خلاصة في الأفكار الرئيسية لمادة الرياضيات في الصف الثالث الثانوي العلمي الحديث مع التدريبات والمسائل المناسبة لها

طلابنا الأعزاء

نقدم لكم هذا العمل المتواضع الذي يضم جميع الأفكار الواردة في منهاج الصف الثالث الثانوي العلمي و تدريبات ومسائل الوحدة المتعلقة بكل فكرة . ونتمنّى أن نكون قد وفقنا في ذلك .

وإنّ طريقة التعامل مع هذا العمل يعتمد على خبرة الطالب ودراسته أثناء العام الدراسي فهو يعيّن الحد الأدنى مما يجب على الطالب حلّه من التمارين والمسائل، بالإضافة إلى خلاصةٍ نظريةٍ لموضوعات الكتاب مما يسهّل على الطالب دراستها ومراجعتها .

مع التمنيات بالنجاح والتفوق

العمل من إعداد السادة

الأستاذة : وفاء حمشو

الأستاذ: محمد خلدون شماع

وبإشراف ومراجعة

الأستاذ : أحمد الفقير

الأفكار الرئيسية في المتتاليات والإثبات بالتدريج

فكرة رقم 1 : تعريف المتتالية وجهة اطرادها	تدريبات المناسبة
• **تعريف المتتالية كتابع صريح للحد ذي الدليل** n أي $u_n = f(n)$ • **تعريف متتالية بالتدريج :** $u_0 = a\ ,\ u_{n+1} = f(u_n)$ • **تعريف جهة الاطراد :** 1) **نقول إنّ المتتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : **مهما تكن** $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} > u_n$. 2) **نقول إنّ المتتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة إذا وفقط إذا تحقق الشرط : **مهما تكن** $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} \geq u_n$. 3) **نقول إنّ المتتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط **مهما تكن** $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} < u_n$. 4) **نقول إنّ المتتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة إذا وفقط إذا تحقق الشرط **مهما تكن** $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} \leq u_n$. 5) **نقول إنّ المتتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا تحقق الشرط **مهما تكن** $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} = u_n$. • **كيف ندرس جهة اطراد متتالية** $(u_n)_{n \geq n_0}$: ✓ **دراسة إشارة الفرق** $u_{n+1} - u_n$. ✓ إذا كانت حدود المتتالية **موجبة تماماً** يمكن استخدام المعيار : حساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$، ومقارنتها مع العدد 1 . ✓ **كتابة** $u_n = f(n)$ **ودراسة اطراد التابع** f **على المجال** I.	**تدرب:** ص 18 رقم ④ **مسائل الوحدة رقم** 1 و 5
فكرة رقم 2 : المتتالية الحسابية وخواصها	
• التعريف :ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بإضافة العدد الثابت نفسه (الأساس r) • صيغة العلاقة بين حدين من حدود المتتالية : $u_n = u_m + (n-m)r$ أو $u_n = u_0 + nr$ • مجموع حدود متتالية حسابية مع التأكيد أنّ عدد الحدود يساوي $m - p + 1$ حيث m ترتيب الحد ذي الدليل m و p ترتيب الحد ذي الدليل p ،	**تدرب :** ص 18 رقم ② فقرة : ❶ و ❸ و ❺ و ❼

$$S=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_m=\frac{m-p+1}{2}.\left(u_p+u_m\right)$$

- خاصية ثلاثة حدود متتابعة a و b و c هي : $a+c=2b$
- لإثبات $(u_n)_{n\geq n_0}$ أنها متتالية حسابية نثبت : أياً كان $n\geq n_0$ يكون $u_{n+1}-u_n=r$ حيث r عدد ثابت .

فكرة رقم 3 : **المتتالية الهندسية وخواصها**

- التعريف : ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بالضرب بالعدد الثابت(الأساس q) نفسه .
- صيغة العلاقة بين حدين من حدود المتتالية : $u_n=u_m\,q^{n-m}$ أو $u_n=u_0\,q^n$
- مجموع حدود متتالية هندسية مع التأكيد أنّ عدد الحدود يساوي $m-p+1$ حيث m ترتيب الحد ذي الدليل m و p ترتيب الحد ذي الدليل p ، بشرط $q\neq 1$:

$$S=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_m=u_p.\frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$$

- خاصية ثلاثة حدود متتابعة a و b و c هي : $a\cdot c=b^2$
- لإثبات $(u_n)_{n\geq 0}$ أنّها متتالية هندسية نثبت : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ حيث q عدد ثابت .

تدرب ص 18 : رقم ①

رقم ②فقرة ❷ و ❹ و ❻ و ❽

مسائل الوحدة : رقم 6 و 9

فكرة رقم 4 : **مبدأ الاثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي**

لإثبات صحة خاصة $E(n)$ تتعلق بالعدد الطبيعي n في حالة $n\geq n_0$:

① نثبت صحة هذه الخاصة في الحالة القاعدية $n=n_0$.

② نثبت في حالة $p\geq n_0$ أنّ صحة $E(p)$ تقتضي صحة $E(p+1)$

وعندها نستنتج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان $n\geq n_0$.

تدرب ص 18 : رقم ③

تدرب ص 21

مسائل الوحدة : رقم 4 و 7 و 11 و 13

فكرة رقم 5 : **مسائل داعمة**

مسائل الوحدة : رقم 15 و 16

الأفكار الرئيسية لوحدة التوابع : النهايات والاستمرار

الأفكار الهامة في النهايات	التدريبات المناسبة للفقرة
فكرة رقم 1 :تعريف نهاية تابع : 1) عند اللانهاية الموجبة تعريف (1) صفحة (31) 2) عند اللانهاية السالبة تعريف (2) صفحة (32) 3) النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي تعريف (3) صفحة (35) 4) النهاية عند a هي عدد حقيقي ℓ تعريف (4) صفحة (36) **ملاحظة** : عندما يطلب منا تطبيق تعريف نهاية التابع عند اللانهاية الموجبة أو السالبة أي تحديد قيم M التي تحقق الشرط : أيا كان العدد الحقيقي M ، وُجِدَ العدد الحقيقي A بحيث إذا كان $x > A$ كان $f(x) > M$	**تدرب:** رقم ❷ ص 34 ، رقم ❸ ص 42 . **تدرب** : رقم ❷ ص 38 مسائل الوحدة رقم 12 **تدرب** : رقم ❹ ص 42 .
فكرة رقم 2 : العمليات على النهايات 1) **نهاية تابع كثير الحدود عند اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة :** نجد نهاية الحد المسيطر لكثير الحدود عند $+\infty$ و $-\infty$. 2) **إيجاد نهاية تابع كسري عند اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة:** نجد نهاية خارج قسمة الحد المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام . 3) **إيجاد نهاية تابع كسري عند العدد** $a \notin D_f$: • نعوض في التابع وننتبه إلى إشارة المقام عندما $x \to a$ ، وكان الجواب اللانهاية فإذا دعت الحاجة نحسب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار . • إذا كانت النهاية عند عدد حقيقي a، $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين : لإزالة عدم التعيين: نحلل البسط والمقام إلى جداء عوامل ونختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام وننهي من جديد . 4) **إيجاد نهاية تابع جذري من الشكل** $f(x)=\sqrt{g(x)}$: نطبق قاعدة نهاية تابع مركب وعندما تكون النهاية حالة عدم تعيين $\boxed{\text{من الشكل : } \infty-\infty}$ نتبع ما يأتي : ⊙ <u>**إزالة عدم التعيين**</u> $+\infty-\infty$: • بشكل عام نخرج الحد المسيطر عامل مشترك .	**تدرب** : رقم ❶ ص 34 . **تدرب** : رقم ❶ ص 38 ، رقم ❶ ص 42 مسائل الوحدة رقم 1 مسائل الوحدة رقم 9 **تدرب** : رقم ❷ ص 42 **مسائل الوحدة** رقم 13

•ما داخل الجذر درجة ثانية وخارجه درجة أولى : $\sqrt{a^2x^2+...}-bx$:

نميز حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $\sqrt{a^2}\neq b$ لإزالة عدم التعيين : نخرج x^2 خارج الجذر عامل مشترك ثم نخرج x خارج قوسين وننهي من جديد .

الحالة الثانية : إذا كان $\sqrt{a^2}=b$ لإزالة عدم التعيين : نضرب ونقسم على مرافق الجذر.

(لا تنسَ إذا تساوى الحدان بالدرجة والأمثال في توابع الجذر التربيعي لإزالة عدم التعيين $+\infty-\infty$ نضرب بالمرافق ونقسم عليه)

⊙ **إزالة عدم التعيين** $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$: في كل التوابع نخرج الحد المسيطر من البسط و نخرج الحد المسيطر من المقام .

⊙ **إزالة عدم التعيين** $\frac{0}{0}$: نضرب بالمرافق ونقسم عليه لكي نختصر

5) نهاية التوابع المثلثية : (مبرهنات المقارنة) :

تدرب : رقم ❶ فقرة ① و ② صفحة 46 رقم ❷

مبرهنة الإحاطة 1 :(صفحة 43) ونستخدم غالباً مبرهنة الإحاطة عند إيجاد نهاية تابع مثلثي وينتج حالة $\cos(\pm\infty)$ أو $\sin(\pm\infty)$.

فنحاول تطبيق مبرهنة الإحاطة إذا كانت f و h و g توابع معرفة على مجال من النمط $I=]b,+\infty[$ ، ومن أجل كل x من I يتحقق $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$.

تدرب : رقم ❶ فقرة ③ صفحة 46

مسائل الوحدة رقم 4 و رقم 10

مبرهنة الإحاطة 2 : إذا كان التابعان f و g تابعين معرفين على مجال من النمط $I=]b,+\infty[$ ومن أجل كل x من I تتحقق المتراجحة : $\left|f(x)-\ell\right|<g(x)$ وإذا كان $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\ell$ كان $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$.

مبرهنة المقارنة عند اللانهاية : إذا كانت التوابع f و g تابعين معرفين على مجال من النمط $I=]b,+\infty[$

الأمثلة المحلولة (صفحة 45)

تدرب : رقم ❶ فقرة ④ و ⑤ صفحة 46

- إذا كان $f(x)\geq g(x)$ عند كل x من I وكان $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$ كان $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$
- إذا كان $f(x)\leq g(x)$ عند كل x من I، وكان $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ كان $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

مبرهنة هامة تستخدم لإزالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

تذكر

$$\sin 2x=2\sin x\cos x\ ,\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\ ,\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

نشاط 2 : تطبيق ❺ صفحة 66

مسائل الوحدة رقم 14

فكرة رقم 3 : نهاية تابع مركب :

لإيجاد نهاية تابع مركب : لإيجاد نهاية التابع $f(x)=g\circ h(x)$

نبحث بداية عن $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ ثم نبحث عن نهاية g عند b .

تدرب : رقم ❶

فقرات ①,②,⑤,⑥,⑧,⑩ صفحة 49

رقم ❷ صفحة 49

مسائل الوحدة رقم 15

فكرة رقم 4 : المستقيمات المقاربة لخط بياني لتابع f معرف على D:

لإيجاد معادلات المقاربات الأفقية أو الشاقولية لخط بياني للتابع f ندرس نهاية التابع f عند أطراف مجوعة تعريفه المفتوحة ، ثمّ نستنتج معادلة المقارب إن وجد حيث :

- إذا كانت مجموعة تعريف التابع من الشكل $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,b[$
  وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $y=c$ مقارب أفقي ($x'x\,//$) في جوار اللانهاية الموجبة .
  وبالمثل إذا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=d$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $y=d$ مقارب أفقي في جوار اللانهاية السالبة.
- إذا كانت مجموعة تعريف التابع من الشكل $]a,+\infty[$، وكان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي ($y'y\,//$) .
- لبرهان أنّ المستقيم الذي معادلته : $y=ax+b$
  مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ أو جوار $-\infty$ نثبت :
  $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$
  أو جوار $-\infty$ نثبت : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$
- لدراسة الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب المائل ندرس إشارة $g(x)=f(x)-(ax+b)$ على مجموعة تعريف التابع f

تدرب : رقم ❶

فقرات ①,②,⑤,⑥,⑦,⑧ صفحة 51

مسائل الوحدة رقم 3

مسائل الوحدة رقم 17 و 23

مسائل الوحدة رقم : 16 و 20 و 21

- تتم دراسة الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب الأفقي بالأسلوب نفسه في المقارب المائل .
- في التوابع الكسرية التي درجة بسطها أكبر من مقامها أو تساويه من الأفضل إجراء القسمة الاقليدية أولاً .
- **للبحث عن معادلة المقارب المائل نتبع مايلي** (نشاط 1 صفحة 64

1. يمكن البحث عن المقارب المائل بشكلٍ عام نتبع مايلي :

نبحث عن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وعن $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$

2. إذا كتبنا التابع بالصيغة $f(x)=ax+b+g(x)$

وكان $\lim_{x\to\mp\infty}g(x)=0$ كان المستقيم الذي معادلته

$y=ax+b$ مقارب مائل للخط البياني في جوار اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة .

- في التوابع **الجذرية** من النموذج $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$:

من الأفضل كتابة مقدار ما تحت الجذر بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل) ثم استنتاج معادلتي المقاربين المائلين .

مسائل الوحدة رقم 7 و 18

مسائل الوحدة رقم 19 و 22

فكرة رقم 5 : **الاستمرار**

مسائل الوحدة رقم 27 و 28 و 29 و 30 و 31

- نقول أنّ التابع f مستمر عند $a\in D_f$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.
- نقول أنّ التابع f مستمر عند المجموعة $D\subseteq D_f$ إذا وفقط إذا كان f مستمراً عند كل نقطة من نقاط D.
- إذا كان التابع f مستمراً على D ، كان f مستمراً على كل مجال محتوى في D
- إذا كان التابع f اشتقاقياً في نقطة a ،كان مستمراً في a
- إذا كان التابع f اشتقاقياً في مجال I ،كان مستمراً في I
- إنّ تابع $x\to\sqrt{x}$ مستمر على المجال $[0,+\infty[$.
- إنّ كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- إنّ التوابع الكسرية مستمرة على مجموعة تعريفها D.
- إنّ التابعين $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ مستمران على $\mathbb{R}$

إنّ مجموع تابعين مستمرين عند نقطة a أو جداء ضربهما أو خارج قسمتهما ، تابع مستمر عند النقطة a

- إنّ مركب تابعين مستمرين تابع مستمر .

إنّ الخط البياني لتابع مستمر على مجال I مؤلف من قطعة واحدة في هذا المجال (مثال صفحة 53) .

- **تذكر تابع الجزء الصحيح** (صفحة (30)

فكرة رقم 6 : **التوابع المستمرة وحل المعادلات .**

- مبرهنة القيمة الوسطى : إذا كان التابع f مستمراً على مجال $[a,b]$. عندئذٍ أياً يكن العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b يحقق $f(c)=y$.

تدرب : رقم ❶ و ❷ ص61

إذن للبحث عن حلول المعادلة $f(c)=y$ ننتبه دوماً إلى شرط الاستمرار في المجال المفروض ، وأنّ العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

تدرب : رقم ❸و ❹ ص61

- إذا تحققت مبرهنة القيمة الوسطى في مجال $[a,b]$ ، وكان التابع f مطرداً تماماً في هذا المجال ، فإنّ للمعادلة $f(c)=y$ حلوحيد في هذا المجال .

تدرب : رقم ❻ ص61

- إذا كان f مستمراً ومطرداً تماماً على المجال $I=[a,b]$ ، وكان $f(a)\times f(b)<0$ ، كان للمعادلة $f(x)=0$ ، بالمجهول x ، حل وحيد في $I=[a,b]$

مسائل الوحدة رقم 5 و 32 و 34

الأفكار الرئيسيه في الاشتقاق

فكرة رقم 1 : العدد المشتق والتابع المشتق وقواعد الاشتقاق	تدريبات المناسبة
• **عند دراسة العدد المشتق للتابع f عند a** : نطبق التعريف : $$\lim_{x \to a} \frac{f(x+a)-f(x)}{x-a}$$ إذا كان الجواب عدد حقيقي ، ندعو هذا العدد المشتق للتابع f **عند** a .و نرمزه $f'(a)$ ويكون التابع f اشتقاقي عند a . • التابع اشتقاقي على المجال I عندما يكون التابع اشتقاقياً عند كل نقطة من هذا المجال . • من أهم تطبيقات العدد المشتق معرفة ميل المماس للخط البياني C للتابع f حيث $m=f'(a)$ وتكون معادلة المماس في النقطة $A(a,f(a))$ هو : $$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$ • جدول مشتقات مرجعية ومبرهنات الاشتقاق صفحة 82	**مسائل الوحدة** رقم 9 و 10 **تدرب:** رقم ① رقم ❸ و ❹ ص 84 . رقم ② **.ص** 84 . **مسائل الوحدة** رقم 3 و 18 و 19 **تدرب :** رقم ③ رقم ❸ و ❺ و ❻ و ❿ و 11 و 12 **ص** 84.
فكرة رقم 2 : تطبيقات الاشتقاق	
يطبق **تعريف العدد المشتق** في حساب نهاية تابع في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نشاط 4صفحة 101 **يطبق الاشتقاق في دراسة :** • **دراسة اطراد تابع اشتقاقي:** نجد مشتق التابع وندرس اشارته **إذا كان** f' موجباً على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I،كان f متزايداً على I. **إذا كان** f' سالباً على I، ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I،كان f متناقصاً على I. • **معرفة القيم الحدية :** ◀. بالاعتماد على التعريف 3صفحة 85 ◀ . بالاعتماد على المبرهنة 3صفحة 86 • **من جدول تغيرات التابع f يمكن :** ◀ . معرفة صورة مجال من منطلق التابع ◀ .معرفة عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ حيث $k \in f(I)$	**تطبيق :** رقم ① و ② و ③ **ص** 101 **مسائل الوحدة** رقم 22 **تدرب** رقم ① و ④ **ص** 89 **تدرب** رقم ⑤ **ص** 89 **مسائل الوحدة** رقم 25

فكرة رقم 3 : **اشتقاق تابع مركب** **تذكر مبرهنة اشتقاق تابع مركب ، مبرهنة 5 صفحة (90)** إذا كان التابع g اشتقاقياً على مجال J، وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفترض أنه أياً كان x من I، انتمى $u(x)$ إلى J عندئذٍ يكون التابع f المعرف وفق $f(x)=(g\circ u)(x)=g(u(x))$ اشتقاقياً على I و $f'(x)=(g\circ u)'(x)=u'(x)\cdot g'(u(x))$ • نستخدم مبرهنة اشتقاق التوابع المركبة لتعميم قواعد الاشتقاق المعروفة على توابع مركبة . • عند اشتقاق تابع من النموذج $f(x)=\sqrt{g(x)}$ حيث التابع g اشتقاقي على مجال التعريف . نطبق القاعدة $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$ حيث $g(x)>0$ ثمّ ندرس **قابلية الاشتقاق عند قيم x التي تعدم $g(x)=0$ بالاعتماد على تعريف العدد المشتق** .مثال محلول صفحة 93 و 94 .	**تدرب رقم ① فقرة ❷ و ❹ و ❻ و ❽ ص 94 .** **مسائل الوحدة : رقم 15 و 17** **تدرب رقم ③ ص 94** **نشاط 2 : الفقرة ❸**
فكرة رقم 4 : **المشتقات من مراتب عليا** **اقرأ المثال المحلول الوارد في الصفحة 95 وهو هام**	**مسائل الوحدة : رقم 7 و 8**
فكرة رقم 5 : **أنشطة** **النشاط الأول :** الاعتماد على التابع المساعد في دراسة إشارة أو حل معادلة **النشاط الثاني :** مماس شاقولي. **النشاط الثالث :** دراسة تابع مثلثاتي **النشاط الرابع :** النهايات والاشتقاق **(تم مناقشة تمارينه في الفقرات السابقة)**	**تطبيق : دراسة تابع كسري ص 98** **مسائل الوحدة : رقم 23 .** **نشاط 3 : الفقرة ❷** **مسائل الوحدة: 30**
فكرة رقم 6 : **مسائل داعمة** برهان مركز تناظر للخط C. التابع الزوجي والتابع الفردي .	**مسائل الوحدة : رقم 27 و 28و 29**

نهاية متتالية

فكرة رقم 1 : تعريف نهاية متتالية	تدريبات المناسبة
• **تعريف نهاية متتالية منتهية : نقول إنّ عدداً حقيقياً** ℓ هو نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح مركزه ℓ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) . ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ ، أياً كان $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي n_0 **يحقق الشرط** : $n > n_0$ فإنّ $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ أي $\left\| u_n - \ell \right\| < \varepsilon$ ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة .	**تدرب:** ص 119 رقم ① و ②
• **تعريف نهاية متتالية حالة النهاية اللانهائية :** **نقول إنّ** المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **تسعى إلى** $+\infty$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح من النمط $]A, +\infty[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) .ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ أي أياً كان العدد الحقيقي A ، يوجد عدد طبيعي n_0 **يحقق الشرط** : $n > n_0$ فإنّ $u_n > A$ ، ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متباعدة نحو $+\infty$. **نقول إنّ** المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ **تسعى إلى** $-\infty$ إذا ضمّ كل مجال مفتوح من النمط $]-\infty, A[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين (أو باستثناء عدد منته منها) .ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ أي أياً كان العدد الحقيقي A ، يوجد عدد طبيعي n_0 **يحقق الشرط** : $n > n_0$ فإنّ $u_n < A$ ، ونقول عندئذ بأنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متباعدة نحو $-\infty$.	رقم ③
• يجب الاستفادة دوماً في إيجاد نهاية متتالية مكتوبة بالشكل $u_n = f(n)$ من. المتتاليات المرجعية ($u_n = \frac{1}{n}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, u_n = \frac{1}{n^2}, u_n = \frac{1}{n^3}$) وهي **تسعى** إلى 0 عندما $n \to +\infty$ ومن مبرهنات النهايات التي تمّ تطبيقها في إيجاد نهاية تابع	**تدرب:** ص 123
• **نهاية متتالية هندسية : إذا كان** q أساس متتالية هندسية عدد حقيقي عندئذ : 1) **إذا كان** $-1 < q < 1$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 2) **إذا كان** $q > 1$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ 3) **إذا كان** $q \leq -1$ ، ليس للمتتالية نهاية . 4) **في حالة** $q = 1$. **تكون المتتالية ثابتة و** $\lim_{n\to\infty} (q)^n = 1$	**تدرب:** ص 119 رقم ④ و ⑤ و ⑥ و ⑦ **مسائل الوحدة رقم** 5 و 15 و 27 **مثال محلول ص 117**

فكرة رقم 2 : تقارب المتتاليات المطردة

- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى :إذا وجد عدد حقيقي M يحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $u_n \leq M$ ، ويسمّى M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى :إذا وجد عدد حقيقي m يحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $u_n \geq m$ ، ونسمي m عنصراً قاصراً على $(u_n)_{n\geq 0}$.
- نقول إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى معاً .
- **مبرهنة :** كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$.

  كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$.
- **مبرهنة :** كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة .

  كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى متقاربة .
- ملاحظة : إذا كانت متتالية غير محدودة من الأعلى ، فهي لا تنتهي بالضرورة إلى $+\infty$ (مثال صفحة 126) .

تدرب : ص 128 رقم ②

تدرب : ص 128 رقم ③ و ⑤ و ⑥

مسائل الوحدة : رقم 17

مسائل الوحدة : رقم 8 و 10 و 16 و 21

فكرة رقم 3 : متتاليات متجاورة

- **التعريف** :: نقول إنّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة ، وتقاربت المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ من الصفر .
- **مبرهنة** : نتأمل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ عندئذٍ :

  ❶ تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين .

  ❷ يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ النهاية نفسها .

مثال محلول ص 130

تدرب ص 132 : رقم ① رقم ③فقرة ❷ و ❸ و ❹

مسائل الوحدة 26

فكرة رقم 4 : مسائل داعمة

مجموع عدد غير منته من الحدود :

مسائل الوحدة : رقم 13 و 19 و 22 و 23

متتاليات مع توابع :

مسائل الوحدة : رقم 28 و 29 و 30

الأفكار الرئيسية للتابع اللوغاريتمي

الأفكار الهامة في التابع اللوغاريتمي	التدريبات المناسبة للفقرة
فكرة رقم 1 : تعريف التابع اللوغاريتمي وخواصه • **يوجد تابع واحد معرّف واشتقاقي على** $]0,+\infty[$ **ومشتقه** $x \to \frac{1}{x}$ ندعوه التابع اللوغاريتمي ونرمزه : $x \to \ln x$. • التابع مستمر على المجال $]0,+\infty[$، ومتزايد تماماً على هذا المجال من التزايد التام للتابع $\ln$ نستنتج الخلاصة الآتية لحل المعادلات والمتراجحات التي تحوي لوغاريتم : $\boxed{\begin{array}{l}\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1\end{array}}$ • يجب الانتباه دوماً أنّ الأعداد الموجبة تماماً لوغاريتماتها معرّفة . • لحل معادلة $\ln g(x) = \ln h(x)$ تكافئ الشروط : $h(x) > 0$ و $g(x) > 0$ و $g(x) = h(x)$ • لحل متراجحة $\ln g(x) \geq \ln h(x)$ تكافئ الشروط : $h(x) > 0$ و $g(x) > 0$ و $g(x) \geq h(x)$	**تدرب ص 154** : رقم ③ و ④ و ⑤. **مسائل الوحدة رقم** 1 و 2
فكرة رقم 2 : **خواص اللوغاريتم** هناك خواص هامة نستخدمها في حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية ويجب قبل تطبيق الخواص التحقق من أنّ مضمون كل لوغاريتم موجب تماماً . ومن الخواص : **أيا يكن** $a > 0$ و $b > 0$ **يكن** : • $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ • $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ • $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ • $\ln(a)^n = n \ln a$ **حيث** $n \in \mathbb{N}^*$ • $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ ✓ ويجب الانتباه إلى الخاصة : $\ln(x^2) = 2\ln\|x\|$ بشرط $x \neq 0$ ✓ إنّ تساوي قاعدتي الربط لتابعين لا يعني تساوي تابعين انتبه للمثال المحلول صفحة 156	**تدرب ص 158** : رقم ⑦ و ⑨ . **مسائل الوحدة رقم** 14 و 15 .

فكرة رقم 3 : **صفات التابع اللوغاريتمي**

- التابع $x \to \ln x$ مستمر واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ ومشتقه
$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$
- و $\lim_{x \to \infty}(\ln x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 0}(\ln x) = -\infty$
- المعادلة $\ln x = m \Leftrightarrow x = e^m$ حيث (m عدد حقيقي و $0 < x$)
- المعادلة $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$
- نستخدم المساواة $\ln e^m = m$ في حل المعادلات و المتراجحات حيث نستبدل العدد الحقيقي m بـ $\ln e^m$. في المعادلات من الشكل
$$\ln g(x) = m \Leftrightarrow g(x) = e^m$$
- **عند حل معادلة من الصعب حلها بالطرق الجبرية نتبع أسلوب الحل الوارد في المثال المحلول صفحة 162**

تدرب ص 162 : رقم ② و ④.

فكرة رقم 4 : مشتق التابع المركب $\ln \circ u$ ونهايات مهمة بالتابع اللوغاريتمي

- إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I، وموجباً تماماً على I ، كان التابع $x \to \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I.وكان $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ هو تابعه المشتق على I .
- **النهايات المميزة للتابع اللوغاريتمي**

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \text{ ، } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x.\ln x = 0$$

تدرب ص 165 : رقم ② و ④.

مسائل الوحدة : رقم 8 و 9 و 19 .

مسائل داعمة

المسائل رقم : 5 و 6 و 7 و 20 و 23 و 27 و 30 و 32

فكرة رقم 5 **أنشطة**

النشاط الأول : وضع الخط البياني للتابع $f(x) = \ln x$ بالنسبة إلى مماساته .

النشاط الثاني : التابع اللوغاريتمي بالنسبة لأساس a : في حالة عدد حقيقي a حيث $a \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ نعرّف على المجال $\mathbb{R}^*_+$ التابع $x \to \frac{\ln x}{\ln a}$ ونسمي هذا التابع اللوغاريتمي بالأساس a ونرمزه $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

النشاط الثالث : حصر المقدار $\ln(x+1)$

تطبيق ❷ ص 168

النشاط الرابع : دراسة تابع

تطبيق ص 170

الأفكار الرئيسية في التوابع الأسية

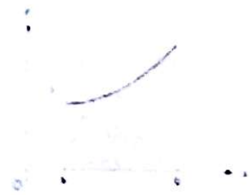
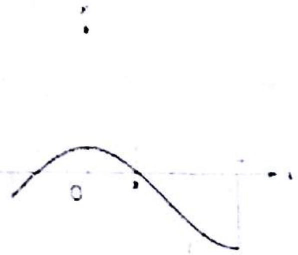
التدريبات المناسبة للفقرة	
تدرب ص 186 رقم ③ مسائل الوحدة 14 و 15	**فكرة رقم 1 :** التابع الأسي النيبري • يوجد تابع واحد رمزه $\exp$ معرّف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ يحقق $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$ حيث $y>0$. • التابع $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*_+ : x \to e^x$ • التابع مستمر على $\mathbb{R}$، ومتزايد تماماً على $\mathbb{R}$. من التزايد التام للتابع $\exp$ نستنتج الخلاصة الآتية لحل المعادلات والمتراجحات التي تحوي $\exp$: $\boxed{\begin{array}{l} a=b\Leftrightarrow e^a=e^b \\ a<b\Leftrightarrow e^a<e^b \\ a>b\Leftrightarrow e^a>e^b \end{array}}$ • يجب الانتباه دوماً أنّ نتائج $\exp$ موجبة تماماً. • لحل معادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ نحل المعادلة $u(x)=v(x)$ • لحل متراجحة $e^{u(x)}>e^{v(x)}$ نحل المتراجحة $u(x)>v(x)$ • إنّ $\ln e^x=\ln e^y \Leftrightarrow x=y$
تدرب ص 190 رقم ③ و ④ و ⑤	**فكرة رقم 2 :** خواص التابع الأسي هناك خواص هامة نستخدمها في حل معادلات و متراجحات أسية ومن الخواص : أيا كان العددان الحقيقيان a و b • إنّ $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $e^x=1$ • $e^a\cdot e^b=e^{a+b}$ ، $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ ، $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ ، $(e^a)^p=e^{ap}$ حيث p عدد صحيح . **القوى الحقيقية :** ✓ إذا كان a عدد حقيقي موجب تماماً ، و x عدد حقيقي ما ، نعرف $a^x=e^{x\ln a}\Leftrightarrow \ln(a^x)=x\ln a$ وجميع الخواص التي تطبق في حالة الأساس e تطبق في حالة الأساس a .
تدرب ص 194 رقم ② مسائل الوحدة 2 و 4	**فكرة رقم 3 :** دراسة التابع الأسي ونهاياته • التابع $x\to e^x$ مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $x\to e^x$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$ • حل المعادلة $e^x=m$ حيث $(m>0$ عدد حقيقي $)$ هو $x=\ln(m)$

• النهايات: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$ ونعمم هذه النهاية $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ حيث n عدد طبيعي . $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ونعمم هذه النهاية حيث n عدد طبيعي $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ونعمم هذه النهاية حيث n عدد طبيعي $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ • نهايات مميزة : إزالة عدم تعيين من الشكل $(1)^\infty$ نستخدم القاعدة : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$ هذه الحالات من النمط a^b حيث a و b توابع للمتحول x . **راجع المثال المحلول صفحة 198** • **التابع الأسي لتابع $x \to e^{u(x)}$ و مشتقه :** إنّ التابع $x \to e^{u(x)}$ معرف عندما التابع $u(x)$ معرّف . ويكون التابع $f : x \to e^{u(x)}$ اشتقاقي على مجال I إذا كان التابع u اشتقاقي على المجال I ويكون $f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)}$ (جداء مشتق تابع الأس في التابع نفسه). وينتج أنّ الخط البياني للتابع $x \to e^x$ فوق جميع مماساته (تكريساً للفهم صفحة 192) **الاستفادة من التابع المساعد في دراسة إشارة تابع آخر)**	**تدرب ص 199 رقم ② و ③** **مسائل الوحدة 6 و 8** **مسائل الوحدة 20 و 21** **مسائل الوحدة 7 و 10 و 17 و 18 و 19**
فكرة رقم 4 : **دراسة توابع من النمط $x \to a^x$ حيث $a>0$ و $a\neq1$** • نعرف التابع: $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ بالتابع الأسي بالأساس a . • عندما $a=1$ يمثل التابع $\exp_1 x = 1$ تابع ثابت . لهذا في دراستنا نعتبر $a>0$ و $a\neq1$ • الاشتقاق : $(\exp_a(x))' = (a^x)' = \ln a \cdot e^{x\ln a}$ عندما $a>1$ فإنّ $\ln a > 0$ فالتابع $\exp_a(x) = a^x$ متزايد تماماً . عندما $a<1$ فإنّ $\ln a < 0$ فالتابع $\exp_a(x) = a^x$ متناقص تماماً . عند دراسة تغيرات التابع $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ $\boxed{\text{ندرسها كما التابع الأسي النيبري}}$	**تدرب ص 203 رقم ② و ③ و ④ و ⑤ و ⑥ و ⑧ .**

فكرة رقم 5 : **المعادلات التفاضلية البسيطة** إنَ حل معادلة تفاضلية $y'=ay$ حيث $(a\neq 0)$ على مجال I هو أن نعثر على جميع التوابع f الاشتقاقية على I، والذي يحقق من أجل كل $x\in I$ العلاقة $f'(x)=a\,f(x)$ ، نسمي مثل هذا التابع حلاً للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ **نماذج المعادلات التفاضلية البسيطة :** • إن حل المعادلة $\boxed{y'=ay \text{ حيث } (a\neq 0)}$ هو مجموعة التوابع : $\boxed{f_k : x\rightarrow k\,e^{ax} \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}}$ • إن حل المعادلة $\boxed{y'=ay+b \text{ حيث } (a\neq 0)}$ هو مجموعة التوابع : $\boxed{f_k : x\rightarrow k\,e^{ax}-\frac{b}{a} \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}}$	**تدرب ص** 205
فكرة رقم 6 : **مسائل داعمة**	**مسائل الوحدة** 16 و 23 و 25

الأفكار الرئيسية في التكامل والتوابع الأصلية

التدريبات المناسبة	
تدرب ص 222 : رقم ① فقرة : ❶ و ❹ و ❻ و ❽ رقم ② فقرة : ❷ و ❺	**فكرة رقم 1 : التوابع الأصلية** • ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I. نقول إنَ التابع F تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان : F اشتقاقياً على I. وكان $F'(x)=f(x)$ في حالة $x \in I$ والتابع $G : x \rightarrow F(x)+\mathrm{k}$ ، حيث k عدد حقيقي ، هو تابع أصلي للتابع f أي $G'(x)-F'(x)=0$. • إنّ الخط البياني للتابع أصلي F نسميه المنحني التكاملي C للتابع f. (مثال صفحة 220) . • إذا كان f تابعاً مستمراً على مجال I. يوجد تابع أصلي F للتابع f على I
تدرب ص 227 مسائل الوحدة 1 و 3 و 13	**فكرة رقم 2 : بعض قواعد حساب التوابع الأصلية** • يجب حفظ قواعد التوابع الأصلية الواردة في الجدول المكتوب الصفحة 223، وفي الجدول الممثل للقواعد العامة الصفحة 225. • التابع الأصلي لمجموع تابعين على مجال I، هو مجموع تابعيهما الأصليين على المجال I. • إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على مجال I، وكان λ عدداً حقيقياً ، كان λF تابعاً أصلياً للتابع λf على المجال نفسه .
تدرب ص 235 مسائل الوحدة 5 تدرب ص 236 رقم ② و ③ مسائل الوحدة 10 تدرب ص 236 رقم ④ مسائل الوحدة 14	**فكرة رقم 3 : التكامل المحدد وخواصه** • نسمي $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$ بالتكامل المحدد للتابع f من a إلى b • خواص التكامل المحدد لتابع مستمر على مجال (صفحة 229) • علاقة شال : ليكن f تابعاً مستمراً على مجال I ، وليكن a و b و c ثلاثة أعداد من هذا المجال ، عندئذٍ تتحقق الخاصة الآتية : $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ • ومن أشهر طرق التكامل لجداء تابعين ، **التكامل بالتجزئة** : إذا كان التابعان u و v اشتقاقيين على المجال I، وكان المشتقان مستمرين على I، عندئذٍ : $\boxed{\int_a^b (u \cdot v') = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v}$ • **حساب تكامل بعض التوابع الكسرية** : إذا كان التابع $f : x \rightarrow \dfrac{A(x)}{B(x)}$ حيث التابع $B(x)$ تابع من الدرجة الثانية وقابل للتحليل إلى عاملين مختلفين ،

عندئذٍ نميز حالتين : • درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام : نكتب التابع الكسري على شكل مجموع تابعين كسريين مقام كلٍ منهما **تابع من الدرجة الأولى** .كما في المثال المحلول صفحة (233) • درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام: **<u>نجري القسمة الإقليدية</u> أولاً** ، ونتابع الحل حسب الحالة كما في المثال المحلول **صفحة** (234)	**مسائل الوحدة** 6 و 7
<u>فكرة رقم 4 :</u> **التكامل المحدد وحساب المساحة** • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b > a$ ، وأنّ $f(x) \geq 0$ على $[a,b]$ عندئذٍ $\int_a^b f$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$. • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b > a$ ، وأنّ $f(x) \leq 0$ على $[a,b]$ عندئذٍ $\int_a^b -f$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$. • إذا كان التابع f مستمراً على مجال I ، وليكن a و b عددين من I. ونفرض أنّ $b > a$ ، عندئذٍ $\int_a^b \|f\|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل والخط البياني C_f والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$. (مثال محلول 240)	 
فكرة رقم 5 : **أنشطة** • **نشاط ① حساب مساحة سطح مستوٍ :** **مساحة السطح المحصور بين منحنيين** إذا كان C_f الخط البياني للتابع f المستمر على $[a,b]$ وكان C_g الخط البياني للتابع g المستمر على $[a,b]$. عندئذٍ تعطى مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين : $x = a$ و $x = b$ بالصيغة التالية : $\int_a^b \|(f_2 - f_1)\|$ **نشاط ② حساب حجم مجسم**	**تمرين ❶ و ❷ ص** 242 **مسائل الوحدة** 23 و 24 **تمرين ❶ و ❷ ص** 243
فكرة رقم 6 : **مسائل داعمة**	**مسائل الوحدة** 8 و 9 و 26

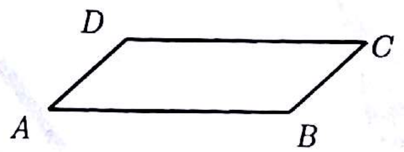
الأشعة

فكرة رقم 1 : الارتباط الخطي لشعاعين

- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي . أي إذا وُجِدَ عدد حقيقي k يحقق $\vec{u}=k\vec{v}$ أو وُجِدَ عدد حقيقي k' يحقق $\vec{v}=k'\vec{u}$

في حالةٍ خاصة : إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ يكافئ الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وجود عدد حقيقي $k\neq 0$ يحقق $\vec{u}=k\vec{v}$.

- فتكون النقاط المتمايزة A و B و C على استقامةٍ واحدة إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً .
- وفي معلم معطى ، يكون الشعاعان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ ،غير الصفريين مرتبطين خطياً ، إذا تحقق $\frac{z}{z'}=\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}$ في حالة x' و y' و z' من $\mathbb{R}^*$.
- لإثبات شكل $ABCD$ متوازي أضلاع



يكفي أن نثبت $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

التدريبات المناسبة

مثال محلول ص 15

مثال محلول ص23(نفس السابق ولكن بطريقة ثانية)

مسألة رقم $[\![5]\!]$ ص 95

تدرب ص 16 رقم ② .

تدرب ص24 ⑤ و ⑥ و ⑦

مثال محلول ص 22

تدرب : ص 24 ① و ③

فكرة رقم 2 : الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

مبرهنة 3: ص17 (تعريف المستوي في الفراغ شعاعياً)

لتكن A و B و C **ليست واقعة على استقامةٍ واحدة**. عندئذٍ المستوي (ABC) هو مجموعة النقاط M المعرَفة بالعلاقة $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ حيث x و y من $\mathbb{R}$.(ونقول أيضاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما شعاعا توجيه في المستوي (ABC)).

<u>تعريف الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :</u>

نقول إنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$مرتبطة خطياً ، إذا وفقط إذا وُجدت نقطةٌ O تجعل النقاط O و A و B و C، المعَرفة وفق $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ تقع في مستوٍ واحد .

ملاحظة: عندما يكون الشعاعان ، غير الصفريين$\vec{u}$ و $\vec{v}$، مرتبطين خطياً ، تكون النقاط O و A و B على استقامة واحدة ، فيوجد على الأقل مستوٍ يحوي المستقيم (OA) والنقطة C ، وعندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$مرتبطة خطياً.

مبرهنة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة أشعة . نفترض أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطياً .

عندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وُجد عددان حقيقيان : a و b يحققان $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

ملاحظة : نحتاج المعلم المتجانس في حساب أطوال الأضلاع أو إثبات التعامد

التدريبات المناسبة

مثال محلول ص 18

تدرب ص 20رقم :

②و ④ و ⑤ و ⑥

التدريبات المناسبة	فكرة رقم 3 : معادلة الكرة
مثال محلول ص 27 ص43 رقم 23 ص70 رقم 18 و 19 و20 و 21	الكرة Sالتي مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها R ، هي مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $\Omega M^2 = R^2$ فتكون معادلتها من الشكل : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

التدريبات المناسبة	فكرة رقم 4 : المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
تدرب ص 27 رقم ❷ و ❸	هو مجموعة نقط الفراغ التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها

التدريبات المناسبة	فكرة رقم 5 : مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ
مثالين محلولين ص 29	• **تعريف** : إنّ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ هو النقطة G التي تحقق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. • **مبرهنة : (تفيد في استبدال مجموع عدة أشعة بشعاع واحد)** ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة الأربع (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ ، عندئذٍ ، أياً كانت النقطة M ، كان $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$
تدرب ص 80 +81 تمرين رقم 4 ص94	• **مبرهنة : (تفيد في تعيين مركز الأبعاد المتناسبة)** ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة الأربع (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ ، عندئذٍ ، إذا كان H مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط منها (A,α) و (B,β) و (C,γ) ، كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,\alpha+\beta+\gamma)$ و (D,δ) . • **ملاحظة** : إذا كانت H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) ، وكانت K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,γ) و (D,δ) ، كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,\alpha+\beta)$ و $(K,\gamma+\delta)$. • **تذكرة** : إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) ، كان $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (تفيد في تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين) • **تذكرة** : ⊙ إنّ مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي المتوسطات أو هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,α) و (C,α) . ⊙ إنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو مركز الأبعاد المتناسبة

<table>
<tr><td>

للنقطتين (A,α) و (B,α)

⊙ عندما نزوّد الفراغ بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في حالة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) تعطى (x_G,y_G,z_G) إحداثيات النقطة G بالصيغ :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

الفائدة من مركز الأبعاد المتناسبة :

⊙ إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامةٍ واحدة .

⊙ إثبات تقاطع مستقيمين : (تعيين مركز الأبعاد المتناسبة بطريقتين مختلفتين)

⊙ إثبات وقوع أربع نقط في مستوٍ واحد : (أحد هذه النقاط هو مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث الباقية)

</td><td>

مثال محلول ص 79

6 ص 95 ، 7 ص 96 ،

نشاط 1 ص 92

مثال محلول ص30 + ص80

</td></tr>
<tr><td>

فكرة رقم 6: الأنشطة **معادلة أسطوانة ومعادلة مخروط**

⊙ **معادلة أسطوانة** : إنّ معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ ونصف قطر قاعدتها r ومركز قاعدتها الدنيا $(0,0,a)$ ومركز قاعدتها العليا $(0,0,b)$ $a<b$ من الشكل : $x^2+y^2=r^2$ و $a\le z\le b$.

⊙ **معادلة مخروط** : إنّ معادلة المخروط الذي محوره $(O,\vec{k})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,h)$ ونصف قطرها r من الشكل :

$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0$ و $0\le z\le h$.

</td><td>

التدريبات المناسبة

حل تمارين ص33

حل تمارين ص 34

</td></tr>
<tr><td>

فكرة رقم 7 : **مسائل داعمة**

إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد: **تمرين 4 ص 36**

حساب مسافة :**8ص39** ، المسافات وحجم هرم : **20 ص**42 .

إثبات تقاطع مستقيمين: **تمرين 5 ص 37** ، التوازي في الفراغ **تمرين 6 ص 38**

اختزال مجموع أشعة بشعاع واحد : 22 ص43

</td><td></td></tr>
</table>

الأفكار الرئيسية في الجداء السلمي في الفراغ	التدريبات المناسبة

فكرة رقم 1 : **العبارات المختلفة للجداء السلمي في الفراغ**

في الفراغ الجداء السلمي لشعاعين يعطى بإحدى العبارات :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|v\|^2\right)$
- وفي معلم متجانس لدينا $\vec{u}(x_1,y_1,z_1),\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإنّ

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

وبالتالي :
$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

ويستفاد من الجداء السلمي لشعاعين في: حساب **تجيب الزاوية** $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

تعامد شعاعيين غير معدومين حيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

ولإثبات أنّ مستقيمين متعامدان نثبت تعامد شعاعي توجيهيهما .

- إذا كان H هي المسقط القائم للنقطة C على (AB)
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- إذا كان H هي المسقط القائم للنقطة C على المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

التدريبات المناسبة:

مثال محلول ص 52

تدرب ص 53 : رقم ❸ و ❹

تدرب ص 56 :

رقم ❶ و ❷ و ❸ و ❹

مسائل الوحدة ص 68 : رقم 9 و 22 و 23 و 25 .

فكرة رقم 2 : **التعامد في الفراغ**

- الشعاع الناظم على مستوٍ : نقول إنّ الشعاع غير الصفري $\vec{n}$ ناظماً على المستوي P إذا كان منحاه عمودي على المستوي .
- **تعامد مستقيم مع مستوٍ** : يكفي أن نثبت أنّ شعاع توجيه للمستقيم **عمودي** على شعاعي **توجيه المستوي** (وهما شعاعان غير مرتبطين خطياً في المستوي)
- **تعامد مستقيمين** : يكفي أن نثبت تعامد شعاع موّجه لأحدهما مع شعاع موّجه للآخر

التدريبات المناسبة:

مسائل الوحدة ص 67 : رقم 7

فكرة 3 : **المعادلة الديكارتية لمستوٍ**

- لكتابة معادلة مستوٍ يلزمنا نقطة من المستوي وشعاع ناظم عليه .

إذا كانت النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ من المستوي P و $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم عليه

فإنّ المعادلة تكون :

- $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ أو $ax+by+cz+d=0$

التدريبات المناسبة:

تدرب ص 59 **رقم** ① .

• بعد نقطة $B(x_B, y_B, z_B)$ عن المستوي P الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ هو طول العمود المرسوم من النقطة B على المستوي P ويحسب بتطبيق الدستور : $dist(B,P)=\dfrac{ax_B+by_B+cz_B+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ويستفاد من هذا الدستور في : • معرفة وضع النقطة B تقع في المستوي أو خارجه : إذا كان $dist(B,P)=0$ فالنقطة B تقع في المستوي . • حساب ارتفاع هرم ثم حجمه. • إثبات أنّ النقطة A' مسقط النقطة A على المستوي P (حيث نتحقق أن النقطة A' تنتمي الى المستوي P ، ثم نتحقق أن $dist(A,P)=AA'$)	**تدرب** ص 59 رقم ⑤ . **مسائل الوحدة ص** 64 : رقم 3 **ص** 69 : رقم 10 **مسائل الوحدة ص** 67 : رقم 8 و 17
فكرة رقم 4 **الوضع النسبي لمستويين** • **توازي** مستويين : الشرط اللازم والكافي لتوازي مستويين أن يكون : شعاع ناظم للمستوي الأول **مرتبط خطياً** مع شعاع ناظم للمستوي الثاني . • وقد يكون المستويان متوازيين تماماً . أو منطبقين (للتحقق : نختار نقطة من المستوي الأول ونعوض إحداثياتها في معادلة المستوي الثاني ، فإذا تحققت المساواة كان المستويان منطبقين) • **تقاطع** مستويين : نقول عن مستويين أنهما متقاطعين إذا كان أي شعاع ناظم للمستوي الأول **غير مرتبط خطياً** مع أي شعاع ناظم للمستوي الثاني . • تعامد مستويين : يتعامد المستويان إذا كان : $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	**تدرب** ص 59 رقم ② و ③ و ④ **مسائل الوحدة : رقم** 4 14 و 15 و 16 و 27
فكرة رقم 5 : **الحالات المختلفة لكتابة معادلة مستوي** 1) معادلة مستو يمر بنقطة معلومة ويقبل شعاعاً ناظماً عليه . 2) معادلة مستو يمر بنقطة معلومة ، و يتعامد مع المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث : $A(x_A, y_A, c_A)$ ، $B(x_B, y_B, c_B)$ 3) معادلة مستو يمر بنقطة معلومة ، ويوازي شعاعين معلومين غير مرتبطين خطياً 4) معادلة مستو يتعامد مع مستو علمت معادلته ، ويمر بنقطتين $A(x_A, y_A, c_A)$ ، $B(x_B, y_B, c_B)$ 5) معادلة مستو يمر بنقطة معلومة ، و يعامد مستويين متقاطعين علمت معادلتيهما. 6) معادلة مستو يمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة . 7) المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$. 8) معادلة مستو يمر بنقطة معلومة ، ويوازي مستو علمت معادلته .	من الأفضل حل بعد نقطة عن مستقيم نتعامل معه وفق أفكار الوحدة الثالثة (**مسألة** 5 و 11)

فكرة رقم 1 : **المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة**

• مبرهنة : ⊙ إن المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) عندما تتحول t في $\mathbb{R}$.

⊙ القطعة المستقيمة $[AB]$ هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) عندما تتحول t في $[0,1]$.

نتائج : ⊙ إنّ نقاط داخل المثلث ABC هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث $\alpha>0$ و $\beta>0$ و $\gamma>0$.

⊙ إنّ انتماء نقطة M إلى (ABC) يعني وجود عددين x و y بحيث تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (C,y) .

مما سبق نستنتج : ⊙ لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أنَ إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين .

⊙ لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد ، يكفي إثبات أنّ إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث الأخرى .

التدريبات المناسبة

مسائل الوحدة : $[\![1]\!]$ و $[\![2]\!]$ و $[\![3]\!]$

فكرة رقم 2 : **التمثيلات الوسيطية**

المستقيم يمر بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعه الموّجه $\vec{u}(a,b,c)$ ، هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $t\in\mathbb{R}$,

$$(S):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

وندعو الجملة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d .

ويعتمد التمثيل السابق هو تمثيل وسيطي لقطعة مستقيمة $[AB]$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ عندما $t\in[0,1]$

وكذلك بالنسبة لنصف المستقيم $[AB)$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ عندما $t\in[0,\infty[$.

التدريبات المناسبة

تدرب ص 84 رقم ① و ③

تدرب ص 84 رقم ②

فكرة رقم 3 : **تقاطع مستقيم ومستو**

لمعرفة وضع مستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$ ، ندرس العلاقة بين الشعاع $\vec{u}$ الموجه للمستقيم وشعاع $\vec{n}$ الناظم للمستوي :

✓ إذا كان : $d//P \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$

✓ إذا كان : $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$ كان المستقيم d يقطع المستوي $\mathcal{P}$.

✓ وإذا كان الشعاع $\vec{u}$ مرتبط خطياً مع الشعاع $\vec{n}$ كان المستقيم d عمودي على

التدريبات المناسبة

تدرب ص 87 رقم ③ و ④

مسائل الوحدة :

ص 97 رقم $[\![10]\!]$ و $[\![11]\!]$

ص 69 رقم $[\![11]\!]$

ص 67 رقم $[\![6]\!]$ و $[\![8]\!]$ و $[\![17]\!]$

المستوي $\mathcal{P}$ ، وتكون نقطة التقاطع بين المستقيم والمستوي هي A' **المسقط القائم للنقطة** A **من المستقيم** d **على المستوي** $\mathcal{P}$. لتعيين إحداثيات نقطة التقاطع **نحل** المعادلات الوسيطية للمستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$	
فكرة رقم 4 : **التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ المعين بتقاطع مستويين** مثال محلول ص 86	**التدريبات المناسبة** **تدرب ص** 87 رقم ① و ②
فكرة رقم 5: **الوضع النسبي لمستقيمين في الفراغ** أمثلة محلولة ص 83 و ص 84	**التدريبات المناسبة**
فكرة رقم 4 : **تقاطع ثلاث مستويات** لدينا المستويات $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \mathcal{P}_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$	**التدريبات المناسبة** **تدرب ص** 90
فكرة رقم 5: **الأنشطة** يمكن حل أنشطة الوحدة الثانية بالإعتماد على أفكار الوحدة الثالثة **خواص رباعي** الوجوه المنتظم في الوحدة الثانية وفي النشاط 1 . في الوحدة الثالثة . .	**التدريبات المناسبة** **حل مستقيمات متقاطعة ص** 92
فكرة رقم 6: **بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ**	**التدريبات المناسبة** **ص** 42 رقم 19 ، **ص** 66 رقم 5 **ص** 69 رقم 11 و 12 و 13
فكرة رقم 7 : **مسائل داعمة** مسائل الوحدة رقم $\llbracket 9 \rrbracket$ **نشاط 2 ص** 93 و **نشاط 2 ص** 62 و **نشاط 3 ص** 63	

الأعداد العقدية

فكرة رقم 1 : **تعريف العدد العقدي وخواص الحساب في $\mathbb{C}$**

تدريبات المناسبة

- **تعريف الشكل الجبري للعدد العقدي** : نسمي الكتابة $z = a + ib$ حيث a و b عددان حقيقيان ، الشكل الجبري للعدد العقدي z .

تدرب: ص 105 رقم ①

- **نسمي** a **الجزء الحقيقي للعدد العقدي** z ، ونكتب $a = \text{Re}(z)$.
- **نسمي** b **الجزء التخيلي للعدد العقدي** z ، ونكتب $b = \text{Im}(z)$.
- **يكون** z حقيقياً عندما $\text{Im}(z) = 0$ ، **يكون** z تخيلي بحت عندما $\text{Re}(z) = 0$
- **نسمي طويلة العدد العقدي** z المقدار $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **إنّ** $z_1 = z_2$ عندما $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$.
- **قوى العدد** i : إنّ $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$ و $i^4 = 1$.
- **قواعد الحساب في** $\mathbb{C}$: نزود مجموعة الأعداد العقدية بعمليتن الجمع والضرب لهما خواص العمليات في $\mathbb{R}$ ، مع استبدال قوى العدد i بما تساويها عند ظهورها في الحسابات .

تدرب: ص 105 رقم ③ و ④

- **عكس العدد العقدي** z هو $-z = -a - bi$
- **مقلوب العدد العقدي** $\frac{1}{z}$: نضرب البسط والمقام بالعدد $a - bi$ أي

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

فكرة رقم 2 : **مرافق عدد عقدي**

مرافق العدد العقدي z هو عدد عقدي $\overline{z}$ حيث $\overline{z} = a - ib$

خواص الأعداد المترافقة :

تدرب : ص 107 رقم ① و ②

- مرافق مجموع عددين عقدين يساوي مجموع مرافقيهما أي $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- مرافق جداء عددين عقدين يساوي جداء مرافقيهما أي $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

مسائل الوحدة : رقم 6 و 8

- مرافق خارج قسمة عددين عقدين يساوي خارج قسمة مرافقيهما أي $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- الرفع إلى قوة : $\overline{(z)^n} = (\overline{z})^n$.

نتائج مباشرة هامة جداً : إذا كان $z = a + ib$ و $\overline{z} = a - ib$

- إنّ مجموع عددين عقدين مترافقين عدد حقيقي : $z + \overline{z} = 2a$
- إنّ حاصل طرح عددين عقدين مترافقين هو عدد تخيلي بحت $z - \overline{z} = 2bi$
- إنّ جداء عددين عقدين مترافقين هو عدد حقيقي أي $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

- ومنه نستنتج أنّ العدد العقدي z حقيقياً إذا وفقط إذا تحقق $z=\overline{z}$.

و العدد العقدي z تخيلياً إذا وفقط إذا تحقق $z=-\overline{z}$.

- إذا كان $|z|=1$ فإنّ $\overline{z}=\frac{1}{z}$

يستفاد من هذه الخواص في ايجاد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد z

مسائل الوحدة : رقم 4 و 9 و 15 و 16

فكرة رقم 3 : الشكل المثلثي لعدد عقدي

- **التعريف** : إذا كان المستوي مزود بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ عندئذٍ :

إذا كان $z=a+ib$ فإنّ الشكل المثلثي للعدد العقدي هو $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و $cos\theta=\frac{a}{r}$ و $\sin\theta=\frac{b}{r}$ حيث θ زاوية العدد العقدي z

مقدرة بالراديان و $\theta=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\arg z\ (2\pi)$

- **يجب الانتباه دوماً أنّ** $r>0$
- $|\overline{z}|=|z|=r$ و $\arg\overline{z}=-\arg z\quad(2\pi)$
- **للانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي نستخدم الدساتير:**

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ \text{و}\ cos\theta=\frac{a}{r}\ \text{و}\ \sin\theta=\frac{b}{r}\ .$$

تدرب ص 110 : رقم ①

رقم ② فقرة ❹ و ❺ و ❻

رقم ③ و ④

فكرة رقم 4 خواص طويلة عدد عقدي وزاويته

العمليات على الأعداد العقدية المكتوبة بالشكل المثلثي :

إذا كان العددان العقديان: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ و $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

فإنّ :

- $z_1=z_2\Leftrightarrow r_1=r_2\ ,\theta_1=\theta_2\quad(2\pi)$
- $z_1\cdot z_2=z$ **حيث** $r=r_1\cdot r_2\ ,\theta=(\theta_1+\theta_2)\ \ (2\pi)$
- $\frac{z_1}{z_2}=z$ ($z_2\neq 0$) **حيث** $r=\frac{r_1}{r_2}\ ,\theta=(\theta_1-\theta_2)\ \ (2\pi)$
- $z_1=(z)^n$ (**حيث** n **عدد طبيعي**) **فيكون** $r_1=r^n\ ,\theta_1=n\theta\ \ (2\pi)$ **أي**

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)^{\ n}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

وإذا اعتبرنا $r=1$ **نحصل على دستور دوموافر الذي يعطينا مضاعفات الزاوية بدلالة الزاوية** $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

تدرب ص 113 : رقم ① و ②

تدرب ص 113 : رقم ③ و ④

نشاط 3 (دساتير التحويل)

فكرة رقم 5 الشكل الأسي لعدد عقدي

إذا كان العدد العقدي z مكتوب بالشكل المثلثي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فإنّ هذا العدد يكتب بالشكل : $z=re^{i\theta}$ حيث $|z|=|r|$.

وبالتالي العمليات على الشكل الأسي :

- في حالة عددين موجبين تماماً r و r' ، وعددين حقيقيين θ و θ' لدينا

تدرب ص 116 رقم ②

مسائل الوحدة 1 و 3 و 12

⊙ $r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1\cdot r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ ⊙ $\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

⊙ $\overline{(re^{i\theta})}=re^{i(-\theta)}$ ⊙ $re^{i\theta\ n}=r^nc^{i\ n\theta}$

وفي حالة خاصة عندما $r=1$ ينتج دستور دوموافر $(e^{i\theta})^n=r^ne^{i\ n\theta_1}$

⊙ $r_1e^{i\theta_1}=r_2e^{i\theta_2}\Leftrightarrow(r_1=r_2,\theta_1=\theta_2\ \ (2\pi))$

⊙ **دستورا أويلر** : أياً كان العدد الحقيقي θ كان :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ ;\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

فقرة 6: المعادلة من الدرجة الثانية ذات أمثال حقيقية (حل المعادلات)

تدرب ص 118 رقم ①

تدرب ص 118 رقم ② و ③ و ④

1) إذا كانت المعادلة من الدرجة الأولى : يتم الحل كما في $\mathbb{R}$.

2) حل المعادلة من النموذج $a\,z^2+b\,z+c=0$ حيث (a,b,c **أمثال حقيقية**) في $\mathbb{C}$ يتم كما في $\mathbb{R}$ ، حيث نحلل المعادلة إلى جداء عاملين إما بالتحليل المباشر أو باستخدام $\Delta=b^2-4ac$ وعندئذٍ :

مسائل الوحدة 2

- إذا كانت $\Delta>0$ فللمعادلة جذران حقيقيان $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}\ ,\ z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كانت $\Delta=0$ فللمعادلة جذر وحيد $z=\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت $\Delta<0$ فللمعادلة جذران عقديان مترافقان هما

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ \ ,\ \ z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

مسائل الوحدة 10 و 11

نشاط 2 :

مسائل الوحدة 14

3) **نشاط 1 : حل المعادلات من الدرجة الثالثة أو أكثر بأمثال حقيقية :**

إنّ كثير الحدود في $\mathbb{C}$ هو أي تابع p في $\mathbb{C}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$ من الشكل $z\to a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots\dots+a_1z+a_0$ وبالتالي :

- إذا كان أمثال $p(z)$ أعداد حقيقية فإنّ هناك جذران مترافقان للمعادلة $p(z)=0$

يجب حل الأمثلة المحلولة المتعلقة بالنشاط 1

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

فكرة رقم 1 : تمثيل الأشعة بأعداد عقدية	**التدريبات المناسبة**
تعاريف : •**العدد العقدي الممثل لنقطة:** نقرن بكل نقطة $M(x,y)$ العدد العقدي $z_M = x + iy$ • **العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{w}$ الذي مركبتاه (a,b):** هو العدد العقدي $z = a + ib$. • **العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$** هو العدد العقدي $z_B - z_A$. • **طول القطعة المستقيمة $[AB]$** يساوي $\left\|z_B - z_A\right\|$. • **العدد العقدي الموافق لمركز الابعاد المتناسبة : إذا كان لدينا n** ،من النقاط المثقلة $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3)..........(A_n,\alpha_n)$ التي تمثلها **الأعداد العقدية** $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ ، عندئذٍ z_G العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة : $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$ حيث $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$	**تدرب:** ص 132 رقم ① و ② **تدرب:** ص 132 رقم ③ و ④
فكرة رقم 2 : استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع	**التدريبات المناسبة**
ليكن $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ، فإنّ $AB = \left\|z_B - z_A\right\|$ • **زاوية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مع المحور الذي شعاعه** $\vec{u}$ ، $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ • الزاوية الموجهة بين الشعاعين $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ هي $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$ • نستفيد من حساب النسبة $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ في حالة $z_B \neq z_A$: ✓ في حساب نسبة الطولين $\dfrac{CD}{AB}$. ✓ في حساب قياس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ وبالتالي : إذا كانت $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ فإن الشعاعين مرتبطان خطياً . إذا كانت $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ أو $\theta = \dfrac{-\pi}{2}$ فإن الشعاعين متعامدان . **تمثيل بعض المجموعات الخاصة :** إذا كانت النقاط $M(z)$ تحقق العلاقة $\left\|z - w\right\| = r$، حيث w العدد العقدي الممثّل للنقطة $\Omega(w)$ و r طول ثابت فإنّ	**تدرب :** ص 133 رقم ⑥ و ⑦ **مسائل الوحدة** 5 و 6 و 7

مجموعة هذه النقاط هي دائرة مركزها النقطة Ω ونصف قطرها r .

لتكن A و B نقطتان يمثلهما العددان العقديان a و b حيث $a \neq b$. عندئذ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق $|z-a|=|z-b|$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

تدرب : ص 133 رقم ⑧

مسائل الوحدة 4 و 8

التدريبات المناسبة

فكرة رقم 3 : الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

لتكن النقطة M يمثلها العدد العقدي z ، و النقطة M' يمثلها العدد العقدي z'

الصيغة العقدية للانسحاب : ليكن $\vec{w}$ شعاعاً يمثله العدد العقدي b ، عندئذٍ نقول **M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}$ إذا وفقط إذا تحقق أن $\overrightarrow{MM'}=\vec{w}$**

وبالتالي الصيغة العقدية لتحويل الانسحاب هي $\boxed{z'=z+b}$.

الصيغة العقدية للتحاكي : ليكن Ω نقطة يمثلها العدد العقدي ω ، وليكن k عدداً حقيقياً غير معدوم ، عندئذٍ نقول M' **صورة M وفق تحاكي مركزه Ω ونسبته k إذا وفقط إذا تحقق أنّ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\cdot\overrightarrow{\Omega M}$ وبالتالي الصيغة العقدية للتحاكي هي**

$$\boxed{z'-\omega=k\cdot(z-\omega)}$$

تدرب ص 136 : رقم ① و ② و ③

الصيغة العقدية للدوران : ليكن Ω نقطة يمثلها العدد العقدي ω ، وليكن θ عدداً حقيقياً، عندئذٍ نقول M' **صورة M وفق دوران مركزه Ω وزاويته θ.**

إذا وفقط إذا تحقق أنّ $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

وبالتالي الصيغة العقدية للدوران هي : $\boxed{z'-\omega=e^{i\theta}\cdot(z-\omega)}$

حالات خاصة : ⊙ **إذا كان مركز الدوران مبدأ الاحداثيات ، تصبح الصيغة العقدية للدوران هي** $\boxed{z'=e^{i\theta}\cdot z}$.

⊙ **إذا كان زاوية الدوران $\theta=\frac{\pi}{2}$ تصبح الصيغة العقدية للدوران.**

هي $\boxed{z'-\omega=i\cdot(z-\omega)}$ **والمثلث $M\Omega M'$ قائم ومتساوي الساقين .**

⊙ **إذا كان زاوية الدوران $\theta=\frac{-\pi}{2}$ تصبح الصيغة العقدية للدوران**

هي $\boxed{z'-\omega=-i\cdot(z-\omega)}$ **والمثلث $M\Omega M'$ قائم ومتساوي الساقين .**

⊙ **إذا كان زاوية الدوران $\theta=\frac{\pi}{3}$ تصبح الصيغة العقدية للدوران**

هي $\boxed{z'-\omega=e^{i\frac{\mp\pi}{3}}\cdot(z-\omega)}$ **والمثلث $M\Omega M'$ متساوي الأضلاع .**

مسائل الوحدة : 2 و 3 و 6 و 7 و 8 و 9 و 10

فكرة رقم 4 : أنشطة

نشاط 1 : متوازي الأضلاع وربع دورة .

نشاط 2 : الجذور التكعيبية للواحد ، المثلث متساوي الأضلاع .

مسائل الوحدة 11

فكرة رقم 1 : **مسائل التعداد**	**تدريبات المناسبة**

- **المبدأ الأساسي في العد : نريد تشكيل قائمة مكوّنة من p بنداً . نفرض أنّنا يمكن أن نختار البند i من بين n_i إمكانية معطاة . عندئذٍ يكون عدد القوائم المختلفة التي يمكننا إنشاؤها** $n_1 \times n_2 \times ....\times n_p$.

تدرب: ص 152 رقم ④

مثال : تشكيل عدد ، ......

وبعض طرائق التعداد : استعمال المخطط الشجري أو الخانات حسب المسألة .

ومن أساليب العد :

- **التباديل على مجموعة :** تشكيل كل قائمة مكونة من n بنداً يضم **جميع** عناصر E ،ويعطى عدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصراً بالصيغة :

$$\boxed{n \times (n-1) \times (n-2) \times ....2 \times 1 = n!}$$

- **الترتيب على مجموعة :** تشكيل كل قائمة مكونة من r بنداً مأخوذاً من عناصر E ودون تكرار ، حيث $(1 \le r \le n)$ويعطى عدد الترتيب التي طوله r من مجموعة مكونة من n عنصراً بالصيغة :

تدرب: ص 152 رقم ②

$$\boxed{\begin{array}{l} P_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-r+1) \\ P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!} \end{array}}$$

- **إنشاء القوائم مع تكرار :** كل عنصر من عناصر القائمة يتم اختياره بـ n طريقة .

- **التوافيق :** لتكن E مجموعة **مكونة من** n عنصراً نسمي توفيقاً يضم r عنصراً من E ، **كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من مجموعة** E عدد عناصرها n

نشاط 3 ص 162

ونرمز إلى عدد التوافيق التي تضم r عنصراً من مجموعة E عدد عناصرها n حيث $(0 \le r \le n)$ بالرمز $\binom{n}{r}$ حيث

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \begin{cases} \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-r+1)}{r!} \\ \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!} \end{cases}$$

تدرب: ص 155 رقم ② و③و ④

نشاط 2 ص 162

مسائل الوحدة : رقم 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 10 و 11 و 14 و 15 و 18 و 20

يجب الانتباه في مسائل السحب :

السحب على التتالي مع إعادة : عدد الطرق n^r

السحب على التتالي دون إعادة: عدد الطرق تراتيب P_n^r

السحب معاً : عدد الطرق توافيق $\binom{n}{r}$

مسائل الوحدة : رقم 16

مسائل الوحدة : رقم 17

نشاط 1 فقرة ❸

- نستخدم التراتيب في حالات مثل المناصب ، المراكز ، المراتب ، الأماكن ، حالة السحب على التتالي دون إعادة
- نستخدم التوافيق عند اختيار مجموعة جزئية من مجموعة أوسع .
- التباديل حالة خاصة من التراتيب نرتب فيها كل عناصر المجموعة .
- عندما نواجه حالة فيها ترتيب وفيها إمكانية للتكرار نستخدم المبدأ الأساسي في العد .
- عند وجود شروط خاصة للمسألة نتبع الشروط ونطبق المبدأ الأساسي في العد .

فكرة رقم 2 : خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$ **، منشور ذي الحدين**

خواص التوافيق : أياً كان العددان الطبيعيان r **و** n **حيث** $(0 \le r \le n)$ **فإنّ**

- $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ وبالتالي نستنتج أنّ :

$\binom{n}{r_1}=\binom{n}{r_2}$ ⇐ إما $r_2=r_1$ أو $n=r_2+r_1$

- $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$

ومن أهم التطبيقات للتوافيق منشور ذي الحدين :

أياً كان العددان a و b و $(1 \le n)$ فإنّ :

تدرب : ص 159 رقم ② و ③

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

مسائل الوحدة : رقم 7 و 8 و 9 و 13 و 19

إنّ عدد الحدود في المنشور $n+1$

- إنّ شكل كل حد من حدود المنشور هو $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

وعندما يطلب منا التعامل مع حد معين في المنشور ، نكتب صيغة الحد العام للمنشور T_r بأبسط صورة .

تطبيق ❸ ص 163

مسائل الوحدة : رقم 21

- إنّ **عدد المجموعات الجزئية** من مجموعة مكونة من n عنصراً يساوي 2^n
- حل المثال المحلول **صفحة** 159
- **نشاط 4 تحويل العبارات المثلثية**

الاحتمالات

تدريبات المناسبة	فكرة رقم 1 : تذكرة بمفاهيم الاحتمالات

فكرة رقم 1 : تذكرة بمفاهيم الاحتمالات

- نسمّي حدثاً في تجربة عشوائيّة كل مجموعة جزئيّة من فضاء العينة .

الحدث البسيط هو مجموعة جزئيّة مكوّنة من عنصر واحد من فضاء العينة.

يحتوي الفضاء Ω جميع النتائج، فهو حدثٌ مؤكّد الوقوع، فنقول إنّ Ω هو الحدثُ الأكيد.

- أمّا المجموعة الجزئيّة $\varnothing$ فهي تمثّل حدثاً ليس من الممكن وقوعه، فنقول إنّ $\varnothing$ هو الحدثُ المستحيل .
- الحدث المعاكس A' هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A أي :

$$A \cup A' = \Omega \text{ و } A \cap A' = \varnothing$$

- الحدث A و B هو الحدث الذي يقع عندما **يقع الحدثان معاً** و نرمز $A \cap B$
- الحدث A أو B هو الحدث الذي يقع عندما **يقع أحد الحدثين على الأقل** و نرمز $A \cup B$.
- وترتبط احتمالات الأحداث بالعلاقات :

$$1)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$2)\ P(A') = 1 - P(A)$$

$$3)\ P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

$$4)\ P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

تدرب: ص 180 رقم ① و ②

- في الفضاء الاحتمالي المنتظم : (هو الفضاء الاحتمالي الذي يكون فيه جميع الأحداث البسيطة (الحدث البسيط هو الحدث الوحيد العنصر) متساوية الاحتمال) يكون $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

تدرب: ص 180 رقم ④

مسائل الوحدة : رقم 1 و 8 و 16

- **الاحتمال الشرطي:** ليكن B حدثاً يحقق $P(B) \neq 0$ ، ولنفترض أننا نعلم أنه قد وقع عندئذٍ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع حدث B علماً أنّ B قد وقع .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

تدرب: ص 180 رقم ③ و ⑤ و ⑥

وجميع العلاقات التي تطبق في الاحتمال ، تطبق في الاحتمال الشرطي .

- نقول أنّ الحدثين A و B **مستقلان احتمالياً** إذا وفقط إذا كان

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نشاط ② صفحة 195

مسائل الوحدة : رقم 5

ومن أهم الطرائق في حساب الاحتمالات المركبة التمثيل الشجري للتجربة .

فكرة رقم 2 : **المتحولات العشوائية**

- نعرّف المتحول العشوائي بأنه تابع منطلقه فضاء العيّنة Ω ويأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و نرمزه X ، ونسمّي المجموعة $X(\Omega)$ مجموعة قيم المتحول العشوائي X .
- إنّ الصيغة $P(X=x)$ يعني حساب احتمال الحدث المرتبط بالقيمة x .

وقانون الاحتمال للمتحول العشوائي هو جميع قيم الاحتمالات التي ترتبط بقيم المتحول و نعبّر عنه بجدول قانون احتمال المتحول العشوائي .

x_i	x_1	x_2	....	x_r
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	....	$P(x_r)$

- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=x_1P(x_1)+x_2P(x_2)+\cdots+x_rP(x_r)$$

- التباين للمتحول العشوائي $V(X)$: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
- الانحراف المعياري للمتحول العشوائي $\sigma(X)$: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

تدرب : ص 184

تدرب: ص 192 رقم ①

مسائل الوحدة : رقم 4 و 9 و 10

فكرة رقم 3: **الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين**

القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية :

ليكن X و Y متحولين عشوائيين معرفين على فضاء العينة Ω ، إنّ تعريف قانون الزوج (X,Y) هو إعطاء الاحتمال $P_{i,j}$ لكل حدث حيث :

$$P_{i,j}=P\ (X=x_i)\cap(Y=y_j)$$

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين X و Y تحقق العلاقة :

$$P_{i,j}=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

تدرب : ص 187 رقم ② و ③

مسائل الوحدة : رقم 7 و 11

فكرة رقم 4: **المتحولات العشوائية الحدانية / التجارب البرنولية**

تعريف 8 ومبرهنة 8 ومبرهنة 9 صفحة 190

تدرب : ص 192 رقم ② و ③ و ④

مسائل الوحدة : رقم 14 و 15

فكرة رقم 5 : **مسائل احتمالات ومتتاليات**

مسائل الوحدة : رقم 6 و 13 و 18