1/ الورقة رقم الأولى

حادي عشر

أولاً: الارتباط الخطي:

نقول إن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}=\vec{AB}$ و $\vec{v}=\vec{CD}$ مرتبطان خطياً إذا كان لهما المنحى نفسه، أي إذا كان المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين.

- علاقة الارتباط الخطي:

نقول إن الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي،

أي إذا وُجد عدد حقيقي k يحقق العلاقة: $\boxed{\vec{u}=k.\vec{v}}$ ،

أو إذا وُجد عدد حقيقي k' يحقق العلاقة: $\vec{v}=k'.\vec{u}$.

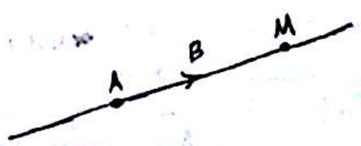
- العبارة التحليلية للارتباط الخطي:

في مستوٍ مزوّد بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، يكون الشعاعان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا حقق الشرط: $\boxed{xy'-yx'=0}$ بالاتوجد بالبكالوريا.

- التوازي: يتوازى المستقيمان (AB) و (CD) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{AB}=k.\vec{CD}$

- الوقوع على استقامة واحدة: تقع النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{AB}=k.\vec{AC}$.

نتيجة: المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\vec{AM}=k.\vec{AB}$ عندما تتحول k في مجموعة الأعداد الحقيقية.



ثانياً: نظيم شعاع:

- تعريف: نظيم شعاع $\vec{u}=\vec{AB}$ هو الطول AB .

ونرمز إلى ذلك كما يأتي: $\|\vec{u}\|=\|\vec{AB}\|=AB$ ،

ونقول إن الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع واحدة إذا كان نظيمه مساوياً 1 ، (أي واحدة الطول في المستوي).

ونلاحظ أن نظيم شعاع $\vec{u}$ لا يتعلق بتمثيله:

فإذا كان: $\vec{u}=\vec{AB}=\vec{CD}$ كان: $\|\vec{u}\|=AB=CD$

نتائج:

1) إن الشرط $\|\vec{AB}\|=0 \iff A=B$ منطقي

2) أياً كان العدد الحقيقي k وأياً كان الشعاع $\vec{u}$ كان:

$$\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$$

3) في مستوٍ مزود بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، يعطى نظيم $\vec{u}(x,y)$ بالصيغة $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

انتبه: $\vec{u}(x,y)$ ليست إحداثيات وإنما مركبات.

- لماذا ندرس الارتباط الخطي للأشعة: ؟!

لأن ذلك يفيدنا في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة أو إثبات توازي مستقيمين أو نفي توازيهما.

المساواة $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ ليست صحيحة بوجه عام، ولكن في حالات خاصة قد تكون صحيحة.

ثانياً: مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

• إذا كان لدينا نقطتين A و B ، وعددين حقيقيين α و β يحققان $\alpha+\beta\neq 0$. عندئذ توجد نقطة، ونقطة وحيدة فقط G تحقق $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$.

نسمي النقطة G هذه مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) .

• نقول إنّ النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) ، أو إنّها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B وقد أُسند إليهما الثابتان α و β بالترتيب ، إذا تحقق الشرطان:

$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$ و $\alpha+\beta\neq 0$

• تجانس مركز الأبعاد المتناسبة:

إذا كانت النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) كانت G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,k\alpha)$ ، $(B,k\beta)$ أيّاً كان العدد الحقيقي غير المعدوم k .

نتيجة: في حالة $\alpha=\beta$ و $\alpha\neq 0$ ، تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ ، $(B,1)$.

أي $\vec{GA}+\vec{GB}=\vec{0}$ وهذا يعني أنّ G هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ في حالة $A\neq B$.

• اختزال العبارة $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}$ في حالة $\alpha+\beta\neq 0$:

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) . عندئذ أيّاً كانت النقطة M (نقطة متغيرة) كان:

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}=(\alpha+\beta)\vec{MG}$$

• إذا كان G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، كان $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MG}$ وذلك أيّاً كانت النقطة M .

القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين [illegible]

• كيف نميز نقاط مستقيم بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة؟

□ إنّ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) ، هو أيضاً النقطة G التي تحقق: $\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\vec{AB}$. إذن كلّ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A , B هو نقطة من المستقيم (AB) .

ملاحظة هامة: انتبه لطريقة كتابة العلاقة ، فهي كالتالي:

مركز نقطة$_1$ = $\frac{\text{ثقيلة}_2}{\text{ثقيلة}_1+\text{ثقيلة}_2}$ · نقطة$_1$ نقطة$_2$

□ وبالعكس، لمّا كانت M نقطة من المستقيم (AB) ، استنتجنا أنّه يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{AM}=k\vec{AB}$. إذن:

$$\vec{AM}=k(\vec{AM}+\vec{MB})$$

$$\Rightarrow (1-k)\vec{MA}+k\vec{MB}=\vec{0}$$

ولأنّ $(1-k)+k\neq 0$ استنتجنا أنّ M هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-k)$ ، (B,k) .

الخلاصة: المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة M للنقطتين المثقلتين $(A,1-k)$ ، (B,k) عندما يتحوّل الثابت k في $\mathbb{R}$.

لأنّ المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقق: $\vec{AM}=k\vec{AB}$ عندما يتحوّل الثابت k في $\mathbb{R}$.

• ما السبب الذي يجعل الشرط $\alpha+\beta\neq 0$ شرطاً ضرورياً؟

إذا افترضنا أنّ $\alpha+\beta=0 \Leftarrow \beta=-\alpha$ ، وأنّه توجد G تحقق $\alpha\vec{GA}-\alpha\vec{GB}=\vec{0}$ استنتجنا أنّ $\alpha(\vec{GA}-\vec{GB})=\vec{0}$

ومنه: $\alpha\vec{BA}=\vec{0}$ وهذا مستحيل التحقق في حالة $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$.

وعليه، في حالة $A\neq B$ ، لا يوجد مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,3)$ ، $(B,-3)$.

الملخص: إذا كانت G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) ، (B,β) حيث $\alpha+\beta\neq 0$ فالشروط الآتية متكافئة:

• $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$ (حالة خاصة عندما $\alpha=\beta$: $\vec{GA}+\vec{GB}=\vec{0}$ فتكون G منتصف القطعة (AB) في حالة $A\neq B$.)

• $\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

• $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}=(\alpha+\beta)\vec{MG}$ حيث: M نقطة متغيرة. (تذكر الحالة الخاصة)

ثالثاً: مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

• تحديد التعاريف والخواص:

نتأمل ثلاث نقاط A , B , C ، وثلاثة أعداد حقيقية α , β , γ تحقق: $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ عندئذٍ:

1- توجد نقطة وحيدة فقط G تحقق: $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC} = \vec{0}$

فنسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α), (B,β), (C,γ).

2- مهما تكن النقطة M يكن:

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$$

3- إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α), (B,β), (C,γ) كان G أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$, $(C,k\gamma)$ في حالة $k\neq 0$.

*4- إذا أسندنا إلى النقاط A , B , C الثابت غير المعدوم نفسه حقق مركز الأبعاد المتناسبة G العلاقة: $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ فهو إذن مركز ثقل المثلث ABC.

• الخاصة التجميعية:

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α), (B,β), (C,γ) ، نفترض أن $\alpha+\beta\neq 0$ ، ونعرّف النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α), (B,β) عندئذٍ تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(H,\alpha+\beta)$, (C,γ)

• لإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة لعدد من النقاط، يمكننا أن نستبدل بعدد p من النقاط، من بين النقاط التي عددها n ، مركز الأبعاد المتناسبة H لهذه النقاط المثقلة بعد أن نسند إلى H المجموع غير المعدوم لثوابت هذه النقاط.

• إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة:

نزوّد المستوي بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α), (B,β), (C,γ) ، وبالتالي فإن:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

تعطي العلاقتان في المبرهنة السابقة إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، إذ هما العلاقتان

$$x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \quad , \quad y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$$

إلا حالة خاصة من المبرهنة السابقة، لأن I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$, $(B,1)$

أفكار يجب تمثلها:

• لا يوجد مركز أبعاد متناسبة لنقاط مثقلة ما لم يكن مجموع الثوابت مختلفاً عن الصفر

• يتعين مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين المثقلتين (A,α), (B,β) بالشرط: $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$ أو بالعلاقة: $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$.

ومنه فإن النقاط A , G , B على استقامة واحدة.

أما مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط مثقلة (A,α) , (B,β) , (C,γ) فيتعين بالشرط:

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$$

• مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$, $(B,1)$ هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

• ومركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ هو مركز ثقل المثلث ABC أو نقطة تلاقي متوسطاته.

• يفيد مركز الأبعاد المتناسبة في إرجاع مجموع أشعة لها المبدأ نفسه إلى شعاع واحد

$+\beta)\vec{MG} = \gamma\vec{MC}+\beta\vec{MB}$

■ فإذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α), (B,β) كان: $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}=(\alpha+\beta)\vec{MG}$

■ وإذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,α), (B,β), (C,γ) كان: $\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

• المستقيم (AB) هو مجموعة جميع مراكز الأبعاد المتناسبة M للنقطتين المثقلتين $(A,1-k)$, (B,k) عندما تتحول k في $\mathbb{R}$

• لا يتغير مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقلة إذا ضربت جميع الثوابت بالعدد غير المعدوم نفسه.

• عند تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقلة، يمكننا أن نستعيض عن عدد من النقاط بمركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط وقد أسندنا إليه ثابتاً يساوي مجموع ثوابتها. وبوجه خاص تفيد هذه الخاصة التجميعية، في إرجاع تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لعدد من النقاط إلى تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين.

منعكسات يجب امتلاكها:

- لإثبات أنّ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha), (B,\beta)$ فكّر في إثبات أنّ $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$،
- وبالعكس، فكّر في التعبير عن مساواة شعاعية بالاستفادة من مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة، فمثلاً، من المساواة $3\vec{DA}-2\vec{DB}+\vec{DC}=\vec{0}$ يمكننا أن نستنتج أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,3),(B,-2),(C,1)$ (لأنّ $3-2+1\neq 0$).
- يتيح كل علاقة ارتباط خطي من النمط $\vec{AM}=k\vec{AB}$، أن نقول إنّ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-k), (B,k)$.
- لحساب نظيم مجموع أشعة لها المبدأ نفسه، فكّر بالاستفادة من مركز الأبعاد المتناسبة، فمثلاً:

إذا كان $\vec{u}=3\vec{MA}-2\vec{MB}-4\vec{MC}$ فإنّ: $\|\vec{u}\|=\|-3\vec{MG}\|$ حيث G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,3)$ $(B,-2)$, $(C,-4)$.

- لإثبات وقوع نقاط A, B, C على استقامة واحدة فكّر بإثبات الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ أو بإثبات أنّ إحدى هذه النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.
- يمكن إثبات تلاقي مستقيمات ثلاثة في نقطة واحدة بإنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط بثلاث طرائق مختلفة.
- يفيد مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة في:
  - ← إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.
  - ← إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد.
  - ← إثبات تقاطع مستقيمات.

أخطاء يجب تجنبها:

إذا كان مجموع الثوابت معدوماً، لا يكون مركز الأبعاد المتناسبة موجوداً.