أوراق المراجعة المكثفة من المتفوقين هندسة تاسع المنهاج السوري 2022

تم التحميل من مدونة المناهج السعودية القسم السوري

https://eduschool40.blog/

الوحدة الأولى: النسب المثلثية لزاوية حادة

أولاً: التناسب وخواصه

❶ التناسب : هو مساواة بين نسبتين أو أكثر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حيث الحدود الأربعة غير معدومة.
نسمي a و d (طرفي التناسب) b و c (وسطي التناسب)

❷ خواص التناسب :

الخاصة	استخدامها
1-خاصة الضرب التقاطعي: (جداء الطرفين=جداء الوسطين)	لحساب مجهول في تناسب علم فيه ثلاث حدود لحساب مجهول متكرر تناسب علم فيه حدين
2-إذا ثبتنا البسوط وجمعنا (أو طرحنا) كل بسط إلى مقامه الموافق نحصل على تناسب جديد محقق. 3- إذا ثبتنا المقامات وجمعنا (أو طرحنا) كل مقام إلى بسطه الموافق نحصل على تناسب جديد.	لحساب مجهولين في تناسب علم فيه حدين عند تحقق الشرطين: ① وجود المجهولين في نسبة واحدة ②وجود علاقة جمع أو طرح بينهما في المسائل الكلامية التي تحوي كلمة نسبة.
4-إذا بادلنا الطرفين أو الوسطين نحصل على تناسب جديد.	لجعل المجهولين في نسبة واحدة حتى نتمكن من استخدام الخاصتين السابقتين.
5-إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد.	اختر الإجابة الصحيحة أو صح أو خطأ.

تمرين (1) مثلث ABC قائم في $\hat{B}$ فيه $\frac{\hat{A}}{\hat{C}}=\frac{2}{3}$ احسب قياس كلاً من $\hat{C}$ و $\hat{A}$

الحل: بما أن مجموع زوايا المثلث $180°$:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180° \Rightarrow \hat{A}+90°+\hat{C}=180°$$
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=180°-90° \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=90°$$

لدينا $\frac{\hat{A}}{\hat{C}}=\frac{2}{3}$ نثبت المقامات ونجمع كل مقام إلى البسط الموافق

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{\hat{C}}=\frac{2+3}{3}$$
$$\frac{90}{\hat{C}}=\frac{5}{3} \Rightarrow \hat{C}=\frac{90\times 3}{5}=54°$$

بما أن $\hat{A}+\hat{C}=90°$

$$\Rightarrow \hat{A}+54°=90° \Rightarrow \hat{A}=90°-54°=36°$$

إذاً $\hat{C}=54° \quad , \quad \hat{A}=36°$

~.

تمرين (2) إذا كان $\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$ وكان $a+b=15$ ، احسب a و b

الحل: $\frac{a}{2}=\frac{b}{3} \xRightarrow{\text{نبدل بين الوسطين}} \frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

نثبت البسوط ونجمع كل بسط إلى مقامه الموافق :

$$\frac{a}{b+a}=\frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{a}{15}=\frac{2}{5} \Rightarrow a=\frac{15\times 2}{5}=6$$

لدينا إذاً: $a+b=15 \Rightarrow 6+b=15 \Rightarrow b=15-6=9$

$a=3$ و $b=9$

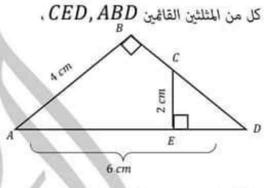
~.

ملاحظة هامة جداً :
النسب المثلثية لزاوية حادة ليس لها واحدة قياس وهي مقادير موجبة تماماً وجيب وتجيب زاوية حادة فقط هما عددان محصوران بين الصفر والواحد

$$0<\cos\theta<1 \ , \ 0<sin\theta<1$$

تمرين:

في الشكل المرافق ، اكتب عبارة $\sin\widehat{D}$ في كل من المثلثين القائمين CED, ABD ، المطلوب:



1- استنتج الطول CD
2- احسب الأطوال $BC\ , AE\ , ED$

الحل:

1- في المثلث ABD:

$$(1) \dots\dots \sin\widehat{D}=\frac{AB}{AD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

في المثلث CDE :

$$(2) \dots\dots \sin\widehat{D}=\frac{CE}{CD}=\frac{2}{CD}$$

2- من (1)و(2) وبما أن $\widehat{D}$ مشتركة بين المثلثين ABD و CDE:

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{CD} \Rightarrow CD=3\ cm$$

3- حساب ED: من المثلث CDE القائم وحسب مبرهنة فيثاغورس:

$$(CD)^2=(EC)^2+(ED)^2 \Rightarrow (3)^2=(2)^2+(ED)^2$$
$$\Rightarrow 9=4+(ED)^2 \Rightarrow (ED)^2=9-4 \Rightarrow (ED)^2=5$$

بجذر الطرفين $\Rightarrow ED=\sqrt{5}\ cm$

حساب AE: $AE=AD-ED=6-\sqrt{5}\ cm$

حساب BC : من المثلث ABC القائم وحسب مبرهنة فيثاغورس:

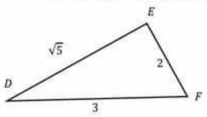
$$(BD)^2+(BA)^2=(AD)^2 \Rightarrow (BD)^2+(4)^2=(6)^2$$
$$\Rightarrow (BD)^2+16=36 \Rightarrow (BD)^2=36-16$$
$$\Rightarrow (BD)^2=20$$

بجذر الطرفين $\Rightarrow BD=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ cm$

ولدينا : $BC=BD-CD \Rightarrow BC=2\sqrt{5}-3\ cm$

~.

تدريب (1) : في الشكل المرافق



1- أثبت أن المثلث FED قائم وعين وتره
2- احسب النسب المثلثية للزاوية $\widehat{F}$

~.

تدريب (2) : ABC مثلث قائم في A ، احسب:

1- الطول AB في حالة $BC=7\ cm$ و $\sin\hat{C}=0.4$
2- الطول AC في حالة $AB=8\ cm$ و $\tan\hat{B}=0.5$

~.

❹ علاقات مهمة بين النسب المثلثية :

$\sin\theta = \cos(90-\theta)$ $\cos\theta = \sin(90-\theta)$	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
زاويتا الوتر في المثلث القائم حادتان ومتتامتان (مجموعهما $90°$) $\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$ $\cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70°$	تستخدم عند معرفة نسبتين ونريد حساب الثالثة	تستخدم عند معرفة $\sin$ ونريد حساب $\cos$ أو بالعكس

ملاحظة :

إذا أعطانا $\tan$ وطلب حساب $\sin$ و $\cos$:

نرسم مثلث قائم بمعرفة طولي الضلعين القائمتين من $\tan$ نحسب طول الوتر ثم نحسب $\sin$ و $\cos$.

تمرين (1) :

لتكن A زاوية حادة و $\cos A = \frac{4}{5}$ ، احسب :

$\sin A$ و $\tan A$

الحل: نعلم أن : $\sin^2 A + \cos^2 = 1$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 A + \frac{16}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{25-16}{25}$$

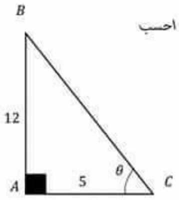
$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{9}{25}$$

بجذر الطرفين $\Rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

نعلم أن $\tan\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$

$$\Rightarrow \tan\hat{A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

تمرين (2) :



إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان $\tan\theta = \frac{12}{5}$ ، احسب

$\sin\theta$ و $\cos\theta$

الحل:

نرسم مثلث قائم وليكن ABC حيث:

$$\tan\theta = \frac{12 \Rightarrow \theta_{\text{مقابل}}}{5 \Rightarrow \theta_{\text{مجاور}}}$$

نحسب AC حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$\Rightarrow AC = 13$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13} \quad \cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$$

تدريب :

إذا كان A قياس زاوية حادة و $\sin\hat{A} = \frac{1}{2}$ ، احسب

$\cos\hat{A}$ و $\tan\hat{A}$

❺ النسب المثلثية للزوايا الشهيرة :

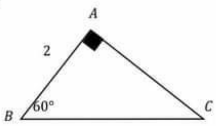
هام حفظ

θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ملاحظات هامة للحل :

....
....
....
....
....
....
....
....

تمرين : تأمل الشكل المرفق ثم :



1) احسب الطول BC

2) احسب طول AC

الحل:

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 60° = \frac{2}{BC} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 4\ cm$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 60° = \frac{AC}{2} - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3}\ cm$$

انتهت الوحدة الأولى

تمرين (3)

جد عددين موجبين فرقهما 4 ونسبتهما $\left(\frac{4}{3}\right)$

الحل:

نفرض العدد الكبير x والعدد الصغير y

فرقهما (4): $x - y = 4$

نسبتهما $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} : \frac{4}{3}$

نثبت المقامات ونطرح كل مقام من البسط الموافق له:

$$\frac{x-y}{y} = \frac{4-3}{3} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 12$$

لدينا: $x - y = 4 \Rightarrow x = 4 + 12 = 16$

إذاً العدد الكبير : 16 العدد الصغير : 12

تدريب (1): يزيد عمر خالد على عمر أحمد بمقدار 3 سنوات، إذا علمت أن نسبة عمريهما $\frac{5}{4}$، احسب عمر كل منهما.

تدريب (2): صندوق فيه 30 كرة صفراء وحمراء، نسبة الكرات الحمراء إلى الصفراء $\frac{3}{2}$ احسب عدد الكرات الحمراء والصفراء

ملاحظات هامة للحل :

....

....

....

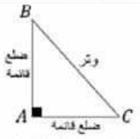
....

....

....

....

....



ثانياً: النسب المثلثية لزاوية حادة:

❶ تذكرة في المثلث القائم:

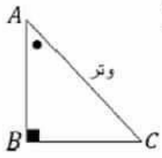
1) مبرهنة الزاوية $30°$: الضلع المقابلة للزاوية $30°$ تساوي نصف طول الوتر.

2) عكس مبرهنة الزاوية $30°$: إذا كانت إحدى الأضلاع القائمه تساوي نصف طول الوتر فالزاوية المقابلة لتلك الضلع تساوي$(30°)$

3) المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر.

4) جداء الضلعين القائمتين = جداء الوتر بالارتفاع المتعلق به

5) مبرهنة فيثاغورس: ^{2}(الوتر)=^{2}(ضلع قائمة)+^{2}(ضلع قائمة)



❷ تذكرة في كيفية إثبات أن المثلث قائم:

1) عكس مبرهنة فيثاغورس:
- نربع أطول ضلع.
- نربع طولي الضلعين الباقيتين ونجمعهما
- إذا تساوت القيمتين السابقتين فالمثلث قائم في الزاوية المقابلة لأطول ضلع

2) إذا مرت دائرة من رؤوس مثلث وكان أحد أضلاعه قطر فيها فالمثلث قائم الزاوية المقابلة للقطر.

---

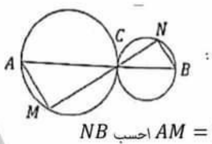
❸ النسب المثلثية لزاوية حادة :(في المثلث القائم حصراً)

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC} \quad ((\text{جيب}))$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} \quad ((\text{تجيب}))$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AB} \quad ((\text{ظل}))$$

تمرين (2) :



الدائرتان المجاورتان قطراهما $[AC]$ و $[CB]$ حيث :

$CB = 4\ cm\ , AC = 6\ cm$

النقاط A و B و C على استقامة واحدة

وكذلك النقاط M و C و N ، إذا علمت أن $AM = 3\ cm$ احسب NB

الحل:

المثلث AMC قائم في M لأن المثلث AMC تمر من رؤوسه دائرة وأحد أضلاعه قطراً فيها . إذاً $(AM) \perp (MN) \dots (1)$

المثلث CNB قائم في N لأن المثلث CNB تمر من رؤوسه دائرة وأحد أضلاعه قطراً فيها إذاً: $(NB) \perp (NM) \dots (2)$

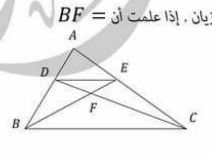
من (1) و (2) نجد: $(NB)//(AM)$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين CMA و CNB :

$$\frac{NB}{AM} = \frac{CB}{CA} = \frac{CN}{CM} \Rightarrow \frac{NB}{3} = \frac{4}{6}$$

$$NB = \frac{4 \times 3}{6} = 2\ cm$$

تمرين (3) :

في الشكل المرافق المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان . إذا علمت أن $BF =$ $4\ cm\ , DB = 3\ cm\ , AD = 2$



1) اكتب تناسبين كل منهما يحوي النسبة $\frac{DE}{BC}$

2) استنتج أن $\frac{EF}{4} = \frac{2}{5}$ ثم احسب EF

الحل

1) المستقيمان (EB) و (DC) متقاطعان في F والمستقيمان (DE) و (BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين EDE و FCB نجد:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{EF}{FB} = \frac{DF}{FC} \quad \dots\dots (1)$$

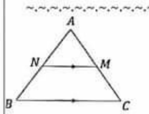
المستقيمان (CE) و (BD) متقاطعان في A والمستقيمان (DE) و (BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث ففي المثلثين ADE و ABC نجد:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \dots\dots (2)$$

2) من (1) و (2) نجد أن :

$$\frac{EF}{FB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5} = 1.6\ cm$$

تمرين (4) :



في الشكل المرسوم جانباً $(BC)//(NM)$

$$AN = 2\ , MC = x + 3\ , AM = x - 3\ , NB = 5$$

احسب قيمة x ثم احسب طولي الضلعين AM و MC .

الحل:

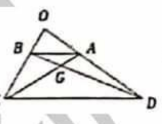
المستقيمان$(NM)//(BC)$ متقاطعان في A والمستقيمان (MN) و (BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين ANM و ABC نجد:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC} \Rightarrow \frac{2}{2+5} = \frac{x-3}{x-3+x+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{x-3}{2x}$$

$$\Rightarrow 7(x-3) = 2 \times 2x \Rightarrow 7x - 21 = 4x$$
$$\Rightarrow 7x - 4x = 21$$
$$\Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7$$
$$AM = x - 3 \Rightarrow AM = 7 - 3 = 4\ cm$$
$$MC = x + 3 \Rightarrow MC = 7 + 3 = 10\ cm$$

تدريب (1) :

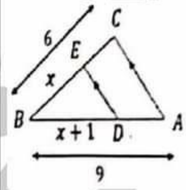


$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$ نعلم أن :
$GA = 4\ cm\ , GC = 6\ cm\ , OB = 8\ cm$

1) وازن النسبتين $\frac{GA}{GC}$, $\frac{OB}{OC}$.

2) استنتج الطول BC

تدريب (1)

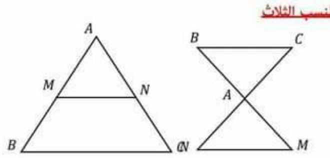


في الشكل المرافق المستقيمان (AC) و (DE) متوازيان .

1) احسب قيمة x

2) احسب طول القطعة المستقيمة $[BD]$

❷ عكس مبرهنة النسب الثلاث



إذا تحقق أن $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وكانت النقاط $B\ , M\ , A$ على المستقيم (MB) متماثلة بالتركيب مع النقاط $C\ , N\ , A$ على المستقيم (NC) فحسب عكس مبرهنة النسب الثلاث يكون $(MN)//(BC)$

متى نستخدم عكس مبرهنة النسب الثلاث ؟ وكيف نستخدمها ؟

نستخدم مبرهنة عكس النسب الثلاث :

لإثبات توازي مستقيمين من عدمه عند وجود مستقيمين متقاطعين في نقطة ومعرفة أطوال الأضلاع

كيف يتم الاستخدام ؟

1- نحسب نسبة طولي قطعتين مستقيمتين من المستقيم الأول

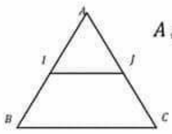
2-نحسب نسبة طولي قطعتين مستقيمتين من المستقيم الثاني

"نأخذ النسب من القواطع"

3- إذا تساوت النسبتين السابقتين فالمستقيمين متوازيين.

إذا لم تتساوى النسبتين السابقتين فالمستقيمين غير متوازيين " متقاطعين".

تمرين (1)



في الشكل المجاور المستقيمان (BI) و (CJ) متقاطعان في A
$JC = 1\ cm, AC = 1.6\ cm\ ,$
$AB = 4\ cm\ , AI = 1.5\ cm$

أثبت أن المستقيمان (IJ) و (BC) متوازيان.

الحل:

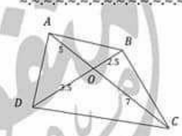
$$JC = AC - JC \Rightarrow AJ = 1.6 - 1$$
$$\Rightarrow AJ = 0.6\ cm$$

بما أن النقاط A و B و I على (AB) متماثلة بالترتيب مع النقاط A و C و J على AC و $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AJ}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{AI} = \frac{4}{1.5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \\ \frac{AC}{AJ} = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

فالمستقيمان (IJ) و (BC) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

تمرين (2)



أثبت أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

ملاحظة هامة:

....

....

....

....

....

....

....

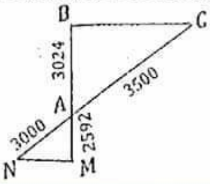
بما أن $O\ , G\ , A$ على المستقيم (AC) متماثلة بالترتيب مع النقاط $B\ , D\ , O$= على المستقيم (DB) و $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{OC}{OA} = \frac{7}{5} \\ \frac{OD}{OB} = \frac{3.5}{2.5} = \frac{7}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

فالمستقيمان (AB) و (DC) متوازيان

حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث فالرباعي $ABCD$ شبه منحرف

تمرين (3)



(BM) و (CN) متقاطعان في A

1- باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي ،

أوجد CGD للعددين 2592 و 3024

3-قل إن كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان أم متقاطعان مع شرح إجابتك.

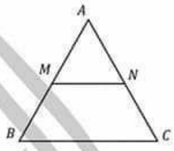
الحل:

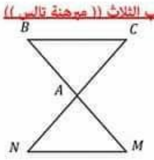
العدد الكبير	العدد الصغير	العدد الكبير -العدد الصغير
3024	2592	432
2592	432	2160
2160	432	1728
1728	432	1296
1296	432	864
664	432	432
432	432	0

$$\Rightarrow \text{GCD}(3024\ , 2592) = 432$$

الوحدة الثانية :مبرهنة النسب الثلاث

❶ مبرهنة النسب الثلاث ((مبرهنة تالس))





(CN) و (BM) مستقيمان متقاطعان في A والمستقيمان (MN) و(BC) متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين AMN و ABC نستطيع كتابة تناسب بين أطوال الأضلاع المثلثين

A	M	N	$\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$
A	B	C	

عند كتابة جدول تناسب يجب مراعاة أن النقاط التي تنتمي إلى مستقيم واحد تقع في عمود واحد.

متى نستخدم مبرهنة النسب الثلاث ؟ وكيف نستخدمها ؟

نستخدم مبرهنة النسب الثلاث :

1) عند وجود مستقيمين متقاطعين في نقطة ووجود مستقيمين متوازيين لا يمر أحدهما من نقطة تقاطع المستقيمين.

أي:..

2) لحساب طول قطعة مستقيمة عند تحقق الشرط السابق .

كيف يتم الاستخدام :

1) يتم ذكر المستقيمين المتقاطعين وذكر المستقيمين المتوازيين وذكر المثلثين اللذين سنطبق عليهما المبرهنة.

2) يتم كتابة تناسب بين أطوال أضلاع المثلثين مع مراعاة الترتيب ثم حساب الضلع المطلوب.

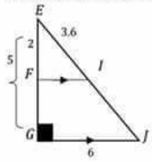
ملاحظة هامة في كتابة التناسب :

....

....

....

تمرين (1) :



في الشكل المرافق لدينا (FI) و (GJ) متوازيان ، المطلوب :

احسب كلاً من الطولين EJ و FI

الحل:

المستقيمان (IJ) و (FG) متقاطعان في E

والمستقيمان (FI) و (GJ) متوازيان ،فحسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين EFI و EGJ

$$\frac{EF}{EG}=\frac{EI}{EJ}=\frac{FI}{GJ}\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{3.6}{EJ}=\frac{FI}{6}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{3.6}{EJ}\Rightarrow EJ=\frac{3.6\times 5}{2}=9\ cm$$

$$\frac{2}{5}=\frac{FI}{6}\Rightarrow FI=\frac{6\times 2}{5}=\frac{12}{5}=2.4\ cm$$

2) $\frac{432\div 2592}{432\div 3024}=\frac{6}{7}\ ,\ \frac{3000}{3500}=\frac{6}{7}$

3) بما أن $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ وهي تمثل $\frac{3000}{3500}=\frac{2592}{3024}$

فالمستقيمان (MN) و (BC) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث

❸ التشابه:

قواعد التشابه :إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين قلنا أن المثلثان متشابهين ويكون أحدهما مكبر أو مصغر أو مطابق للآخر.

نسبة التشابه (K) : (معامل التكبير أو معامل التصغير)

هي نسبة طولي ضلعين متقابلين من التشابه.

ملاحظة هامة:

....

....

....

....

....

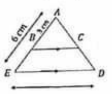
انتبه

- إذا كانت $K>1$ يؤول التشابه إلى تكبير.
- إذا كانت $0<K<1$ يؤول التشابه إلى تصغير.
- إذا كانت $K=1$ يؤول التشابه إلى تطابق.

خواص التشابه : في تشابه نسبته $K>0$

1 تضرب الأطوال بالعدد K

مثال : المثلثان AED و ABC متشابهان ، احسب نسبة التصغير ، ثم احسب الطول $[BC]$.



الحل: بما أن $(ED)//(BC)$

فإن أطوال الأضلاع المتقابلة متناسبة

في المثلثين AED و ABC فهما متشابهين

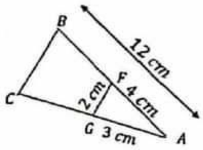
$$k=\frac{AB}{AE}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$[BC]=K\times[ED]$$

$$=\frac{1}{2}\times 4\Rightarrow BC=2\ cm$$

2 تضرب محيط المضلع بالعدد (K)

مثال : إذا علمت أن المثلثين AFG و ABC متشابهين ، احسب محيط المثلث ABC



الحل:

بما أن المثلثين AFG و ABC متشابهين :

$$\Rightarrow p(ABC)=K\times P(AFG)$$

$$K=\frac{AB}{AF}=\frac{12}{4}=3$$

$$P(AFG)=AG+GF+FA$$

$$=4+3+2=9\ cm$$

$$\Rightarrow P(ABC)=3\times 9=27\ cm$$

2- بما أن ABC و AED متشابهان

$$P(AED) = K \times P(ABC)$$
$$P(ABC) = AB + BC + CA = 10 + 8 + 6 = 24\ cm$$
$$\Rightarrow P(ABC) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\ cm$$
$$S(AED) = K^2 \times S(ABC)$$
$$S(ABC) = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = \frac{48}{2} = 24\ cm^2$$
$$\Rightarrow S(AED) = \frac{1}{4} \times 24 = 6\ cm^2$$

3- حتى يكون $BCGF$ شبه منحرف يجب أن يكون $(BC)//(FG)$، بما أن النقاط A , B , F على المستقيم (AF) متماثلة بالترتيب مع النقاط A , C , G على المستقيم (AO)

$$\frac{AC}{AO} = \frac{AB}{AF}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{AG} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{AF} = \frac{10}{AB + BF} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

فالمستقيمين (BC) و (FG) متوازيان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث فالرباعي $BCGF$ شبه منحرف .

مساحة شبه المنحرف :

$$\frac{(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى})}{\mathbf{2}} \times \text{الارتفاع}$$

$$\Rightarrow S(BCGF) = \left(\frac{BC + GF}{2}\right) \times CG$$

حساب GF من المثلثين ABC و AFG

لدينا $(BC)//(FG)$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث :

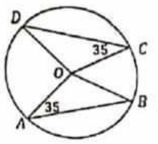
$$\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{8}{FG} \Rightarrow = \frac{9 \times 8}{6} = 12\ cm$$

حساب GC

$$GC = AG - AC = 9 - 6 = 3\ cm$$
$$S(BCGF) = \left(\frac{8 + 12}{2}\right) \times 3 = 10 \times 3 = 30\ cm^2$$
$$\cos B\hat{A}C = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$\sin B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} - 4$$
$$\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

انتهت الوحدة الثانية

تمرين (1)



في الشكل المجاور :

لدينا $o\hat{C}D = o\hat{A}B = 35°$

المطلوب :

1) اثبت قياس الزاويتين $A\hat{o}B\ ,\ D\hat{o}C$

2) أثبت أن $[DC] = [AB]$ و $CD = AB$

الحل:

1) المثلث DoC متساوي الساقين لأن $oD = oC = R$

وبما أن زاويتا القاعدة في المثلث متساوي الساقين متساويتان

$$o\hat{C}D = o\hat{D}C = 35°$$

ومنه $D\hat{o}C = 180° - \left(o\hat{C}D + o\hat{D}C\right)$

$$= 180° - 70°$$

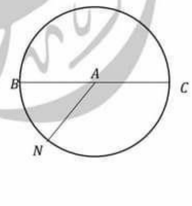
$= 110°$ (لأن مجموع زوايا المثلث $180°$)

ونحسب $A\hat{o}B$ بنفس الطريقة فنجد أن $A\hat{o}B = 110°$

2) بما أن $D\hat{o}C = A\hat{o}B$ فإن $DC = AB$ ومنه $[DO] = [AB]$

لأن الزوايا المركزية المتساوية تقابلها أقواس متساوية والأقواس المتساوية تحددها أوتار متساوية .

تمرين (2)



في الشكل المجاور لدينا: $NC = 2NB$.

احسب قياس كل من الزوايا

$A\hat{N}C\ ,\ N\hat{A}C\ ,\ B\hat{A}N$ المنعكسة

الحل

بما أن $[BC]$ قطر في الدائرة فهو يقدمها إلى قوسين طبوقين كل منهما $180°$

لدينا :

$$NC + NB = 180° \Rightarrow 2\,NB + NB = 180°$$
$$\Rightarrow 3\,NB = 180°$$
$$\Rightarrow NB \Rightarrow 60°$$
$$\Rightarrow NC = 2 \times 60° = 120°$$

ومنه $B\hat{A}N = NB = 60°$

$$N\hat{A}C = NC = 120°$$

لأن كل زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها

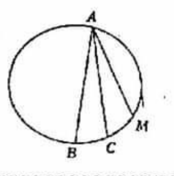
المنعكسة $N\hat{A}C = 360° - N\hat{A}C$

المنعكسة $N\hat{A}C = 360° - 120° = 240°$

الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي :

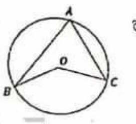
- يقع رأسها على محيط الدائرة
- ضلعيها عبارة عن وترين في الدائرة أو وتر وقطر فيها

مثال : $M\hat{A}B$ محيطية قوسها MB



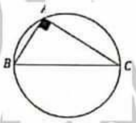
ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المحيطية

1. قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها والعكس صحيح .
2. الزوايا المحيطية التي تحصر القوس ذاته متساوية
3. الزوايا المحيطية المتساوية تحصر أقواساً متساوية والعكس صحيح
4. الزاوية المحيطية في دائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس أي :



$$B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C \Leftarrow \begin{cases} B\hat{O}C \text{ مركزية تحصر } BC \\ B\hat{A}C \text{ محيطية تحصر } BC \end{cases}$$

5. الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف دائرة قائمة



✍ خوارزمية التفكير في حل مسائل الزوايا :

....

....

....

....

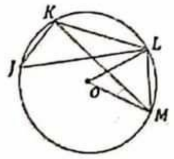
....

....

....

....

تمرين (1)



M, K, J, L نقاط من دائرة مركزها (O)

$K\hat{J}L = L\hat{O}M = 52°$

احسب قياسات زوايا المثلث LMK

الحل:

حساب قياس LMK :

$$L\hat{M}K = K\hat{J}L = 52° \Leftarrow \begin{cases} L\hat{M}K \text{ مركزية تحصر } KL \\ K\hat{J}L \text{ محيطية تحصر } KL \end{cases}$$

(الزوايا المحيطية التي تحصر القوس نفسه متساوية)

حساب قياس $L\hat{M}K$

$$L\hat{M}K = \frac{1}{2}L\hat{O}M = \frac{1}{2} \times 52° = 26° \begin{cases} L\hat{M}K \text{ محيطية تحصر } LM \\ L\hat{O}M \text{ مركزية تحصر } LM \end{cases}$$

(الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس).

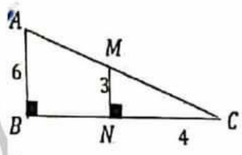
حساب قياس $K\hat{L}M$

$$K\hat{L}M = 180° - \left(L\hat{M}K - L\hat{K}M\right)$$
$$180° - (52° + 26°) = 180 - 78$$
$$K\hat{L}M = 102°$$

(لأن مجموع قياس زوايا المثلث $180°$)

~.

3 نضرب مساحة السطح بالعدد (K^2)



مثال :المثلث ABC

تكبير المثلث MNC

احسب نسبة التكبير ثم احسب

مساحة المثلث ABC.

الحل: العمودان على مستقيم واحد متوازيان

$$(BC)//(MN) \Leftarrow \begin{bmatrix} MN \perp BC \\ AB \perp BC \end{bmatrix}$$

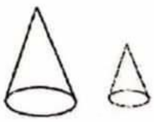
ومنه فأطوال الأضلاع المتقابلة في المثلثين ABC و MNC متناسبة

حسب مبرهنة النسب الثلاث فهما متشابهين والمثلث ABC هو تكبير المثلث MNC

$$S(ABC) = K^2 \times S(MNC)$$
$$K = \frac{AB}{MN} = \frac{6}{3} = 2$$
$$S(MNC) = \frac{MN \times NC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
$$\Rightarrow S(ABC) = 4 \times 6 = 24\ cm^2$$

~.

4 نضرب حجم المجسم بالعدد (K^3)



مثال :إذا علمت ان المخروطين المجاورين

متشابهين وحجم المخروط الصغير $(3cm^3)$

ونسبة التكبير 2 احسب حجم المخروط الكبير .

الحل: ليكن (V') حجم المخروط الكبير و(V) حجم المخروط الصغير

$$V' = K^3 \times V$$
$$\Rightarrow V' = (2)^3 3 = 8 \times 3 = 24\ cm^3$$

~.

التشابه يحافظ على قياسات الزوايا للمضلعين المتشابهين

مثال : اختر الإجابة الصحيحة :

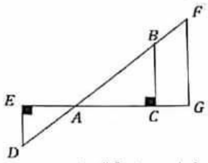
إذا ضربنا أطوال أضلاع المثلث بنسبة التشابه $(K = 2)$ فإن زواياه :

أ	تضرب بالعدد	ب	لا تتغير	ج	تضرب بالعدد4

~.

مسألة شاملة

:في الشكل المرافق لدينا :



$$AD = 5\ cm, AC = 6\ cm$$
$$AB = 10\ cm\ , AG = 9\ cm$$
$$BF = 5\ cm\ , BC = 8\ cm$$

1- اثبت أن المثلثين (ABC) و (AED) متشابهين ثم احسب نسبة التصغير.

2- احسب محيط ومساحة المثلث (AED)

3- اثبت ان الرباعي $(BCGF)$ شبه منحرف ثم احسب مساحته

4- احسب النسب المثلثية للزاوية

الحل:

1- $\begin{matrix} BC \perp CE \\ DE \perp CE \end{matrix} \Longrightarrow (CD) \parallel (BC)$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

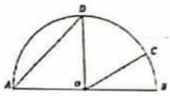
ومنه فأطوال المتقابلة في المثلثين ABC

و AED متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث فهما متشابهان :

$$K = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

تمرين (2)

C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها o وقطرها $[AB]$ تحققان :



$$o\hat{A}D = 45° \ , B\hat{o}C = 30°$$

1- احسب قياس الزاوية $D\hat{o}C$ وقياس القوس DC

2- ما نوع المثلث ABD و CoD ؟

الحل:

1- المثلث oADمتساوي الساقين لأن $oA = oD = R$ أي:

(زاويتا القاعدة متساويتان) $o\hat{A}D = o\widehat{D}A = 45°$

$$A\hat{O}D = 180° - (45° + 45°) = 180° - 90° = 90°$$

إذاً: $D\hat{o}B = 90°$

$$D\hat{o}C = D\hat{o}B - C\hat{o}B = 90° - 30° = 60°$$

$$DC = D\hat{o}C = 60°$$

(لأن القوس يقاس بقياس زاويته المركزية).

2- المثلث ADB :

$A\widehat{D}B = 90°$ (لأنها محيطية تحصر قوس نصف دائرة فهي قائمة)

$$A\hat{B}D = 180° - \left(A\widehat{D}B + D\hat{A}B\right)$$
$$= 180° - (90° + 45°)$$
$$= 180° - 135° = 45°$$

فالمثلث ABD قائم في D فيه زاويتان $D\hat{A}B$ و $D\hat{B}A$ متساويتان فهو متساوي الساقين أيضاً.

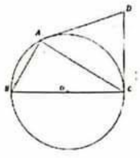
المثلث DoC :

$$D\hat{o}C = 60° \quad oC = oD = R$$

فهو متساوي الساقين فيه زاوية $60°$ ومنه يكون المثلث DoC متساوي الأضلاع

~.

تمرين (3)



في الشكل المجاور $c(o, R)$ فيها :

$DC \ , DA$ مماسين للدائرة في A و C

على الترتيب و$AB = 60°$ ،المطلوب:

1- احسب قياسات زوايا المثلث ABC

2- أثبت أن المثلث $D\hat{A}C$ متساوي الأضلاع

الحل:

$B\hat{A}C = 90°$ (لأنها محيطية تحصر قوس نصف دائرة فهي قائمة)

$A\hat{C}B = \frac{1}{2}AB = 30°$ (لأنها قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

$$A\hat{B}C = 180° - \left(B\hat{A}C - B\hat{C}A\right)$$
$$\Rightarrow A\hat{B}C = 180° - (90° + 60°) = 30°$$

$[BA]$ قطر في الدائرة فهو يقسمها لقوسين طبوقين كل منهما $180°$

$$AC = BAC - AB = 180° - 60° = 120°$$

-2 $AC = BAC - AC = 180° - 60° = 120°$

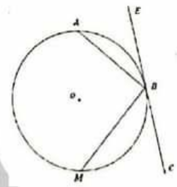
$$DAC = \frac{1}{2}AC = 60°$$

لدينا $DC \ , DA$ مماسان مرسومان من نقطة خارج دائرة إذاً $[DC] = [DA]$

فالمثلث DAC فيه ضلعان متساويان و$D\hat{A}C = 60°$ فهو متساوي الأضلاع

~.

ثالثاً: الزاوية المماسية :



الزاوية المماسية : هي الزاوية التي تقع على محيط الدائرة ضلعيها عبارة عن وتر ومماس عند أطراف هذا الوتر (أو قطر ومماس)

مثال : $A\hat{B}E$ مماسية قوسها AB

~.

ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المماسية

1. قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .
2. الزاوية المماسية في دائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس

$$\begin{cases} E\hat{B}C \text{ مماسية قوسها } BC \\ C\hat{O}B \text{ مركزية قوسها } BC \end{cases}$$

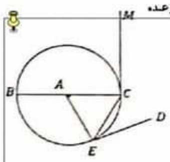
$$\Leftarrow E\hat{B}C = \frac{1}{2}C\hat{O}B$$

3. الزاويتان المحيطية والمماسية اللتان تحصران نفس القوس متساويتان

$$\begin{cases} E\hat{B}C \text{ مماسية قوسها } BC \\ B\hat{A}C \text{ محيطية قوسها } BC \end{cases} \Rightarrow E\hat{B}C = B\hat{A}C$$

~.

تمرين :



$[BC]$ قطر في دائرة مركزها A ،

E نقطة من هذه الدائرة

تحقق $B\hat{A}E = 120°$

$(CM), (ED)$ مماسان للدائرة في E و C على الترتيب .

1) احسب قياسات الزوايا $C\hat{A}E \ , E\hat{C}B \ , C\hat{B}E \ , C\hat{E}D \ , B\hat{C}M$

2) ما طبيعة المثلثات $CEB \ , AEC$

الحل:

1) حساب $C\hat{A}E$:

$$C\hat{A}E = 180° - B\hat{A}E = 180° - 120° = 60°$$

(لأنهما تشكلان زاوية مستقيمة)

حساب $E\hat{C}B$:

$$\begin{cases} E\hat{C}B \text{ محيطية تحصر } EB \\ E\hat{A}B \text{ مركزية تحصر } EB \end{cases} \Rightarrow E\hat{C}B = \frac{1}{2}E\hat{A}B = 60°$$

(الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

حساب $C\hat{E}D$:

$$\begin{cases} C\hat{E}D \text{ مماسية تحصر } CE \\ C\hat{A}E \text{ مركزية تحصر } CE \end{cases} \Rightarrow C\hat{E}D = \frac{1}{2}C\hat{A}E = 30°$$

(الزاوية المماسية تساوي نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس)

حساب $B\hat{C}M$:

$B\hat{C}M = 90°$ (لأن المماس MC عمودي على القطر BC في نقطة التماس C

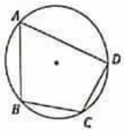
2) المثلث CEB : قائم في E لأن $C\hat{E}B = 90°$

(محيطية تحصر قوس نصف دائرة هي قائمة)

المثلث AEC: $AE = AC = R$ $\quad C\hat{A}E = 60°$

فالمثلث CAE متساوي الأضلاع لأنه متساوي الساقين فيه زاوية قياسها $60°$

رابعاً الرباعي الدائري



- **الرباعي الدائري** : هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة واحدة
- مجموع زوايا أي مضلع رباعي $360°$
- كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان
- قياس الزاوية الخارجية تساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة لمجاورتها.

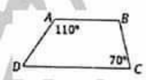
(الزاوية الخارجية محصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى مجاورة للأولى)

كيف نثبت أن الشكل رباعي

<<أربع نقاط تقع على دائرة واحدة>>

إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي كان الرباعي دائري

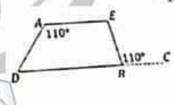
الرباعي $ABCD$ دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه.



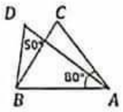
إذا تساوت زاوية خارجية في رباعي مع الزاوية المقابلة لمجاورتها كان الرباعي دائري

مثال: هل الرباعي $ADBE$ دائري؟

$$E\hat{B}C = E\hat{A}D = 110°$$



إذا تساوت زاويتان واقعتان في جهة واحدة وتحصران نفس القطعة المستقيمة فالرباعي دائري.



مثال :

في الشكل المجاور لدينا :

$$CA'B = 80° \text{ و } AB = AC$$

ACB متساوي الساقين فزاويتا القاعدة متساويتان

$$A\hat{C}B = A\hat{B}C = \frac{180° - 80°}{2} = 50$$

ومنه $B\hat{D}A = A\hat{C}B$

هما تقعان في جهة واحدة بالنسبة لـ $[AB]$ فالنقاط C, D, B, A تقع على دائرة واحدة

ملاحظة هامة:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين :

في الشكل المرسوم جانباً لدينا الرباعي $ABEF$ فيه و

$$FE = 4 \,, B = F = 90°, FA = 3$$

1) اثبت أن النقاط A , B , E , F تقع على دائرة واحدة.

2) عين مركز هذه الدائرة واحسب نصف قطرها

الحل:

1) لدينا $\hat{B} + \hat{F} = 180°$ فالرباعي $ABEF$ دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه فالنقاط A, B, E, F تقع على دائرة واحدة

2) مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي تقع في منتصف الوتر المشترك $[AE]$

حساب نصف القطر:

نحسب AE من المثلث AFE حسب مبرهنة فيثاغورث :

$$(AE)^2 = (FA)^2 + FE^2 \Rightarrow 9 + 16$$

$$(AE)^2 = 25 \Rightarrow AE = 5$$

$$R = \frac{AE}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

خامساً : المضلعات المنتظمة

- **خواص وقواعد :**

1. المضلع المنتظم هو كل مضلع قياسات زواياه متساوية وأطوال أضلاعه متساوية ((مربع، مثلث، متساوي الأضلاع ، مخمس منتظم))
2. مركز المضلع المنتظم : هو مركز الدائرة المارة برؤوسه
3. قياس كل زاوية مركزية تحصر ضلعا من المضلع المنتظم تعطى بالقانون $\frac{360}{n}$ حيث n هي عدد أضلاع المضلع المنتظم
4. لحساب قياس زاوية من زوايا المضلع المنتظم نطبق القانون $\frac{180(n-2)}{n}$
5. مجموع قياس زوايا المضلع المنتظم.
6. خطوات الحل:

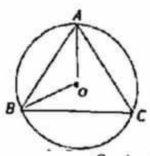
....

....

....

....

مثال:



ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة مركزها (O) ونصف قطرها $\sqrt{3}$

احسب الطول AB

الحل:

المثلث OAB فيه $OA = OB = R$ فهو متساوي الساقين رأسه O

نرسم ارتفاع هذا المثلث المتعلق بالقاعدة وليكن $[OH]$ فيكون منصف وارتفاع ومتوسط

$$A\hat{O}B = \frac{360}{3} = 120° \Rightarrow H\hat{O}B = \frac{120}{2} = 60°$$

$$\sin H\hat{O}B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin 60° = \frac{BH}{\sqrt{3}}$$

$$AB = 2BH = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \ cm$$

تمرين :

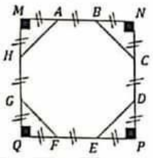
$MNPQ$ مربع و$ABCDEFGH$ مثمن مشار إليه في الشكل المحاور:

1- هل هذا المثمن منتظم مع الشرح؟

2- S هي مساحة المربع $MNPQ$

S' هي مساحة المثمن.

اشرح لماذا $S' = \frac{7}{9}S$؟



الحل:

1- المثلث BCN قائم في N وتره BC وهو أطول الأضلاع أي :

$$BC > BN$$

نعلم أن $BN = BA \Leftarrow BC > BA$

فالمثمن غير منتظم

2- بفرض أن طول ضلع المربع $MNPQ: 3X$

$$S(MNPQ) = (3X)^2 = 9X^2$$

مساحة المثمن = مساحة المربع - مساحة المثلث القائم × 4

$$S(BNC) = \frac{X \times X}{2} = \frac{X^2}{2}$$

$$S' = S - 4 \times S(BCN)$$

$$\Rightarrow S' = 9X^2 - \frac{4X^2}{2} \Rightarrow S' = 9X^2 - 2X^2 \Rightarrow S' = 7X^2$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{7X^2}{9X^2} \Rightarrow S' = \frac{7}{9}S$$

انتهت الوحدة الثالثة

الوحدة الثالثة : الزوايا والمضلعات في الدائرة والمضلعات المنتظمة

أولاً مفاهيم أساسية في الدائرة :

1. يرمز للدائرة بالرمز $c(o, R)$ حيث :
   - O مركز الدائرة ، R نصف قطرها .

مثال : $c(A, 3)$دائرة مركزها A ونصف قطرها 3 .

2. أنصاف أقطار الدائرة متساوية أي $OA = OB = R$
3. القطر يقسم الدائرة إلى قوسين طبوقين قياس كل منهما $180°$
4. المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

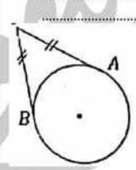
ملاحظة هامة:

....

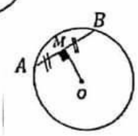
....

....

5. من نقطة M خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها وتكون المسافتين بين M ونقطتي التماس متساويتين أي $MA = MB$



6. المستقيم المار من مركز دائرة عمودياً على وتر فيها ينصف ذلك الوتر



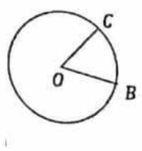
7. المستقيم المار من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يكون عمودي على ذلك الوتر
8. دائرة نصف قطرها R عندئذ تكون مساحتها S ومحيطها P :

$$P = 2\pi R \quad , \quad S = \pi R^2$$

ثانياً الزوايا في الدائرة :

الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة وضلعيها أنصاف أقطار .

مثال : $C\hat{O}B$ مركزية قوسها CB



ملاحظات وقواعد هامة في الزاوية المركزية

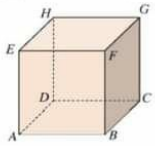
1. قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها والعكس صحيح .
2. الزوايا المركزية المتساوية تحصر أقواساً متساوية
3. إذا تساوى وتران في الدائرة تساوى قوساها والعكس صحيح
   قوساهما متساويان $\Leftrightarrow$ زاويتان مركزيتان متساويتان $\Leftrightarrow$ وتران متساويان
4. الزاوية المركزية المنعكسة : المركزية $- 360 =$ المركزية المنعكسة

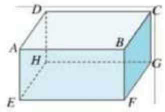
الوحدة الرابعة: المجسمات والمقاطع

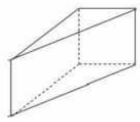
أولاً : المجسمات الفراغية

الموشور القائم

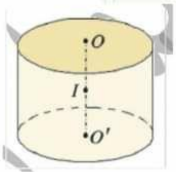
- هو مجسم قاعدتان طبوقتان ومتوازيتان وأوجهه الجانبية مستطيلات أو مربعات
- ارتفاع الموشور هو المسافة بين القاعدتين.





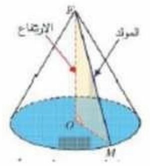


الأسطوانة الدورانية القائمة



- هو مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة .
- ارتفاع الأسطوانة هو المسافة بين مركزي القاعدتين
- القاعدتين هنا دائرتان طبوقتين ومتوازيتين

المخروط الدوراني القائم



- المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O حول المستقيم OE
- القرص المتولد من دوران OM هو قاعدة المخروط
- ارتفاع المخروط الدوراني هو المسافة بين الرأس ومركز القاعدة EO

أوراق المكثفة لمادة الرياضيات قسم الهندسة
إعداد المدرسين جعفر الحسين وريام عبدو

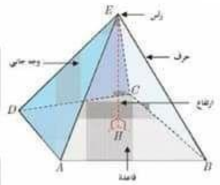
ثانياً : قوانين الحساب

الشكل الهندسي	المساحة
المثلث	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع المتعلق بها}}{2}$
المثلث القائم	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$
المثلث المتساوي الأضلاع	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (a : طول ضلع المثلث)
شبه المنحرف	$\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2} \times$ الارتفاع
متوازي الأضلاع	القاعدة × الارتفاع المتعلق بها
المعين	$\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$
المستطيل	الطول × العرض
المربع	$(\text{طول الضلع})^2$

الشكل الهندسي الفراغي	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الموشور القائم	$S_l = P \times h$	$S_T = S_l + 2S_b$	$v = S_b \times h$
متوازي المستطيلات	$S_l = P \times h$	$S_T = S_l + 2S_b$	$v = x.y.z$ جداء أبعاده الثلاثة
المكعب	$S_l = 4x^2$	$S_T = 6x^2$	$v = x^3$
الأسطوانة	$S_l = P \times h = 2\pi R.h$	$S_T = S_l + 2S_b = 2\pi Rh + 2\pi R^2$	$v = S_b \times h = \pi R^2.h$
الهرم			$v = \frac{1}{3}S_b \times h$
المخروط			$v = \frac{1}{3}S_b \times h = \frac{1}{3}\pi R^2.h$
الكرة		$S = 4\pi R^2$ أو $S = \pi d^2$	$v = \frac{4}{3}\pi R^3$ أو $v = \frac{1}{6}\pi d^3$

الهرم

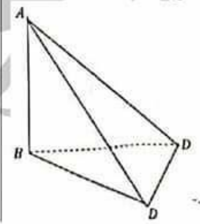
- هو مجسم يتألف من مضلع يدعى القاعدة ونقطة لا تنتمي إلى القاعدة تدعى رأس الهرم.



- أوجهه الجانبية عبارة عن مثلثات بعدد أضلاع القاعدة .
- ارتفاع الهرم هو العمود النازل من الرأس على مستوي القاعدة

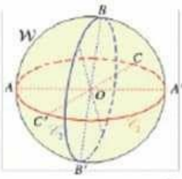
حالات خاصة :

1. الهرم المنتظم : هو هرم قاعدته مضلع منتظم (مربع / مخمس / منتظم .....) ارتفاعه هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسه ومركز قاعدته.
2. رباعي الوجوه المنتظم : هو هرم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع وكل وجه من وجوهه مثلث متساوي الأضلاع ويصلح أن يكون متساوي الأضلاع ويصلح أن يكون قاعدة له.
3. من الممكن أن يكون أحد الأحرف الجانبية للهرم هو ارتفاع له إذا كان AB عمودي على مستوي القاعدة فهو ارتفاع للهرم.



الكرة

- السطح الكروي : السطح الكروي ذو المركز (O) ونصف القطر (R) هو مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $OM = R$
- المجسم الكروي : المجسم الكروي ذو المركز (O) ونصف القطر (R) هو مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $OM \leq R$

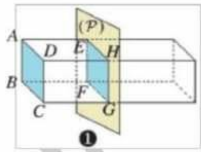


- قطر الكرة : هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة (O) وطرفاها نقطتان من الكرة .
- الدائرة الكبرى : قطرها يساوي قطر الكرة ومركزها هو مركز الكرة .

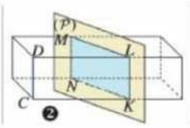
ثالثاً: مقاطع المجسمات

مقطع متوازي المستطيلات

- بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه .

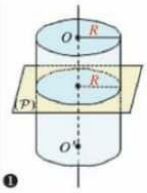


- إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه $ABCD$ هو مستطيل $EFGH$ طبوق على المستطيل $ABCD$

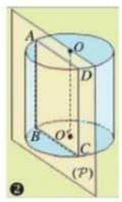


- بمستوي يوازي أحد الأحرف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.
- إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الحرف CD هو مستطيل $MNKL$ فيه $KL = MN = CD$

مقطع أسطوانة

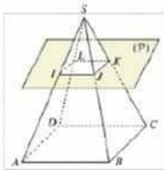


- بمستوي يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة.
- إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على القاعدة.



- بمستوي يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع
- إن مقطع الأسطوانة المجاورة بمستوي يوازي المحور هو مستطيل $ABCD$ فيه $AB = CD = OO'$

مقطع هرم



إن مقطع هرم بمستوي يوازي القاعدة هو مضلع مصغر عن القاعدة.

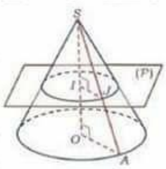
المقطع $IJKL$ مصغر عن القاعدة $ABCD$

ونسبة التصغير $k = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$

الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع الهرم

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~

مقطع مخروط دوراني



إن مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة .

الدائرة التي نصف قطرها IG هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير $k = \frac{SI}{SO} = \frac{IG}{OA} = \frac{SG}{SA}$

الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع المخروط.

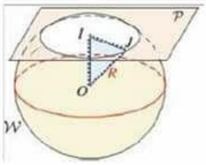
يمكننا استخدام مبرهنة النسب الثلاث لكتابة تناسب

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~

مقطع كرة

إن مقطع كرة بمستوي هو دائرة

إن مقطع مجسم كروي بمستوي هو قرص دائري



عندما يمر المستوي القاطع بمركز الكرة فالمقطع هو دائرة كبرى أما إذا كان مماس للكرة فالمقطع هو نقطة .

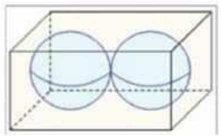
IJ هو نصف قطر دائرة المقطع

OJ هو نصف قطر الكرة

المثلث IOJ قائم في I مركز الدائرة

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~

مثال :

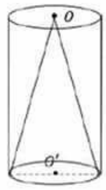


علبة شكل متوازي مستطيلات، أبعاده $8\ cm , 4\ cm , 4\ cm$ تحوي هذه العلبة كرتين متساويتين نصف قطر كل منهما $2\ cm$ تماسان أوجه العلبة ، المطلوب :

- احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

....

مثال :



أسطوانة دورانية نصف قطرها $3\ cm$ وارتفاعها $8\ cm$ تحوي بداخلها مخروط دوراني قاعدته هي القاعدة السفلية للأسطوانة ورأس المخروط هو مركز القاعدة العلوية للأسطوانة.

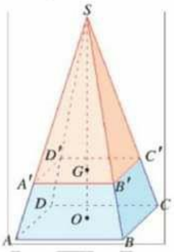
المطلوب:

1. احسب حجم الأسطوانة ومساحتها الكلية .
2. احسب حجم الفراغ المحصور بين الأسطوانة والمخروط

....

$SABCD$ هرم منتظم رأسه S وقاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $6\ cm$ $SO = 12\ cm$ مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً القاعدة هو المربع $A'B'C'D'$ ، المطلوب:

- احسب V_1 حجم الهرم $SABCD$
- احسب V_2 حجم الهرم $SA'B'C'D'$ ثم استنتج حجم جذع الهرم.



الحل:

❶ $V_1 = \frac{1}{3}S.h$

$$h = SO = 12$$
$$S = AB^2 = 36$$

ومنه $V_1 = \frac{1}{2} \times 36 \times 12 = 144\ cm^2$

❷ الهرم $SA'B'C'D'$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $k = \frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ومنه $V_2 = k^3 \times V_1$

أي $V_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 144 = 60.45\ cm^3$

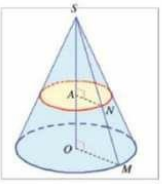
- حجم جذع الهرم هو الفرق بين حجمي الهرمين $SABCD$ و $SA'B'C'D'$ أي :

$$V = V_1 - V_2$$
$$= 144 - 60.75 = 83.25\ cm^3$$

~.

مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاعه $10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $4\ cm$ ، A نقطع من SO تحقق $SA = 6\ cm$
إن مقطع المخروط بمستوي يوازي القاعدة هي الدائرة التي نصف قطرها AM
المطلوب :

- احسب نصف قطر المقطع
- احسب مساحة المقطع بطريقتين



الحل:

❶ حسب مبرهنة النسب الثلاث :

$$\frac{4}{SO} = \frac{AN}{OM} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{AN}{4}$$
$$AN = \frac{24}{10} = 2.4\ cm$$

❷ المقطع هو تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير :

$$K = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10}$$
$$S = \pi(OM)^2$$
$$= 16\pi\ CM^2$$

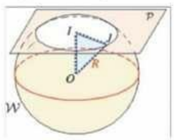
ومنه $S' = K^2 \times S$

إذاً: $S' = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times 16\pi = 5.76\ \pi\ cm^2$

~.

لدينا سطح كروي مركزه O ونصف قطره $3\ cm$ و I نقطة تحقق $OI = 2\ cm$
وليكن (P) مستوياً يمر بالنقطة I ويعامد المستقيم (OI) ولتكن J نقطة مشتركة بين المستوي (P) والسطح W . المطلوب :

- ارسم المثلث OIJ بقيم تامة الأطوال
- ارسم المقطع بأبعاده التامة
- احسب نصف قطر المقطع

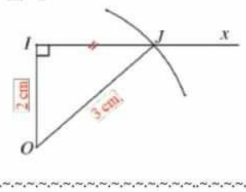


الحل:

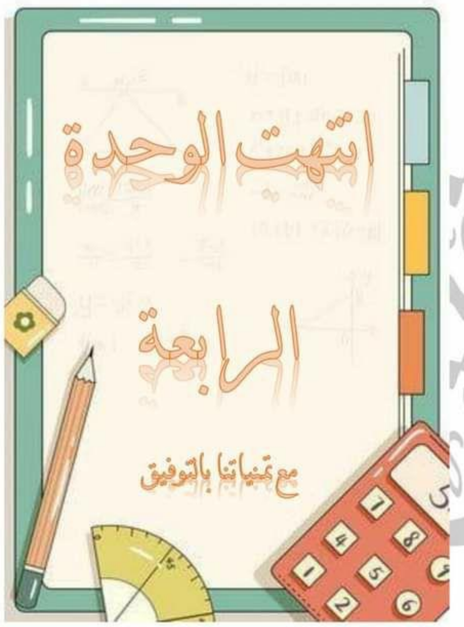
❶ نرسم ضلعين قائمين في I ثم نعين $IO = 2\ cm$ على أحدهما .
نفتح الفرجار $3\ cm$ ونثبته في Oونرسم قوس يقطع الضلع القائمة الأخرى في J

❷ نرسم دائرة نصف قطرها IJ

❸ حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث OIJ القائم في I نجد أن $IJ = \sqrt{5}$



~.



تمارين

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات وفيه

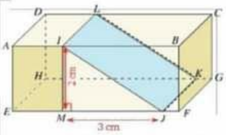
$GC = 2\ cm\ , FG = 2.5\ cm\ , EF = 5\ cm$

و I نقطة تحقق $AJ = 1.5\ cm$

و J نقطة تحقق $FJ = 0.5\ cm$

قطع هذا المجسم بمستوٍ مار بالنقطتين I و J

وموازٍ للحرف $[BC]$ ، المطلوب :



- ما طبيعة المقطع ؟
- ارسم المقطع بأبعاده التامة.

الحل :

❶ مقطع المجسم بمستوٍ مار بالنقطتين I و J وموازٍ للحرف $[BC]$ هو مستطيل $IJKL$

ويكون : $IL = BC = FG = 2.5\ cm$

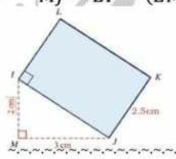
❷ نرمز إلى مسقط I على $[EF]$ بالرمز M فيكون $[IJ]$ وتراً في المثلث IMJ القائم في M لدينا $IM = AE = 2\ cm$

و $MJ = EF - (EM + JF) = 5 - (1.5 + 0.5) = 3\ cm$

- نرسم المثلث IMJ القائم في M

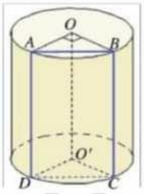
ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$

بحيث يكون طول $[JK]$ مساوياً $2.5\ cm$



الشكل المرافق يمثل أسطوانة دورانية ارتفاعها $7\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $3\ cm$

$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي محورها OO' ،المطلوب:



- ما طبيعة هذا المقطع ؟
- نعلم أن $A\hat{O}B = 90°$ ، ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة.
- احسب الطول AB

الحل :

❶ المقطع $ABCD$ هو مستطيل .

❷ المثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين ،نرسمه ثم نرسم على وتره المستطيل $ABCD$ حيث $AB = OO' = 7$

❸ حساب AB حسب مبرهنة فيثاغورس من المثلث AOB القائم

فيكون $B = 3\sqrt{2}\ cm$