/ /

التوابع الأصلية والتكامل

أولاً: التوابع الأصلية

تعريف: إذا كان f تابع معرف على I نقول أن التابع F تابع أصلي للتابع f على I إذا وفقط إذا تحقق

1. F اشتقاقي على I
2. أياً كانت $x \in I$ فإن $F'(x) = f(x)$

أمثلة:

- $F : x \to 2x - 3$ تابع أصلي للتابع $f : x \to 2$ على $\mathbb{R}$
- $F : x \to x^3 + 1$ تابع أصلي للتابع $f : x \to 3x^2$ على $\mathbb{R}$
- $F : x \to \frac{1}{x}$ تابع أصلي للتابع $f : x \to \frac{-1}{x^2}$ على $]-\infty, 0[$ وكذلك $]0, +\infty[$

راجع بقية الأمثلة ص 219

تدريب ص 222

① $f(x) = \tan^2 x$,
$F(x) = \tan x - x$
$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

F اشتقاقي على I

$$F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$$
$$= \tan^2 x = f(x)$$

لذا F تابع أصلي لـ f على I

مبرهنة ①: إذا كان f تابع معرف على I و F تابع أصلي له على هذا المجال عندئذٍ يكون كل تابع أصلي للتابع f على I له الشكل التالي:

$$G(x) = F(x) + K \; ; \; K \in \mathbb{R}$$

مبرهنة ②: لكل تابع f مستمر على I تابع أصلي على هذا المجال

إسلام! ♡ إسلام! ♡

/ /

المنحني التكاملي في معلم متجانس

إذا كان $F(x)$ تابع أصلي للتابع f على I نسمي الخط البياني للتابع F والذي نرمزه C المنحني التكاملي للتابع f وبالتالي المنحنيات التكاملية للتوابع الأصلية $F(x)+K$ تنتج عن C بالسحاب $\overrightarrow{Kj}$

ليس على جميع التوابع الأصلية لقيمة أو لقيمة K

ملاحظة:

لإثبات أن التابعين F و G أصليان للتابع f على I يجب إثبات أنه أياً كانت $x \in I$ فإن:

$$F'(x) = G'(x)$$

مثال: تدرب $\boxed{2}$ ص 222

① $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

$G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$; $I =]1,+\infty[$

$F'(x) = \dots\dots = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

$G'(x) = \dots\dots = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

نستنتج أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

F و G المستقيمان لازم نقول على المجال الي عم نشتغل عليها

ثانياً: قواعد إيجاد التوابع الأصلية

- الحالة الأولى:

حالة الحد الثابت من الشكل $f(x) = a \; ; \; a \in \mathbb{R}$ يعطى التابع الأصلي للتابع f بالشكل:

$$F(x) = ax$$

أمثلة: أوجد التابع الأصلي

① $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x+$

② $f(x) = \ln 3 \Rightarrow F(x) = \ln 3\, x$

③ $f(x) = e^3 \Rightarrow F(x) = e^3 x$

Sarah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التأكد بشتق الحل من لا زم نطلع الى الأصل, قبل ما الأمل

$f(x) = x \Rightarrow \frac{x^2}{2(1)}$

الحالة الثانية:

حالة القوة التي أساسها ليس محدد من الدرجة الأولى من الشكل:

$$f(x) = (ax+b)^n ; n \in R / \{-1\}$$

يعطى التابع الأصلي بالشكل

$$F(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \cdot a}$$

أمثلة: أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع التالية:

① $f(x) = x^5$

$\Rightarrow \frac{x^6}{6(1)}$

② $f(x) = (2-3x)^3$

$\Rightarrow \frac{(2-3x)^4}{4(-3)}$

③ $f(x) = \frac{1}{(2-4x)^3}$

$\Rightarrow f(x) = (2-4x)^{-3}$

$\Rightarrow \frac{(2-4x)^{-2}}{-2(-4)}$

④ $f(x) = \sqrt{2x-1}$

$\Rightarrow f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(2)}$

⑤ $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

⑥ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-4x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-4x)^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow (1-4x)^{-\frac{1}{4}}$

ملاحظات

[1] التوابع الأصلية لمجموع عدة توابع يساوي مجموع التوابع الأصلية لكل منها

[2] عندما يطلب تعيين التابع الأصلي الذي يحقق شرط مفروض في المسألة نتبع ما يلي

① نكتب ثوية التوابع الأصلية للتابع الأصلي

$G(x) = F(x) + K$

② نبحث عن K بتعويض الشرط المفروض في التوابع الأصلية

③ نعوض K بمجموعة التوابع الأصلية لنحصل على المطلوب

Farah Notebook

- العدد الثالث لنستطيع جنب ولصدينا ناخذ التابع الاصلي
- عندما يطلب تعيين تابع أصلي يحقق شرط ما فإننا نضع K ثم نعوض الشرط ونحسب K

مثال: عين التابع الأصلي الذي ينعدم عند $x = 1$ للتابع

$f(x) = 3x^2 - x + 1$

مجموعة التوابع الأصلية

$G(x) = F(x) + K$

$= 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + K$

العدد الذي نحولها

إذا قال شرط فاحسب K

(يجب حساب K الذي يحقق الشرط)

هنا قال في

$0 = 1 - \frac{1}{2} + 1 + K$

ونعوض كل x ب 1

$K = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow G(x) = 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

ملاحظات

$\boxed{3}$ الأعداد الثابتة لا تدخل في عملية إيجاد التابع الأصلي وإنما تبقى كما هي

الحالة الثالثة:

حالة التابع المثلثي

التوابع الأصلية للتابع المثلثي أساسي $(\cos, \sin)$

$\frac{1}{\text{مشتق الزاوية}} \times$ أصل النسبة

علماً أن:

أصل $\sin$ هو $-\cos$

أصل $\cos$ هو $\sin$

أصل $(1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2})$ هو $\tan$

تدريب: أوجد التابع الأصلي

$\sin^2 ★$

$\sin 2★ = 2\sin★ . \cos★$

تذكرة بمسائل المثلثات :

① $\sin(\text{زاوية}) . \cos(\text{نفس الزاوية})$
$= \frac{1}{2}\sin(\text{المضاعف})$

② $\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\text{المضاعف})$

$\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\text{المضاعف})$

مسائل التحويل من جداء إلى مجموع :

② ① $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

و نفرق بين هل الترتيب
لأنو النسب المثلثية ضربية

② $\cos a . \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

③ $\cos a . \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

④ $\sin a . \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

مثال : أوجد التابع الأصلي للتابع

$f(x) = \sin^2 x$

هاد درجة ثانية الـ $\sin$ ما منعرف أصلها

هل نستطيع دمج f الصيغة

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

الـ $\sin$ درجة ثانية نحوله لدرجة أولى حسب قاعدة القوة

هلأ صارت درجة أولى ومجموع فكان نعمل لكل واحدة لحال

لا يوجد قاعدة للجداء بـ في قواعد المجموع مثل تكامل التوابع الأصلية

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\sin 2x$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

$f(x) = \sin x . \cos x$

$f(x) = \frac{1}{2}[\sin 2x + \underbrace{\sin(0)}_{0}]$

$= \frac{1}{2}\sin 2x$

الـ $\frac{1}{2}$ عدد بالموضع

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

هلأ التابع الأصلي لـ $\sin$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x$

$-\frac{1}{★}$

عملية التبديل أولاً بالجداء قبل التابع أصلي الأول واحد حال

الحالة الرابعة : حالة الجداء من الشكل

$f(x) = u^n . u'$

شرط أن تكون مشتقة الأساس لقوة مساوية 1

نبحث التابع الأصلي

ريك ^{n} (مقدار) ومشتق من تذكر
الحالة الرابعة

نمط التابع الأصلي

$$F(x)=\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

تمارين: أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع

① $f(x)=\sin^3x\cdot\cos x \quad : R$

$$F(x)=\frac{\sin^4x}{4}$$

② $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x)^3} \quad]0,+\infty[$

$$f(x)=(2x+1)(x^2+x)^{-3}$$

$$F(x)=\frac{(x^2+x)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2(x^2+x)^2}$$

③ $f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^3 \quad : R$

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+5)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4x+5)^4}{4}=\frac{1}{8}(x^2-4x+5)^4$$

④ $f(x)=x\sqrt{x^2+1} \quad : R$

$$f(x)=x(x^2+1)^{\frac12}=\frac12(2x)(x^2+1)^{\frac12}$$

$$F(x)=\frac12\,\frac{(x^2+1)^{\frac32}}{\frac32}$$

$$=\frac12\sqrt{(x^2+1)^3}=\frac13(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$$

$x e^{x^2}$ فإذا لا يكون مشتق

$\Rightarrow 2\frac{x}{2}e^{x^2}$

$F(x)=\frac12 e^{x^2}$ إذا الترتيب

الحالة الخامسة

$\boxed{1}$ من الشكل $F(x)=e^{ax+b}$

الأس تابع تآلفي

نمط التابع الأصلي

$$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}$$

$\boxed{2}$ الحالة العامة: التابع من الشكل

$$f(x)=u'\cdot e^{u}$$

شرطها مشتق الأس جانب التابع

نمط التابع الأصلي

$$F(x)=e^{u}$$

تمارين

① $f(x)=3e^{5x} \quad : R$

$$F(x)=3\cdot\frac{1}{5}e^{5x}$$

3 عدد بالوكالة يطلع برا

② $f(x)=xe^{x^2}=\frac12(2x)\cdot e^{x^2}$

$$F(x)=\frac12 e^{x^2}$$

③ $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac1x}$

$$f(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac1x}$$

$\frac{فارس}{\frac{1}{عصام}}$ = فارس × عصام

$\frac{1}{\frac{فارس}{عصام}}$ = $\frac{1}{فارس × عصام}$

$\frac{عدد}{e^x + عدد}$

هاد عامل مشترك بيطلع

الحالة السادسة:

حالة الكسر الذي بسطه مشتقة مقامه

التابع من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

نعطي التابع الأصلي بالشكل $F(x)=\ln|المقام|$

$F(x)=\ln(المقام)$: المقام >0

$\ln(-المقام)$: المقام <0

مثال: أوجد تابعاً أصلياً للتابع f على I

$I =]-\infty,-3[$

① $f(x)=\frac{2}{x+3}$

العدد خارج البسط مشتق المقام

$f(x)=2\cdot\frac{1}{x+3}$

$2\ln|x+3|$

بلاحظ أنه $x+3<0$ على I

إذاً القيمة المطلقة وطلع سالب

إذاً $F(x)=2\ln(-x-3)$

② $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+3}$; R البسط مشتق المقام

لأنه $x^2-x+3>0$ ، $\Delta<0$

$F(x)=\ln|x^2-x+3|$

بيطلع موجب لربك بنشيل القيمة المطلقة

$\Rightarrow \ln(x^2-x+3)$

③ $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$; $]0,1[$

$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

$\ln x<0$: $\ln(\frac{1}{2})$ سالب

$\Rightarrow F(x)=\ln|\ln x|$ على I

$F(x)=~~\ln(\ln x)~~ \Rightarrow \ln(\ln x)$

$\ln(-\ln x)$

④ $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$; R

هاد ما فيه نوزع لأنه

$e^x+1>0$ على I

$F(x)=\ln|e^x+1|$

$\ln(e^x+1)$

⑤ $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$; R

$f(x)=\frac{1}{e^x(1+e^{-x})}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$=-\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$1+e^{-x}>0$ على R

$F(x)=-\ln(1+e^{-x})$

ملاحظة: إذا كان درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

فإننا نقسم البسط على المقام

ونجد القسمة الإقليدية

ثم نوجد التابع الأصلي

Farah Notebook

$$/ \quad /$$

227 (1) . (2) } 244 (1) (2) (3)

مثال: أوجد تابعاً أصلياً للدالة في

تدريب ص 227

$$\boxed{1} \quad f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$$

$$F(x) = \frac{8x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x$$

$$F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$$

هنا الى قاعدة ضيا ما البسط نشتق المقام

$$\boxed{2} \quad f(x) = \frac{1}{x^4} = \underline{\underline{x^{-4}}}$$

هنا صارت فوق الى قاعدة

$$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3x^3}$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2}$$

الجذر التكعيبي ما له قاعدة نعملو قوة

$$f(x) = (x)^{\frac{1}{3}} + (x)^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-2}$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 3\,\frac{x^{-1}}{-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x}$$

$$\sqrt[3]{x^3 \cdot x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow x\sqrt[3]{x}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x-1)}$$

$$(1) \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad ; \quad I:]-\infty, -1[$$

$$\begin{array}{r|l} x+1 & 2x-1 \\ & \underline{\mp 2x \mp 2} \\ & -3 \end{array} \quad 2$$

الأس = ناتج القسمة + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$$

علاش ضربنا في -3 ... $\left(\frac{1}{x+1}\right) \Rightarrow \ln|x+1|$

$$F(x) = 2x + (-3)\ln(-x-1)$$

المعروف مال اللوغاريتم

خيرنا $\ln(-x-1)$

Sarah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

/ /

5] $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$

مشتق

$F(x) = \dfrac{(x^2+x)^{-1}}{-1} = \dfrac{-1}{(x^2+x)}$

6] $f(x) = \dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

$f(x) = (4x-2)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2(2x-1)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}$ مشتق $(2x-1)$

$F(x) = \dfrac{2(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x^2-x}$

7] $f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$ أو $= \dfrac{4+1}{4x-3}$

ادرت الأول لسبب 5 عالمين وزمن وعلى 4 وأقسم على 4

$f(x) = \dfrac{5-1+1}{4x-3}$ ⇐ المشتقة المقام $\dfrac{4}{4x-3} + \dfrac{1}{4x-3}$ أما الثاني

$= \dfrac{4}{4x-3} + \dfrac{1}{4x-3}$

$\ln|4x-3| + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4x-3} \cdot 4$

بالنسبة للقيمة المطلقة عندما العبارة أصغر من 0

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}\ln|4x-3|$

$\Rightarrow \ln(-4x+3) + \dfrac{1}{4}\ln(-4x+3)$

$f(x) = \dfrac{4}{4x-3} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{4x-3}$

لكن على $]-\infty, \dfrac{3}{4}[$ يكون $4x-3<0$

ومنه:

$F(x) = \ln(-4x+3) + \dfrac{1}{4}\ln(-4x+3)$

$F(x) = \dfrac{5}{4}\ln(-4x+3)$

8] $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x}$ درجة البسط = درجة المقام أو أكبر من درجة المقام

$f(x) = \dfrac{3x}{2x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

لكن على $]0, +\infty[$ يكون $x>0$ ومنه

$F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln x$

9] $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} x-2 & 1 \\ \hline x+1 & \\ x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$

$1 + 3\dfrac{1}{x-2}$

$x-2<0$ على I

$F(x) = x + 3\ln(2-x)$

10] $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

القسمة الإقليدية

$f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{2x-1}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4} \cdot \dfrac{2}{2x-1}$

Farah Notebook

/ /

④ $f(x) = (2x-1)^3$

$F(x) = \frac{(2x-1)^4}{4x^2}$

$= \frac{1}{3}(2x-1)^4$

⑤ $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

$f(x) = (1-3x)^{-2}$

$F(x) = \frac{(1-3x)^{-1}}{(-1)(-3)}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-3x)}$

⑥ $f(x) = \frac{(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

$= (x-1)(x^2-2x-3)^{-2}$

نضرب بـ 2 $\frac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x-3)^{-2}$

ونقسم على 2

$F(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1}$

$F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2-2x-1)}$

I على $2x-1>0$

$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln(2x-1)$

تدريب ص 244

① $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

$f(x) = 1 - x^{-2} + 3\frac{1}{x}$

I على $x>0$

$F(x) = x + \frac{1}{x} + 3\ln x$ انتبه نطلع العوض

② $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}}$

$f(x) = 2(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(-2)}$

$F(x) = -2\sqrt{1-2x}$

حالة خاصة للجذر التربيعي

$f = \frac{★'}{\sqrt{★}}$ البسط مشتق مضمون الجذر التربيعي المقام

$F(x) = 2\sqrt{★}$ مضمون الجذر الي بالمقام

③ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

$F(x) = 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

هذا مشتق الي داخل الجذر

$F(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-1}$

Barah Notebook

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

/ /

$(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$ $\quad \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x$

$+ \frac{1}{32}\sin 4x$

③ $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$

$f(x) = \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x]$

$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]$

$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x$

($\sin^2 A + \cos^2 A = 1$)

④ $f(x) = \cot^2 x \qquad \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

نجمع ونطرح الواحد $\qquad = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$

نضيف 1 وطرح 1

$f(x) = \underline{1 + \cot^2 x} - 1 \qquad \frac{1}{\sin^2 x}$

تكامل الواحد

$F(x) = \underline{-\cot x} - x \qquad \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

⑦ $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3} \qquad F(x) = -\cot x - x$

$(2x-1)^{\frac{3}{2}}$ القوة الكسرية

$F(x) = \frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\cdot 2}$

① $f(x) = \cos x(\sin^2 x - 3\sin x)$ $\boxed{2}$

$f(x) = \cos x \sin^2 x - 3\sin x \cos x$

$= \cos x \sin^2 x - \frac{3}{2}\sin 2x$

$F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{3}{4}\cos 2x$

② $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$

$f(x) = 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$\Rightarrow F(x) = 2\tan x - x$

③ $f(x) = 2e^{3x-1}$

$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-1}$

④ $f(x) = \frac{1}{x-4}$

$F(x) = \ln(-x+4)$

227 u.D

اذا cos تأثير عليه تربيع نرجع للبطاقة رقم 2 القوس

① $f(x) = \cos^2 3x$ درجة اولى $\boxed{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x$

Ⓒ $f(x) = \cos^4 x$

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

40 علامة / /

الاسم .... توقيع

ص 244 $\boxed{3}$

① $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$

$f(x) = 2x^{-2} + x$

نوجد مجموعة التوابع الأصلية

بالضبط K ما يوجد تابع أصلي ما مجموعة التوابع الأصلية

$F(x) = 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + K$

وتختلف التوابع عن بعضها بـ K

$= \frac{-2}{x} + \frac{x^2}{2} + K$

نعين K: $F(1) = 0$

$\frac{-2}{1} + \frac{1}{2} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{3}{2}$

والتابع الأصلي المطلوب:

$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{-1}{3-x}$

المشتق المقام

نأخذ ln المقام

$I =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

لأنه أوسع المجال

$3 - x > 0$ على I لذا

$F(x) = \ln(3-x) + K$

$F(1) = 1 \Rightarrow \ln(3-1) + K = 1$

$K = 1 - \ln 2$

التابع الأصلي المطلوب

$F(x) = \ln(3-x) + 1 - \ln 2$

$= \ln\left(\frac{e(3-x)}{2}\right)$

$\ln e$

$= \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^3}$

$= \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^4(2x-1)}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

$f(x) = (3-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(-2)}$

$F(x) = -\sqrt{3-2x}$

$\boxed{9}$ $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

$f(x) = x(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$

$= \frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$ 3 . 2

نأخذ 2 الجذر التكعيبي عامل مشترك

$= \frac{3}{10}(x^2+1)\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

Brah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

248 ص 13 فقرة

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

مثال
$\int 2\,dx = 2x + k$

تكامل غير محدد

$\dfrac{\cos x}{\sin x}$ | 1

$\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2$

بالتالي مثلث

$\dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\cos x > 0$ على I و $\sin x > 0$ على I

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\sin x) - \frac{1}{2}\ln(\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln \sin x - \ln \cos x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}\ln \tan x$$

$$= \ln\sqrt{\tan x}$$

التكامل المحدد وخواصه

تعريف: إذا كان f تابع مستمر على I وكانت F أحد التوابع الأصلية لـ f على المجال I ولتكن $a, b \in I$ نسمي العدد الحقيقي

التكامل المحدد يطلق على

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

بالتكامل المحدد للتابع f من a إلى b ونرمز له

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

---

③ $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$I = \mathbb{R}$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k = 0$$

$K = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ويكون التابع الأصلي

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

المقررات 13 صفحة 248

$\boxed{2}$ $f(x) = \cot x$

$f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ⟹ $\ln|\sin x|$

على $\sin x < 0$ على $]-\pi, 0[$

$$F(x) = \ln(-\sin x)$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$

$$f(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} + \frac{\sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{1}{2}\,\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\int x' e^{x} = e^{x}$

حالة 1: $\int (ax+b)^n$

حالة 2: $\int g^n \cdot g'$

$\int_a^b f$

إذا: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$

$= \left(F(b)\right) - \left(F(a)\right)$

نفتح أقواس متوسطة عند إيجاد التابع الأصلي

أمثلة: احسب الأعداد التالية

① $I = \int_{-1}^{2} (2x-1)\,dx$

$= \left[\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - x\right]_{-1}^{2} \Rightarrow F(2) - F(-1)$

$\Rightarrow (4-2) - (1+1)$

$\Rightarrow 2 - 2 = 0$

② $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\int \cos x = \frac{1}{x'}\sin$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

③ $\int_2^4 \frac{3}{x-1}\,dx$

$3\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx$

$\left[3\ln|x-1|\right]_2^4$

$\Rightarrow \left[3\ln(x-1)\right]_2^4$

$(3\ln 3) - (3\ln 1)$

$3\ln 3 \Rightarrow \ln 3^3 = \ln 27$

④ $I = \int_0^1 2x\, e^{x^2}\,dx$

$\left[e^{x^2}\right]_0^1 \Rightarrow (e^1) - (e^0)$

$= e - 1$

⑤ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \dots = \frac{\pi}{4}$

⑥ $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{(x+1)^3}\,dx$

$\int_{-1}^{1} (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$\Rightarrow = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}(0)\right)$

$\frac{2}{5}\sqrt{2^5} \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{32} =$

$\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$

$\frac{1}{2}\left[(\ )-(\ )\right]$

خواص التكامل المحدد:

إذا كان f تابع مستمر على I و $b, a \in I$ فإن

① $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx =$

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

إذا كان بالتعريف التكامل المحدد دقيقة مطلقة فإننا نكتب الفرعي

ونقسم العمل للحالية

تمارين : احسب الأعداد التالية

① $I=\int_0^2 |x-1|\,dx$

$|x-1|$ ← $x-1$ إذا $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

نعوض 2 لأنه بعد الصفر المعادل

← $-x+1$ إذا $x<1$

$\int_0^2 = \int_0^1 + \int_1^2$

$\int_0^2 |x-1| = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$

$= \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$

$(\quad)-(\quad)+(\quad)-(\quad)$

$= ? = 1$

② $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx$

$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $\lambda \in R$

③ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

إذا تساوى حدي التكامل فإن قيمة التكامل تساوي الصفر

④ $\int_a^b f(x)\,dx =$

$\int_a^b f(x)\,dx =$

$\int_a^b f(t)\,dt$

حدود التكامل ثابتة

تغيير رمز المتحول لا يؤثر على قيمة التكامل

⑤ $\int_a^b f(x)\,dx =$

$-\int_b^a f(x)\,dx$

إذا غيرنا حدود التكامل نغير الإشارة

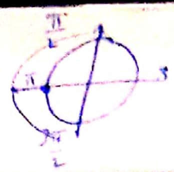
⑥ علاقة شال : إذا كان f مستمر على $[a,b]$ و $c \in [b,a]$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

مثلا الأعداد 0 , 10 نأخذ رقم بينهما مثلا 5

نحل كالتالي 0,5 و 5,10

أي فاصل بين تغير هو π



العلاقة المثلثية على الدائرة مثلثات

$\int_0^{\pi} : |\sin x|$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| \, dx$$

$x \in]0, \pi[$

$$|\sin x| \begin{cases} \sin x & \text{عندما } \sin x > 0 \\ -\sin x & \text{عندما } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x \, dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

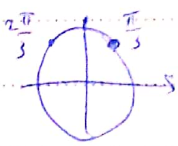
$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos x} \, dx$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos x)}$$

قانون

$$\sqrt{2[1 + (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}$$

$$\sqrt{4 - 4\sin^2 \frac{x}{2}}$$



$$= \sqrt{4(1 - \sin^2 \frac{x}{2})}$$

$$= 2\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2\int^{\frac{2\pi}{3}} 2 \left|\cos \frac{x}{2}\right|$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} + \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} -\cos \frac{x}{2} = 2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

② $$I = \int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$$

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{عندما } x^2 - 1 > 0 \\ -x^2 + 1 & \text{عندما } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$]-1, 1[$

$-\infty$	-1	0	$+1$	2	$+\infty$
$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\int_0^2 = \int_0^1 (-x^2 + 1) \, dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx$$

$$= 2$$

arah Notebook

/ /

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right)$$

$$- \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{2} - 3 = \frac{16 + 3 - 18}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$\boxed{3}$ $K = \int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2} e^{-2}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{2} e^{0} + \frac{1}{2} e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2} e^{-2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2e^2} - 1 =$$

$$\frac{e^4 - 2e^2 + 1}{2e^2} = \frac{(e^2 - 1)^2}{2e^2}$$

$\boxed{4}$ $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x - 1}{x - 1} dx$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & 2x-1 \\ & \underline{2x - 2} \\ & 1 \end{array}$$

quotient: 2

تدريب ص 235

$\boxed{1}$ $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos^2 x}\, dx$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos^2 x)}\, dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(2\sin^2 x)}\, dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2\,|\sin x|\, dx$$

على المجال $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ بالربع

$\sin x \leq 0$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x\, dx = \left[2\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left(2\cos 2\pi\right) - \left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 2 - 0 = 2$$

$\boxed{2}$ $I = \int_{-1}^{2} x\,|x - 1|\, dx$

ندرس إشارة $x-1$ على

$[-1, 2]$

x	-1		0		2
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$I = \int_{-1}^{1} x(1 - x)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 - x)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\, dx$$

Farah Notebook

بسط مشتق كثير حدود
أعلى الأس مشتق المقام

البسط مشتق المقام

$\boxed{6}$ $N=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$ التكامل

$[0,\frac{\pi}{4}]$ على $\cos x+\sin x>0$

$N=\left[\ln(\cos x+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left[\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$-\ln\left(\cos(0)+\sin(0)\right)$

$=\ln\sqrt{2}$

حساب التكامل بالتجزئة

متى نستخدم التكامل بالتجزئة

يستخدم لحساب التكاملات التي يكون فيها التابع المكامل مؤلف من جداء تابعين من نوعين مختلفين

كثير حدود تابع لوغاريتمي

ملاحظة: بشكل عام التكاملات الآتية لا تحل إلا بطريقة التجزئة

1) $\int_a^b x^m e^{nx}\,dx$ كثير حدود وتابع أسي

بالجيب والتجيب وجداء

2) $\int_a^b \sin(nx)\,dx$

3) $\int_a^b x^m\cos(nx)\,dx$ بالأشكال الثلاثة الأولى

4) $\int_a^b x\ln(nx)\,dx$ نفرض كثير الحدود $u=x^m$ والأخرى v'

$L=\int_{-2}^{-1}\left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx$

على المجال $x-1<0$ $[-2,-1]$

$L=\left[2x+\ln(1-x)\right]_{-2}^{-1}$

$=\left[-2+\ln 2\right]-\left[-4+\ln 3\right]$

$=2+\ln\frac{2}{3}$

$\boxed{5}$ $M=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

بما يظهر $\frac{u'}{u}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx$ التكامل

I على $\cos x>0$

$=\left[-\ln(\cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(-\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(-\ln\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln\sqrt{3}$

لأن $\cos x+\sin x>0$ على $[0,\frac{\pi}{4}]$

Sarah Notebook

قانون التكامل بالتجزئة : $\int_a^b u . v' = [u . v]_a^b - \int_a^b v u'$

إذا في حدود

توقع

في التكاملات 1, 2, 3

نفرض :

الأجزاء $U = x^m$

أما في التكامل الرابع

نفرض

$U = \ln(x n)$

مثال : احسب التكاملات

الآتية

[1] $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$

التكامل لا يوزع على الحدود

نفرض $U = x \Rightarrow U' = 1$ المشتقة

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$ الأصل

$\int_a^b u . v' = [u . v]_a^b - \int_a^b v u'$

$I = [x(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}(1) dx$

$\Rightarrow 1(-e^{-1})$

$\left(-\frac{1}{e}\right) - (0) - [e^{-x}]_0^1$

$-\frac{1}{e} - \left[\left(\frac{1}{e}\right) - (1)\right]$

$-\frac{2}{e} + 1$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x$

إذا كان عنا غير حدود برجعه ثانية التكامل بالتجزئة عشان نقدر نوصل

نفرض $U = x^2 \Rightarrow U' = 2x$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$I = \left[-(x)^2(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x \, dx$

هادا رنا نرجع نعمل تجزئة وصية رح ترجع هذه لأن كانت تربيع وصارت درجة أولى

$(\cancel{0}) - \left(-\frac{\pi^2}{4}\right)$

$(0) - (0)$

$\Rightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2x \cos x \, dx$

$\boxed{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx}$

نفرض I'

التجزئة مرة أخرى

$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

$U = x \Rightarrow U' = 1$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$I' = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

$= \left(\frac{\pi}{2}(1)\right) - (0) - [(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$

Farah Notebook

هاد I' بنرجع نعوض I $\Rightarrow = \frac{\pi}{2} - 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$I = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \pi - 2$$

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\, dx$$

هاد مانو من الأشكال الأربعة لـ التجزئة بتجزئة لأسباب هاد

مبين الي اشتقاقه سهل ليهي x نفرضها u

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$I = \left[x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$\int (\ldots)^5 \Rightarrow = \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15}$

تكاملات الكسور الجزئية
(توابع كسرية)

نستخدم هذه الطريقة إذا كانت درجة البسط أصغر من المقام لنتبع ما يلي

[1] نفرّق الكسر لأجل تحويله إلى مجموع كما يلي

① نحلل المقام إلى جداء عوامل

② نوجد x تفرّق الكسر كما يلي

$$\frac{A}{\text{القوس الأول}} + \frac{b}{\text{القوس الثاني}}$$

③ نطابق بين الطرفين بعد توحيد المقامات

مثال: أوجد $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$

نفرّق الكسر $\frac{1}{x^2 - x - 2}$

$x^2 - x - 2$ (نحلل المقام)

$(x-2)(x+1)$ تحليل مباشر

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

Sarah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$(x+1)$ $(x-2)$

نوحّد المقامات

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

[illegible]

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

بالمقارنة

$A + B = 0$ (1)

$A - 2B = 1$ (2)

$A = -B$ من (1)

نعوض في (2)

$-B - 2B = 1 \Rightarrow -3B = 1$

$A = +\frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{-1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}$

$$I = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx$$

وإذا سحبنا $\frac{1}{3}$ وال $-\frac{1}{3}$

بيصير البسط مشتق المقام

$$= \left[\frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| \right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3} \ln(-x+2) - \frac{1}{3} \ln(x+1) \right]_0^1$$

$$= (\quad) - (\quad)$$

$$= -\frac{2}{3} \ln 2$$

مثال: $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx$

$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ تفوّقت الأسس

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$(x+2)$ $(x+1)$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A + B}{(x+1)(x+2)}$$

$\Rightarrow 2 = A + B$

$1 = 2A + B$

وحل مستقل ....

$\ln \frac{27}{16}$

Farah Notebook

13 | 10 | 6 | 5 | 3 | 2 | 14

Hiba Ragab

by: Yara darwish 2021/3/6

مثال: $I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}\,dx$

درجة البسط أكبر من المقام

⟸ إقليدس

$I = \int \left[2x+5 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2} \right] dx$

هاد بتكامل — هاد أسا توزيعه

استخدام التكامل بالتجزئة

3) حساب التابع الأصلي

إذا كان f تابع مستمر على مجال I ولدينا عدد كيفي من هذا المجال a فإن التابع الأصلي يعطى بالعلاقة

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

عدد كيفي من المجال المعطى

نستخدم هذا القانون عندما يطلب إيجاد تابع أصلي لتابع يحتاج تجزئة

مثال: أوجد تابع أصلي للتابع

$f(x) = \ln x \quad ; I\ ]0,+\infty[$

$F(x) = \int^x f(t)\,dt$

لحتى اختار من المجال

$= \int_1^x 1 \cdot \ln t \; dt$

هلق رحنا للتجزئة

لوغارتم وكثير حدود

نفرض: $u = \ln t \Rightarrow u' = \frac{1}{t}$

$v' = 1 \Rightarrow v = t$

$F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t}\,dt$

$= (x \ln x) - (0) - [t]_1^x$

$= x \ln x - ((x) - (1))$

$= x \ln x - x + 1$

هاد عدد حاسبيا

$F(x) = x \ln x - x$

حل الـ K منيناً نحنو نتركه بـ x الي حطيناه لنتأكد نشتقه لازم يطلع $\ln x$

rah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ترتيب قوة التوابع تنازلياً: ④ الأسي ① التابع اللوغارتمي ② كثير الحدود ③ المثلثي

نفرض الأقوى u والآخر v'

توقيع

① $P(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$ | $\frac{6}{245}$

$P(x) = \underbrace{4x - 17}_{\text{كامل هاد الحال}} + \frac{52}{x+3}$ القسمة الاقليدية

$a = 4$ $c = 52$

$b = -17$

② $J = \int_2^0 P(x)\,dx$

$[0,2]$ على $x+3>0$

$J = \int_2^0 \left(4x - 17 + \frac{52}{x+3}\right) dx$

$= \left[2x^2 - 17x + 52\ln(x+3)\right]_2^0$

$= (0 - 0 + 52\ln 3) - (8 - 34 + 52\ln 5)$

$= 26 + 52\ln\frac{3}{5}$

① $I = \int_1^e x\ln x\,dx$ | $\frac{2}{236}$

$u = \ln x$ $v' = x$

$u' = \frac{1}{x}$ $v = \frac{x^2}{2}$

$I = [u.v]_1^2 - \int_1^2 u'.v\,dv$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}x^2\,dx$

$= \left(\frac{1}{2}e^2\ln e\right) - (0) - \int_1^2 \frac{1}{2}x$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{e^2+1}{4}$

هام

⑤ $M = \int_0^\pi e^x . \cos x\,dx$ (أسي، مثلثي)

بتمشي هالفرضيات بالعكس نفس الشي منفرض

$u = e^x$ $v' = \cos x$

$u' = e^x$ $v = \sin x$

$M = [u.v]_0^\pi - \int_0^\pi u'.v\,dv$

~~$M = [u.v]$~~

$M = \left[e^x . \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$

$= (e^\pi \sin\pi) - (e^0 \sin 0) -$

$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx \Rightarrow M = -\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$

$I = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$ نفرض

$\Rightarrow \boxed{M = -I}$ ★

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

/ /

لنوجد $I=\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$u=e^x \qquad v'=\sin x$

$u'=e^x \qquad v=-\cos x$

$I=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-e^x\cos x\,dx$

$I=(-e^{\pi}\cos\pi)-(-e^0\cos 0)$

$+\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$ هاد نفرضو M كرد

$I=e^{\pi}+1+M$

[illegible] نعوض في (★)

$M=-(e^{\pi}+1+M)$

$M=-e^{\pi}-1-M$

$2M=-e^{\pi}-1 \Rightarrow M=\frac{1}{2}(-e^{\pi}-1)$

$\boxed{\frac{7}{245}}$ هام توقع

$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$

(1) أوجد c, b, a

إذا ثابت

$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

طريقة أولى:

$f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^2$

$=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^2=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$c=1,\quad b=2,\quad a=1$

طريقة ثانية:

$f(x)=1+\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-2x+1 \\ \hline -(x^2-2x+1) & 1 \\ \hline 2x-1 & \end{array}$$

لنجد c, b:

$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{b(x-1)+c}{(x-1)^2}$

تكافؤ

$2x-1=bx+(c-b)$

بالمطابقة بالنسبة لـ x

Sarah

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\left.\begin{array}{l} b=2 \\ c-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$$

$$f(x)=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$I=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx=$$

$$\int_{-3}^{0} 1+\frac{2}{x-1}+(x-1)^{-2}\,dx$$

$[-3,0]$ على $x-1<0$

$$=\left[x+2\ln(1-x)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$=\left[x+2\ln(1-x)-\frac{1}{x-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$=(0+0+1)-\left(-3+2\ln 4+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{15}{4}-2\ln 4$$

ملاحظة هامة: إذا كان المقام درجة أولى مكررة مثل x^2 أو $(x+1)^2$ ...

فإننا نفرق الكسر التخيلي كالتالي:

$$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}$$

أو بالنسبة للتالي $(x+1)^2$

$$\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}$$

ثم نطابق

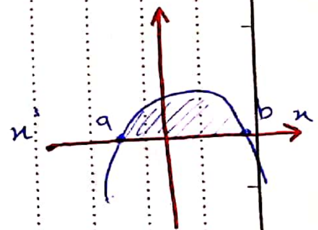
ص 236

6 $\boxed{4}$

حالات المساحة

احسب مساحة المنطقة المحصورة لبين C ومحور الفواصل
معادلته $y = 0$

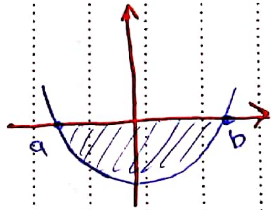
المنطقة فوق $x'x$



A أو $S = \int_a^b f(x)\,dx$

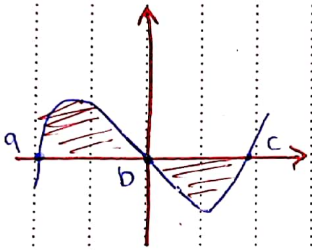
a: نقاط التقاطع على $x'x$

المنطقة تحت $x'x$



$S = \int_a^b -f(x)\,dx$

المنطقة تحت وفوق



$S = \int_a^b f + \int_b^c -f$

نفصل إلى تكاملين

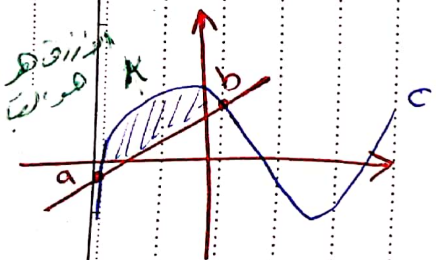
احسب مساحة المنطقة المحصورة

بين C و d ← تابع آخر إما يكون مستقيم أو منحني

خط بياني للتابع

معادلة ← $y = \dots$ غير مساوية $y = 0$

الأزرق هو العلوي هو التابع



$S = \int_a^b (f_c - y_d)\,dx$

الخط العلوي - الخط السفلي

a: نقاط تقاطع الخطين

Farah Notebook

ملاحظات هامة

① في الحالات الثلاثة الأولى
إذا فشل الرسم (ما عرفنا نرسم)
فإننا نوجد حدود التكامل
a و b بأن نضع
$f(x) = 0$ ونحسب
x ويعطونا هما
مباشرة (a و b)

② اذا طلع معنا x واحدة
فإننا نأخذ أقرب رقم
صحيح إليه أعلى الأغلب
[يكون صفر (ما بيشتغل بالحلة)
إذا لم يعطِ هذا الرقم في
السؤال]
وغالباً تكون الصيغة كما يلي (دائماً)
المساحة المنطقة
المحصورة بين الخط C ومحور
الفواصل والمستقيم $x =$ عدد

؟ يعطينا اجباري الـ x الثانية

③ إذا طلع معنا x واحدة يكون معطينا الـ x الثانية

الحصة الرابعة

② في الحالة الرابعة الأخيرة
نحصل على حدود التكامل بالحل المشترك
بين معادلتي المنحنيين المتقاطعين

④ إذا ما عرفنا المنطقة المحصورة
فوق ولا تحت بالحالات الثلاث
الأولى فإننا نأخذ أي عدد
بين a و b ونعوضه في التابع
فإذا طلع موجب فالمنطقة فوق
وإذا طلع سالب فالمنطقة تحت

⑤ إذا ما عرفنا الخط العلوي ومين
الخط السفلي فإننا نأخذ عدد
بين نقطتي التقاطع ونعوضه
في التابعين معاً والأكبر
هو الخط الأعلى

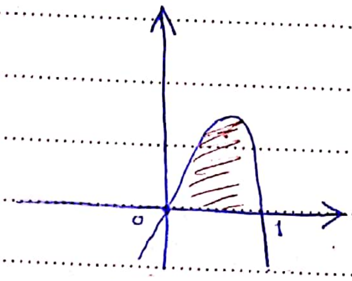
⑥ إذا سكرت معنا على الآخر
وما عرفنا المنطقة فوق ولا تحت
ولا عرفنا العلوي ولا السفلي
نحط القانون بقيمة مطلقة ونتوكل
على الله

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

لأن المساحة قيمة موجبة
دائماً

مثال: احسب مساحة المنطقة المحصورة / السطح المحدد بين C_f ومحور الفواصل حيث $f(x)=4x(1-x)$

مرحلة أولى: ندرس التغيرات ونرسم



$$A = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 4x(1-x)\,dx$$

$$\int_0^1 (4x-4x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \left[2x^2 - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow = \frac{2}{3}$$

مرحلة ثانية: إذا ما عرفتش ترسم

لوجب نقاط التقاطع مع xx' حيث نضع

$f(x)=0$

$\Rightarrow 0 = 4x(1-x)$

إما $\boxed{x=0}$

أو $1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

[illegible]

ونأخذ عدد بين أو محصورة ولاكن

أخذ عدد بينهما لنكن $\left(\frac{1}{2}\right)$

محصورة في المجال

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ → موجب

فالمنطقة موجبة

⇐ نكمل عادي

مثال: احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين

في لقول هاك احد الحالات الثلاثة الأولى

d_1 و d_2 اللذين معادلتهما

$x=1$ $x=-2$

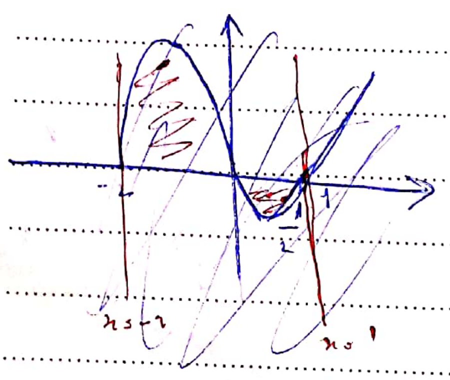
$f(x) = 2x^3+3x^2-2x$

جدول الإشارة تالي

$x = $

أما التابع

$y = $



الحالة الثالثة

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

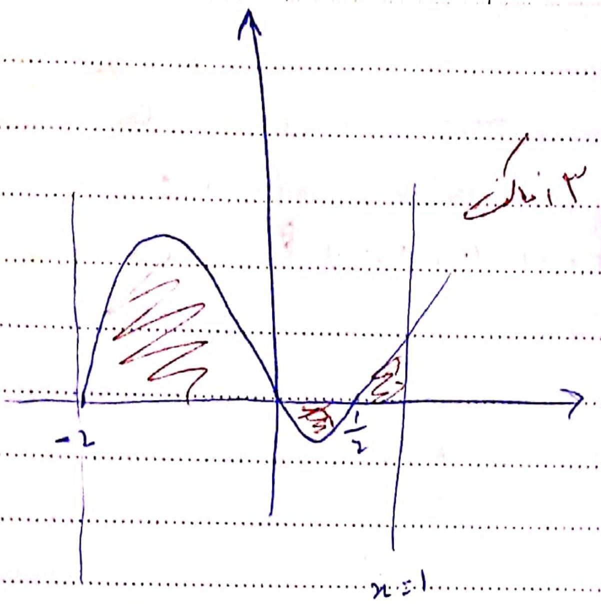
/ / بيطلع ٣ تكاملات

فوق تحت

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} -f(x)\,dx$$

$I_1 + I_2$

$= \frac{75}{16}$



$$A = \int_{-2}^{0} f + \int_{0}^{\frac{1}{2}} -f + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f$$

طريقة ثانية اذا ما رقبنا نرسم

حل المعادلة $f(x)=0$ لايجاد نقاط التقاطع مع xx'

والدرجة الثالثة بيطلع معنا بلت منحنى ٣ جذور وموجة

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$

هي سهلة بنشيل x عامل مشترك

هون لا لو بالي عدد اكبر تحذاكو

$2x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

$x(2x^2 + 3x - 2) = 0$

اما $x = 0$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$9 + 16 = 25 \Rightarrow 5$

$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4}$ $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

$$A = \int_{-2}^{0} f + \int_{0}^{\frac{1}{2}} -f + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f$$

والأكيد تحلوا وتحصون

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: عين الحالة الأخيرة

احسب المساحة المحصورة بين

C_f و d والمستقيمين

$x = \frac{1}{2}$ و $x = 0$

$f(x) = -4x^2+4x$

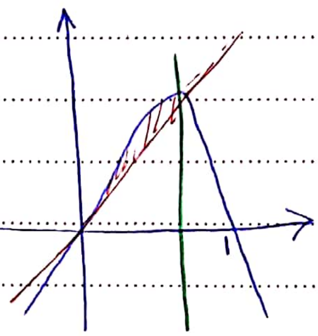
$y_d = 2x$

$y_d = 2x$

للرسم نعوض x حسب عدد ونعوضه بجدول

$\Rightarrow (0,0)$

$(\frac{1}{2}, 1)$



$x = 0$ $\quad$ $x = \frac{1}{2}$

هدول حدود التكامل

هنن حاطينهن بس إذا ما عطوني

بالحل المشترك بالتعويض

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f(x) - y_d \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-4x^2+4x-2x)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-4x^2+2x)\, dx \ldots$$

طريقة ثانية دون رسم

نوجد حدود التكامل بالحل المشترك

بين المعادلتين

$f(x) = -4x^2+4x$

$y_d = 2x$

هل y تقاطع $f(x)$

الرسالة بحل مساواة بينهما

وهي نافعة حدود التكامل

$-4x^2+4x = 2x$

$-4x^2+2x = 0$

$2x(-2x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ وهذه حدود

أو $x = \frac{1}{2}$

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

/ /

حساب الحجم

حساب حجم جسم دوراني

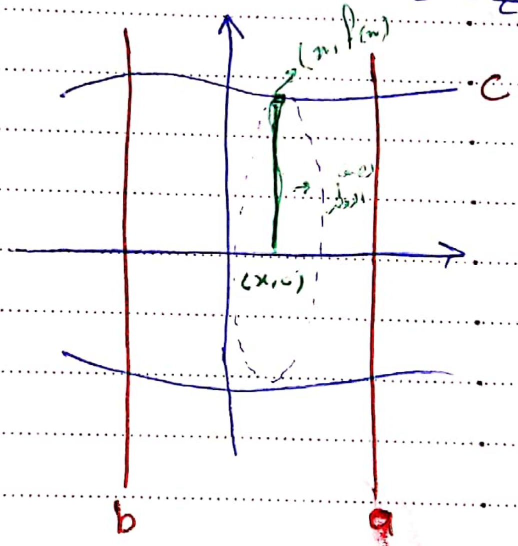
إذا كانت C خط بياني للتابع f مستمر على مجال $[a, b]$

عندما ندور السطح المحدود بالخط C و $x'x$ والمستقيمين

$x = a$ $\quad x = b$

دورة كاملة يتولد جسم دوراني

المقطع دائرة



نقطع المجسم بمستوٍ عمودي على محور الدوران فينتج مقطع دائرة مركزها (x,0) ونصف قطرها $|f(x)|$ ومساحة الدائرة

$A = \pi r^2$

$\Rightarrow \pi f^2(x)$

نضع فيكون الحجم القانون

ملاحظة

$$V = \int_a^b A$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b \pi f^2(x)$$