3x + 6 > 12$$

الحل: a = 3 , b = 6 , c = 12

$$3x + 6 > 12$$

$$x > \frac{12-6}{3}$$

$$x > 2$$

مثال(٢): أوجد حل المتباينة:

$$6 - 3x > 12$$

الحل:

$$-3x > 12 - 6$$

$$-3x > 6$$

بضرب الطرفين فى 1-

$$3x < -6$$

$$x < -2$$

نلاحظ أن المتباينة تغيرات من أكبر الى أقل عند ضرب الطرفين أو قسمتهما على مقدار سالب.

مثال(٣): حل المتباينة:

$$3x - 1 \leq 3 + x$$

الحل: نجعل المتغيرات فى احد الأطراف و الثوابت فى الطرف الأخر مع مراعاة تغير الاشارة عند الانتقال من طرف لاخر:

$$3x - x > 3 + 1$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

المتباينة و القيمة المطلقة:

من صفات القيمة المطلقة ما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|-12| = 1 \quad , |12| = 12 \quad , |a| = \sqrt{a^2} \quad , \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4|$$

$$|x| < a \; : \; -a < x < a \quad , a > 0$$

$$|x| \leq a \; : \; -a \leq x \leq a \quad , a > 0$$

$$|x| > a \;:\; x < -a \;, x > a \;\;, a > 0$$

$$|x| \geq a \;:\; x \leq -a \;, x \geq a \;\;, a > 0$$

مثال(٤): حل المعادلة التالية:

$$|3x - 2| = 5$$

الحل: من صفات القيمة المطلقة:

$$3x - 2 = \pm 5$$

$$3x - 2 = -5$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

مثال(٥):حل المعادلة التالية:

$$|3x + 7| = 4x + 5$$

الحل: من صفات القيمة المطلقة:

$$3x + 7 = \pm(4x + 5)$$

$$3x + 7 = -(4x + 5)$$

$$3x + 7 = -\,4x - 5$$

$$3x + 4x = -\,7 - 5$$

$$7x = -\,12$$

$$x = \frac{-12}{7}$$

$$3x + 7 = 4x + 5$$

$$3x - 4x = 5 - 7$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

مثال (٦):حل المتباينة التالية:

$$|2x+4| \geq 6$$

الحل: من صفات القيمة المطلقة:

$$-6 \leq 2x+4 \leq 6$$

بطرح ٤ من جميع الأطراف:

$$-6-4 \leq 2x+4-4 \leq 6-4$$

$$-10 \leq 2x \leq 2$$

بالقسمة على ٢ لجميع الأطراف:

$$\frac{-10}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{2}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 1$$

حل المتباينة هي الفترة:$[-5,1]$

مثال (٧):حل المتباينة التالية:

$$|2x+4| \geq 6$$

الحل: من صفات القيمة المطلقة:

$$2x+4 \geq 6 \quad , \qquad 2x+4 \leq -6$$

و بحل كلا المتباينتين كما يلي:

$2x+4 \geq 6$	$2x+4 \leq -6$
$x \geq \frac{6-4}{2}$	$x \leq \frac{-6-4}{2}$
$x \geq 1$	$x \leq -5$

أي ان مجموعة حل المتباينة كل القيم الحقيقية التي تزيد أو تساوي ١ و التي تقل عن أو تساوي *5*-.

مثال(٨): إذا كانت المبيعات الشهرية من سلعة ما هي x وحدة عندما كان السعر هو p حيث:

$$p = 200 - 3x$$

و تكون تكلفة إنتاج x من الوحدات هي:

$$TC = 5x + 650$$

أوجد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها و بيعها لتحقيق ربح قدره ٢٥٠٠ ريال على الأقل.

الحل:

الربح = الايراد - التكاليف

الايراد = المبيعات × سعر البيع

$$R = p \times x = x.(200 - 3x) = 200x - 3x^2$$

$$P = R - TC = 200x - 3x^2 - (5x + 650)$$
$$= 200x - 3x^2 - 5x - 650$$

$$P = 195x - 3x^2 - 650$$

و عدد الوحدات التي يجب بيعها اذا كان الربح ٢٥٠٠ على الأقل:

$$195x - 3x^2 - 650 \leq 2500$$

$$195x - \quad {}^2 - 650 - 2500 \leq$$

$$195x - \quad {}^2 - 3150$$

بقسمة المتباينة على ٣ - نحصل على :

$$-65x + x^2 + 1050 \geq 0$$

ترتيب الحدود كما يلي:

$$x^2 - 65x + 1050 \geq$$

$(x-35)(x-30) \geq 0$

$(x-35) \geq 0 \quad , x \geq 35$

$(x-30) \geq 0 \quad , x \geq 30$

$30 \leq x \leq 35$

الوحدة السادسة

معادلة الخط المستقيم

وهى معادلة من الدرجة الأولى في مجهولين x و y و الصورة العامة هى:

$$y = mx + b$$

حيث تمثل y المتغير التابع وهو يتبع في تغيره المتغير x وهو يسمى بالمتغير التفسيري أو المستقل

بينما m تمثل معدل التغير في المتغير التابع منسوبا بالتغير في المتغير المستقل وهو يعبر عن الميل وتكون الدالة متزايدة أذا كان الميل موجب الإشارة ومتناقصة إذا كان الميل سالب الإشارة و قد يكون ثابتة وتساوي الحد الثابت إذا كان الميل صفرا وهو b وتعبر عن المقطع من المحور العمودي.

$$m = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$$

مثال(٤): أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :$(1, 1 \quad), (2, 3)$.

الحل: $x_1 = 2 , y_{1=3} \ , x_2 = \quad 1 , y_2 = 1$

$$m = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1} = \frac{1 \quad 3}{1 \quad 2} = \frac{\quad 2}{\quad 3} = \frac{2}{3}$$

صور معادلة الخط المستقيم

يتحدد الخط المستقيم بمعرفة قيمة m و b و بالتعويض في الصورة العامة للدالة . ويمكن تناول الصور التالية لها:

١- معادلة الخط المستقيم الذى ميله m ويقطع b من محور y.

مثال(٥): أوجد ميل وطول الجزء المقطوع من المحور العمودي للمستقيم

$$3x \quad 6y \quad 18 = 0$$

الحل: تحويل المعادلة للصورة العامة :

$$6y = 18 \quad 3x \rightarrow \frac{6y}{6} = \frac{18}{6} \quad \frac{3x}{6}$$

$$y = \quad 3 + \frac{1}{2}x \ , \quad m = \frac{1}{2} \quad , b = \quad 3$$

٢- معادلة الخط المستقيم الذى ميله m ويمر بالنقطة $p(x_1, y_1)$ هى

$$y \quad y_1 = m(x \quad x_1)$$

مثال(٦): أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٤ ويمر بالنقطة $P = (2\ , 10)$.

الحل: $m = 4\ , x1 = 2\ , y1 = 10$

بالتعويض في معادلة الخط المستقيم: $y \quad y_1 = m(x \quad x_1)$

$$y \quad 10 = 4(x \quad 2) \rightarrow \quad y = 4x + 2$$

٣-معادلة المستقيم المار بالنقطتين $P_1(x_1, y_1)\ , P_2(x_2, y_2)$

مثال(٧): أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين *(5,3) ,(1, 3-)*.

$$m = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1} = \frac{3 \quad 2}{5 - 3} = \frac{1}{8}$$

وبالتعويض في معادلة الخط المستقيم:

$$y \quad y_1 = m(x \quad x_1) \rightarrow y \quad 1 = \frac{1}{8}(x + 3)$$

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{11}{8}$$

٤- معادلة المستقيم الذى يقطع من المحور الأفقي x جزءا طوله a ومن المحور العمودي جزءا طوله b هو $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

مثال(٨): أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من المحور الأفقي جزءاً طوله ٣ وحدات و يقطع من المحور y جزء قدره ٥ وحدات.

الحل: $b = 5$, $a=3$ و بالتعويض $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \quad \rightarrow 5x + 3y = 15$$

$$y = 5 \quad \frac{5}{3}\, x$$

٥- معادلة المستقيم العمودي الموازي للمحور العمودي $x = a$ **الميل غير معرف**

٦- معادلة المستقيم الأفقي الموازي للمحور الأفقي $y= b$ **الميل يساوي صفراً**

العلاقة بين المستقيمات

المستقيمات المتوازية	المستقيمات المتعامدة
$m1 = m1$	$m1 \times m2 = \quad 1\ ,\qquad m1 = \frac{1}{m2}$
$y= 5x + 20$ $y = 5x \ \ -15$ **المستقيمان متوازيان لتساوي الميل في كل منهما**	$= 4x + 5y_1$ $y_2 = 10 \quad \frac{1}{4}\, x$ **المستقيمان متعامدان حيث حاصل ضربهما ميليهما = -١**

مثال(٩): أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور y **جزءا طوله ١٠ و<u>عموديا</u> على المستقيم** $y=5x+8$

الحل: $m1= 5$ **إذا** $m2 = \frac{-1}{m1} = \frac{-1}{5}$ **ومن ثم المستقيم الجديد هو** $y = \quad \frac{1}{5}\, x + 10$

الوحدة السابعة

تطبيقات اقتصادية

تمرين(١): تبيع شركة وحدات منتجة بسعر **٥٠** ريال لكل وحدة x. إذا كانت الشركة تتكلف **١٥٠٠٠** ريال لتبدا فى الانتاج و انتاج كل وحدة يكلف الشركة **٢٠** ريال .

المطلوب:

- اوجد دالة الإيراد الكلي.
- أوجد دالة التكاليف الكلية.
- نقطة التعادل.
- أوجد الايراد الكلي و التكاليف الكلية لنقطة التعادل.

الحل:

- دالة الإيراد الكلي = سعر البيع × عدد الوحدات المنتجة

$$R = 50\,x$$

- دالة التكاليف الكلية

التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكلفة المتغيرة للوحدة المنتجة

$$TC = 15000 + 20\,x$$

- نقطة التعادل

الايراد الكلي = التكاليف الكلية

$$TC = R$$

$$50\,x = 15000 + 20\,x$$

$$50\,x \quad 20x = 15000$$

$$30\,x = 15000$$

$$x = \frac{15000}{30} = 500 \text{ وحدة}$$

- أوجد الايراد الكلي و التكاليف الكلية لنقطة التعادل.

$$R = 50\,x = 50\,(500) = 25000 \;\; sR$$

$$TC = 15000 + 20\,x = 15000 + 20(500) = 25000\,sR$$

تمرين(٢): إذا كانت تكلفة انتاج ٥ أجهزة تليفون سامسونج ١٠٠٠٠ ريال ، و تكلفة إنتاج ١٠ أجهزة من نفس النوع هي ١٨٧٥٠ ريال .

المطلوب نموذج التكاليف الخطية لانتاج اجهزة تليفون المحمول.

الحل:

من التمرين نجد أن $\{10\,,18750\},\{5, 10000\}$

- تحديد ميل التكاليف

$$m = \frac{y2 \quad y1}{x2 \quad x1} = \frac{18750 \quad 10000}{10 \quad 5} = 1750 \;\; sR$$

- تحديد دالة التكاليف الخطية:

$$y \quad y1 = m\,(\,x \quad x1)$$

$$y \quad 10000 = 1750\,(\,x \quad 5)$$

$$TC = 1750\,(\,x \quad 5) + 10000 = 1750\,x \quad 8750 + 10000$$

ويصبح النموذج الخطي للتكاليف هو:

$$TC = 1250 + 1750\,x$$

تمرين(٣):إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي $q = 25 \quad 2x$ وكانت دالة العرض لنفس السلعة هي $q = x \quad 2$

المطلوب : إيجاد سعر و كمية التوازن.

الحل:

سعر التوازن هو السعر الناتج من تساوي الكمية المطلوبة و الكمية المعروضة كما يلي:

$$x \quad 2 = 25 \quad 2x$$

$$3\,x = 27$$

$$x = 9 \text{ ريال}$$

و بالتعويض فى احد المعادلتين نحصل على الكمية :

$$q = 25 \quad 2x = 25 \quad 18 = 7 \text{ وحدة}$$

الوحدة الثامنة

الدالة التربيعية

الصورة العامة $y = f(x) = ax^2 + b\,x + c$

حيث a , b , c ثوابت او معالم الدالة و $a \neq 0$ مجال الدالة التربيعية و مداها كل الأعداد الحقيقية .

تمرين(١): حدد ثوابت الدالة التربيعية $y = f(x) = 3x^2 + 2\,x + 6$

a	b	c	d
3 , 4 ,2	6 , 2	3 ,2 , 6	3 ,2

تمرين(٢): الدالة التربيعية هي:

a	b	c	d
$x^2 \quad 4\,x + 3$	$4\,x + 3$	$\frac{1}{x^2 \quad 4\,x + 3}$	$\frac{1}{5x^2}$

تمرين(٣): إذا كان للدالة التربيعية $ax^2 + 3x \quad 4 = 0$ جذران حقيقيان متساويان. فإن قيمة a هي:

a	b	c	d
٣	2	3	١

تمرين(٤): من الدوال التربيعية :

a	b	c	d
$3z^3$	$2z^2$	$\frac{1}{z^2}$	$3z$

ملحوظة: اذا كانت a>0 فإن قطع المكافئ مفتوح الى الأعلي و تكون للدالة نهاية صغري و إذا كانت a < 0 فإن قطع المكافئ مفتوح للأسفل و تكون الدالة نهاية عليا.

تمرين(٥): في القطع المكافئ يتجه نحو للدالة: $y = \quad x^2 + 4\,x \quad 3$

a	b	c	d
حول المحور الأفقي	الأعلي	الأسفل	حول المحور الرأسي

ملحوظة: نقطة الرأس للمكافئ احداثيها هما :

الأفقي هو : $x = \quad \frac{b}{2a}$

الرأسي هو : $y = f\left(\quad \frac{b}{2a}\right)$

تمرين(٦) : حدد احداثي نقطة الرأس للقطع المكافئ للدالة:

$$y = 2x^2 \quad 8\,x \quad 10$$

a	b	c	d
$\{\ \ 2,\ \ 18\}$	$\{\ \ 2, 18\}$	$\{2, 18\}$	$\{2,\ \ 18\}$

الحل : احداثي نقطة الأصل هي:

$$x = \quad \frac{b}{2a} = \quad \frac{8}{2(2)} = 2$$

$$y = f(2) = 2(2)^2 \quad 8(2) \quad 10 = 8 \quad 16 \quad 10 = \quad 18$$

تمرين(٧): الدالة التالية 3 x^2 $y = 2x$ نقطة نهاية:

a	b	c	d
نقطة نهاية عليا	نقطة انقلاب	نقطة رجوع	نقطة نهاية سفلي

بالنظر الي اشارة معامل x^2 نجده سالب و من ثم فإن المكافئ يتجه الي أسفل ومن ثم تكون للدالة نهاية عظمي.

ملحوظة:

نقطة التعادل أو نقطة التوازن هي تلك النقطة التي يتساوي فيها ايراد الكلي بالتكاليف الكلية أو هي نقطة تساوي الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة(الطلب= العرض).

* مصنع يبيع منتجاته بسعر ٦٠ ريال للوحدة فإذا كان عدد الوحدات المباعة فى اليوم هي x و دالة التكاليف الكلية هي: $TC = 50 + 10x^2$. اختر الإجابة الصحيحة:

تمرين(٨): دالة الإيراد الكلي هي:

a	b	c	d
$TC = 50 + 10x^2$	$R = 60x$	$R = 60\,x^2$	$R = 10\,x^2$

تمرين (٩): مستوي إنتاج التعادل هي:

a	b	c	d
$\{1\ ,5\}$	$\{5,2\}$	$\{1\ ,3\}$	$\{1\ ,\ \ 5\}$

نقطة التعادل :

الايراد الكلي = التكاليف الكلية

$60\ x = 50 + 10x^2$

$50 + 10x^2 \quad 60x = 0$

$10x^2 \quad 60x + 50 = 0$

$x^2 \quad 6x + 5 = 0$

$(x \quad 5)(x \quad 1) = 0$

$x = 5\ \ , x = 1$

تمرين(١٠) مستويات الإيراد و التكاليف الكلية هي:

a	b	c	d
$TC = R = 60\ sR$	$TC = R = 300\ sR$	$TC = R = 120\ sR$	a , b

و بالتعويض فى دالة الايراد الكلي و التكاليف الكلية بمستويات الانتاج يكون الايراد الكلي عند مستوئ الانتاج x=1 هو ٦٠ ريال لكل من الإيراد الكلي و التكاليف الكلية و عند مستوي x=5 يكون الايراد مساويا التكاليف 300 ريال.

الوحدة التاسعة

الدوال الآسية

الصورة العامة للدالة الآسية $y = f(x) = b^x , b > 0 , b \neq 0$

مجال الدالة الآسية كل الأعداد الحقيقية بينما مداها كل الأعداد الحقيقية الموجبة

يقطع منحني الدالة الآسية المحور الرأسي فقط عند النقطة $\{0,1\}$ و لا يقطع المحور الأفقي أبداً

و يلاحظ أن اشارة x تحدد شكل الدالة فإذا كانت $b > 1$ فإن الدالة ترتفع من ادني اليسار الى اعلى اليمين و اذا كانت $0 < b < 1$ فإن الدالة تنحدر من أعلي اليسار الى أدني اليمين.

و يعتمد حل المعادلة الآسية على كتابتها على الصورة $b^x = b^c$ و عندما $x = c$ بشرط الأساس لا يساوي الصفر أو الواحد الصحيح.

تمرين(١): $2^x = 32$ ، فإن قيمة ... =x

الحل:

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

تمرين(٢) : حل المعادلة $\sqrt[4]{x} = 81$

الحل:

لاحظ أن

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$81 = 3^4$$

$$x^{\frac{1}{4}} = 3^4$$

$$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (3^4)^4$$

$$x = 3^{16}$$

الدالة الأسية الطبيعية :

وهي الدالة الآسية بالاساس $e = 2.7182818$ و تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = e^x$$

و يلاحظ أن اشارة x تحدد شكل الدالة فإذا كانت $x > 0$ فإن الدالة ترتفع من ادني اليسار الى اعلى اليمين و اذا كانت $x < 0$ فإن الدالة تنحدر من أعلي اليسار الى أدني اليمين.

تطبيق اقتصادي:

جملة مبلغ ما بمعدل فائدة مركبة خلال فترة زمنية ما هي:

$$S = P(1+i)^n$$

جملة المبلغ هى : S

المبلغ المستثمر : P

معدل الفائدة المئوي : i

مدة الاستثمار : n

تمرين(٣): استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال فى أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 5% فما جملة المبلغ بعد ٤ سنوات.

الحل:

$$S = ???\ , \qquad P = 10000\ sR\ \ , i = 5\%\ \ , n = 4$$

$$S = P(1+i)^n = 10000(1+\frac{5}{100})^4 = 12155.0625\ sR$$

تمرين(٤): استثمر تاجر مبلغ ٢٠٠٠٠٠ ريال فى أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10%. فما جملة المبلغ بعد ٥ سنوات و ٣ شهور.

الحل:

$$S = ???\ , \qquad P = 200000\ sR\ \ , i = 10\%\ \ , n = 5 + \frac{3}{12} = 5.25$$

$$S = P(1+i)^n = 200000(1+\frac{10}{100})^{5.25} = 329869.0675\ sR$$

الوحدة العاشرة

الدالة اللوغاريتمية

قوانين اللوغاريتمات:

لأي أعداد حقيقية موجبة b , s ,v بحيث b عدد موجب لا يساوي الواحد و لأي عدد حقيقي فإن:

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1 \ \ ,\log_{10} 10 = 1 \, , \ln e = 1$$

$$\log_b s\,.\,v = \log_b s + \log_b v$$

$$\log_b \frac{s}{v} = \log_b s \quad\ \log_b v$$

$$\log_b s^n = n\ \log_b s \ \ ,\ln e^s = s$$

$$\log_b s = \log_b v \ \ \rightarrow\ \ s = v$$

$$\log_b \frac{1}{v} = \quad\ \log_b v$$

$$\log_b b^x = x$$

$$(\log_a b)(\log_b v) = \log_a v$$

تمرين(١): حول العبارات الآسية التالية الى الصورة اللوغاريتمية:

$5^3 = 125$

$7^0 = 1$

$10^{-3} = 0.001$

الحل:

$5^3 = 125 \quad , \quad \log_5 125 = 3$

$7^0 = 1 \quad , \quad \log_7 1 = 0$

$10^{-3} = 0.001 \quad , \log_{10} 0.001 = \quad 3$

تمرين(٢): حول كل مما يلي الي الصيغة الأسية:

$\log_5 1 = 0$

$\log_8 16 = \frac{4}{3}$

$\log \quad 10000 = 4$

الحل:

$\log_5 1 = 0 \quad , \quad 5^0 = 1$

$\log_8 16 = \frac{4}{3} \quad , \quad 8^{\frac{4}{3}} = 16$

$\log \quad 10000 = 4 \; , \; 10^4 = 10000$

تمرين(٣): أوجد قيمة x فى كل مما يلي:

و الحل يعتمد على تحويل الصيغة اللوغاريتمية الى الصورة الآسية

$\log_4 x = 2$

$\log_x 5 = \frac{1}{2}$

$\log_x 27 = 3$

$\log_3(x+4) = 2$

$\log_3 2x = \log_3 6$

$\log_x 8 = \quad 3$

الحل:

$\log_4 x = 2 \quad , \qquad x = 4^2 = 16$

$\log_x 5 = \frac{1}{2} \quad , \qquad x^{\frac{1}{2}} = 5 \quad , x = 25$

$\log_x 27 = 3 \quad , x^3 = 27 , \qquad x^3 = 3^3 , x = 3$

$\log_3(x+4) = 2 \;\; , 3^2 = x + 4 \;\; , x + 4 = 9 , x = 5$

$\log_3 2x = \log_3 6 \quad , \;\; 2x = 6 \;\; , x = 3$

$\log_x 8 = \quad 3 \;\; , x^{-3} = 8 \;\; , x^3 = \frac{1}{8} \quad , \qquad x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \;\; , x = \frac{1}{2}$

تمرين(٤): إذا كان $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 0.602$, $\log 5 = 0.699$

اوجد قيمة كل مما يلي:

$\log 15 = \log 3{\times}5 = \log 3 + \log 5 = 0.699 + 0.477 = 1.17611$

$$\log\frac{20}{3} = \log\frac{4\times5}{3} = \log 4 + \log 5 \quad \log 3 = 0.699 + 0.602 \quad 0.4771 = 0.8239$$

$$\log 450 = \log 9\times5\times10$$

$$= \log 9 + \log 5 + \log 10$$

$$= \log 3^2 + \log 5 + \log 10$$

$$= 2\log 3 + \log 5 + \log 10$$

$$= 2\times0.477 + 0.699 + 1 = 2.653$$

تمرين(٥): إذا كانت التكاليف الكلية TC بالألف ريال اللازمة لانتاج x وحدة من نوع معين سيارات الملاهي معطاه على الصورة اللوغاريتمية الآتية:

$$TC = 2x \log_e x + 10$$

المطلوب: أوجد تكلفة انتاج ٦ سيارات؟

الحل:

$$TC(6) = 2(6)\log_e 6 + 10 = 31.5 \ \ sR$$