التحليل التابعي(١)

نظري فصل أول

سنة رابعة رياضيات

2015_2016

أ.محمد جليلاتي

مركز تصوير كلية العلوم

الفصل الأول .

الفضاءات المترية .

تعريف الارتباط التابعي العام :

لتكن Y و X مجموعتين ذات طبيعة ما، ولنفرض أنه توجد قاعدة معلومة ترتبط كل عنصر x من X بعنصر واحد فقط من Y وليكن y عندها نقول بأنه يوجد مؤثر (تطبيق) $y = f(x)$ معرف على المجموعة X ويأخذ قيمه في Y . (قيمه متوضعة في Y) .

أو $Y \subseteq \mathbb{C}$

* في حالة خاصة عندما تكون $Y = \mathbb{R}$ فإننا نسمي f دالي .
* نقول عن خاصة أنها محققة في X إذا تحققت من أجل بعض عناصر X .
* نقول عن خاصة أنها محققة على X إذا تحققت من أجل كل عناصر X .

(دورة) تعريف (الفضاء) : الفضاء هو مجموعة معرف عليه بشكل أو بآخر مفهوم النهاية متتالية من عناصره .

تعريف (الفضاء المتري) :

لتكن X مجموعة ذات طبيعة ما، وليكن d مؤثر (تطبيق) معرف بالشكل :

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

نسمي d مسافة إذا حقق الشروط التالية :

(1) $d(x,x) = 0 \quad ; \forall x \in X$

(2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ (المسافة متناظرة)

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (متراجحة المثلث)

وذلك لكل $x,y,z \in X$

(دورة) تعريف (الفضاء القابل للتمييز) :

هو فضاء أمكن تعريف مسافة عليه بحيث تتطابق مفهوما النهاية المفهوم الأول موجود كونه فضاء والثاني هو النهاية بالمسافة .

تعريف (التقارب بالمسافة) :

ليكن (X,d) فضاء متري ، ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر X .

نقول أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى العنصر x من X إذا تحقق الشرط :

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_n , x)}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} y_0$$

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n , y) = 0$$

ونرمز لذلك بالرمز $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ أو $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

ويمكن صياغة الشرط السابق بالشكل :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_0 \Rightarrow d(x_n , x) < \varepsilon$$

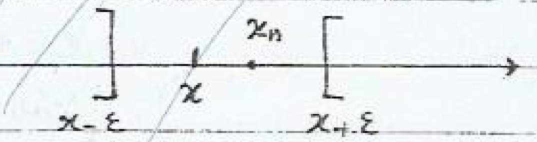
مثال: عندما $X = \mathbb{R}$ ، $d(x,y) = |x-y|$

فإن : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ تعني :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - x < +\varepsilon$$

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \qquad \forall\, n > n_0$$



ملاحظات: (1) المسافة d غير سالبة لأن:

البرهان: لتكن متراجحة المثلث $d(x,y) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

نستبدل $z = x$:

$$0 = d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x)$$

$$0 \leqslant 2d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in X$$

دورة

(2) $$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

وذلك لكل $x, x', y, y' \in X$

البرهان:

$$d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y) \leqslant d(x,x') + d(x',y') + d(y,y')$$

$$\Rightarrow d(x,y) - d(x',y') \leqslant d(x,x') + d(y,y') \quad \dots (I)$$

للحصول على المتراجحة الثانية نستبدل في المتراجحة السابقة كل x بـ x' و x' بـ x

وكل y بـ y' و y' بـ y

(بمعادلات الموضع):

$$\Rightarrow d(x',y') - d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

نضرب بـ $(-)$:

$$d(x,y) - d(x',y') \geqslant -\big(d(x,x') + d(y,y')\big) \quad \dots (II)$$

من (I) و (II) نجد:

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

(3) ليكن (X,d) فضاء متري، ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصره ومتقاربة إلى x عندها نهاية المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وحيدة.

البرهان:

نفرض وجود نهاية أخرى للمتتالية $\{x_n\}$ ولتكن y

بما أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإن:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_1(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ ;\ n>n_1 \Rightarrow d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, n_2(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ ;\ n>n_2 \Rightarrow d(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x,y)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وذلك من أجل كل $n>n_0=\max\{n_1,n_2\}$

وبما أن $\varepsilon>0$ كيفي فإن: $d(x,y)=0$

وبالتالي $x=y$ والنهاية وحيدة.

$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$, $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y)=0$

$d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

(4) إذا كانت $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ فإن أي متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ من $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة إلى نفس النهاية x.

تعاريف:

1) الكرة المفتوحة: نسمي مجموعة العناصر التالية

$$S(a,r)=\{x\in X\ ;\ d(x,a)<r\}$$

كرة مفتوحة.

حيث a عنصر مثبت من X نسمي مركز الكرة و $r>0$ عدد حقيقي موجب مثبت يدعى نصف قطر الكرة.

2) الكرة المغلقة: نسمي مجموعة العناصر

$$\bar{S}(a,r)=\{x\in X\ ;\ d(x,a)\leq r\}$$

كرة مغلقة.

خواص:

(1) نسمي a بنقطة ملاصقة (تجمع) للمجموعة $M\subseteq X$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, S(a,r)\cap M\neq \emptyset\ ;\ \forall r>0$$

أي جوار لـ a. أو $\{a\}$

(2) نسمي النقطة a بنقطة مشتقة للمجموعة $M\subseteq X$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, S(a,r)\cap M\setminus\{a\}\neq \emptyset\ ;\ \forall r>0$$

ملاحظة (3) نسمي M مجموعة مغلقة إذا حوت جميع نقاط تراكمها. أو إذا كانت $M = \overline{M}$

فإذا رمزنا لنقاط التراكم بالرمز M' فإن شرط إغلاق M هو $M' \subseteq M$

(4) نسمي المجموعة : $\overline{M} = M \cup M'$ بالصاقة لمجموعة M

عندها يصبح شرط إغلاق M هو $M = \overline{M}$

(5) نسمي M مجموعة مفتوحة في X إذا كانت متممتها $X \backslash M$ مغلقة.

(6) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

(7) نسمي M مجموعة كثيفة في X إذا كان $\overline{M} = X$.

ملاحظة هامة : * إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر المجموعة M وكانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة الى النقطة x فإن : $x \in \overline{M}$

2 * إذا كان $x \in \overline{M}$ عندها توجد متتالية من عناصر M ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة

3 * M مغلقة $\Leftrightarrow M = \overline{M}$.

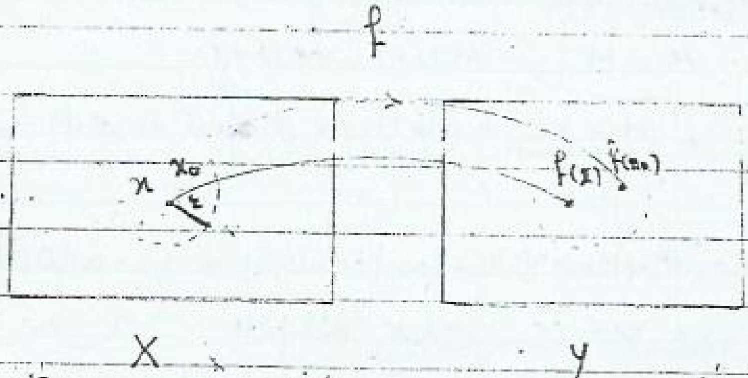
جلسة /2/
2014 - 10 - 29

تعريف (المؤثر المستمر) : (X,d_1) و (Y,d_2) فضائين متريين وليكن f مؤثر (تطبيق) معرف على X وبأخذ قيمه في Y.

$$f: X \to Y \quad \text{أي} \quad f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$$

وليكن x_0 نقطة مثبتة من X.

نقول بأن f مستمر في x_0 إذا تحقق الشرط التالي:



$$\overset{\text{فرض}}{\forall \varepsilon>0}\ \overset{\text{طلب}}{\exists \delta(\varepsilon)>0}\ ;\ \overset{\text{فرض}}{d_1(x,x_0)<\delta} \Rightarrow \overset{\text{طلب}}{d_2(f(x),f(x_0))}<\varepsilon$$

* نقول عن f أنه مستمر على X إذا كان f مستمر في كل نقطة من نقاط X.

* يوجد شكل آخر لتعريف الاستمرار في النقطة x_0 وهو:

من أجل أية متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 فإنه يجب أن تكون $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى $f(x_0)$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_1} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d_2} f(x_0)$$

سؤال دورة: برهن أن تطبيق المسافة هو تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه.

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

الحل: ليكن (x,y) عنصر مثبت من $X \times X$

ولتكن المتتالية $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ من $X \times X$ ولنفرض أنها متقاربة إلى (x,y)

ولنبرهن أن $d(x_n,y_n)$ متقاربة إلى $d(x,y)$

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leqslant d(x_n,x) + d(y_n,y) \quad \ldots (*)$$

بما أن $(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$ فإن:

أي أن: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0 \quad و \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n,y)=0$$

وبالعودة إلى ... وبأخذ نهاية الطرفين عندما $n\to\infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} |d(x_n,y_n)-d(x,y)| \leq 0+0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |d(x_n,y_n)-d(x,y)|=0$$

ومنه:

$$d(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,y)$$

أي تابع المسافة مستمر في (x,y) وبالتالي فهو مستمر بالنسبة لمتغيريه.

تعريف (الهوميومورفيزم): ليكن X,Y فضائين متريين وليكن $f: X\to Y$.
نسمي f هوميومورفيزم إذا تحقق شرطاه:

(1) وحيد القيمة التبادل (تقابل - غامر ومتباين)

(2) مستمر بالتبادل (f مستمر + f^{-1} مستمر)

تعريف ($\mathcal{L}^p(E)$): لتكن X مجموعة ما، ولتكن G صف من المجموعات الجزئية في X، و μ قياس معرف على G، ولتكن E مجموعة ما. نرمز لمجموعة جميع التوابع المقيسة والمحددة تقريباً في كل مكان في E والتي تحقق:

$$\int_E |f(x)|^p \, d\mu < +\infty$$

(التكامل متقارب)
(تكامل ليبيغ)

بالرمز $\mathcal{L}^p(E)$.

* في حالة خاصة : إذا كان $X = \mathbb{R}$, $E = [a,b]$

فإن $\mathcal{L}^p[a,b]$ هي مجموعة التوابع المعرفة على المجال $[a,b]$ والتي تحقق الشرط :

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty$$

(حيث $p \geq 1$ عدد مثبت)

تعريف (l_p) : نسمي مجموعة جميع المتتاليات العددية $\{\xi\}_{n=1}^{\infty}$ التي تحقق الشرط :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty$$ بالفضاء l_p .

ملاحظة : إن دراسة الفضائين $\mathcal{L}^p[a,b]$ و l_p ترتبط ارتباطاً وثيقاً بدراسة الفضائين $\mathcal{L}^q[a,b]$ و l_q على الترتيب. حيث q و p هما عددان مترافقان أي :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{أي} \quad p + q = pq$$

* إن الفضائين $\mathcal{L}^p[a,b]$ و l_p خطيين

متراجحات أساسية .

① متراجحة هولدر في التكاملات :

$$\forall f \in \mathcal{L}^p[a,b] \ , \ g \in \mathcal{L}^q[a,b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

* في حالة خاصة عندما $p = q = 2$ نحصل على متراجحة بونياكوفسكي :

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

② متراجحة هولدر في المجاميع :

$$\forall x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p \ , \ y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \cdot \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

* في حالة خاصة عندما $p = q = 2$ نحصل على متراجحة بونيا كوفسكي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \cdot \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

③ متراجحة مينكوفسكي في التكاملات:

$$\forall f,g \in \mathcal{L}^p[a,b] \Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right) dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

④ متراجحة مينكوفسكي في المجاميع:

$$\forall x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

⑤ متراجحة هامة (عددية). دورة

من أجل أي عددين حقيقيين a, b تتحقق المتراجحة التالية:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

البرهان. نميز حالتين.

(1) عندما يكون a, b من نفس الإشارة ولتكن موجبة

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

(2) عندما يكون a, b من إشارتين مختلفتين ولتكن $|a| \geq |b|$ فإن:

$$|a| \geq |a+b|$$

نعرف التابع المساعد التالي:

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \quad ; \quad \forall t \geq 0$$

$$f'(t) = \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \quad \forall t \geq 0$$

فالتابع $f(t)$ متزايد

وبما أن $|a| \geq |a+b|$

فإن : $f(|a|) \geq f(|a+b|)$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

أمثلة عن بعض الفضاءات المترية :

(1) الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$:

عناصره هي مجموعة الأعداد الحقيقية . تعرف المسافة فيه :

$$d(x,y) = |x-y| \quad ; \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

لنبرهن شروط المسافة :

(1) $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$

(2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$

(4) $d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$

$\leq d(x,z) + d(z,y) \quad ; \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

* إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $\mathbb{R}$ متقاربة إلى x فإن :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;;\; n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;;\; n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

② الفضاء الإقليدي E_n أو $\mathbb{R}_n$.

ليكن n عدد طبيعي مثبت. نرمز لمجموعة جميع الأشعة من الشكل:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

ذات n مركبة حيث: $\xi_i \in \mathbb{R}$ لكل $1 \le i \le n$ بالرمز E_n.

نعرف المسافة فيه بالشكل:

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{n}, \; y = (\eta_i)_{i=1}^{n} \in E_n \Rightarrow d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$ (مسافة اقليدية)

لنبرهن موضوعات المسافة:

$$(1)\quad d(x,x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$(2)\quad d(x,y) = 0 \Rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 = 0$$

لدينا مجموع منتهٍ لمقادير موجبة فكل مقدار معدوم، أي:

$$|\xi_i - \eta_i|^2 = 0 \;;\; \forall 1 \le i \le n \Rightarrow \xi_i - \eta_i = 0 \quad \forall 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow \xi_i = \eta_i \;;\; \forall 1 \le i \le n \Rightarrow x = y$$

$$(3)\quad d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i - \xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = d(y,x)$$

$$(4)\quad \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{n}, \; y = (\eta_i)_{i=1}^{n}, \; z = (\zeta_i)_{i=1}^{n} \in E_n \Rightarrow$$

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \big|(\xi_i - \zeta_i) + (\zeta_i - \eta_i)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

(متراجحة مينكوفسكي) $$\le \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

* لتكن المتتالية : $E_n \ni x_m = \left(\xi_i^{(m)}\right)_{i=1}^{n}$

إلى $x_0 = \left(\xi_i^{(0)}\right)_{i=1}^{n}$ عندما :

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N};\ m>n_0 \Rightarrow d(x_m, x_0) < \varepsilon$

$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$ $\xRightarrow{\text{بالتربيع}}$

$\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right|^2 < \varepsilon^2 \quad ;\ \forall\, 1\le i\le n$

$\xRightarrow{\text{بالجذر}} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right| < \varepsilon \quad ;\ \forall\, 1\le i\le n$

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad i=1 \qquad\quad i=2 \qquad\qquad\quad i=n \\
x_1 = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}\right) \\
x_2 = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}\right) \\
\quad\vdots \\
x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}\right) \\
\downarrow d \\
x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}\right)
\end{array}$$

إحداثيات x_m إحداثيات x_0

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N};\ m>n_0 \Rightarrow \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right| < \varepsilon$ ؛ ولكل $1\le i\le n$

وجدنا ما يدعى بالتقارب بالإحداثيات للمتتالية x_m إلى العنصر x_0.

أي التقارب بالمسافة أدى إلى تقارب بالإحداثيات.

وبالعكس ...

نفرض أن $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ حيث $x_m = \left(\xi_i^{(m)}\right)_{i=1}^{n}$ متقاربة بالإحداثيات إلى $x_0 = \left(\xi_i^{(0)}\right)_{i=1}^{n}$

أي :

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_i(\varepsilon)\in \mathbb{N},\ m>n_i \Rightarrow \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ ، $\forall\, 1\le i\le n$

بالتربيع : $\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}\right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$ لكل $1\le i\le n$

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}|^2 < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} = n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}$$

لتسهيل ب

$$\xrightarrow{\text{بالجذر}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$d(x_m, x_0) < \varepsilon$$

حيث $m > n_0 = \max_{1 \le i \le n} \{n_i\}$

إذن: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \; m > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_0) < \varepsilon$

وهذا التقارب بالمسافة.

أي التقارب بالاحداثيات أدى إلى تقارب بالمسافة.

جلسة /3/ :
2019 - 10 - 24

تذكرة

(1) لتكن $M \subseteq \mathbb{R}$:

العنصر الأكبر للمجموعة $\alpha = \max M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \leq \alpha \; ; \; \alpha \in M$

العنصر الأصغر للمجموعة $\beta = \min M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \geq \beta \; ; \; \beta \in M$

الحد الأعلى الأصغري $\alpha = \sup M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \leq \alpha$; α أصغر الحدود العليا

الحد الأدنى الأعظمي $\beta = \inf M \Rightarrow \forall x \in M \Rightarrow x \geq \beta$; β أكبر الحدود الدنيا

(2) إذا كان $f(x)$ تابع حقيقي معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة فإنه يبلغ حتماً قيمته العظمى والصغرى في المنطقة.

دورة

③ فضاء التوابع المعرفة والمستمرة على المجال $[0,1]$: $C[0,1]$

عناصره هي مجموعة جميع التوابع الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال $[0,1]$. لنعرف مسافة بالشكل :

$$\forall x(t), y(t) \in C[0,1] \Rightarrow d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

لنتأكد من شروط المسافة :

$$(1) \quad d(x,x) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |0| = 0$$

$$(2) \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = 0$$

$$|x(t) - y(t)| = 0 \; ; \; \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t) \; ; \; \forall\, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow x = y$$

$$(3) \quad d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - x(t)| = d(y,x)$$

متراجحة المثلث

$$(4) \quad |x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \; ; \; 0 \leq t \leq 1$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |z(t) - y(t)| \; ; \; \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow |x(t)-y(t)| \leqslant d(x,z)+d(z,y) \quad ; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

إن الطرف الأيسر تابع معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة فهو يبلغ قيمة عظمى ولهذه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة.

$$\Rightarrow \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)-y(t)| \leqslant d(x,z)+d(z,y) \Rightarrow d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

تذكرة: لتكن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع المعرفة على المجموعة M.

- نقول أن المتتالية التابعية $\{x_n(t)\}$ أنها متقاربة نقطياً إلى التابع $x(t)$ في المجموعة M.

$$\forall t \in M ; \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon,t) \in IN ; n > n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon$$

- نقول أن المتتالية التابعية $\{x_n(t)\}$ أنها متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$ في المجموعة M إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \boxed{n_0(\varepsilon) \in IN} ; n > n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon \quad ; \forall t \in M$$

* دراسة التقارب في $C[0,1]$:

لتكن المتتالية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر الفضاء $C[0,1]$ ولنفرض أنها متقاربة بالمسافة إلى التابع $x(t)$ أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in IN ; n > n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon \Rightarrow \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon \quad ; \forall 0 \leqslant t \leqslant 1$$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in IN ; n > n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon \quad ; \forall 0 \leqslant t \leqslant 1$$

وهذا يعني أن المتتالية التابعية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$.

وبالعكس

إذا كانت المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$ أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in IN ; n > n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon \quad ; \forall 0 \leqslant t \leqslant 1$$

إن الطرف الأيسر تابع معرف ومستمر على المنطقة مغلقة ومحدودة فهو يملك قيمة عظمى وهذه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة أي:

$$\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

ومنه نجد:

$$\forall \varepsilon>0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ;\ n>n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

أي أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالمسافة إلى x.

مثال: احسب المسافة بين التابعين $x(t)=2t$ ، $y(t)=t^2$ في الفضاء $C[0,3]$

الحل:

$$d(x,y) = \max_{0\le t\le 3} |2t - t^2|$$

$$(2t-t^2)' = 0 \Rightarrow 2-2t=0 \Rightarrow t=1$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow |2(1)-(1)^2| = 1 \\ t=0 \Rightarrow |2(0)-(0)^2| = 0 \\ t=3 \Rightarrow |2(3)-(3)^2| = |-3| \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y)=3$$

4 فضاء جميع المتتاليات العددية المحدودة: m:

عناصره هي جميع المتتاليات العددية من الشكل: $x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ والمحدودة أي يوجد عدد حقيقي $K \ge 0$ ، بحيث:

$$|\xi_i| \le K_x \ ;\ \forall i \ge 1$$

لنعرف المسافة بالشكل:

$$\forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \text{ و } y=(\eta_i)_{i=1}^{\infty} \Rightarrow d(x,y) = \sup_{i\ge 1} |\xi_i - \eta_i|$$

لنتأكد من موضوعات المسافة:

$$(1)\ d(x,x) = \sup_{i\ge 1} |\xi_i - \xi_i| = \sup_{i\ge 1} |0| = 0$$

$$\Rightarrow |x(t)-y(t)| \leq d(x,z)+d(z,y) \quad ; \quad 0\leq t\leq 1$$

إن الطرف الأيسر تابع معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة فهو يبلغ قيمة عظمى وهذه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة.

$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)-y(t)| \leq d(x,z)+d(z,y) \Rightarrow d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

تذكرة: لتكن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع المعرفة على المجموعة M.

- نقول أن المتتالية السابقة $\{x_n(t)\}$ أنها متقاربة نقطياً إلى التابع $x(t)$ في المجموعة M.

$$\forall t\in M; \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon,t)\in \mathbb{N}\ ; n>n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

- نقول أن المتتالية السابقة $\{x_n(t)\}$ أنها متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$ في المجموعة M إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \boxed{n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N}}\ ; n>n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \quad ; \forall t\in M$$

* دراسة التقارب في $C[0,1]$:

لتكن المتتالية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر الفضاء $C[0,1]$ ولنفرض أنها متقاربة بالمسافة إلى التابع $x(t)$ أي:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ ; n>n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon \Rightarrow \max_{0\leq t\leq 1}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \quad ; \forall\, 0\leq t\leq 1$$

أي:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ ; n>n_0 \Rightarrow \underset{\text{(بالمسافة)}}{|x_n(t)-x(t)|}<\varepsilon \quad ; \forall\, 0\leq t\leq 1$$

وهذا يعني أن المتتالية السابقة $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$.

وبالعكس...

إذا كانت المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$ أي:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ ; n>n_0 \Rightarrow |x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \quad ; \forall\, 0\leq t\leq 1$$

إن الطرف الأيسر تابع معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة فهو يأخذ قيمة عظمى ومنه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة أي:

$$\max_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

ومنه نجد:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

أي أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالمسافة إلى x.

مثال: احسب المسافة بين التابعين $x(t) = 2t$ ، $y(t) = t^2$ في الفضاء $C[0,3]$

الحل:

$$d(x,y) = \max_{0 \le t \le 3} |2t - t^2|$$

$$(2t - t^2)' = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow |2(1) - (1)^2| = 1 \\ t = 0 \Rightarrow |2(0) - (0)^2| = 0 \\ t = 3 \Rightarrow |2(3) - (3)^2| = |-3| \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = 3$$

4) فضاء جميع المتتاليات العددية المحدودة: m

عناصره هي جميع المتتاليات العددية من الشكل: $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ والمحدودة أي يوجد عدد حقيقي $K_x > 0$ ، بحيث:

$$|\xi_i| \le K_x \; ; \; \forall i \ge 1$$

لنعرف المسافة بالشكل:

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} , \; y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \Rightarrow d(x,y) = \sup_{i \ge 1} |\xi_i - \eta_i|$$

لنتأكد من موضوعات المسافة:

(1) $d(x,x) = \sup |\xi_i - \xi_i| = \sup |0| = 0$

KORANI

(2) $d(x,y)=0 \Rightarrow \sup_i |\xi_i - \eta_i| = 0 \Rightarrow |\xi_i - \eta_i| = 0 \quad ; \forall i \geq 1$

$\Rightarrow \xi_i = \eta_i \quad ; \forall i \geq 1 \Rightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| = \sup_i |\eta_i - \xi_i| = d(y,x)$

(4) $|\xi_i - \eta_i| = |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i| \leq |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i| \quad ; \forall i \geq 1$

$\Rightarrow |\xi_i - \eta_i| \leq \sup_i |\xi_i - \zeta_i| + \sup_i |\zeta_i - \eta_i| \quad ; \forall i \geq 1$

إن الطرف الأيمن يمثل حد أعلى ما للطرف الأيسر فالحد الأعلى الأصغري للطرف الأيسر أصغر من الحد الأعلى هذا .

$\Rightarrow \sup_i |\xi_i - \eta_i| \leq \sup_i |\xi_i - \zeta_i| + \sup_i |\zeta_i - \eta_i|$

$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,Z) + d(Z,y) \; ; \forall \; x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}, y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}, Z = (\zeta_i)_{i=1}^{\infty} \in m$

* لتكن المتتالية $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ من عناصر m ولنفرض أنها متقاربة بالمسافة إلى $x_0 = (\xi_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}$

أي :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon \Rightarrow \sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon$

$\Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon \quad ; \forall i \geq 1$

أي حصلنا على : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; n > n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon \quad ; \forall i \geq 1$

وهو تقارب بالإحداثيات ومنتظم بالنسبة لأدلة تلك الإحداثيات .

وبالعكس ...

لنفرض أن المتتالية $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ متقاربة بالإحداثيات إلى $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ وبشكل منتظم بالنسبة لأدلة تلك الإحداثيات ، أي :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; n > n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon \quad ; \forall i \geq 1$

إن الطرف الأيمن يمثل حد أعلى ما للطرف الأيسر فالحد الأعلى الأصغري للطرف الأيسر أصغر أو يساوي ε .

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \leq \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

وهو تقارب بالمسافة.

(5) فضاء جميع المتتاليات العددية المتقاربة: C (بما أن كل متتالية عددية متقاربة محدودة فإن $C \subseteq m$)

عناصره هي متتاليات عددية من الشكل: $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ ومتقاربة.

لنعرف مسافة بالشكل:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \ \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}, \ y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in C \Rightarrow d(x,y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$$

* إن برهان شروط المسافة ودراسة التقارب هي نفسها في الفضاء m.

(6) فضاء جميع التوابع الحقيقية المحدودة: $M[0,1]$

sup inf محدود

max غير محدود

عناصره توابع معرفة على المجال $[0,1]$ ومحدودة.

بما أن كل تابع معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة يكون محدوداً فإن:

$$C[0,1] \subseteq M[0,1]$$

لنعرف مسافة بالشكل:

$$\forall x(t), y(t) \in M[0,1] \Rightarrow d(x,y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

* إن برهان شروط المسافة ودراسة التقارب مماثلة للفضاء $C[0,1]$. (بدل max نضع sup)

جلسة /٩/ :
2019 - 10 - 25
الموضوع

دورة

⑦ فضاء التقارب بالقياس $S'[0,1]$:

عناصره هي مجموعة جميع التوابع المعرفة القيوسة على المجال $[0,1]$ نعرف المسافة فيه بالشكل:

$$\forall x,y \in S'[0,1] \Rightarrow d(x,y)=\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt$$

لنتأكد من موضوعات المسافة.

$$(1)\ d(x,x) \Rightarrow \int_0^1 \frac{|x(t)-x(t)|}{1+|x(t)-x(t)|}\,dt=\int_0^1 0\,dt=0$$

$$(2)\ d(x,y)=0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt=0 \Rightarrow$$

$$\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}=0 \ ;\ \forall\, 0\le t\le 1 \Rightarrow |x(t)-y(t)|=0 \ ;\ \forall\, 0\le t\le 1$$

$$\Rightarrow x(t)=y(t) \ ;\ \forall\, 0\le t\le 1 \Rightarrow x=y$$

$$(3)\ d(x,y)=\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt=\int_0^1 \frac{|y(t)-x(t)|}{1+|y(t)-x(t)|}\,dt=d(y,x)$$

$$(4)\ \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}=\frac{|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|}{1+|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|}$$

$$\le \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}+\frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|} \ ;\ \forall\, 0\le t\le 1$$ "حسب متراجحة عددية شهيرة"

وحسب خواص التكاملات يكون:

$$\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt \le \int_0^1 \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}\,dt+\int_0^1 \frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|}\,dt$$

$$\Rightarrow d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \ ;\ \forall\, x,y,z\in S[0,1]$$

الموضوع

تمرين ⑧ فضاء التوابع القابلة للمكاملة من المرتبة p $\mathcal{L}^p[0,1]$:

هي مجموعة التوابع المعرفة على المجال $[0,1]$ والتي تحقق الشرط :

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty$$ (التكامل متقارب)

لنعرف مسافة في $\mathcal{L}^p[0,1]$ بالشكل :

$$\forall x,y \in \mathcal{L}^p[0,1] \Rightarrow d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

لنتأكد من موضوعات المسافة :

$$(1)\quad d(x,x)=0 \Rightarrow \left(\int_0^1 |x(t)-\cancel{x}(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$(2)\quad d(x,y)=0 \Rightarrow \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt = 0 \Rightarrow |x(t)-y(t)|^p = 0 \quad ; \ \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t) \quad ; \ \forall\, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow x = y$$

$$(3)\quad d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |y(t)-x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = d(y,x)$$

$$(4)\quad d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

"متراجحة منيكوفسكي" $$\leq \left(\int_0^1 |x(t)-z(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |z(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

* لتكن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ ولنفرض أنها متقاربة بالمسافة إلى $x(t)$ من الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt = 0$$

يعني هذا التقارب بالتقارب بالوسط من الدرجة p .

⑨ فضاء المتتالية المربوطة ℓp :

عناصره هي متتاليات من الشكل : $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ والتي تحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \quad \text{(سلسلة متقاربة)}$$

نعرف مسافة بالشكل :

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} , \; y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \Rightarrow d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

لنتأكد من موضوعات المسافة :

$$(1) \quad d(x,x) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$(2) \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p = 0$$

$$\Rightarrow |\xi_i - \eta_i|^p = 0 \Rightarrow \xi_i = \eta_i \quad ; \quad i \geq 1$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$(3) \quad d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i - \xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d(y,x)$$

$$(4) \quad d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

"متراجحة منكوفسكي" $\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \zeta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$= d(x,y) + d(z,y)$$

وذلك لكل :

$$x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} , \; y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} , \; z = (\zeta_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$$

(15) فضاء جميع المتتاليات العددية كم :

يُعطى الفضاء كم كمثال عن فضاء قابل للتمتير .

لتكن مجموعة جميع المتتاليات العددية من الشكل : $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ ،

لنعرف مفهوم النهاية في هذه المجموعة بالشكل :

نقول أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ متقاربة إلى العنصر $x_0 = (\xi_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}$

في كم إذا كانت متقاربة بالإحداثيات .

$$\text{كم} \ni x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_i^{(1)}, \dots)$$

$$\text{كم} \ni x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_i^{(2)}, \dots)$$

$$\text{كم} \ni x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots)$$

$$\downarrow$$

$$\text{كم} \ni x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_i^{(0)}, \dots)$$

الآن أصبح كم فضاء .

لنعرف مسافة في كم بالشكل :

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}, \ y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \Rightarrow$$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} \quad (2)$$

لنتأكد من شروط المسافة :

$$(1) \ d(x,x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \xi_i|}{1 + |\xi_i - \xi_i|} = 0$$

$$(2) \ d(x,y) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = 0 \Rightarrow |\xi_i - \eta_i| = 0 \ ; \ i \geq 1$$

$$\Rightarrow \xi_i = \eta_i \ ; \ i \geq 1 \Rightarrow x = y$$

$$(3) \ d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \xi_i|}{1 + |\eta_i - \xi_i|} = d(y, x)$$

$$(4)\ \frac{|\xi_i-y_i|}{1+|\xi_i-y_i|}=\frac{|\xi_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|\xi_i-z_i+z_i-y_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-z_i|}{1+|\xi_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\ ;\ \forall i\geqslant 1$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{2^i}$ ونأخذ المجموع على i.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-y_i|}{1+|\xi_i-y_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-z_i|}{1+|\xi_i-z_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}$$

$$\Rightarrow d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

* لنبرهن تكافؤ مفهومي النهاية :

$(\Leftarrow)$: لنفرض أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $x_n=(\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ متقاربة بالإحداثيات إلى $x_0=(\xi_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}$

ولنبرهن أنها متقاربة بالمسافة :

لدينا :

$$|\underset{x_n}{\underset{\downarrow}{\xi_i^{(n)}}}-\underset{x_0}{\underset{\downarrow}{\xi_i^{(0)}}}|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ ;\ \forall i\geqslant 1$$

بما أن :

$$\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}<1\ \Rightarrow$$

ربما نخطط الطريقة

$$\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}<\frac{1}{2^i}\ ;\ \forall i\geqslant 1\ \ldots\ (*)$$

$$\sum\frac{1}{2^i}\frac{1}{1+1}\ \frac{1}{1}<\sum\frac{1}{2^i}$$

لدينا السلسلة العددية التالية $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ متقاربة فباقيها المحصى يسعى إلى الصفر أي يوجد عدد طبيعي $m>0$ مقابل أي $\varepsilon>0$ حيث :

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}\ \ldots(**)$$

لنحسب المسافة :

$$d(x_n,x_0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|}$$

$$\overset{(*)}{\text{حسب}} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$\overset{(**)}{\text{حسب}} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|} + \frac{\varepsilon}{2}$$

إن السلسلة الموجودة في الطرف الأيمن هي مجموع منتهٍ لمقادير لامتناهية في الصغر (لأن $\{x_n\}$ متقاربة بالاحداثيات إلى x_0) فهو مقدار لامتناهي في الصغر أي يمكن جعل:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهو تقارب بالمسافة.

$(\Longrightarrow)$: لنفرض أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالمسافة إلى x_0.
ولنبرهن أنها متقاربة بالاحداثيات

لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|}{1+|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}|} = 0 \quad ; \forall i \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| = 0 \quad ; \forall i \geq 1$$

وهو تقارب بالاحداثيات

(11) فضاء جميع التوابع المعرفة على المجال $[0,1]$: $F[0,1]$

يعطي هذا الفضاء مثال عن فضاء غير قابل للتقييس.

جلسة /15/ :

2014 - 10 - 26

الموضوع

الفضاءات التامة :

تعريف (متتالية كوشي) : ليكن (X, d) فضاء متري ، ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر هذا الفضاء
نقول أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي أو متتالية أساسية أو متتالية متقاربة في نفسها إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

يوجد شكل آخر للشرط السابق :

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

مبرهنة : كل متتالية متقاربة في فضاء متري تكون أساسية.

البرهان :

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر الفضاء المتري X ولنفرض أنها متقاربة إلى العنصر x_0 من X . ولنبرهن أنها أساسية.
بما أن $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ عندها :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \& \;\; d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

متراجحة المثلث

وهو المطلوب .

تعريف (الفضاء التام) : نقول عن الفضاء المتري X أنه فضاء تام إذا كانت كل متتالية أساسية فيه متقاربة إلى عنصر فيه.

مثال (1) : الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ تام (بدون برهان)

أي أن كل متتالية أساسية في $\mathbb{R}$ تكون متقاربة في $\mathbb{R}$ أي إذا كانت :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon), \; n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{(أساسية)}$$

فإنه يوجد عنصر $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث : $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ (متقاربة).

مثال (2): E_n دورة

الفضاء الاقليدي E_n تام.

البرهان:

لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر E_n بحيث:

ولنفرض أنها أساسية أي: $x_m = \left(\xi_i^{(m)}\right)_{i=1}^{n}$

$$d(x_m, x_k) \xrightarrow[m,k\to\infty]{} 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[m,k\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(k)}\right| \xrightarrow[m,k\to\infty]{} 0 \quad ; \ \forall\, 1 \le i \le n$$

واضح أن: المتتالية $\{\xi_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ من أجل كل i مثبتة $(1 \le i \le n)$ تحقق شرط كوشي في $\mathbb{R}$

و$\mathbb{R}$ فضاء تام فهي متقاربة إلى عنصر وليكن $\xi_i^{(0)}$ (لكل $1 \le i \le n$) $\left|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(0)}\right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

فيتشكل لدينا عنصر:

$$x_0 = \left(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}\right) \in E_n$$

واضح أن: $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ متقاربة بالاحداثيات إلى x_0 فهي متقاربة بالمسافة.

$$d(x_m, x_0) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

ومنه E_n فضاء تام

تذكرة:

* نقول عن المتتالية التابعية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ أنها تحقق شرط كوشي المنتظم في M إذا كان:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon) : n,m > n_0 \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \ ; \ \forall t \in M$$

* كل متتالية تابعية تحقق شرط كوشي المنتظم تكون متقاربة بانتظام.
* إذا كانت المتتالية التابعية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ من التوابع المستمرة ومتقاربة بانتظام إلى تابع $x(t)$ فإن تابع النهاية $x(t)$ يكون مستمر أيضاً.

مثال (3) : $C[0,1]$ دورة

إن الفضاء $C[0,1]$ تام

لأن، لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $C[0,1]$ ولنفرض أنها أساسية، أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; ; \; n,m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 1} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \; ; \; \forall \; 0 \leq t \leq 1$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق شرط كوشي المنتظم في $C[0,1]$

ونعلم أن كل متتالية تحقق شرط كوشي المنتظم تكون متقاربة بانتظام ولتكن إلى $x_0(t)$.

لدينا $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع المستمرة والمتقاربة بانتظام إلى التابع $x_0(t)$ عندها $x_0(t)$ مستمر أيضاً. أي: $x_0(t) \in C[0,1]$

ونعلم أن التقارب بانتظام في $C[0,1]$ هو تقارب بالمسافة، أي:

$$d(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه $C[0,1]$ تام.

مثال (4) : m

الفضاء m تام، لأن:

لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر الفضاء m حيث: $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ ولنفرض أنها أساسية

أي:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; ; \; n,m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{i\geq 1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon \; ; \; \forall \, i \geq 1$$

واضح أنه من أجل كل i مثبت ($i\geq 1$) فإن المتتالية:

$(\xi_i^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ تحقق شرط كوشي في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ فضاء تام فهي متقاربة إلى عنصر وليكن $\xi_i^{(0)}$، أي:

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \xrightarrow[n\to\infty]{<\varepsilon} 0 \; ; \; \forall i \geq 1$$

فنشكل المتتالية العددية $x_0 = (\xi_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}$ ولنبرهن أن $x_0 \in m$:

بما أن $x_n \in m$ فإنه يوجد ثابت k_n بحيث :

$$|\xi_i^{(n)}| \leq k_n \; ; \; \forall i \geq 1$$

إذن ; $\forall i$

$$|\xi_i^{(0)}| = |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}| \leq |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)}|$$

(لا تعتمد على i)

$$< \varepsilon + k_n = k_0$$

$$\Rightarrow x_0 \in m$$

لدينا : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; ; n > n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon \; , \; \forall i \geq 1$

وهذا تقارب بالإحداثيات وبشكل منتظم بالنسبة لأدلة تلك الإحداثيات للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى العنصر x_0 .

وهذا يؤدي إلى أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالمسافة إلى x_0 (حسب دراسة سابقة) .

أي :

$$d(x_n, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

مثال (5) : C دورة

الفضاء C تام .

ملاحظة: المجموعة المغلقة من فضاء تام هي فضاء تام .

بما أن $C \subseteq m$ إذاً يكفي أن نبرهن أن C مجموعة مغلقة .

البرهان :

لتكن x نقطة تراكم لـ C ولنبرهن أن $x \in C$ حيث $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ عندها توجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر C متقاربة إلى x حيث :

$$x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

أي :

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

أو :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; ; n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

إذن $\forall i \geq 1$;

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon > \frac{\varepsilon}{3}$$

لدينا:

$$|\xi_i - \xi_j| = |\xi_i - \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} + \xi_j^{(n)} - \xi_j|$$

$$\leqslant |\xi_i - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|$$

بما أن: $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty} \in C$ فإن x_n تمثل متتالية عددية متقاربة فهي تحقق شرط كوشي أي نحصل على:

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |\xi_i - \xi_j| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ متتالية عددية تحقق شرط كوشي في IR و IR تام فهي متقاربة إذاً: $x \in C$

ومنه C مغلقة ومنه C تام.

جلسة /6/
2014 - 10 - 31

مثال (6): الفضاء Q بالمسافة $d(x,y)=|x-y|$ غير تام

لأن:

لتكن المتتالية: $x_n=(1+\frac{1}{n})^n \in Q$

إن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في Q لأن:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=\lim_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=\lim_{n,m\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right|$$

$$=|e-e|=0$$

ولكن
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \notin Q$$

وجدنا متتالية أساسية واحدة على الأقل في Q ولكنها غير متقاربة في Q

إذاً Q فضاء غير تام.

مثال (7): لتكن X مجموعة جميع كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[0,1]$

ولنفرض مسافة بالشكل:

$$d(p(t),Q(t))=\max_{0\le t\le 1}|p(t)-Q(t)|$$

برهن أن X فضاء متري غير تام.

الحل: لنتحقق من شروط المسافة:

(1) $d(p(t),p(t))=0 \Rightarrow \max\limits_{0\le t\le 1}|p(t)-p(t)|=0 \Rightarrow \max\limits_{0\le t\le 1}|0|=0$

(2) $d(p(t),Q(t)) \Rightarrow \max\limits_{0\le t\le 1}|p(t)-Q(t)|=0 \Rightarrow |p(t)-Q(t)|=0\ ;\ \forall 0\le t\le 1$

$\Rightarrow p(t)=Q(t)\ ;\ \forall 0\le t\le 1 \Rightarrow p=Q$

(3) $d(p(t),Q(t))=\max\limits_{0\le t\le 1}|p(t)-Q(t)|=\max\limits_{0\le t\le 1}|Q(t)-p(t)|=d(Q(t),p(t))$

(4) $|p(t)-Q(t)|=|p(t)-r(t)+r(t)-Q(t)|\le|p(t)-r(t)|+|r(t)-Q(t)|, 0\le t\le$

$\le \max\limits_{0\le t\le 1}|p(t)-r(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|r(t)-Q(t)|$

$\Rightarrow |p(t)-Q(t)|\le d(p(t),r(t))+d(r(t),Q(t))\ ;\ 0\le t\le 1$

الطرف الأيسر معرف ومستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة فهو يبلغ قيمته العظمى وهذه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة.

$\Rightarrow \max\limits_{0\le t\le 1}|p(t)-Q(t)|\le d(p(t),r(t))+d(r(t),Q(t)) \Rightarrow d(p(t),Q(t))\le d(p(t),r(t))+d($

لتأخذ المتتالية التالية من عناصر الفضاء X :

$$p_0(t)=1 \,,\; p_1(t)=1+\frac{t}{1!} \,,\; p_2(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!} \,,\; \dots \;;\; p_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$$

لنبرهن أن $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في X.

$$d(p_n(t), p_m(t)) = \max_{0\le t\le 1} |p_n(t)-p_m(t)|$$

$$= \max_{0\le t\le 1} \left| \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} - \sum_{j=0}^{m}\frac{t^j}{j!} \right| \quad , n>m$$

$$= \max_{0\le t\le 1} \left| \sum_{k=m+1}^{n}\frac{t^k}{k!} \right|$$

$$\lim_{n,m\to\infty} d(p_n, p_m) = \lim_{n,m\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n}\frac{t^k}{k!} \right| = 0$$

لأنه ذيل بالمجموع لمتسلسلة متقاربة ، ولكن:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^t \notin X$$

مثال (8): الفضاء $C[0,1]$ بالمسافة: دورة

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$$

غير تام.

لأن:

لتكن المتتالية التالية:

حقق

$$C[0,1] \ni x_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \; 0\le t\le \frac{1}{2} \\ n(t-\frac{1}{2}) & ; \; \frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 & ; \; \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le t\le 1 \end{cases}$$

إن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية في $C[0,1]$ لأن:

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & ; \; 0\le t\le \frac{1}{2} \\ m(t-\frac{1}{2}) & ; \; \frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}+\frac{1}{m} \\ 1 & ; \; \frac{1}{2}+\frac{1}{m}\le t\le 1 \end{cases}$$

$$d(x_n,x_m)=\int_0^1 |x_n(t)-x_m(t)|\,dt$$

بفرض $m<n \Leftarrow \frac{1}{m}>\frac{1}{n} \Leftarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} |0-0|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left|n\left(t-\tfrac{1}{2}\right)-m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right|dt+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left|1-m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right|dt$$

$$+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1} |1-1|\,dt$$

$= \underset{n,m\to\infty}{\text{تعتمد على } n,m \longrightarrow 0}$

ولكن ... نفرض جدلاً أن المتتالية $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى عنصر $x(t)$ في الفضاء $C[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|\,dt=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}|0-x(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left|n\left(t-\tfrac{1}{2}\right)-x(t)\right|dt+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|\,dt\right\}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}|0-x(t)|\,dt=0 \Rightarrow x(t)=0\ ;\ 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left|n\left(t-\frac{1}{2}\right)-x(t)\right|dt=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|\,dt=0 \Rightarrow x(t)=1\ ;\ \frac{1}{2}<t\leq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t)=\begin{cases}0 & ;\ 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 1 & ;\ \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases} \notin C[0,1]$$

وهذا تناقض ... إذاً $\{x_n(t)\}$ غير متقاربة في $C[0,1]$ بالدالة المعرفة ومنه $C[0,1]$ غير تام بالدالة المعرفة.

مثال (٩): الفضاء $C[0,2]$ بالدالة :

دورة

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$$

غير تام .

الحل: نفس التمرين السابق ولكن نختار المتتالية :

$$x_n(t)=\begin{cases} 1 & ; \ 0\leq t\leq 1-\frac{1}{n} \\ n(1-t) & ; \ 1-\frac{1}{n}\leq t\leq 1 \\ 0 & ; \ 1\leq t\leq 2 \end{cases}$$

المؤثرات الضاغطة :

تعريف (المؤثر الضاغط) : ليكن X فضاء متري ، وليكن A مؤثر تطبيق X التام في نفسه .

$$A : X \longrightarrow X$$

نقول عن المؤثر A أنه ضاغط إذا وجد عدد $0 < \alpha < 1$ بحيث :

$$d(Ax , Ay) \leqslant \alpha \, d(x,y) \quad ; \quad \forall x,y \in X$$

هام **مبرهنة : (النقطة الثابتة) (باناخ) :**

ليكن X فضاء متري تام وليكن A مؤثر ضاغط معرف في X.

عندها يوجد حل وحيد للمعادلة $Ax = x$ ندعوه النقطة الثابتة للمؤثر A

خطوات الحل :

① نشكل متتالية x_n
② نبرهن x_n كوشية
③ $x_n \to x_0$
④ $Ax_0 = x_0$ حل
⑤ x_0 وحيدة

البرهان : ليكن x عنصراً من X . ولنشكل المتتالية :

$$x_1 = Ax , \; x_2 = Ax_1 , \; x_3 = Ax_2 , \ldots , x_n = Ax_{n-1} \; ; \; n \geqslant 2$$

①
$$d(x_1 , x_2) = d(Ax , Ax_1) \leqslant \alpha \, d(x , x_1) = \alpha \, d(x , Ax)$$

$$d(x_2 , x_3) = d(Ax_1 , Ax_2) \leqslant \alpha \, d(x_1 , x_2) \leqslant \alpha^2 d(x , Ax)$$

$$d(x_n , x_{n+1}) \leqslant \alpha^n d(x , Ax) \quad ; \quad n \geqslant 1$$

يوجد شكل آخر لشرط كوشي وهو :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0(\varepsilon) \; ; \; n \geqslant n_0 \; ; \; p \geqslant 1 \Rightarrow d(x_{n+p} , x_n) < \varepsilon$$

أو :
$$1 < p \; ; \; \lim_{n \to \infty} (x_{n+p} , x_n) = 0$$

③
$$\underbrace{d(x_n , x_{n+p})}_{\text{متراجحة المثلث } p \text{ مرة}} \leqslant d(x_n , x_{n+1}) + d(x_{n+1} , x_{n+2}) + d(x_{n+2} , x_{n+3})$$

$$+ \ldots + d(x_{n+p-1} , x_{n+p})$$

$$\leqslant \alpha^n d(x , Ax) + \alpha^{n+1} d(x , Ax) + \ldots + \alpha^{n+p-1} d(x , Ax)$$

$$= \alpha^n \left(1+\alpha+\dots+\alpha^{p-1}\right) d(x,Ax)$$

$$= \alpha^n \left(\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}\right) d(x,Ax) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; ; \; p \geq 1 \Rightarrow$$ أساسية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

الفضاء X تام ولدينا $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية إذاً هي متقاربة إلى عنصر وليكن x_0

لنبرهن أن x_0 هو حل للمعادلة $Ax=x$ ، أي لنبرهن أن: $Ax_0=x_0$

$$d(Ax_0,x_0) = d(Ax_0, \lim_{n\to\infty} x_n) \underset{\text{تابع المسافة مستمر}}{=} \lim_{n\to\infty} d(Ax_0, x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} d(Ax_0, Ax_{n-1})$$

$$\leq \alpha \lim_{n\to\infty} d(x_0, x_{n-1})$$

$$= \alpha\, d(x_0, \lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

$$= \alpha\, d(x_0,x_0) = 0$$

$$\Rightarrow d(Ax_0,x_0) \leq 0 \underset{\text{المسافة موجبة}}{\Rightarrow} d(Ax_0,x_0) = 0 \Rightarrow Ax_0 = x_0$$

لنبرهن x_0 وحيدة بفرض وجود نقطة آخرى y_0 حل للمعادلة $Ax=x$

أي: $Ay_0=y_0$ ولنبرهن أن: $x_0=y_0$:

$$d(x_0,y_0) = d(Ax_0,Ay_0) \leq \alpha\, d(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{\text{موجب} > 0} \underbrace{d(x_0,y_0)}_{\geq 0} \leq 0$$

لدينا $1 > \alpha > 0$ فالمتراجحة السابقة لن تتحقق إلا في حالة: $d(x_0,y_0)=0$

ومنه $x_0=y_0$ حل وحيد

* تدعى المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ الواردة في المبرهنة السابقة بمتتالية التقريبات المتتالية للمؤثر A.

* إن اختيار x الكيفية في بداية المبرهنة يؤثر في سرعة التقارب للمتتالية $\{x_n\}$

تطبيقات مبدأ المؤثرات الضاغطة:

① حل جملة معادلات جبرية خطية:

لتكن جملة المعادلات التالية:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j + b_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n$$

n معادلة بـ n مجهول.

لكي نستطيع الاستفادة من مبدأ المؤثرات الضاغطة يجب تعريف مؤثر A.

نعرف المؤثر A بالشكل:

$$A : E_n \longrightarrow E_n$$

$$Ax = y \; ; \; y = (\eta_i)_{i=1}^{n} \; ; \; \eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j + b_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n$$

واضح أن A يطبق E_n في نفسه، وأن E_n تام، لنوجد الشرط الذي يكون من أجله A مؤثر ضاغط.

$$\forall\, x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i=1}^{n} \; , \; x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i=1}^{n} \in E_n$$

$$y_1 = Ax_1 = (\eta_i^{(1)})_{i=1}^{n} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(1)} + b_i \right)_{i=1}^{n}$$

$$y_2 = Ax_2 = (\eta_i^{(2)})_{i=1}^{n} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(2)} + b_i \right)_{i=1}^{n}$$

لدينا المسافة في E_n، المسافة التقليدية:

$$d(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(Ax_1, Ax_2) = d(y_1, y_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(2)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

"متراجحة بونياكوفسكي" $$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

لا تتعلق بـ i

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha \, d(x_1, x_2) \quad ; \quad \alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

حتى يكون A مؤثر ضاغط يجب أن تكون $1 > \alpha > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1$$

عندها يوجد للمعادلة $Ax = x$ حل وحيد (حسب نظرية النقطة الثابتة)

عندها يوجد لجملة المعادلات المفروضة حل وحيد.

② ملاحظة:

نفس المسألة السابقة ولكن بمسافة أخرى، ولتكن:

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)}|$$

لنوجد الشرط الذي يكون من أجله A ضاغط:

$$d(Ax_1, Ax_2) = d(y_1, y_2) = \max_{1 \leq i \leq n} |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j^{(2)} \right|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right|$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|$$

$$= \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \cdot \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= \alpha\, d(x_1, x_2) \quad ; \quad \alpha = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

حتى يكون A ضاغط يجب أن تكون : $0 < \alpha < 1$

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \quad , \quad \forall\, 1\leq i\leq n$$

عندها يكون للمعادلة $Ax = x$ حل وحيد

عندها يكون لجملة المعادلات المفروضة حل وحيد .

③ وجود ووحدانية حل معادلة فريدهولم التكاملية :

دورة

لتكن معادلة فريدهولم التكاملية التالية :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, \varphi(s)\, ds$$

حيث : $\varphi(t), f(t) \in C[a,b]$ والنواة $k(t,s)$ مستمرة في مربع $a \leq t, s \leq b$

لنعرف مؤثر A في الفضاء $C[a,b]$ بالشكل :

$$A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$A\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, \varphi(s)\, ds$$

لدينا $C[a,b]$ فضاء تام و A يطبق $C[a,b]$ في نفسه ولنوجد الشرط الذي يكون من أجله A مؤثر ضاغط .

$$\forall\, \varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[a,b] \Rightarrow A\varphi_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, \varphi_1(s)\, ds$$

$$A\varphi_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, \varphi_2(s)\, ds$$

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{a\leq t\leq b} |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)|$$

$$= \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)\, \varphi_1(s)\, ds - \lambda \int_a^b K(t,s)\, \varphi_2(s)\, ds \right|$$

$$= \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s) \left[\varphi_1(s) - \varphi_2(s) \right] ds \right|$$

$$\le \max_{a \le t \le b} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)| \cdot |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds$$

$$\le \max_{a \le t \le b} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)| \cdot \max_{a \le s \le b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds$$

$$= \underbrace{\max_{a \le s \le b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|}_{d(\varphi_1, \varphi_2)} \max_{a \le t \le b} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)|\, ds$$

بما أن النواة $K(t,s)$ معرفة ومستمرة في منطقة مغلقة ومحدودة فمن ثم لها قيمة عظمى ولتكن M:

$$M = \max_{a \le t, s \le b} |K(t,s)|$$

$$\Rightarrow d(A\varphi_1, A\varphi_2) \le d(\varphi_1, \varphi_2)\, |\lambda|\, M \max_{a \le t \le b} \int_a^b ds$$

$$= d(\varphi_1, \varphi_2)\, |\lambda|\, M \max_{a \le t \le b} (b-a)$$

$$= |\lambda|\, M (b-a)\, d(\varphi_1, \varphi_2)$$

حتى يكون المؤثر A ضاغط يجب أن يكون:

$$0 < \alpha = |\lambda|\, M (b-a) < 1$$

$$\Rightarrow |\lambda|\, M (b-a) < 1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

عندها يكون للمؤثر A نقطة ثابتة (للمعادلة $A\varphi = \varphi$ حل وحيد).

عندها يكون للمعادلة التكاملية المفروضة حل وحيد.

KORANI

دورة

تطبيق :

لتكن المعادلة التكاملية :

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\varphi(s)\,ds$$

هل يوجد لها حل وحيد في $C[0,1]$ وأوجده إن وجد.

(طبق مبدأ المؤثرات الضاغطة في إثبات وجود حل وحيد للمعادلة)

(لنكن المؤثر : $A\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\varphi(s)\,ds$

هل A ضاغط وأوجد نقطة الثبات إن كان ضاغطاً.)

الحل :

لنفرض المؤثر A بالشكل :

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$A\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\varphi(s)\,ds$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C[0,1] \Rightarrow A\varphi_1 = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\varphi_1(s)\,ds$$

$$A\varphi_2 = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\varphi_2(s)\,ds$$

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{0\leq t\leq 1} |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)|$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]\,ds \right|$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} \frac{1}{2}\int_0^1 |ts|\,|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\,ds$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} \frac{1}{2}\int_0^1 |ts| \overbrace{\max_{0\leq t\leq 1} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|}^{d(\varphi_1,\varphi_2)}\,ds$$

$$= d(\varphi_1, \varphi_2) \max_{0\leq t\leq 1} \frac{1}{2}\int_0^1 |ts|\,|ds| \leq \frac{1}{2} d(\varphi_1, \varphi_2)\int_0^1 ds$$

$$\Rightarrow d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq \frac{1}{2} d(\varphi_1, \varphi_2) \quad ; \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in [0,1]$$

طالما $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$ فالمؤثر ضاغط وحسب مبرهنة النقطة الثابتة .

يوجد للمعادلة $A\varphi = \varphi$ حل وحيد .

أي يوجد للمعادلة التكاملية المفروضة حل وحيد ، ولنوجده بطريقة التقريبات المتتالية .

نضع :

$$\varphi_0(t) = 0$$

$$\varphi_1(t) = A\varphi_0(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 (ts)(0)\, ds = \frac{5}{6}t$$

$$\varphi_2(t) = A\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 (ts)\left(\frac{5}{6}s\right) ds$$

$$= \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\,\frac{t}{3} = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

$$\varphi_3(t) = A\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\,\frac{5}{6}s\left(1+\frac{1}{6}\right) ds$$

$$= \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}\right)$$

بالاستقراء :

$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{5}{6}t\left(\frac{1 - \frac{1}{6^n}}{1 - \frac{1}{6}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} t$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = t$$

مثال ④ لتكن معادلة فريدهولم التكاملية :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b k(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

ولتكن في الفضاء $L^2[a,b]$ ، أي : $\varphi \in L^2[a,b]$

وضمن الشرط $k(t,s)$ معرفة ومستمرة في المربع $a \leq t,s \leq b$

لنرمز بـ :

$$B = \left(\int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

نعلم أن المسافة في $L^2[a,b]$ هي :

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = \left(\int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \forall\, \varphi_1,\varphi_2 \in L^2[a,b]$$

نعرف المؤثر A في الفضاء $L^2[a,b]$ بالشكل :

$$A : L^2[a,b] \longrightarrow L^2[a,b]$$

$$A\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b k(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

إن $L^2[a,b]$ فضاء تام ، وأن A يطبق $L^2[a,b]$ في نفسه ، ونوجد الشرط الذي يكون من أجله A مؤثر ضاغط :

$$\forall\, \varphi_1,\varphi_2 \in L^2[a,b] \Rightarrow A\varphi_1(t) = f(t) + \lambda\int_a^b k(t,s)\,\varphi_1(s)\,ds \,,$$

$$A\varphi_2(t) = f(t) + \lambda\int_a^b k(t,s)\,\varphi_2(s)\,ds$$

$$A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t) = \lambda\int_a^b k(t,s)\left[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\right]ds$$

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)|^2 = |\lambda|^2\left|\int_a^b k(t,s)\left[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\right]ds\right|^2$$

$$\leq |\lambda|^2\left(\int_a^b |k(t,s)|\,.\,|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\,ds\right)^2$$

$$\leq |\lambda|^2\left(\int_a^b |k(t,s)|^2\,ds\right).\underbrace{\left(\int_a^b |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|^2\,ds\right)}_{d^2(\varphi_1,\varphi_2)}$$ "متراجحة بونياكوفسكي"

بالمكاملة بالنسبة لـ t :

$$\int_a^b |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)|^2 dt \leq |\lambda|^2 d^2(\varphi_1, \varphi_2) \underbrace{\left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds\, dt\right)}_{B^2}$$

بالجذر :

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda| B\, d(\varphi_1, \varphi_2)$$

حتى يكون A ضاغط يجب أن تكون :

$$0 < \alpha = |\lambda| B < 1$$

$$\Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{B}$$

عندها يوجد للمؤثر A نقطة ثابتة وحيدة (يوجد حل وحيد للمعادلة $A\varphi = \varphi$)

عندها يوجد للمعادلة التكاملية المزدوجة حل وحيد.

تطبيق :

نفس المعادلة في الفضاء $C[a,b]$

$$\varphi(t) = \frac{5}{6} t + \frac{1}{2} \int_0^1 ts\, \varphi(s)\, ds$$

ولكن عندها $\varphi \in \mathcal{L}^2[0,1]$

أما إيجاد النقطة الثابتة فيتم بنفس طريقة التطبيق السابق.

دورة مبرهنة :

ليكن A مؤثر مستمر ومعرف في الفضاء التام X و A تطبيق X في نفسه.

إذا كان A^n مؤثر ضاغط من أجل قيمة ما n . عندها يوجد نقطة ثابتة للمؤثر A ووحيدة.

البرهان :

بما أن A^n مؤثر ضاغط عندها يوجد عدد $0<\alpha<1$ بحيث :

$$d(A^n x, A^n y) \leq \alpha\, d(x,y) \quad ; \quad \forall x,y \in X$$

وحسب نظرية النقطة الثابتة يوجد للمؤثر A^n نقطة ثابتة ووحيدة ولتكن x^* ، أي :

$$A^n x^* = x^*$$

ولنبرهن على أن x^* هي نقطة ثابتة لـ A ، أي لنبرهن أن : $Ax^* \overset{?}{=} x^*$

$$d(Ax^*, x^*) = d(AA^n x^*, A^n x^*) = d(A^{n+1}x^*, A^n x^*)$$

$$= d(A^n A x^*, A^n x^*) \leq \alpha\, d(Ax^*, x^*)$$

$$\underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\, \underbrace{d(Ax^*, x^*)}_{\geq 0} \leq 0$$

وهذه المتراجحة لن تتحقق إلا في حالة :

$$d(Ax^*, x^*) = 0$$

ومنه : $Ax^* = x^*$

بفرض وجود نقطة ثابتة أخرى لـ A ولتكن y^* ، أي : $Ay^* = y^*$

ولنبرهن أن : $x^* = y^*$

$$d(x^*, y^*) = d(A^n x^*, A^n y^*) \leq \alpha\, d(x^*, y^*)$$

y^* ثابتة لـ A فهي ثابتة لـ A^n لكل $n \geq 1$

$$\Rightarrow (1-\alpha)\, d(x^*, y^*) \leq 0$$

وهذه المتراجحة لن تتحقق إلا في حالة : $d(x^*, y^*) = 0$

ومنه $x^* = y^*$

فالنقطة الثابتة لـ A وحيدة.

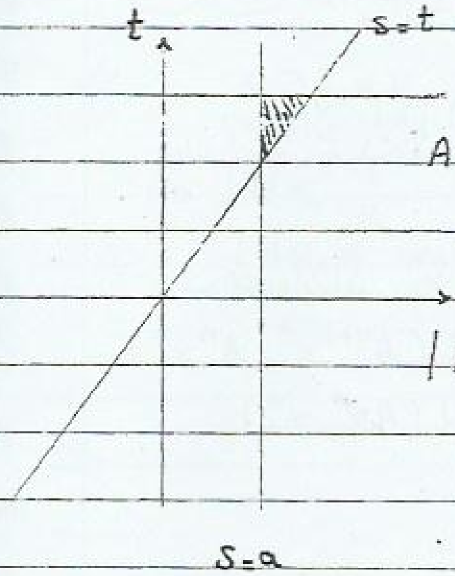
⑤ وجود ووحدانية حل معادلة فولتيرا التكاملية :

لتكن معادلة فولتيرا التكاملية :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\, \varphi(s)\, ds$$

حيث $\varphi \in C[a,b]$ و $K(t,s)$ مستمرة في المنطقة :

$$a \leqslant s \leqslant b \quad , \quad a \leqslant t \leqslant b$$



نعرف مؤثر A في الفضاء $C[a,b]$ بالشكل :

$$A : C[a,b] \to C[a,b]$$

$$A\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\, \varphi(s)\, ds \; ; \; \forall \varphi \in [a,b]$$

لدينا $C[a,b]$ تام و A يطبق $C[a,b]$ في نفسه

و A مستمر لنبرهن أن A^n مقلص :

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| = \left| \lambda \int_a^t K(t,s)\, [\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]\, ds \right|$$

$$\leqslant |\lambda| \int_a^t \underbrace{|K(t,s)|}_{\leqslant \max} \; \underbrace{|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|}_{\leqslant \max} ds \quad \ldots (*')$$

بما أن $K(t,s)$ معرفة ومستمرة في منطقة مغلقة ومحدودة فهي تملك قيمة عظمى ولتكن M .

$$M = \max_{a \leqslant t,s \leqslant b} |K(t,s)|$$

$$\Rightarrow |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leqslant |\lambda| M \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \int_a^t ds$$

$$= |\lambda| M\, d(\varphi_1, \varphi_2)\, (t-a) = |\lambda| M \frac{(t-a)}{1!}\, d(\varphi_1, \varphi_2) \quad \ldots (1)$$

من $(*')$:

$$\Rightarrow \begin{cases} |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leqslant |\lambda| M \displaystyle\int_a^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds & \ldots (*) \\[2ex] |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leqslant |\lambda| M\, d(\varphi_1, \varphi_2)\, \dfrac{t-a}{1!} & \ldots (**) \end{cases}$$

نستبدل في (*) كل φ_1 بـ $A\varphi_1$ و φ_2 بـ $A\varphi_2$:

$$|A^2\varphi_1(t)-A^2\varphi_2(t)| \leq |\lambda| M \int_a^t |A\varphi_1(s)-A\varphi_2(s)|\, ds$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 d(\varphi_1,\varphi_2) \int_a^t \frac{s-a}{1!}\, ds$$ "حسب (**)"

$$\leq |\lambda|^2 M^2 d(\varphi_1,\varphi_2) \frac{(t-a)^2}{2!} \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(b-a)^2}{2!} d(\varphi_1,\varphi_2) \quad \ldots(2)$$

وهكذا بالاستقراء نجد :

$$|A^n\varphi_1(t)-A^n\varphi_2(t)| \leq \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2) \; ; \; \forall\, a\leq t\leq b$$

$$\Rightarrow \max_{a\leq t\leq b} |A^n\varphi_1(t)-A^n\varphi_2(t)| \leq \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$d(A^n\varphi_1, A^n\varphi_2) \leq \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2)$$

وبالتالي يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون :

$$\frac{|\lambda^n| M^n (b-a)^n}{n!} < 1$$

ومنه A^n ضاغط

وحسب المبرهنة السابقة يوجد لـ A نقطة ثابتة وحيدة.

ومنه يوجد لمعادلة فولتيرا المفروضة حل وحيد.

الفضاءات القابلة للعد :

تعريف (1) : نقول عن الفضاء المتري X بأنه قابل للفصل إذا وجدت فيه مجموعة قابلة للعد كثيفة

من تعريف الكثافة نستطيع صياغة تعريفين آخرين لقابلية الفصل.

تعريف (2) : نقول عن الفضاء المتري X أنه قابل للفصل إذا وجدت متتالية (مجموعة قابلة للعد) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق الشرط التالي :

$$\forall x\in X \ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_{n_0}\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ ; \ d(x,x_{n_0})<\varepsilon$$

تعريف (3) : أو إذا وجدت متتالية (مجموعة قابلة للعد) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق الشرط التالي :

$$\forall x\in X \ \exists \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ ; \ x_{n_i}\xrightarrow[i\to\infty]{} x$$

أمثلة :

مثال (1) : الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$:

إن الفضاء $\mathbb{R}$ قابل للفصل لأن : فيه مجموعة الأعداد العادية Q قابلة للعد وكثيفة .

أي : $\bar{Q}=\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{R} \ \forall \varepsilon>0 \ \exists r\in Q \ ; \ d(x,r)<\varepsilon$$

$$|x-r|$$

كذلك :

$$\forall x\in R \ \exists r_n\in Q \ ; \ r_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

دورة مثال (2) : الفضاء الإقليدي E_n :

إن الفضاء الإقليدي E_n قابل للفصل لأن :

لتكن E_n^0 مجموعة جميع العناصر من الشكل $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ حيث :

$r_i\in Q$ لكل $1\le i\le n$

إن E_n^0 جزئية من E_n وقابلة للعد (لأن Q قابلة للعد) ولنبرهن أنها كثيفة .

$$\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in E_n \;;\; \forall \varepsilon > 0$$
$\downarrow$
$\mathbb{R}$

من أجل $\xi_i \in \mathbb{R}$ يوجد $r_i \in \mathbb{Q}$ بحيث :

$|\xi_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ لكل $1 \leq i \leq n$

فيتشكل العنصر :

$$x_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in E_n^\circ$$

$$d(x, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - r_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

إذاً E_n° قابلة للعد و كثيفة في E_n فالفضاء E_n قابل للفصل.

مثال (3) : الفضاء $C[0,1]$:

الفضاء $C[0,1]$ قابل للفصل ، لأن :

لتكن $C_0[0,1]$ مجموعة جميع كثيرات الحدود بالمعاملات العادية المعرفة على المجال $[0,1]$

واضح أن $C_0[0,1]$ قابلة للعد و جزئية من $C[0,1]$ ، ولنبرهن أنها كثيفة :

$$\forall x(t) \in C[0,1] \;;\; \forall \varepsilon > 0$$

حسب مبرهنة وايرشتراس :

من أجل كل تابع معرف ومستمر $x(t)$ على المجال $[0,1]$ يوجد كثير حدود بمعاملات حقيقية $p(t)$ معرف على المجال $[0,1]$ وبحيث :

$$d(x(t), p(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن أجل $p(t)$ الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية يوجد كثير حدود $p_0(t)$ ذو المعاملات عادية بحيث :

$$d(p(t), p_0(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x(t), p_0(t)) \overset{\text{متراجحة مثلثية}}{\leq} d(x(t), p(t)) + d(p(t), p_0(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذاً $C_0[0,1]$ قابلة للعد في $C_0[0,1]$ و كثيفة ومنه $C[0,1]$ قابل للفصل.

مثال (4): $\mathcal{L}^p[0,1]$:

إن الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ قابل للفصل، لأن:

$C_0[0,1]$ مجموعة كثيرات الحدود بالمعاملات العادية قابلة للعد وكثيفة في $\mathcal{L}^p[0,1]$ لأنه:

من أجل كل تابع $x(t) \in \mathcal{L}^p[0,1]$ ⇐ يكون $x(t)$ قابل للمكاملة من الدرجة p.

يكون مستمر اطلاقاً وكل تابع مستمر اطلاقاً توجد من أجله متتالية من التوابع المقيسة والمحدودة $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وسيطياً من الدرجة p إليه، ولتكن:

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t) & ; \quad |x(t)|\leq n \\ 0 & ; \quad |x(t)|>n \end{cases}$$

ومن أجل كل تابع مقيس ومحدود توجد من أجله متتالية من التوابع المستمرة متقاربة إليه وسيطياً من الدرجة p.

ونعلم أن $C_0[0,1]$ كثيفة في $C[0,1]$ ⇐ $C_0[0,1]$ كثيفة في $\mathcal{L}^p[0,1]$.

ومنه $\mathcal{L}^p[0,1]$ قابل للفصل.

مثال (5): S:

الفضاء S قابل للفصل، لأن:

لتكن E_n^0 مجموعة العناصر من الشكل:

$$(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$$

حيث n عدد طبيعي ما، و $r_i \in \mathbb{Q}$ لكل $1\leq i\leq n$

إن E_n^0 قابلة للعد وكثيفة في S، لأن:

$$\forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in S$$

لدينا: $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$

من أجل $\xi_i \in \mathbb{R}$ توجد متتالية $\{r_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ من $\mathbb{Q}$ متقاربة إليه:

$$r_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi_i \; ; \; \forall\, 1\leq i$$

لنشكل المتتالية التالية من عناصر $E_n^{(0)}$:

$$x_1 = (r_1^{(1)}, 0, 0, \dots)$$

$$x_2 = (r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_K = (r_1^{(K)}, r_2^{(K)}, \dots, r_K^{(K)}, 0, 0, \dots)$$

واضح أن $\{x_K\}_{K=1}^{\infty}$ متقاربة بالإحداثيات إلى x .

ونعلم أن التقارب بالإحداثيات في الفضاء S هو تقارب بالمسافة .

إذاً وجدنا متتالية من $E_n^{(0)}$ متقاربة بالمسافة إلى x في S .

إذاً S قابل للفصل .

مثال (6) : l_p :

إن الفضاء l_p قابل للفصل، لأن :

لتكن المجموعة E_n^0 مجموعة العناصر من الشكل :

$$(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$$

حيث n عدد طبيعي و $r_i \in Q$ لكل $1 \leq i \leq n$.

إن E_n^0 جزئية قابلة للعد ولنبرهن أنها كثيفة :

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p \quad ; \quad \forall \varepsilon > 0$$

بما أن $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$ فإن :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

أي السلسلة متقاربة فباقيها النوني يسعى للصفر، أي يوجد عدد طبيعي n مثبت بحيث :

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad \text{(باقي نوني)}$$

الآن من أجل $\xi_i \in \mathbb{R}$ لكل $1 \leq i \leq n$ يوجد :

$r_i \in Q$ بحيث :

$$|\xi_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n}} \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

لنشكل العنصر :

$E_n^{\circ} \ni x_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$

$$d(x, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(0)}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - r_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{2n} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\varepsilon^p \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon$$

$E_n^{(0)}$ قابلة للعد وكثيفة في l_p $\Leftrightarrow$ الفضاء l_p قابل للفصل.

جلسة /10/ :
2014 . 11 . 8

تمارين الفصل الأول :

8 هل المتتالية $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$ متقاربة في الفضاء المتري X إذا كان :

① $X = l_1$, $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ مرة}}, 0, 0, \dots)$

لدينا : $x_{2n} = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}, 0, 0, \dots)$

$$d(x_n, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| + \sum_{i=n+1}^{2n} \left|0 - \frac{1}{2n}\right| + \sum_{i=2n+1}^{\infty} |0 + 0|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}}_{\text{الحد الجزئي السابق}} = n \cdot \frac{1}{2n} + n \cdot \frac{1}{2n} = 1 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$$

فالمتتالية ليست أساسية في l_1 فهي ليست متقاربة .

② $X = l_2$, $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^2 \text{ مرة}}, 0, 0, \dots)$

لدينا : $x_{2n} = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}, 0, 0, \dots)$

$$d(x_n, x_{2n}) = \left(\sum_{i=1}^{n^2} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right|^2 + \sum_{i=n^2+1}^{4n^2} \left|0 - \frac{1}{2n}\right|^2 + \sum_{i=4n^2+1}^{\infty} |0 - 0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{4n^2} + \sum_{i=n^2+1}^{4n^2} \frac{1}{4n^2} + 0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(n^2 \cdot \frac{1}{4n^2} + 3n^2 \frac{1}{4n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \underset{\to \infty}{\not\to} 0$$

فالمتتالية ليست أساسية في l_2 فهي ليست متقاربة

KORANI

③ $X = \ell_3$; $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$

لدينا من أجل $p \geq 1$:

$$x_{n+p} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+p}, 0, 0, 0, \dots)$$

$$d(x_n, x_{n+p}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{i} \right|^3 + \sum_{i=n+1}^{n+p} \left| 0 - \frac{1}{i} \right|^3 + \sum_{i=n+p+1}^{\infty} |0 - 0|^3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i^3} \right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

إن السلسلة $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$ تمثل الباقي النوني للسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$ وهي سلسلة ريمان المتقاربة

$(\alpha = 3 > 1)$ فالباقي النوني يسعى للصفر عندما $n \to \infty$ أي:

$$d(x_n, x_{n+p}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

فالمتتالية x_n أساسية في ℓ_3 و ℓ_3 فضاء تام فهي متقاربة.

$\boxed{13}$ برهن أن متتالية الكسور المستمرة x_n متقاربة وأوجد نهايتها.

$$2, \; 2 + \frac{1}{2}, \; 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \; \dots$$

الحل: لنحاول برهان التقارب في إيجاد النهاية باستخدام مبدأ التطبيقات الضاغطة لدينا:

$$x_1 = 2, \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

ولدينا: $2 \leq x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

لنأخذ الفضاء $X = [2, \frac{5}{2}] \subseteq \mathbb{R}$

لنأخذ المؤثر $f(x)$ حيث : $f : [2, \frac{5}{2}] \rightarrow [2, \frac{5}{2}]$ حيث :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

لنبرهن أن $f(x)$ ضاغط :

لدينا $X = [2, \frac{5}{2}]$ مضاء تام (مجموعة مغلقة محتواة في IR التام)

و f تطبيق $[2, \frac{5}{2}]$ في نفسه :

$$\forall x, y \in [2, \frac{5}{2}] \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x} \quad , \quad f(y) = 2 + \frac{1}{y}$$

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| 2 + \frac{1}{x} - \left(2 + \frac{1}{y}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - x}{x \cdot y} \right| = |y - x| \frac{1}{x \cdot y}$$

نعوض القيمة $2 \le x \le \frac{5}{2}$ ونأخذ في المقام نعوض 2 (أصغر قيمة) [illegible] $\frac{5}{2}$

$$= \frac{1}{x \cdot y} d(x, y) \leq \frac{1}{4} d(x, y)$$

واضح $1 > \alpha = \frac{1}{4} > 0$ فالمؤثر f ضاغط.

وحسب مبرهنة النقطة الثابتة يوجد للمعادلة $f(x) = x$ حل وحيد

وإن المتتالية المفروضة هي متتالية التقريبات المتتالية للمؤثر f .

(الآن نقوم بالتقريبات المتتالية للمؤثر) ($x_1 = \frac{5}{2}$ [illegible]) [illegible]

$$f(x) = x \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-1)(1) = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1^* = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in [2, \frac{5}{2}]$$

$$x_2^* = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \notin [2, \frac{5}{2}] \quad \text{مرفوض}$$

إذاً $x^* = 1 + \sqrt{2}$ هي النقطة الثابتة للمؤثر f وهي ذاتها نهاية المتتالية المفروضة

$x_1 = 2 \quad x_2 = f(x_1) = f(2) = 2 + \frac{1}{2} \quad x_3 = f(x_2) = f(2 + \frac{1}{2})$ [illegible]

$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

سؤال دورة: ليكن $X=[2,\infty)$ وليكن A مؤثراً معرفاً بالعلاقة: $Ax = 2+\frac{1}{x}$

برهن أن المؤثر A ضاغط وأوجد نقطته الثابتة.

الحل: "نفس حل التمرين السابق"

$Ax=\cos x$

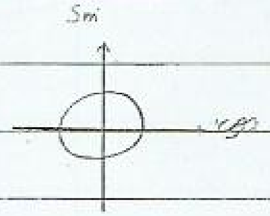
تمرين دورة: ليكن $A:\cos:[0,1]\to[0,1]$ ولتكن $d(x,y)=|x-y|$

المسافة المعرفة على المجال $[0,1]$ برهن أن A مؤثر ضاغط.

الحل:

$$\forall x,y\in[0,1] \Rightarrow Ax=\cos x\ ,\ Ay=\cos y$$

$$d(Ax,Ay)=|Ax-Ay|=|\cos x-\cos y| = \left|-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right|$$



$$\le 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|\sin 1$$

$$=\sin 1\ d(x,y)$$

$\sin x$

بما أن $0<\alpha=\sin 1<1$ فالمؤثر ضاغط.

$0<x\le 1\le\frac{\pi}{2}$

$\pi = 3$

$1\le\frac{\pi}{2}$

$\sin 1\le\sin\frac{\pi}{2}$

sin متزايد في الربع الأول

تمرين: ليكن $A:\sin:[0,1]\to[0,1]$ ولتكن المسافة $d(x,y)=|x-y|$ هل A ضاغط.

الحل:

إن A غير ضاغط.

لنفرض جدلاً أن A ضاغط، إذاً توجد $0<\alpha<1$

بحيث: $d(Ax,Ay)\le\alpha\, d(x,y)\ ;\ \forall x,y\in[0,1]$

$$\Rightarrow |Ax-Ay|\le\alpha|x-y|$$

$$\Rightarrow |\sin x-\sin y|\le\alpha|x-y|\ ;\ \forall x,y\in[0,1]$$

في حالة خاصة: $y=0\ ,\ x\ne 0$

$$\Rightarrow |\sin x|\le\alpha|x| \Rightarrow \frac{\sin x}{x}\le\alpha\ ;\ \forall\ 0<x\le 1$$

بأخذ النهاية عندما $x \to 0$ نجد: $1 \leq \alpha$

وهذا تناقض مع كون $0 < \alpha < 1$. إذاً A مؤثر غير ضاغط .

سؤال دورة: أحسب المسافة بين التابعين $x(t)$, $y(t)$ في كل من الحالات التالية:

① $x(t) = 0 , y(t) = t e^{-t} \quad ; \quad x, y \in [0, 2]$

$$d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 2} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 2} |0 - t e^{-t}| = \max_{0 \leq t \leq 2} |t e^{-t}|$$

لنوجد النقاط التي تعدم المشتق للتابع $f(t) = t e^{-t}$:

$$f'(t) = 0 \Rightarrow e^{-t} - t e^{-t} = 0 \Rightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow |0| = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \Rightarrow |2 e^{-2}| = \frac{2}{e^2} \\ t = 1 \Rightarrow |1 . e^{-1}| = \underset{(e)}{\frac{1}{e}} = \underset{«المقام»}{\frac{e}{e^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = \frac{1}{e}$$

② $x = 5t^2 , y(t) = t + 1 \quad ; \quad x, y \in C[0, 1]$

$$d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |5t^2 - t - 1|$$

لنوجد النقاط التي تعدم مشتق التابع:

$$f(t) = 5t^2 - t - 1$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 10t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow |5(0)^2 - (0) - 1| = 1 \\ t = 1 \Rightarrow |5(1)^2 - (1) - 1| = 3 \\ t = \frac{1}{10} \Rightarrow |5(\frac{1}{10})^2 - (\frac{1}{10}) - 1| = \frac{105}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) = 3$$

(3) $x(t)=t^2 \quad , y(t)=t^5 \quad ; \quad x,y \in C[0,1]$

$$d(x,y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|=\max_{0\leq t\leq 1}|t^2-t^5|$$

$f(t)=t^2-t^5$ لنوجد النقاط التي تعدم المشتق للتابع

$f'(t)=0 \Rightarrow 2t-5t^4=0 \Rightarrow t(2-5t^3)=0$

إما $t=0$

أو $2=5t^3 \Rightarrow t^3=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t=0 \Rightarrow |0|=0$

$t=1 \Rightarrow |1-1|=0$

$t=1.34 \Rightarrow$

(4) $x(t)=t^2 \quad , y(t)=t \quad ; \quad x,y \in C[0,1]$

$$d(x,y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|=\max_{0\leq t\leq 1}|t^2-t|$$

$f(t)=t^2-t$ لنوجد النقاط التي تعدم المشتق للتابع

$f'(t)=0 \Rightarrow 2t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t=0 \Rightarrow |0-0|=0 \\ t=1 \Rightarrow |1-1|=0 \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4} \end{array}\right\} d(x,y)=\frac{1}{4}$$

(5) $x(t)=\sin\pi t \quad , \quad y(t)=\cos\pi t \quad ; \quad x,y\in C[0,1]$

$$d(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)| = \max_{0\le t\le 1}|\sin\pi t-\cos\pi t|$$

$$=\max_{0\le t\le 1}\left|\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\pi t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\pi t\right)\right| = \sqrt{2}\max_{0\le t\le 1}\left|\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

لنوجد النقاط التي تعدم مشتق التابع :

$$f(t)=\sqrt{2}\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(t)=0 \Rightarrow \pi\sqrt{2}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow \cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\pi t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{4}+k$$

$k=0 \Rightarrow t=\frac{3}{4}\in[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=1 \\ t=1 \Rightarrow \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|=1 \\ t=\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y)=\sqrt{2}$$

جلسة /11/ :
2014 - 11 - 9

الموضوع

تمرين دورة : لتكن X مجموعة ما ولتكن ρ مسافة على X لنعرف التابع له بالشكل :

$$d(x,y) = \ln[1+\rho(x,y)]$$

برهن أن d مسافة على X . ثم برهن أنه إذا كان X تام بالنسبة للمسافة ρ فهو تام بالنسبة للمسافة d .

دورة فصل

الحل :

$$(1)\quad d(x,x) = \ln[1+\underbrace{\rho(x,x)}_{\rho \text{ مسافة}}] = \ln[1+0] = 0$$

$$(2)\quad d(x,y) = 0 \Rightarrow \ln[1+\rho(x,y)] = 0 \Rightarrow 1+\rho(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho(x,y) = 0}_{\rho \text{ مسافة}} \Rightarrow x = y$$

$$(3)\quad d(x,y) = \ln[1+\underbrace{\rho(x,y)}_{\rho \text{ مسافة}}] = \ln[1+\rho(y,x)] = d(y,x)$$

$$(4)\quad d(x,y) = \ln[1+\rho(x,y)] \underset{\uparrow}{\leqslant} \ln[1+\rho(x,z)+\rho(z,y)]$$

ρ مسافة والتابع اللوغاريتمي متزايد

"اللوغاريتم تابع متزايد" $$\underset{*}{\leqslant} \ln[1+\rho(x,z)+\rho(z,y)+\rho(x,z)\rho(z,y)]$$

$$= \ln[(1+\rho(x,z))(1+\rho(z,y))]$$

$$= \ln[1+\rho(x,z)] + \ln[1+\rho(z,y)]$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

لكل $x,y,z \in X$ ، إذاً d مسافة على X .

* لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر X ولنفرض أنها أساسية بالنسبة للمسافة d ، أي :

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$$

ولنبرهن أنها متقاربة إلى عنصر $x_0 \in X$ بالنسبة للمسافة d

$$0 = \lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = \lim_{n,m\to\infty} \ln[1+\rho(x_n,x_m)]$$

"اللوغاريتم تابع مستمر" $= \ln\left[1+\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\right]$

$$\Rightarrow 1 = 1+\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m) \Rightarrow \lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)=0$$

إذاً $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة للمسافة ρ و X تام بالنسبة للمسافة ρ (فرضاً)

فهي متقاربة إلى عنصر وليكن $x_0 \in X$ بالنسبة لـ ρ، أي:

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\rho(x_n,x_0)\right]$$

$$=\ln\left[1+\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)\right]=\ln[1+0]=0$$

أي $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 بالنسبة للمسافة d.

ومنه X تام بالنسبة لـ d.

تمرين دورة: هل تؤول مجموعة الأعداد الحقيقية إلى فضاء متري إذا عرفنا المسافة عليها بالشكل:

$$\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}\quad;\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$$

الحل: علينا لنتأكد من شروط المسافة:

(1) $\rho(x,x)=\sqrt{|x-x|}=\sqrt{|0|}=0$

(2) $\rho(x,y)=0 \Rightarrow \sqrt{|x-y|}=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

(3) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}=\sqrt{|y-x|}=\rho(y,x)$

$(4)\ \rho(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|(x-z)+(z-y)|}$

"تابع الجذر متزايد" $\leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} = \sqrt{a+b} \leq$

يتم البرهان إذا أثبتنا أن :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad ; \forall\, a,b \geq 0$$

لنثبت $b \geq 0$ ولنعرف التابع :

$$f(a) = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}$$

يتم البرهان إذا أثبتنا أن :

$$f(a) \geq 0 \quad ; \forall a \geq 0$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a+b}} > 0 \quad ; \forall\, a \geq 0$$

$$\left(0 \leq \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftarrow \sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}\right)$$

$$a+b \geq a$$

إذاً $f(a)$ تابع متزايد و $\quad f(0) = \sqrt{0} + \sqrt{b} - \sqrt{0+b} = 0$

$0 \leq a$ و f متزايد $\Rightarrow 0 = f(0) \leq f(a)$

$$\Rightarrow f(a) \geq 0 \quad ; \forall\, a \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad ; \forall\, a,b \geq 0$$

$f'(a) > 0$

$f(a) \geq 0$

$a \geq 0$

متزايد

$0 = f(0) \leq f(a)$

متزايد

وهو المطلوب ... (إذاً ρ مسافة) .

تمرين دورة : هل تؤول مجموعة الأعداد الحقيقية إلى فضاء متري إذا عرفنا المسافة عليها بالشكل :

$$\rho(x,y) = |x-y|^{\alpha} \quad ; 0 < \alpha \leq 1$$

الحل : لنتأكد من شروط المسافة :

$(1)\ \rho(x,x) = |x-x|^{\alpha} = |0|^{\alpha} = 0$

(2) $\rho(x,y)=0 \Rightarrow |x-y|^{\alpha}=0 \overset{\alpha\geqslant 0}{\Rightarrow} x-y=0 \Rightarrow x=y$

(3) $\rho(x,y)=|x-y|^{\alpha}=|y-x|^{\alpha}=\rho(y,x)$

(4) $\rho(x,y)=|x-y|^{\alpha}=|(x-z)+(z-y)|^{\alpha}$

$$\leqslant \left(|x-z|+|z-y|\right)^{\alpha}=(a+b)^{\alpha}\leqslant$$

لأن التابع $f(x)=x^{\alpha}$; $\forall x\geqslant 0$ متزايد .

يتم البرهان إذا أثبتنا أن :

$$(a+b)^{\alpha}\leqslant a^{\alpha}+b^{\alpha} \quad ; \quad \forall a,b\geqslant 0$$

لنثبت أن $b\geqslant 0$ ولنعرف التابع :

$$f(a)=a^{\alpha}+b^{\alpha}-(a+b)^{\alpha} \quad ; \quad \forall a\geqslant 0$$

يتم البرهان إذا أثبتنا أن :

$$f(a)\geqslant 0 \quad ; \quad \forall a\geqslant 0$$

$$f'(a)=\alpha a^{\alpha-1}-\alpha(a+b)^{\alpha-1}\geqslant 0 \quad ; \quad \forall a\geqslant 0$$

(لأن التابع $g(x)=x^{\alpha-1}$ متناقص)

فالتابع $f(a)$ متزايد ولدينا :

$$f(0)=0^{\alpha}+b^{\alpha}-(0+b)^{\alpha}=0$$

$0\leqslant a$ و $f(a)$ متزايد $\Rightarrow 0\leqslant f(a) \Rightarrow$

$$0\leqslant a^{\alpha}+b^{\alpha}-(a+b)^{\alpha} \Rightarrow (a+b)^{\alpha}\leqslant a^{\alpha}+b^{\alpha} \quad ; \quad \forall a,b\geqslant 0$$

وهو المطلوب (إذاً ρ مسافة).

تمرين: أحسب المسافة بين التابعين t^3 , t^5 في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$

الحل:

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |t^3 - t^5|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^1 t^{3p}(1-t^2)^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

لنجري تغيير بالمتحول وذلك بفرض: $t^2 = u$

$$\Rightarrow t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \quad ; \quad t: 0 \to 1 \Rightarrow u: 0 \to 1$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3p}{2}} (1-u)^p \, u^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 u^{\frac{3p-1}{2}} (1-u)^p \, du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\beta\left(\frac{3p-1}{2} + 1 , p-1\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث:

$$\begin{cases} \beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} \, du \\ \Gamma(p) = \int_0^1 u^{p-1} e^{-u} \, du \\ \beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3p+1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{5p+3}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

* واحسبها عندما $p = 2$:

$$d(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{13}{2})}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Rightarrow d(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2!}{\frac{693}{8}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

تمرين: لنتكن $X = \{ x \in \mathbb{R} \; ; \; x \geq 1 \}$ $(X = [1, \infty))$

و T معرف بالشكل:

$$Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

هل T مؤثر ضاغط

الحل:

إن X فضاء تام، و T تطبيق X في نفسه ولدينا:

$$\forall x, y \in X \Rightarrow Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \; ; \; Ty = \frac{y}{2} + \frac{1}{y}$$

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right|$$

$$= \left| \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy} \right| = \left| \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{xy} \right|$$

$$= |x-y| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \leq \frac{1}{2} |x-y|$$

أعظم قيمة له $1 \leq x, y$

بما أن $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ فالمؤثر T ضاغط

* أوجد نقطته الثابتة:

هي الحل الوحيد للمعادلة $Tx = x$.

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 1 = x^2$$

$$\frac{1}{2} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \; , \; x_2 = -\sqrt{2} \notin [1, \infty]$$

فالنقطة الثابتة هي:

$$x^* = \sqrt{2} \in [1, \infty)$$

الموضوع

دورية

تمرين دورة : لتكن المؤثر $A: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة :

(مؤثر) $Ax(t)=t^2+\lambda\int_0^t x(s)\,ds$

ما هي قيم λ التي من أجلها يكون المؤثر A ضاغطاً ثم أوجد بطريقة التقريب المتتالي حل المعادلة :

(معادلة) $x(t)=t^2+\lambda\int_0^t x(s)\,ds$

الحل :

$$\forall x(t), y(t) \in C[0,1] \Rightarrow d(Ax,Ay)=\max_{0\le t\le 1}|Ax(t)-Ay(t)|$$

$$=\max_{0\le t\le 1}\left|\lambda\int_0^t [x(s)-y(s)]\,ds\right|$$

$$\le \max_{0\le t\le 1}|\lambda|\int_0^t \underbrace{|x(s)-y(s)|}_{\le \max}\,ds$$

$$\le \max_{0\le s\le 1}|x(s)-y(s)|\,|\lambda|\underbrace{\max_{0\le t\le 1}\int_0^t ds}_{=1}$$

$$=|\lambda|\,d(x,y)$$

حتى يكون A مؤثر ضاغط يجب أن تكون : $\alpha=|\lambda|<1$

نضع : $x_0(t)=0$

$$x_1(t)=Ax_0(t)=t^2$$

$$x_2(t)=Ax_1(t)=t^2+\lambda\int_0^t s^2\,ds=t^2+\lambda\frac{t^3}{3}=\frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}\right)$$

$$x_3(t)=Ax_2(t)=t^2+\lambda\int_0^t\left(s^2+\frac{\lambda s^3}{3}\right)ds$$

$$=t^2+\lambda\frac{t^3}{3}+\frac{\lambda^2t^4}{3\cdot 4}=\frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\frac{\lambda^4t^4}{4!}\right)$$

بالاستقراء نجد :

$$x_n=\frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\dots+\frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$\Rightarrow x^*=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda t}-x-1\right)$$

تمرين دورة: لتكن a,b,c أعداد حقيقية غير سالبة ومحققة للعلاقة: $a \leq b+c$
برهن أن:

$$\frac{a}{1+a} \overset{①}{\leq} \frac{b+c}{1+b+c} \overset{②}{\leq} \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

الحل: لنعرف التابع المساعد:

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \quad ; \ t \geq 0$$

$$f'(t) = \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \quad ; \ \forall t \geq 0$$

فالتابع f متزايد ولدينا فرضاً:

$$a \leq b+c$$

$$\Rightarrow f(a) \leq f(b+c)$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

تمرين دورة: لتكن $\mathbb{R}^2$ مجموعة نقاط المستوي ولنعرف المسافة بين نقطتين $M(x,y)$, $N(u,v)$ بالعلاقة:

$$D(M,N) = |x-u| + |y-v|$$

إذا كان A مؤثراً معرفاً بالمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وكانت عناصرها محققة بالعلاقة $\max\{|a|+|c|, |b|+|d|\} < 1$ فبرهن أن A منكمش.

[illegible]

الحل:

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{(2,1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}_{(2,1)}$$

$$AN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix}$$

$$d(AM, AN) = |ax+by-au-bv| + |cx+dy-cu-dv|$$

$$= |a(x-u)+b(y-v)| + |c(x-u)+d(y-v)|$$

$$\leqslant |a|\,|x-u| + |b|\,|y-v| + |c|\,|x-u| + |d|\,|y-v|$$

$$= (|a|+|c|)\,|x-u| + (|b|+|d|)\,|y-v|$$

$$\overset{*}{\leqslant} \alpha|x-u| + \alpha|y-v|$$

$$= \alpha\left(|x-u|+|y-v|\right) = \alpha\, d(M,N)$$

حيث :

$0 < \alpha = \max\{|a|+|c|,\ |b|+|d|\} < 1$ "فرضاً".

فالمؤثر A ضاغط

جلسة /12/ م
2014 - 11 - 14

الفصل الثاني :

الفضاءات الخطية المنتهية

تعريف (الفضاء الخطي) :

لتكن E مجموعة ذات طبيعة ما، نقول عن E أنها فضاء خطي (فضاء شعاعي) إذا كان معرف عليها عمليتين عملية داخلية (+) وعملية خارجية بكمية سلمية (.) حيث :

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

① $(E,+)$ زمرة تبديلية ، أي :

a) $(x+y)+z = x+(y+z)$; $\forall x,y,z \in E$

b) يوجد حيادي ولنرمز له بـ θ حيث : $\forall x \in E$ $x+\theta = \theta + x = x$

c) لكل عنصر $x \in E$ نظير ولنرمز له بـ $-x$ حيث : $x+(-x) = (-x)+x = \theta$

d) $x+y = y+x$; $\forall x,y \in E$

② E مع عملية الضرب (.) تحقق الشروط التالية :

1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

4) $1.x = x$

أمثلة :

① الفضاء الخطي E_n :

$\forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in E_n$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$

$\lambda . x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$

$\theta = (0, 0, \ldots, 0)$

② الفضاء الخطي $C[0,1]$:

$$\forall x(t), y(t) \in C[0,1] \Rightarrow (x \underset{\text{في } C[0,1]}{+} y)(t) = x(t) \underset{\text{في } \mathbb{R}}{+} y(t) \quad ; \quad \forall t \in [0,1]$$

$$(\lambda \underset{\text{في } C[0,1]}{.} x)(t) = \lambda \underset{\text{في } \mathbb{R}}{.} (x(t)) \quad ; \quad \forall t \in [0,1] \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{تابع صفري}}{0} = x_0 \qquad x_0(t) = 0 \quad ; \quad \forall t \in [0,1]$$

$x(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$y(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$

تعريف (الاستقلال الخطي) :

ليكن E فضاء خطي، ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر من E .

نقول عن هذه العناصر أنها مستقلة خطياً إذا أدت العلاقة :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \underset{\text{صفر الفضاء}}{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

وفيما عدا ذلك تكون مرتبطة خطياً .

أي إذا وجد λ_i واحدة على الأقل بحيث $\lambda_i \neq 0$ وبحيث :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

مثال : برهن أن مجموعة التوابع :

$$1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$$

مستقلة خطياً من الفضاء $C[0,1]$.

الحل :

لنفرض جدلاً أن التوابع المعطاة مرتبطة خطياً، إذاً يوجد α_i واحدة على الأقل بحيث $\alpha_i \neq 0$ و :

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t^2) + \dots + \alpha_n(t^{n-1}) = 0 \quad ; \quad \forall t \in [0,1]$$

من جهة أخرى وحسب العبارة السابقة فإن المساواة يجب أن تتحقق من أجل جميع نقاط المجال $[0,1]$

① (يوجد عدد لانهائي من النقاط التي تحقق المساواة)

ومن جهة ثانية إن المساواة السابقة تمثل معادلة من الدرجة $(n-1)$ ونعلم أن للمعادلة $(n-1)$ حل حقيقي على الأكثر ، أي توجد $(n-1)$ نقطة على الأكثر تحقق المساواة السابقة.

وهذا تناقض (وبالتالي : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$)

وبالتالي التوابع المعطاة مستقلة خطياً في الفضاء $C[0,1]$.

تعريف (المتنوعة الخطية) :

ليكن E فضاء خطي ما ، ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر من E

لتشكل مجموعة جميع التراكيب الخطية الممكنة من الشكل :

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ ولنرمز لها بـ $\mathcal{L}_0$.

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \; ; \; \alpha_i \in \mathbb{R} \; ; \; 1 \le i \le n \right\}$$

* سنبرهن أن أي تركيب خطي لعناصر من $\mathcal{L}_0$ هو عنصر من $\mathcal{L}_0$:

$$\forall y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathcal{L}_0 \; , \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(i)} \cdot x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(i)} \cdot x_j \right)$$

$$\text{"توزيع"} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \, \alpha_j^{(i)} \, x_j$$

$$\text{"تجميع"} = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \, \alpha_j^{(i)} \right) x_j \right) \in \mathcal{L}_0$$

وهو المطلوب

ملاحظة : علينا إذا طلب أن نبرهن أن $\mathcal{L}_0$ هي متنوعة خطية نقوم بما يلي :

1) $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathcal{L}_0$

2) $\forall x \in \mathcal{L}_0 , \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{L}_0$ مقترحة $\mathcal{L}_0$

تعريف (التنظيم) :

ليكن E فضاء خطي، لنربط كل عنصر x من E بعدد حقيقي موجب $\|x\|$ بحيث تتحقق الشروط :

1) $\|x\| \geq 0 \ , \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ ; \ \forall x, y \in E$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ ; \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$

عندها نسمي $(E, \|.\|)$ فضاء خطي منظم

سؤال (دورة) : برهن أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري .

الحل :

جديد $d(x,y) = \|\underbrace{x-y}_{x+(-y)}\|$ أصلي $; \ \forall x, y \in E$

لنبرهن أن d مسافة على E :

1) $d(x,x) = \|x-x\| = \|\theta\| = 0$.

2) $d(x,y) = 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x-y = \theta \Rightarrow x = y$

3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \, \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$

$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \ ; \ \forall x,y,z \in E$

$= d(x,z) + d(z,y)$ إذاً d مسافة .

ومنه (E, d) فضاء متري .

ملاحظة : ندعو المسافة $d(x,y) = \|x-y\|$ بالمسافة المولدة من نظيم .

* لنبرهن صحة المتراجحة التالية : $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \quad \ldots (I)$

بمبادلة المواضع، أي بدل x نضع y وبدل y نضع x فنجد:

$$\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$$

$$\Rightarrow \|x\|-\|y\| \geq -\|x-y\| \dots (II)$$

من (I) و(II) نستنتج:

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

سؤال دورة (1): برهن أن المنظم تابع مستمر بالنسبة لمتغيره.

الحل:

لدينا:
$$\|.\| : E \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

لتكن $x \in E$ ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x في E.

لدينا $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$، لدينا:

$$\big|\|x_n\|-\|x\|\big| \leq \|x_n-x\| = d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

متراجحة سابقة

أي: $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$

ومنه المنظم تابع مستمر بالنسبة لمتغيره.

ملاحظة: * مفهوم التقارب في الفضاء المنظم E هو:

$$x_n \to x \Rightarrow \|x_n-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

سؤال (2): برهن استمرارية عملية الجمع في الفضاء الخطي المنظم بالنسبة لمتغيريه.

الحل:

لدينا:
$$+ : E\times E \to E$$
$$(x,y) \to x+y$$

لتكن (x,y) عنصر من $E\times E$ ولتكن $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى (x,y)، أي:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \& \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$$

ولنبرهن أن:

$$\underbrace{x_n+y_n}_{E} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{x+y}_{E}$$

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| = \|x_n-x+y_n-y\| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n-y\|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي:

$$x_n+y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x+y$$

بالتالي عملية الجمع مستمرة بالنسبة لمتغيريها.

سؤال (3): برهن استمرار عملية الضرب بالنسبة لمتغيريها.

الحل:

لدينا:

$$\mathbb{R}\times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$$

لتكن $x\in E$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$ ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر E متقاربة إلى x.

ولتكن $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $\mathbb{R}$ متقاربة إلى λ، أي:

$$\|x_n-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad , \quad |\lambda_n-\lambda| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولنبرهن أن:

$$\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda . x$$

$$\|\lambda_n x_n-\lambda x\| = \|\lambda_n x_n-\lambda_n x+\lambda_n x-\lambda x\|$$
$$= \|\lambda_n(x_n-x)+(\lambda_n-\lambda)x\|$$
$$\leqslant |\lambda_n|\,\underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0}+\underbrace{|\lambda_n-\lambda|}_{\to 0}\,\underbrace{\|x\|}_{\text{ثابت}}$$

لدينا $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متقاربة فهي محدودة أي يوجد عدد $M>0$ بحيث:

$$|\lambda_n| \leqslant M \quad ; \quad \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leqslant M \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه:

$$\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$$

فعملية الجداء مستمرة بالنسبة لمتغيرين.

خلاصة 13/

2014 - 11 - 15

الموضوع

توطئة : إذا كان لدينا الفضاء المتري (E,d) وكانت E مع المسافة d تحقق الشرطين:

(1) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad ; \quad \forall x,y,z \in E$

(2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y) \quad ; \quad \forall x,y \in E \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

عندها تكون المسافة d مولدة من نظيم

البرهان :

(1) $d(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\| = \|x-y\| = d(x,y)$

(2) $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\|$

"خواص النظيم" $= |\alpha|\, \|x-y\| = |\alpha|\, d(x,y)$

مثال : (فضاء غير منظم) S :

أخذنا الفضاء S كمثال عن فضاء قابل للتمتير وكانت عبارة المسافة فيه :

$$\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \ , \ y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \Rightarrow d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1+|\xi_i - \eta_i|}$$

وكان مفهوم التقارب فيه هو تقارب بالإحداثيات.

نفرض جدلاً إمكانية تعريف نظيم على S

لتكن المتتالية :

$$e_n = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1 \text{ مرة}}, \overset{i=n}{1}, 0,0,\dots) \neq \theta$$ (حيث θ هي المتتالية الصفرية)

$$\Rightarrow \|e_n\| \neq 0 \Rightarrow$$

$$x_n = \frac{1}{\|e_n\|} e_n = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1 \text{ مرة}}, \frac{1}{\|e_n\|}, 0,0,0,\dots) \quad ; \quad n \geq 1$$

لنبرهن أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متقاربة إلى θ بمفهوم النظيم :

$$\|x_n - \theta\| = \left\| \frac{1}{\|e_n\|} e_n \right\| = \frac{1}{\|e_n\|} \cdot \|e_n\| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

ولكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى θ بمفهوم المسافة في S لأن :

$$d(x_n, \theta) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{2^n} \frac{\left|\frac{1}{\|e_n\|} - 0\right|}{1 + \left|\frac{1}{\|e_n\|} - 0\right|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

وهذا تناقض . إذاً لا يمكن تعريف نظيم على X بحيث يتطابق مفهوما النهاية (بالنظيم والمسافة)

تعريف (فضاء باناخ) :

فضاء باناخ هو فضاء خطي منظم وتام . (أو فضاء من النمط B) .

أمثلة :

① الفضاء $\mathbb{R}$: الفضاء $\mathbb{R}$ هو فضاء باناخ .

$$\|x\| = d(x, \theta) = |x| \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

② الفضاء الإقليدي E_n : الفضاء E_n هو فضاء باناخ .

$$\|x\| = d(x, \theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{n} \in E_n$$

③ الفضاء $C[0,1]$: الفضاء $C[0,1]$ هو فضاء باناخ .

دورة

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \quad ; \forall x(t) \in C[0,1]$$

④ الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$: الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ هو فضاء باناخ

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \forall x(t) \in \mathcal{L}^p[0,1]$$

⑤ الفضاء ℓ_p : الفضاء ℓ_p هو فضاء باناخ

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$$

⑥ الفضاء $C^{(k)}[0,1]$:

هي مجموعة جميع التوابع المعرفة على المجال $[0,1]$ والقابلة للاشتقاق (k) مرة ومشتقاتها مستمرة

تعطى عبارة النظيم في $C^{(k)}[0,1]$ بالشكل:

$$\|x\| = \max\{\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|x'(t)|, \ldots, \max_{0\leq t\leq 1}|x^{(k)}(t)|\}$$

أو بالشكل:

$$\|x\| = \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)| + \max_{0\leq t\leq 1}|x'(t)| + \ldots + \max_{0\leq t\leq 1}|x^{(k)}(t)|$$

ملاحظة: إذا طُلبَ أن نبرهن أن فضاءً ما هو فضاء باناخ نقوم بما يلي :

(1) نبرهن شروط النظيم

(2) نبرهن أنه تام (كما كان نبرهن في المسافة ولكن $(d(x,y) = \|x-y\|$

تعاريف : ليكن E فضاء خطي منظم.

① الكرة المفتوحة : $S(x_0,r) = \{x\in E ; \|x-x_0\| < r\}$

② الكرة المغلقة : $\bar{S}(x_0,r) = \{x\in E ; \|x-x_0\| \leq r\}$

③ المستقيم : ليكن E فضاء خطي منظم، وليكن x_0 عنصر مثبت من E نسمي المجموعة:

$$\{x\in E ; x = t x_0 ; t\in \mathbb{R}\}$$

مستقيم مولد بالعنصر x_0.

④ القطعة المستقيمة : ليكن E فضاء خطي منظم، وليكن x_0, y_0 عنصران مثبتان من E نسمي المجموعة :

$$\{x\in E ; x = (1-t)x_0 + t y_0 ; 0\leq t\leq 1\}$$

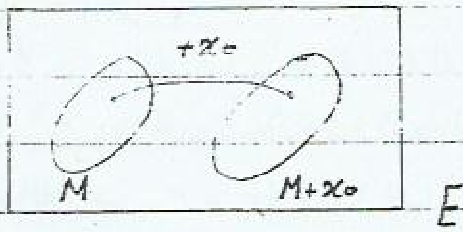
قطعة مستقيمة بدايتها x_0 ونهايتها y_0. (قطعة مستقيمة واصلة بين x_0, y_0)

(5) الانسحابات :

ليكن E فضاء خطي منظم ، ولتكن $M \subseteq E$ مجموعة ما و x_0 عنصر مثبت من E . نسمي المجموعة :

$$\{x \in E ; x = x' + x_0 ; x' \in M\}$$

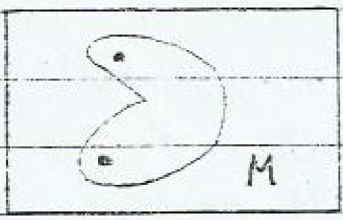
ونرمز لها ب $M + x_0$.



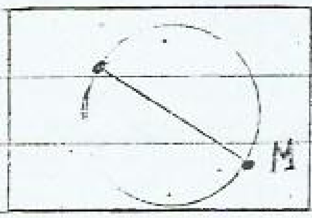
دورة

تعريف (المجموعة المحدبة) :

ليكن E فضاء خطي منظم ، ولتكن $M \subseteq E$ مجموعة جزئية من E نسمي M محدبة إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من M القطعة المستقيمة تنتمي جميع نقاطها إلى M .



E ليست محدبة



E محدبة

سؤال : دورة : برهن أن الكرة المفتوحة في الفضاء الخطي المنظم هي مجموعة محدبة .

الحل :

ليكن E فضاء خطي منظم ، ولتكن الكرة المفتوحة (المغلقة) $\bar{S}(x_0, r)$

$$\bar{S}(x_0, r) = \{x \in E ; \|x - x_0\| \leqslant r\}$$

$$\forall x, y \in \bar{S}(x_0, r) \Rightarrow \|x - x_0\| \leqslant r \ \& \ \|y - x_0\| \leqslant r$$

$z=(1-t)x+ty$; $0\le t\le 1$

$z\in M$

ولنشكل القطعة المستقيمة الواصلة بين x و y

$$z=(1-t)x+ty \quad ; \quad 0\le t\le 1$$

ولنبرهن أن $z\in \bar{S}(x_0,r)$.

$$\|z-x_0\| = \|(1-t)x+ty-x_0\|$$

$$= \|(1-t)x+\underline{tx_0}-\underline{tx_0}+\underline{ty}-\underline{x_0}\|$$

$$= \|(1-t)x-(1-t)x_0+t(y-x_0)\|$$

$$\le |1-t|\,\|x-x_0\|+t\,\|y-x_0\| \quad ; \quad 0\le t\le 1$$

$$\le (1-t)r+tr=r \Rightarrow z\in \bar{S}(x_0,r)$$

فالكرة المفتوحة $\bar{S}(x_0,r)$ مجموعة محدبة .

المغلقة

* كذلك علينا البرهان أن الكرة المغلقة محدبة أيضاً .

سؤال دورة : ليكن E فضاء خطي منظم ، ولتكن M مجموعة محدبة في E وليكن x_0 عنصر مثبت من E . برهن أن $M+x_0$ محدبة أيضاً .

الحل :

$$\forall x,y\in M+x_0 \Rightarrow x=x'+x_0,\; y=y'+y_0$$

حيث $x',y'\in M$.

ولنشكل القطعة المستقيمة الواصلة بين x , y .

$$z=(1-t)x+ty \quad ; \quad 0\le t\le 1$$

$$=(1-t)(x'+x_0)+t(y'+x_0)$$

$$=(1-t)x'+(1-t)x_0+ty'+tx_0$$

$$=\underbrace{(1-t)x'+ty'}_{\in M}+x_0 \in M+x_0$$

لأن $x',y' \Rightarrow M$ و M محدبة

ومنه $M+x_0$ محدبة

سؤال ورقة: ما هو شكل الواحدية $S(0,1)$ في $\mathbb{R}^2$ إذا كان:

$$x = (\xi_1, \xi_2)$$

(1) $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$

(2) $\|x\|_2 = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$

اقليدي (3) $\|x\|_3 = (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{\frac{1}{2}}$

(4) $\|x\|_4 = (|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4)^{\frac{1}{4}}$

الحل:

$$S=(0,1) = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| < 1\}$$

(1) $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$

$\Rightarrow |\xi_1| + |\xi_2| < 1$

نرسم الحدود هي: $|\xi_1| + |\xi_2| = 1$

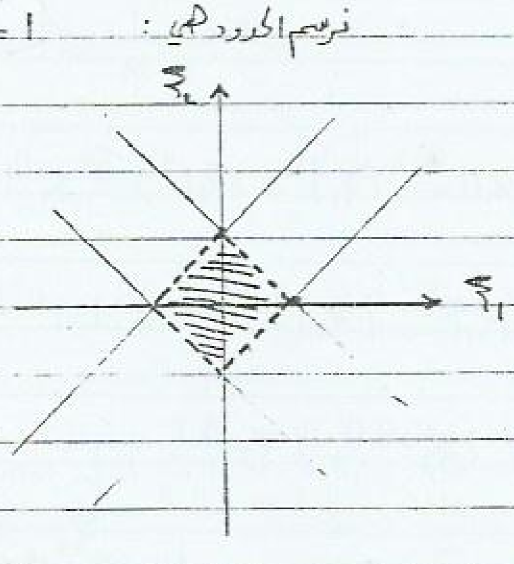
نميز أربع حالات:

$\xi_1 + \xi_2 = 1$

$-\xi_1 + \xi_2 = 1$

$\xi_1 - \xi_2 = 1$

$-\xi_1 - \xi_2 = 1$



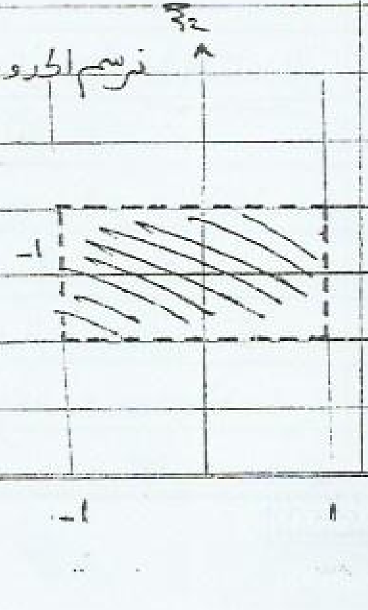
(2) $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} < 1$

نرسم الحدود هي: $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} = 1$

نميز الحالتين:

حالة (1): $|\xi_1| = 1 \quad \not\vdash \quad |\xi_2| \leq 1$

حالة (2): $|\xi_2| = 1 \quad \not\vdash \quad |\xi_2| \leq 1$

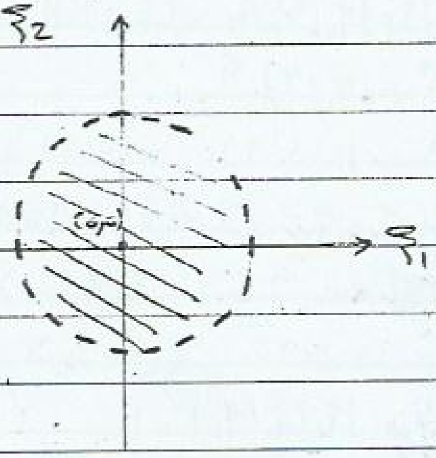


(3) $\|x\| = \left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1$

نرسم الحدود :

$$\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها 1 .



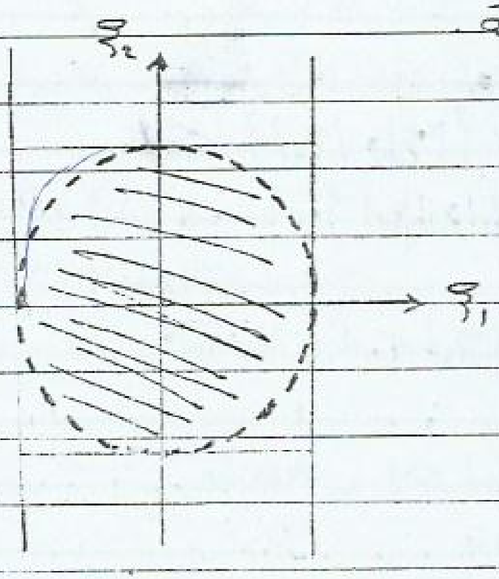
(4) $\|x\| = \left(|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} < 1$

نرسم الحدود :

$$\left(|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\rightarrow |\xi_1|^4 + |\xi_2|^4 = 1$$

كرة مفتوحة .



المادة: عرض التطبيق التكاملية :   جلسة / ١٩ / :
الموضوع   2014 - 11 - 16

تعريف: ليكن E فضاء خطي وليكن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ نظيمين معرفين على E .
نقول عن النظيم الثاني $\|.\|_2$ أنه يكافئ النظيم الأول $\|.\|_1$ إذا وجد ثابتان m, M بحيث تتحقق :

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad ; \forall x \in E$$

خصوص التعريف :

* إذا كان $\|.\|_2$ يكافئ $\|.\|_1$ أي $\|.\|_2 \sim \|.\|_1$ فإن :

$$\|.\|_1 \sim \|.\|_2$$

بما أن : $\|.\|_2 \sim \|.\|_1$ فإنه يوجد عددان $m, M > 0$ بحيث :

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad ; \forall x \in E$$

فإنه :

$$\Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2 \ \& \ \|x\|_1 \geq \frac{1}{M}\|x\|_2$$

$$\frac{1}{M}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2 \quad ; \forall x \in E$$

وهذا يعني أن : $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$

* نفرض $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ و $\|.\|_2 \sim \|.\|_3$ فإنه : $\|.\|_1 \sim \|.\|_3$

بما أن $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ فإنه يوجد ثابتان m, M بحيث

بما أن : $\|.\|_2 \sim \|.\|_3$ فإنه يوجد ثابتان K و k بحيث :

$$k\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq K\|x\|_2 \quad ; \forall x \in E$$

كذلك :

$$mk\|x\|_1 \leq k\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq K\|x\|_2 \leq KM\|x\|_1$$

كذلك :

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq C_2\|x\|_1 \quad ; \forall x \in E$$

حيث : $C_1 = mk \quad , \quad C_2 = KM$

هذا يعني أن $\|.\|_1 \sim \|.\|_3$

مما سبق نستنتج أن علاقة تكافؤ النظائم هي علاقة تكافؤ

ملاحظة: إذا كان $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$ فإننا ندعو التطيين $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ بأنهما متكافئين (الموافقة لتعريف السابق).

تعريف (خاضع للتظيم):

ليكن E فضاء خطي منظم، وليكن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ تطيين معرفين على E.
نقول عن $\|.\|_2$ أنه خاضع للتظيم الأول $\|.\|_1$. إذا وجد ثابت $M > 0$
بحيث:

$$\|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad ; \quad \forall x \in E$$

★ إذا كان التطيين $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ متكافئين فإن كل منهما خاضع للآخر.

مبرهنة: ليكن E فضاء خطي، وليكن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ معرفين على E وليكن $\|.\|_2$ خاضع لـ $\|.\|_1$ ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر E ومتقاربة إلى x بالنسبة للتظيم $\|.\|_1$ عندها تكون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x بالنسبة للتظيم $\|.\|_2$. دورة

البرهان:

بما أن $\|.\|_2$ خاضع لـ $\|.\|_1$ فإنه يوجد ثابت $M > 0$ بحيث:

$$\|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad ; \quad \forall x \in E$$

بما أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x بالنسبة للتظيم $\|.\|_1$ فإنه:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon) \in N \ ; \ n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\|x_n - x\|_2 \leq M \|x_n - x\|_1 < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

هذا يعني أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x بالنسبة للتظيم الثاني $\|.\|_2$.

★ بشكل مشابه إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة للتظيم الأول $\|.\|_1$ فإنها تكون أساسية بالنسبة للتظيم $\|.\|_2$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon) \in N \ ; \ n, m > n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq M \|x_n - x_m\|_1 < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

دورة

نتائج: إذا كان E فضاء خطي منظم وكان $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ متكافئين وكانت d_1 و d_2 المسافتين المولدتين بـ $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ على الترتيب.

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 \quad \& \quad d_2(x,y) = \|x-y\|_2$$

عندها:

دورة بجملة واحدة

① $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنسبة لـ $d_1 \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنسبة لـ d_2

② $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة لـ $d_1 \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة لـ d_2

③ (E,d_1) تام $\Leftrightarrow (E,d_2)$ تام.

البرهان: بما أن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ متكافئين فإنه يوجد ثابتان M و m > 0 بحيث:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad ; \forall x \in E$$

① $(\Leftarrow)$: بفرض $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنسبة لـ d_1 عندها:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\|x_n - x\|_2 < M\|x_n - x\|_1 < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

أي $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنسبة لـ d_2. (والعكس بشكل مشابه)

② $(\Rightarrow)$: بفرض $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة لـ d_2 عندها:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; n,m > n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_2 < m\varepsilon$$

$$\|x_n - x_m\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x_n - x_m\|_2 < \frac{1}{m} m\varepsilon = \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية بالنسبة لـ d_1. (والعكس بشكل مشابه).

③ ($\Leftarrow$): بفرض (E,d_1) تام ونبرهن (E,d_2) تام.
لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولنفرض أنها أساسية بالنسبة لـ d_2.
حسب (2) فإن:
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون أساسية لـ d_1.
ولكن (E,d_1) تام فالمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى عنصر مثل x بالنسبة لـ d_1
حسب (1) فإن:
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة بالنسبة لـ d_2.

فالفضاء (E,d_2) تام. (والعكس بشكل مشابه).

تعريف (الفضاء الجزئي):
الفضاء الجزئي من فضاء خطي منظم E هو متنوعة خطية مغلقة.
L متنوعة خطية:

$$\forall x,y\in L \Rightarrow x+y\in L$$
$$\forall x\in L;\ \forall \alpha\in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x\in L$$

L مغلقة. $\bar{L}=L$

توطئة (ريس): هامة:

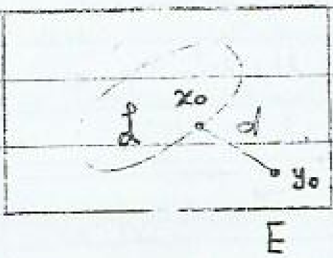
دورة

لتكن L فضاء جزئي خطي من الفضاء الخطي المنظم E و $E \neq L$
عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عنصر مثل y بحيث ① $\|y\|=1$ ② وبحيث:
③ $\|y-x\| > 1-\varepsilon \ ;\ \forall x\in L$

البرهان:

لتكن $y_0\in E$ و $y_0\notin L$ ولنأخذ
$$d=\inf_{x\in L}\|y_0-x\|$$

مطلوبات في
① y بعيد عن L
② $\|y\|=1$
③ المتراجحة



إن $d > 0$

لأنه لو كان $d=0$

لوجدت متتالية من عناصر $\mathcal{L}$ تتقارب إلى y_0 ، عندها:

$$y_0 \in \underbrace{\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}}_{\text{لأن } \mathcal{L} \text{ مغلقة}} \Rightarrow y_0 \in \mathcal{L}$$

وهذا تناقض.

ومن خواص الحد الأدنى الأعظمي فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $x_0 \in \mathcal{L}$ بحيث:

$$d \leqslant \|y_0 - x_0\| \leqslant d + d\varepsilon$$

لنضع:

حفظ

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}(y_0 - x_0)$$

$$\|y\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - x_0\| = 1$$

$$\forall x \in \mathcal{L} \Rightarrow \|y - x\| = \left\| \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}(y_0 - x_0) - \frac{x}{1} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \left\| y_0 - x_0 - \|y_0 - x_0\| x \right\|$$

$$= \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \left\| y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| x) \right\|$$

بما أن $x , x_0 \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ فضاء جزئي فإن:

$$\xi = x_0 + \|y_0 - x_0\| x \in \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \|y - x\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \| y_0 - \underbrace{\xi}_{\in \mathcal{L}} \| \geqslant \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{d + d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{(1+\varepsilon) - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \geqslant 1 - \varepsilon$$

لأن :

$$1+\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} > -\varepsilon$$

عندها : $\forall x \in L \Rightarrow \|y\, x\| > 1-\varepsilon$

تعريف (الاستقرار) :

ليكن f مؤثر معرف على الفضاء الخطي المنظم E_1 ويأخذ قيمه في الفضاء الخطي المنظم E_2.

نقول عن المؤثر f أنه مستمر في E_1 إذا حقق الشرط :

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0 \ ; \ \|x-y\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_2 < \varepsilon$$

تعريف (هومومورفيزم) :

نقول عن f أنه هومومورفيزم (خطي) إذا حقق الشرطين :

$$f: E_1 \to E_2$$

$$(1)\quad \forall x,y \in E_1 \Rightarrow f(x \overset{\in E_1}{+} y) = f(x) \overset{\in E_2}{+} f(y)$$

$$(2)\quad \forall x \in E_1 , \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\underset{\in E_1}{\alpha . x}) = \underset{\in E_2}{\alpha . f(x)}$$

- إذا كان f تباين $\Leftarrow$ f يدعى مونومورفيزم
- إذا كان f غامر $\Leftarrow$ f يدعى ابيمورفيزم
- إذا كان f تقابل $\Leftarrow$ f يدعى ايزومورفيزم

ملاحظة : إذا كان E فضاء خطي منظم وكان فيه جملة من العناصر $e_1, e_2, \dots, e_n$ تولد E ومستقلة خطياً عندها نسمي الجملة السابقة قاعدة ونقول أن الفضاء E منتهي البعد وبعده n.

نقول E أي :

$$\forall x \in E \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

جلسة /15/

 2014 - 11 - 21

تعريف: لتكن E فضاء باناخ (فضاء منظم تام) ولتكن السلسلة المشكلة من عناصر E.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

تكون السلسلة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

* بما أن E فضاء باناخ عندها يلزم لتقارب السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ يكفي أن تكون متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية.

مبرهنة (المقارنة):

لتكن السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ من الفضاء الخطي المنظم التام E.

إذا حققت السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ الشرط:

$$\underset{E}{\|x_i\|} \leqslant \underset{IR}{a_i} \; ; \; \forall i \geqslant 1$$

حيث a_i حدود السلسلة عددية متقاربة ($\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ عددية متقاربة)

فإن السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ تكون متقاربة في E.

البرهان:

لتكن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ولنبرهن أنها أساسية:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{n+p} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \right\| \leqslant$$

$$\underset{\text{خواص النظيم}}{\leqslant} \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\| \underset{\text{الفرض}}{\leqslant} \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i = \left| S'_{n+p} - S'_n \right|$$

حيث $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة العددية $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ المتقاربة فرضاً

متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة فهي أساسية.

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leqslant |S'_{n+p} - S'_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \; ; \; \forall p > 1$$

فالمتتالية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في E و E باناخ فهي متقاربة. فالسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ متقاربة.

تعريف (فضاء هيلبرت المجرد) :

① تعريف (الجداء الداخلي) : $(\cdot,\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$

ليكن E فضاء خطي فوق حقل الأعداد المركبة ، نقابل كل عنصرين x, y من E بعدد مركب (x,y) ندعو بالجداء الداخلي للعنصرين x و y يتمتع بالخواص التالية :

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

3) $(\lambda x,y) = \lambda (x,y)$

4) $(x,x) \geqslant 0 \; ; \; (x,x) = 0 \iff x = 0$

$$\forall x,y,z \in E \; ; \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

نسمي E المعرف عليه العملية السابقة بفضاء جداء داخلي

يمكننا تعريف نظيم بدلالة الجداء الداخلي بالشكل :

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \; ; \; \forall x \in E$$

(سنتأكد من شروط النظيم لاحقاً)

② تعريف (فضاء الوحدي) :

إذا كان E فضاء جداء داخلي وكان تاماً بمفهوم النظيم المعرف بدلالة الجداء الداخلي عندها نسمي E بفضاء وحدي .

③ تعريف (فضاء هيلبرت) :

إذا كان E فضاء جداء داخلي وتاماً بمفهوم النظيم المعرف بدلالة الجداء الداخلي وكان لا نهائي البعد عندها نسمي E بفضاء هيلبرت ونرمز له بـ H .

أي : يوجد جملة من العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ تكون مستقلة خطياً

وتحقق : $\forall x \in H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$

وتكون العناصر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ مستقلة خطياً إذا كانت $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً لكل $n \in \mathbb{N}$

تمارين: من شروط الجداء الداخلي لدينا:

$$D\ (x, y+z) \overset{?}{=} (x,y) + (x,z)$$

$$(x, y+z) = \overline{(y+z, x)} = \overline{(y,x) + (z,x)}$$

$$= \overline{(y,x)} + \overline{(z,x)} = (x,y) + (x,z)$$

$$2)\ (x, \lambda y) \overset{?}{=} \bar{\lambda}\ (x,y)$$

$$= \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y,x)} = \bar{\lambda}\ \overline{(y,x)}$$

$$= \bar{\lambda}\ (x,y)$$

أمثلة (فضاءات جداء الداخلي):

① الفضاء l_2 (فضاء هيلبرت الإحداثي):

هي مجموعة جميع المتتالية $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ التي تحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

لنعرف جداء داخلي للعنصرين $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$ بالشكل:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\ \bar{\eta}_i$$

يكون لهذا التعريف معنى لأن:

$$|(x,y)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\ \bar{\eta}_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\ |\eta_i| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} < \infty$$ "متراجحة بونياكوفسكي"

② الفضاء $L^2[0,1]$ (فضاء هيلبرت التابعي):

هي مجموعة جميع التوابع $x(t)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ والتي تحقق الشرط:

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,dt < \infty$$

لنعرف الجداء الداخلي للعنصرين $x(t)$, $y(t)$ بالشكل:

$$(x,y) = \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

يكون لهذا التعريف معنى لأن :

$$|(x,y)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt\right| \leq \int_0^1 |x(t)|\,.\,|y(t)|\,dt \leq$$

"متراجحة بونياكوفسكي" $\leq \underbrace{\left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\int_0^1 |y(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} < \infty$

دورات — متراجحة كوشي - شفارتز : صيغة

ليكن H فضاء هيلبرت

$$\forall x,y \in H \Rightarrow |(x,y)| \leq \|x\|\,.\,\|y\|$$

البرهان:

$$\forall x,y \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \|x+\lambda y\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = (x+\lambda y,\ x+\lambda y) \quad (*)$$

$$= (x,x) + \bar{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + |\lambda|^2 (y,y)$$

$$= \|x\|^2 + \bar{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{(x,y)} + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

في حالة خاصة لنختار $\lambda = \frac{-(x,y)}{\|y\|^2}$ حيث: $y \neq \theta$ لنعوض في $(*)$:

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \frac{\overline{(x,y)}}{\|y\|^2}(x,y) - \frac{(x,y)}{\|y\|^2}\overline{(x,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^4}\,.\,\|y\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} - \cancel{\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}} + \cancel{\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}}$$

$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - |(x,y)|^2 \Rightarrow$ بالتقريع والجذر

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$$

سؤال دورة: برهن أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء خطي منظم.

(برهن أن النظيم المعرف بدلالة الجداء الداخلي يحقق شروط النظيم).

الحل:

لدينا: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$; $\forall x \in H$

واضح أن: $\|x\| \geqslant 0$ (1)

وإذا كان $\|x\| = 0$ فإن:

$$\sqrt{(x,x)} = 0 \Rightarrow (x,x) = 0 \Rightarrow x = \theta$$

$$(2)\quad \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)}$$
$$= |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda|\,\|x\|$$

$$(3)\quad \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2$$

"كوشي شفارتز" $\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$$\xRightarrow{\text{بالجذر}} \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

لكل $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{متري} \arrow[r, bend left, "{\substack{d(x+z,\,y+z) = d(x,y)\\ d(\alpha x,\,\alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)}}"] & \text{خطي منظم} \arrow[l, bend left, "{d(x,y) = \|x-y\|}"] \arrow[r, bend left, "\text{قاعدة متوازي الأضلاع}"] & \text{جداء داخلي} \arrow[l, bend left, "{\|x\| = \sqrt{(x,x)}}"]
\end{tikzcd}$$

قاعدة متوازي الأضلاع :

في كل فضاء جداء داخلي تتحقق القاعدة :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \quad ; \quad \forall x,y\in E$$

البرهان :

$$\left.\begin{array}{l}\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2\\ \|x-y\|^2=(x-y,x-y)=\|x\|^2-(x,y)-(y,x)+\|y\|^2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بالجمع}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

يبرهن على أن أي فضاء خطي منظم تحقق قاعدة متوازي الأضلاع يكون النظيم فيه مولد من جداء داخلي.

سؤال دورة : برهن أن النظيم في الفضاء $C[0,1]$ غير مولد من جداء داخلي.

الحل :

$$x(t)=1 \quad , \quad y(t)=t$$

$$\|x\|=\max_{0\le t\le 1}|1|=1 \quad , \quad \|y\|=\max_{0\le t\le 1}|t|=1$$

$$x+y=1+t \Rightarrow \|x+y\|=\max_{0\le t\le 1}|1+t|=2$$

$$x-y=1-t \Rightarrow \|x-y\|=\max_{0\le t\le 1}|1-t|=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(2)^2+(1)^2=5\\ 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=2\left((1)^2+(1)^2\right)=4\end{array}\right\} \quad 5\neq 4$$

قاعدة متوازي الأضلاع غير محققة في الفضاء $C[0,1]$ $\Leftarrow$ النظيم في $C[0,1]$ غير مولد من جداء داخلي.

سؤال دورة : برهن أن النظيم في الفضاء ℓ^p حيث $p\neq 2$ غير مولد من جداء داخلي.

الحل :

لنأخذ المتتاليتين :

$$x=(1,1,0,0,\dots) \quad , \quad y=(1,-1,0,0,\dots)$$

$$\|x\| = (1^p + 1^p + 0 + 0 + \dots)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

$$\|y\| = (1^p + 1^p + 0 + 0 + \dots)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

$$x + y = (2, 0, 0, \dots) \rightarrow \|x+y\| = 2$$

$$x - y = (0, 2, 0, 0, \dots) \Rightarrow \|x-y\| = 2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2\,\underbrace{(2^{2/p} + 2^{2/p})}_{2\,2^{2/p}} = 2^2 \cdot 2^{2/p} = 2^{2+2/p}$$

$$8 \neq 2^{2+2/p} \quad ; \quad p \neq 2$$

فالنظيم في ℓ_p عندما $p \neq 2$ غير مولد من جداء داخلي لأن قاعدة متوازي الأضلاع غير محققة.

أما عندما $p = 2$ فإن ℓ_2 هو فضاء هيلبرت الإصطلاحي.

جلسة /16/ :
2014 - 11 - 22

الموضوع

سؤال دورة : برهن أن الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه

$$(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{C}$$

الحل :

لنأخذ المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر H

ولنفرض أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

ولنبرهن : $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$

$$|(x_n,y_n)-(x,y)| \underset{\text{طرح}}{\overset{+}{=}} |(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)|$$

"خواص الجداء الداخلي" $= |(x_n, y_n-y)+(x_n-x,y)| \leqslant$

$$\leqslant |(x_n, y_n-y)| + |(x_n-x, y)|$$

$$\leqslant \|x_n\|\,\|y_n-y\| + \|x_n-x\|\,\|y\|$$

لدينا $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ونعلم أن النظيم تابع مستمر عندها :

$$\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$$

إذاً $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة أي يوجد $M>0$ بحيث :

$$\|x_n\| \leqslant M \quad ; \ n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow |(x_n,y_n)-(x,y)| \leqslant M\,\|y_n-y\| + \|x_n-x\|\,\|y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي : $(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$

فالجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه

الموضوع

تعريف (التعامد): E

فضاء جداء داخلي E

ليكن H فضاء هيلبرت ، نقول عن العنصرين $x, y \in H$ أنهما متعامدان إذا كان:

$(x,y)=0$ ونقرأ ذلك x يعامد y ونرمز له ب $x \perp y$.

تعريف:

ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن $\mathcal{L}$ متنوعة خطية محتواة في H .

نقول عن $x \in H$ أنه يعامد $\mathcal{L}$ إذا كان:

$$(x,y)=0 \;;\; \forall y \in \mathcal{L}$$

نرمز لذلك ب $x \perp \mathcal{L}$. (x يعامد كل عنصر من عناصر $\mathcal{L}$).

نتيجة: إذا كان H فضاء هيلبرت وكان x يعامد جملة العناصر $y_1, y_2, \dots, y_n$ عندها فإن x يعامد أي تركيب خطي لها.

البرهان:

ليكن التركيب الخطي التالي:

$$y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

عندها:

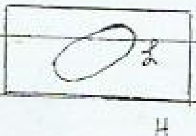
$$(x,y)=\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\, \underbrace{(x, y_i)}_{=0}=\sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

$x \perp y_i$

مبرهنة: هامة

مبرهنة: إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $\mathcal{L}$ متنوعة خطية محتواة في H و $x \perp \mathcal{L}$

عندها فإن: $x \perp \overline{\mathcal{L}}$



البرهان:

ليكن $y \in \overline{\mathcal{L}}$ عنصر كيفي ولنبرهن أن $x \perp y$

بما أن $y \in \overline{\mathcal{L}}$ عندها توجد متتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $\mathcal{L}$ متقاربة إلى y :

$$y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y$$

$x \perp \underset{\circ}{y_n}$

$$(x,y) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = \lim_{n\to\infty} (0) = 0$$

الجداء الداخلي $\in \mathcal{L}$

تابع مستمر

$$\Rightarrow x \perp y \; ; \; \forall y \in \overline{\mathcal{L}} \Rightarrow x \perp \overline{\mathcal{L}}$$

نتيجة: إذا كان $x \perp y_n$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإن $x \perp y$

$$(x,y) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = \lim_{n\to\infty} (0) = 0 \Rightarrow x \perp y$$

الجداء الداخلي

تابع مستمر

ملاحظة: إذا كان H فضاء هيلبرت فإن العنصر الوحيد الذي يعامد جميع عناصر H هو العنصر الصفري θ

البرهان:

نفرض $x \in H$, $x \perp H$ عندها:

$$x \perp y \; ; \; \forall y \in H$$

حالة خاصة $y = x$ أي: $x \perp x$

$$(x,x) = 0 \Rightarrow x = \theta$$

نتيجة: إذا كان H فضاء هيلبرت و $x \perp \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ كثيفة في H فإن:

$$x = \theta$$

البرهان:

حسب المبرهنة السابقة وبما أن $x \perp \mathcal{L}$ فإن $x \perp \overline{\mathcal{L}}$ (كتب النص)

ولكن $\mathcal{L}$ كثيفة في H ، أي: $\overline{\mathcal{L}} = H$ عندها: $x \perp H$

وحسب الملاحظة السابقة فإن: $x = \theta$

تعميم علاقة فيثاغورث :

ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن العناصر : $x_1, x_2, \dots, x_n$

متعامدة مثنى مثنى من H

$(x_i, x_j) = 0 \quad ; \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n \quad ; \quad i \neq j$

ولنفرض :

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ عندها :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

البرهان :

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i , \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i, x_j) \underset{\text{التعامد}}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

مبرهنة : ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن المتتالية المتعامدة مثنى مثنى $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

عندها :

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة في H $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ متقاربة في $\mathbb{R}$

البرهان :

$(\Longrightarrow)$: نفرض $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة في H ولنفرض :

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

وحسب تعميم علاقة فيثاغورث يكون :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$$

ومنه $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ متقاربة (ومجموعها $\|x\|^2$)

(⇒) : لتكن $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ، لدينا:

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n+p} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\right\|^2$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \, , \, \sum_{j=n+1}^{n+p} x_j\right) \underset{\text{علاقة فيثاغورث}}{=} \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\|^2$$

$$= |S'_{n+p} - S'_{n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وذلك لأن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ متقاربة فرضاً فمتتالية مجاميعها الجزئية متقاربة فهي أساسية.

$$\Rightarrow \|S_{n+p} - S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad ; \quad \forall p \geq 1$$

فالمتتالية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في H و H تام فهي متقاربة فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة.

أكثر من دورة:

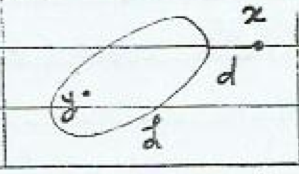
مبرهنة (المسقط المتعامد)

لتكن H فضاء هيلبرت و L فضاء جزئي ، عندئذ ،

$\forall x \in H \Rightarrow x = y + z \ ; \ y \in L \ , \ z \perp L$ وبشكل وحيد

البرهان:

* عندما $x \in L$ لدينا:



$x = x + 0 \ ; \ x \in L \ , \ 0 \perp L$

والمبرهنة محققة في هذه الحالة.

أما عندما $x \notin L$ نضع،

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|y - x\|^2 \geq d \quad ; \quad \forall y \in L}$$

خطوات البرهان

(1) $x \in \mathcal{L}$

(2) $x \notin \mathcal{L}$

(3) ايجاد

(4) ايجاد

(5)

(6) z

(7) $x = y + z$ وحدانية

201

الموضوع

* ليكن $h \in \mathcal{L}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ عندها:

حسب خواص حد الأدنى الأعظمي: توجد متتالية $y_n \in \mathcal{L}$ بحيث:

$$d_n = \|x - y_n\|^2 \to d$$

عندها: $y_n + \varepsilon h \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ فضاء جزئي)

$$d \leq \|x - (y_n + \varepsilon h)\|^2$$

$$d \leq \left((x - y_n) - \varepsilon h \, , \, (x - y_n) - \varepsilon h \right) =$$

$$= \|x - y_n\|^2 - \overline{\varepsilon}(x - y_n, h) - \varepsilon(h, x - y_n) + |\varepsilon|^2 \|h\|^2$$

لنختار $\varepsilon = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$ عندها لنعوض:

$$d \leq \underbrace{\|x - y_n\|^2}_{d_n} - \frac{|(x - y_n), h|^2}{\|h\|^2} - \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} + \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^4} \|h\|^2$$

$$\Rightarrow |(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 (d_n - d)$$

بالجذر:

$$|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{d_n - d}$$

وبالمثل:

$$|(x - y_m, h)| \leq \|h\| \sqrt{d_m - d}$$

$$|(x - y_n, h) + (y_m - x, h)| \leq |(x - y_n, h)| + |(y_m - x, h)|$$

$$\leq \|h\| \sqrt{d_n - d} + \|h\| \sqrt{d_m - d} = \|h\| \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d} \right)$$

$$\Rightarrow |(y_m - y_n, h)| \leq \|h\| \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d} \right) \quad ; \forall h \in \mathcal{L}$$

لنضع: $h = y_m - y_n$

$$\Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 \leq \|y_m - y_n\| \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d} \right)$$

$$\|y_m - y_n\| \leq \underset{\searrow 0}{\sqrt{d_n - d}} + \underset{\searrow 0}{\sqrt{d_m - d}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

إذاً $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في H و H تام فهي متقاربة إلى عنصر ولتكن y.

وبما أن $y_n \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ فضاء جزئي (مغلقة) فإن $y \in \mathcal{L}$.

لدينا: $|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{d_n - d} \quad ; \forall h \in \mathcal{L}$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $n \to \infty$ نجد:

$$|(x - y, h)| \leq 0 \quad ; \forall h \in \mathcal{L}$$

عمودي

$$\Rightarrow (x - y, h) = 0 \quad ; \forall h \in \mathcal{L}$$

لنضع $x - y = z$ والعلاقة السابقة تعني أن $z \perp \mathcal{L}$

$$x - y = z \Rightarrow x = y + z$$

ولنثبت أن هذا التمثيل وحيد

بفرض أننا نستطيع كتابة x بشكل ثاني:

$$x = y_1 + z_1$$

حيث: $y_1 \in \mathcal{L}$ و $z_1 \perp \mathcal{L}$

ولنثبت أن: $y = y_1 \quad , \quad z = z_1$

$$\|y - y_1\|^2 = (y - y_1, y - y_1)$$

لدينا:

$$\left.\begin{aligned} x &= y + z \\ x &= y_1 + z_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالطرح}} \boxed{y - y_1 = z - z_1} \; \cdots (*)$$

$$\Rightarrow \|y - y_1\|^2 = (y - y_1, z_1 - z)$$

$$= (\underset{\in\mathcal{L}}{y}, \underset{\perp\mathcal{L}}{z_1}) - (\underset{\in\mathcal{L}}{y}, \underset{\perp\mathcal{L}}{z}) - (y_1, z_1) + (y, z)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \|y - y_1\| = 0$$

$$\Rightarrow y = y_1$$

من (*)

$\Rightarrow 0 = z_1 - z \Rightarrow z_1 = z \Rightarrow$ التمثيل وحيد

* نسمي y في المبرهنة السابقة مسقط x على $\mathcal{L}$.
* نسمي z من المبرهنة السابقة مسقط x على $\mathcal{L}^{\perp}$ (المتممة العامدة لـ $\mathcal{L}$)

حيث $\mathcal{L}^{\perp}$: المتممة العامدة لـ $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{ x \in H \ ; \ x \perp \mathcal{L} \}$$

جلسة /17/.
2019 - 11 - 23

الموضوع

نتيجة: من مبرهنة المسقط المتعامد فإننا نستطيع كتابة الفضاء H على شكل مجموع مباشر متعامد وحيد.

$$H = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}$$

$$\mathcal{L} = H \ominus \mathcal{L}^{\perp} \quad , \quad \mathcal{L}^{\perp} = H \ominus \mathcal{L}$$

مبرهنة: ليكن H فضاء هيلبرت و $\mathcal{L}$ متنوعة خطية محتواة فيه عندها الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\mathcal{L}$ كثيفة في H هو ألا يوجد سوى العنصر الصفري يعامد $\mathcal{L}$.

دورة

$$(\bar{\mathcal{L}} = H \iff \text{لا يوجد سوى } \theta \text{ يعامد } \mathcal{L})$$

البرهان:

($\Leftarrow$): نفرض $\mathcal{L}$ كثيفة في H وليكن $x \perp \mathcal{L}$ عندها.

$$\underline{x \perp \mathcal{L}} \Rightarrow x \perp \bar{\mathcal{L}} \ \& \ \bar{\mathcal{L}} = H \Rightarrow x \perp H$$

ولكن بما أن العنصر الوحيد الذي يعامد H هو θ عندها $\underline{x = \theta}$.

إذاً لا يوجد سوى θ يعامد $\mathcal{L}$.

($\Rightarrow$): نفرض أنه لا يوجد سوى θ يعامد $\mathcal{L}$. لنفرض جدلاً أن:

$$\bar{\mathcal{L}} \neq H$$

$$\Rightarrow \exists x \in H \ ; \ x \notin \bar{\mathcal{L}}$$

وحسب مبرهنة المسقط المتعامد فإننا نستطيع كتابة x بالشكل:

$$\notin \bar{\mathcal{L}} \quad x = \overset{\in \bar{\mathcal{L}}}{y} + z \quad ; \quad y \in \bar{\mathcal{L}} \ , \ z \perp \bar{\mathcal{L}}$$

إن $z \neq \theta$ (لو كان $z = \theta$ لكان $x = y$ وهذا تناقض)

$$z \neq \theta \ \& \ z \perp \bar{\mathcal{L}} \Rightarrow z \neq \theta \ \& \ z \perp \mathcal{L}$$

وهذا يناقض الفرض، إذاً $\bar{\mathcal{L}} = H$

تعريف (الجملة المتعامدة المنظمة):

ليكن H فضاء هيلبرت، ولتكن $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ جملة من عناصره.

نقول عن $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ بأنها جملة متعامدة منظمة إذا كان:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \\ 1 & ; \ i = j \end{cases}$$

أي هي جملة متعامدة مثنى مثنى ونظيم كل عنصر من عناصرها يساوي الواحد.

طريقة شميث (إيجاد جملة متعامدة منظمة):

ليكن H فضاء هيلبرت، ولتكن $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ جملة مستقلة خطياً من عناصره.

ولنشكل منها جملة متعامدة منظمة. بما أنها مستقلة خطياً فإن:

$h_i \neq 0 \ ;$ لكل i

$$g_1 = h_1 \Rightarrow e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$

$$g_2 = h_2 - c_{21} e_1$$

$$g_2 \perp e_1 \Rightarrow (g_2, e_1) = 0 \Rightarrow (h_2 - c_{21} e_1, e_1) = 0$$

$$(h_2, e_1) - c_{21} = 0 \Rightarrow c_{21} = (h_2, e_1) \Rightarrow e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$$

$$g_3 = h_3 - c_{31} e_1 - c_{32} e_2$$

$$g_3 \perp e_1 \ , \ g_3 \perp e_2 \Rightarrow c_{31} = (h_3, e_1) \ , \ c_{32} = (h_3, e_2)$$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}$$

وهكذا :

$$g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\, e_i$$

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}$$

مثال : استخدم طريقة شميت في إيجاد جملة متعامدة منظمة من الجملة $1, t, t^2, \ldots$ في الفضاء $\mathcal{L}^2[-1,1]$ حيث $t \in [-1,1]$.

الحل :

لدينا : $\|x\| = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$$(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\overline{y(t)}\, dt$$

$$g_1 = 1 \Rightarrow \|g_1\| = \left(\int_{-1}^{1} 1\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_2 = h_2 - c_{21} e_1 \quad ; \quad c_{21} = (h_2, e_1)$$

$$c_{21} = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\, dt = 0$$

$$g_2 = t \Rightarrow \|g_2\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$$

$$g_3 = h_3 - c_{31} e_1 - c_{32} e_2 \quad ; \quad c_{31} = (h_3, e_1) \;,\; c_{32} = (h_3, e_2)$$

$$c_{31} = \left(t^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

الموضوع

$$C_{32} = \left(t^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, t\right) = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, dt = 0$$

$$g_3 = t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \|g_3\| = \left(\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\, t^2 - \frac{1}{2}$$

مساواة بارسيفال:

دورة

لتكن H فضاء هلبرت و $\mathcal{L}$ فضاء جزئي مولد بالجملة المتعامدة المنظمة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ عندها:

$$\forall x \in \mathcal{L} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i) \ ; \ \forall i \geq 1$$

معامل فوريه للعنصر x

البرهان:

لتكن $x \in \mathcal{L}$ عندها من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n وتركيب خطي

لعناصر $\mathcal{L}$ من الشكل:

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ حيث:

(*)

"α_i نحدد" $\quad \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 < \varepsilon^2$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i ,\ x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, x) + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

$$= \|x\|^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\, c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{c_i} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}_{} < \varepsilon^2 \quad \ldots (*)$$

(**)

$$|\alpha_i - c_i|^2 = (\alpha_i - c_i)\overline{(\alpha_i - c_i)} = |\alpha_i|^2 - \alpha_i \overline{c_i} - \overline{\alpha_i}\, c_i + |c_i|^2$$

بأخذ المجموع n:

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - c_i|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{c_i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\, c_i}_{} + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

بالتعويض في (*) :

$$0 \leq \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - c_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 < \varepsilon^2$$

يكون تقريب x بالتركيب الخطي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ أفضل ما يمكن، وذلك باختيار $\alpha_i = c_i$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 < \varepsilon^2$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $n \to \infty$ وملاحظة أن ε كيفي:

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq 0$$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ [illegible]

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i) \quad ; \quad i \geq 1$$

بالعودة للعلاقة :

$$0 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 < \varepsilon^2$$

وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ وملاحظة ε كيفي فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

مترا جحة بيسل :

ليكن H فضاء هيلبرت ، $\mathcal{L}$ فضاء جزئي مولد بالجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ المتعامدة المنظمة عندها:

$$\forall x \in H \Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i) \quad ; \quad \forall i \geq 1$$

البرهان :

ليكن $x \in H$ وحسب مبرهنة المسقط القائم فإننا نستطيع كتابة x بالشكل :

$$x = y + z \quad ; \quad y \in \mathcal{L} \quad ; \quad \boxed{z \perp \mathcal{L}}$$

الموضوع

$$\|x\|^2 = (x,x) = (y+z, y+z) = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

$$\|x\|^2 \geqslant \|y\|^2 \quad \ldots\ldots (I)$$

لدينا $y \in \mathcal{L}$ وحسب مساواة بارسيفال لدينا:

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (y, e_i) \quad ; \forall i \geqslant 1 \quad \ldots\ldots (II)$$

$$(x, e_i) = (y+z, e_i) = (y, e_i) + \underbrace{(z, e_i)}_{=0} = c_i$$

لأن $z \perp \mathcal{L}$ تولد $\mathcal{L}$ ، $e_i \in \mathcal{L}$

إن معامل فورييه للعنصر x هو نفسه معامل فورييه للعنصر y.

من (I) و (II) نجد:

$$\Rightarrow \|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i) \quad ; \forall i \geqslant 1$$

<u>سؤال:</u> برهن أن الجملة $h_n = e^{2\pi i n t}$ من الفضاء $\mathcal{L}^2[0,1]$ هي جملة متعامدة منظمة.

الحل:

$$(h_n, h_m) = (e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i m t}) = \int_0^1 e^{2\pi i n t} \cdot e^{-2\pi i m t} \, dt$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i t(n-m)} \, dt \qquad ; \quad n \neq m$$

$$= \frac{1}{2\pi i (n-m)} \left[e^{2\pi i t (n-m)} \right]_0^1 = 0$$

$$n = m \Rightarrow (h_n, h_n) = (e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i n t}) = \int_0^1 1 \, dt = 1$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

سؤال: تأكد من أن الجملة

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \dots$$

تشكل جملة متعامدة منظمة في الفضاء $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$.

الحل:

علاحظة أن:

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\cos mt\,dt=\begin{cases}\pi & ;\ n=m\\ 0 & ;\ n\neq m\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nt\sin mt\,dt=\begin{cases}\pi & ;\ n=m\\ 0 & ;\ n\neq m\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\sin mt\,dt=0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt=1$$

ويمكن البرهان بسهولة ...

جلسة /18/ :

2014 - 11 - 28

الموضوع

تعريف (الجملة التامة):

دورة

لتكن H فضاء هيلبرت، ولتكن $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة

نقول عن الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ أنها تامة إذا لم يوجد سوى الصفر الصفري يعامدها.

تعريف (الجملة المغلقة): ...... عرف ثم برهن ؟

دورة

نقول عن الجملة المتعامدة المنظمة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ أنها مغلقة إذا كان الفضاء المولد بها يطابق H.

المتنوعة الخطية المغلقة — الفضاء المولد $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$

[illegible]

مبرهنة:

دورة

الشرط اللازم والكافي لكي تكون الجملة المتعامدة المنظمة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ تامة في H هو أن تكون مغلقة.

البرهان:

($\Leftarrow$): نفرض أن الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ المتعامدة المنظمة تامة، إذاً لا يوجد سوى θ يعامد الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ولنبرهن أن الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ مغلقة.

لنرمز بـ $\mathcal{L}$ للمتنوعة الخطية المولدة بالجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$

بما أن لا يوجد سوى θ يعامد $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ فإنه لا يوجد سوى θ يعامد $\mathcal{L}$.

وحسب مبرهنة سابقة فإن $\mathcal{L}$ كثيفة في H. أي:

$$\overline{\mathcal{L}} = H$$

إن $\overline{\mathcal{L}}$ هنا يمثل الفضاء المولد بالجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ وحسب تعريف الجملة المغلقة فإن $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ مغلقة.

($\Rightarrow$): نفرض أن الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ مغلقة أي الفضاء المولد بها $\overline{\mathcal{L}}$ يطابق H.

$$\overline{\mathcal{L}} = H$$

ولنبرهن أنها تامة، أي لنبرهن أنه لا يوجد سوى θ يعامد الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

نفرض وجود $x \in H$ يعامد الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$، أي:

$(x, e_i) = 0 \quad ; \forall i \geq 1$ $\qquad \overline{\mathcal{L}}$

وحسب مساواة بارسيفال ($\overline{\mathcal{L}} = H$) فإن:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i) \quad ; \forall i \geq 1$$

$$c_i = (x, e_i) = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |0|^2 = 0$$

$$\|x\| = 0 \xRightarrow{\text{شروط التقييم}} x = 0$$

إذاً لا يوجد سوى 0 عامد الجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ فالجملة $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ تامة.

تعريف (القاعدة):

القاعدة في فضاء هيلبرت H هي كل جملة متعامدة منظمة تامة. (أو مغلقة).

تعريف (المؤثر الإيزومتري):

ليكن (X, d_1) ، (Y, d_2) فضاءين متريين، وليكن f مؤثر:

$$f : X \to Y$$

نقول عن المؤثر f بأنه ايزومتري إذا تحقق الشرط:

$$d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1) + f(x_2)) \quad ; \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

ونقول عن الفضائين X, Y بأنهما ايزومتريان.

إن الشرط السابق يصبح له الشكل:

$$\|x_1 - x_2\|_1 = \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \quad ; \quad \forall x_1, x_2 \in E_1$$

حيث: $(E_1, \|\cdot\|_1)$ ، $(E_2, \|\cdot\|_2)$ فضائين خطيين منظمين ب $f : E_1 \to E_2$

ملاحظة: إذا كان f خطي (هومومورفيزم) فإن الشرط السابق يمكن اختصاره في الشكل التالي:

$$\|x\|_1 = \|f(x)\|_2 \quad ; \forall x \in E_1$$

(الاستبدال كل x ب $x_1 - x_2$ نجد: $\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1 - x_2)\|_2$)

$$= \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \quad ; \quad \forall x_1, x_2 \in E$$

مبرهنة (دون برهان):

ليكن H فضاء هيلبرت قابل للفصل. (توجد في H مجموعة قابلة للعد كثيفة) عندها توجد قاعدة في H (أي توجد جملة متعامدة منظمة تامة فيه).

الموضوع

دورة

مبرهنة:
إن فضاء هيلبرت القابل للفصل إيزومتري وإيزومورفي مع ℓ_2.

خطوات الحل
① ...
② ...
③ متباين
④ تام
$\forall y \in \ell_2 \Rightarrow \exists x \in H ; f(x) = y$
⑤ إيزومتري

البرهان:
بما أن لدينا فضاء هيلبرت قابل للفصل H فإنه توجد قاعدة
ولتكن $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$، أي جملة متعامدة منتظمة تامة، بحيث:

$$\forall x \in H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \; ; \; c_i = (x, e_i) \; ; \; \forall i \geq 1 .$$

وتتحقق أيضاً مساواة بارسيفال:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

لنربط العنصر x بالمتتالية $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ ومن ضمن:

$$(c_1, c_2, \dots, c_i, \dots) \in \ell_2$$

بالتالي نشكل تطبيق (مؤثر) من H إلى ℓ_2 بحيث:

$$f(x) = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots) \; ; \; \forall x \in H$$

• لنبرهن أن f هومومورفيزم:

$$\forall x, y \in H \; ; \; x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \; , \; y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i + y_i) e_i$$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (c_1 + y_1, c_2 + y_2, \dots, c_i + y_i, \dots) \\ &= (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نبرهن:

$$\forall x \in H ; \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$\lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda c_i) e_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda x) &= (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_i, \dots) \\ &= \lambda (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

• لنبرهن أن f متباين :

بفرض $x \in H$ بحيث : $f(x)=\theta$ أي :

$$(c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

بالمطابقة :

$$\Rightarrow c_i = 0 \quad ; \forall i \geq 1$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \theta = \theta \Rightarrow \text{ متباين } f$$

• لنبرهن أن f غامر :

بفرض أن $y = (c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots) \in \ell_2$ كيفي ولنبحث عن عنصر $x \in H$ بحيث :

$$f(x) = (c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots)$$

لدينا : $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$

"خذ المتتالية الجزئية للسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$" : $z_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

تشكل المتتالية متتالية من عناصر H :

ولنبرهن أنها كوشي .

$$\|z_n - z_m\|^2 \overset{n>m}{=} \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i - \sum_{i=1}^{m} c_i e_i \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i \right\|^2$$

$$= \left(\sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i , \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j \right) \qquad \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} c_i \bar{c}_j (e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n \, (\infty)} |c_i|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

أي أن $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في H و H تام فهي متقاربة إلى عنصر وليكن x .

$$x = \lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

وبحيث: $f(x) = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots)$

وبالتالي f غامر

ولنبرهن أن f ايزومتري:

لدينا من مساواة بارسيفال:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \ \forall x \in H$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \ f(x) = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots)$$

$$\|x\|_H = \|f(x)\|_{\ell_2} \quad ; \ \forall x \in H$$

وبما أن f هومومورفيزم فإن:

$$\|x - y\|_H = \|f(x) - f(y)\| \quad ; \ \forall x, y \in H$$

أي أن f ايزومتري $\Longrightarrow$ f ايزومورفيزم وايزومتري

فالفضائين H و ℓ_2 ايزومورفيان وايزومتريان.

نتيجة: بما أن علاقتي الايزومورفية والايزومترية هما علاقتا تكافؤ فإن جميع فضاءات هيلبرت القابلة للفصل ايزومترية وايزومورفية فيما بينها. دورة

« إذا وردت في الامتحان نبرهن المبرهنة السابقة ثم نكتب النتيجة »

مبرهنة (ريس - فيشر):

إن الفضائين ℓ_2 و $\mathcal{L}^2[0,1]$ ايزومورفيان وايزومتريان فيما بينهما.

إن برهان هذه المبرهنة يتم بوضع $H = \mathcal{L}^2[0,1]$ كحالة خاصة من المبرهنة السابقة.

تمارين الفصل الثاني :

تمرين (١) : هل التوابع التالية نظام في مجموعة تعريفها :

ⓐ $\max\limits_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)| \quad ; x \in C[a,b]$

الحل :

واضح أن $\|x\| \geq 0$ ونفرض $\|x\| = 0$ عندها :

$$\max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0 \Rightarrow |x(t)| = 0 \quad ; \forall\ a \leq t \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = 0 \quad ; \forall\ t \in [a, \frac{a+b}{2}]$$

إذاً ليس بالضرورة أن يكون :

$$x(t) = 0 \quad ; \forall\ a \leq t \leq b$$

فالتابع المعرف لا يعرف نظيم

$$\left(x(t) = \begin{cases} 0 & ; a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ t - \frac{a+b}{2} & \frac{a+b}{2} \leq t \leq b \end{cases} \neq \underset{C[0,1]}{\theta} \right)$$

$\|x\|$

دورة ⓑ $x \longrightarrow |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| \quad ; \quad x \in C^{(1)}[a,b]$

الحل :

واضح أن $\|x\| \geq 0$ لكل $x \in C^{(1)}[a,b]$

فإذا كان $\|x\| = 0$ فإن :

$$|x(a)| + \max |x'(t)| = 0$$

$$|x(a)| = 0 \quad \& \quad \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$$

$$x(a) = 0 \quad \& \quad x'(t) = 0 \quad ; \forall\ a \leq t \leq b$$

$$x(a) = 0 \quad \& \quad x(t) = c \quad ; \forall\ a \leq t \leq b$$

$$t=a \Rightarrow 0=x(a)=c \Rightarrow c=0 \Rightarrow x(t)=0 \quad ; \quad \forall\, a\leq t\leq b$$

$$\Rightarrow x=\theta$$

$\forall x,y \in C^{(1)}[a,b]$

$$|x(a)+y(a)| \leq |x(a)|+|y(a)| \quad \dots \quad (I)$$

$$|(x+y)'(t)| = |x'(t)+y'(t)| \leq |x'(t)|+|y'(t)| \leq$$

$$\leq \max_{a\leq t\leq b}|x'(t)| + \max_{a\leq t\leq b}|y'(t)| \quad ; \quad \forall\, a\leq t\leq b$$

إن الطرف الأخير هو تابع معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة $[a,b]$ فهو على قيمة عظمى وهذه القيمة تحقق نفس المتراجحة السابقة:

$$\max_{a\leq t\leq b}|(x+y)'(t)| \leq \max_{a\leq t\leq b}|x'(t)| + \max_{a\leq t\leq b}|y'(t)| \quad \dots \quad (II)$$

بجمع (I) و (II) نجد:

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

$$\|\lambda x\| = |(\lambda x)(a)| + \max_{a\leq t\leq b}|(\lambda x)'(t)|$$

$$= |\lambda(x(a))| + \max_{a\leq t\leq b}|\lambda x'(t)| =$$

$$= |\lambda|.|x(a)| + |\lambda|\max_{a\leq t\leq b}|x'(t)| = |\lambda|.\|x\|$$

$$\forall x,y \in C^{(1)}[a,b] \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

فالتابع المعطى يعرف نظيم.

© $x \longrightarrow |x(a)-x(b)| + \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x'(t)| \quad ; \quad x\in C^{(1)}[a,b]$

الحل :

واضح أن : $\|x\| \geqslant 0 \quad ; \quad \forall x\in C^{(1)}[a,b]$

$$\|x\|=0 \Rightarrow |x(a)-x(b)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)| = 0$$

$$|x(a)-x(b)|=0 \;\; \& \;\; \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|=0$$

$$\Rightarrow x(a)=x(b) \;\; \& \;\; x'(t)=0 \quad ; \quad \forall a\leqslant t\leqslant b$$

$$\Rightarrow x(a)=x(b) \;\; \& \;\; x(t)=c \quad ; \quad \forall a\leqslant t\leqslant b$$

$$t=a \Rightarrow x(b)=x(a)=c$$

إذاً ليس بالضرورة أن تكون $c=0$ إذاً التابع المعطى لا يعرف نظيم

$(x(t)=2 \quad ; \quad \forall\, 0\leqslant t\leqslant 1 \qquad \|x(t)\|=0)$

دورة

تمرين : برهن أن مجموعة التوابع $x(t)$ التي تحقق الشرط $\int_0^1 |x(t)|^2\,dt \leqslant 1$
مجموعة محدبة في الفضاء $\mathcal{L}^2[0,1]$. (أو $C[0,1]$) .

الحل :

لتكن :

$$M=\{x(t)\in \mathcal{L}^2[0,1] \; ; \; \int_0^1 |x(t)|^2\,dt \leqslant 1\}$$

$$\forall x,y\in M \Rightarrow \int_0^1 |x(t)|^2\,dt \leqslant 1 \;\; \& \;\; \int_0^1 |y(t)|^2\,dt \leqslant 1$$

ولتكن النقطة z نقطة القطعة الواصلة بين النقطتين x,y :

$$z(t)=(1-\lambda)x(t)+\lambda y(t) \quad ; \quad \forall\, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

ولنبرهن أن $z\in M$:

$$\int_0^1 |z(t)|^2\,dt = \int_0^1 \left[(1-\lambda)x(t)+\lambda y(t)\right]^2 dt$$

$$= (1-\lambda)^2 \int_0^1 \underbrace{x^2(t)}_{\leq 1} dt + 2(1-\lambda)\lambda \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt + \lambda^2 \int_0^1 \underbrace{y^2(t)}_{\leq 1} dt$$

"متراجحة بونياكوفسكي" $\leq (1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda)\lambda \underbrace{\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left(\int_0^1 y^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} + \lambda^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 |z(t)|^2 dt \leq (1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda)\lambda + \lambda^2 = 1 \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

$\Rightarrow z \in M \Rightarrow$ M مجموعة محدبة

دورة

تمرين: برهن أن القطع الناقص

$$M = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2 \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 \leq 1\}$$

هي مجموعة محدبة من l_2 .

الحل:

$$\forall x, y \in M \; ; \; x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \; , \; y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 \leq 1 \quad \& \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \eta_n^2 \leq 1$$

ولنشكل القطعة المستقيمة الواصلة بين x, y :

$$z = (1-t)x + ty \quad ; \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

ولنبرهن أن $z \in M$:

$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots) \quad ; \quad \zeta_n = (1-t)\xi_n + t\eta_n$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 \zeta_n^2 = \sum_{n=1}^{m} n^2 [(1-t)\xi_n + t\eta_n]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} n^2 [(1-t)^2 \xi_n^2 + 2(1-t)t\, \xi_n \eta_n + t^2 \eta_n^2]$$

$$= (1-t)^2 \sum_{n=1}^{m} n^2 \xi_n^2 + 2(1-t)t \sum_{n=1}^{m} n^2 \xi_n \eta_n + t^2 \sum_{n=1}^{m} n^2 \eta_n^2$$

$$\text{"متراجحة بونياكوفكي"} \leq (1-t)^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{m} n^2 \xi_n^2}_{\leq 1} + 2(1-t)t \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \xi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{m} n^2 \eta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} + t^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{m} n^2 \eta_n^2}_{\leq 1}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \zeta_n^2 \leq (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2 = 1 \quad ; \ \forall\ 0 < t \leq 1$$

$$\Rightarrow \zeta \in M \quad ; \ \forall\ 0 < t \leq 1 \ \Rightarrow \ M \text{ مجموعة محدبة في } l_2$$

تمرين: هل مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة k مجموعة محدبة في $C[0,1]$ ؟ (M)

الحل:

$$\forall p(t), Q(t) \in M \Rightarrow p(t) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n t^n, \quad Q(t) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n t^n$$

حيث: $\alpha_k \neq 0 \ , \ \beta_k \neq 0$

ولنشكل القطعة المستقيمة الواصلة بين p, Q.

$$R(t) = (1-\lambda)p(t) + \lambda Q(t) \quad ; \ \forall\ 0 < \lambda \leq 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-\lambda)\alpha_n + \lambda \beta_n\right] t^n$$

في حالة:

$$(1-\lambda)\alpha_n + \lambda \beta_n = 0$$

فإن $R(t)$ ليس كثير حدود من الدرجة k، أي عندما تكون:

$$\lambda = \frac{\beta_k}{\beta_k - \alpha_k}$$

ومنه المجموعة المفروضة ليست محدبة.

سؤال: نفس التمرين السابق ولكن من أجل مجموعة كثيرات الحدود التي درجتها لا تزيد عن K .

الحل:

ستكون المجموعة محدبة.

تمرين: احسب نظيم المتجه x:

(a) $E = m \quad , \quad x = \left\{ \frac{1}{n^2 - 10n + 28} \right\}_{n=1}^{\infty}$

الحل:

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^2 - 10n + 28} \right|$$

n=1 بداية $\frac{1}{19}$

n=∞ نهاية 0

لنشكل التابع التالي:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 10x + 28}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x + 10}{(x^2 - 10x + 28)^2} = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \|x\| = \left| \frac{1}{(5)^2 - 10(5) + 28} \right| = \frac{1}{3}$$

(b) $E = L^2[0, \pi] \quad , \quad x(t) = \begin{cases} \sin t & ; \sin \frac{1}{t} \neq 0 \\ \cos t & ; \sin \frac{1}{t} = 0 \end{cases}$

دورة

ملاحظة: نقول عن تابعين $x(t)$, $x_2(t)$ أنهما متكافئين (متساويان تقريباً في كل مكان) إذا كان قياس المجموعة التي يختلفان عليها معدوم.

$$x_1(t) = x_2(t) \quad ; \quad \forall t \in M$$

$$x_1(t) \neq x_2(t) \quad ; \quad \forall t \in X \setminus M \quad \& \quad M(X \setminus M) = 0$$

الحل :

$$\sin \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = \pi K \quad ; \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\pi K} \quad ; \quad K \in \mathbb{N} \quad (K \in \mathbb{Z}^{+*})$$

$$\Rightarrow \mu \left\{ \frac{1}{\pi K} \; ; \; K \in \mathbb{Z}^{+*} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \sin t \quad (\mathrm{mod}\ \mu)$$

$$\Rightarrow \|x\| = \|\sin t\| = \left(\int_0^{\pi} |\sin t|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

تمرين : ادرس تقارب المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في الفضاء الخطي المنظم E إذا كان :

ⓐ $E = \mathcal{L}^1[0,1]$, $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n} & ; \text{ أصم } t \ (t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0 & ; \text{ عادي } t \ (t \in \mathbb{Q}) \end{cases}$

$\left(\int_0^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$

الحل :

[illegible] $n \to \infty$

$$\|x_n(t) - 1\| = \|e^{-t/n} - 1\|_{\mathcal{L}^1[0,1]} = \left(\int_0^1 |e^{-t/n} - 1| \, dt \right)^{\frac{1}{1}}$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{-t/n}) \, dt = \left[t + n e^{-\frac{t}{n}} \right]_0^1$$

$$= 1 + n e^{-\frac{1}{n}} - n = 1 + \underbrace{n(e^{-\frac{1}{n}} - 1)}_{\infty \times 0}$$

الموضوع

$$= 1 + \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \| x_n(t) - 1 \| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right)$$

"باستخدام لوبيتال" $$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{n}}}{\frac{-1}{n^2}} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t) = 1$$

ⓑ $E = l_1$; $x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ مرة}}, \frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \dots)$; $\sigma > 1$

الحل :

$$x_{n+p} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+p-1 \text{ مرة}}, \frac{1}{(n+p)^\sigma}, \frac{1}{(n+p+1)^\sigma}, \dots)$$

$$\| x_n - x_{n+p} \| = \| (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ مرة}}, \frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \dots, \frac{1}{(n+p-1)^\sigma}, \dots, 0, 0, \dots) \|_{l_1}$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} \left| \frac{1}{k^\sigma} \right|^1 \right)^{\frac{1}{1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma}$$

لأنه يمثل باقي نوني لمتسلسلة ريمان المتقاربة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\sigma}$ (لأن $\sigma > 1$ افرضاً)

فالمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متسلسلة كوشي في l_1 و l_1 فضاء تام فهي متقاربة

جلسة /20/ :

الموضوع
2014 - 11 - 30

الفصل الثالث :

المؤثرات الخطية :

هام الدكتور يركز على الحل أكثر من النظري

تعاريف ونظ مستوى

تعريف (المؤثر الخطي) :

ليكن E_x ، E_y فضائين خطيين منظمين (فوق الحقل K)

$(K=\mathbb{C} , K=\mathbb{R})$ ، وليكن A مؤثر خطي (تطبيق) معرف على E_x ومأخذ قيمه في E_y .

نقول عن المؤثر A بأنه خطي إذا كان :

(1) $\forall x_1, x_2 \in E_x \Rightarrow A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (A جمعي)

(2) $\forall x \in E_x , \lambda \in K \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda Ax$ (A متجانس)

تعريف (الاستمرار) :

ليكن A مؤثر معرف على E_x ومأخذ قيمه في E_y . $(A : E_x \to E_y)$

نقول عن A بأنه مستمر في النقطة x_0 إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 ; \|x - x_0\|_{E_x} < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\|_{E_y} < \varepsilon$$

أو إذا تحقق الشرط التالي :

من أجل أي متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 فإن : $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى Ax_0

* إن شرط الاستمرار المؤثر A على كامل E_x هو :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 ; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ay\| < \varepsilon \ ; \ \forall x, y \in E_x$$

أمثلة :

مواضيع بالمحاضرة : نظرية هامة

مثال (1) : ليكن $E_x = E_y = E_n$ وليكن A مؤثر يربط كل عنصر $x = (\xi_i)_{i=1}^{n}$ بالعنصر $y = (\eta_i)_{i=1}^{n}$ بالعلاقة :

$$Ax = y = (\eta_i)_{i=1}^{n} \ , \ \eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j$$

حيث : $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ مصفوفة من الأعداد الثابتة .

KORANI

$$Ax = y \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

ولنبرهن ان A خطي ومستمر:

$$\forall x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i=1}^n \, , \, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i=1}^n \in E_n$$

$$x_1 + x_2 = (\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)})_{i=1}^n \Rightarrow$$

$$A(x_1 + x_2) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_j^{(1)} + \xi_j^{(2)}) \right)_{i=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(2)} \right)_{i=1}^n$$

ومنه نجد ان A جمعي:

$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\xi_j^{(1)}}_{x_1} \right)_{i=1}^n + \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\xi_j^{(2)}}_{x_2} \right)_{i=1}^n$$

$$\forall x = (\xi)_{i=1}^n \, , \, \lambda \in R \Rightarrow \lambda x = (\lambda \xi_i)_{i=1}^n$$

$$A(\lambda x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (\lambda \xi_j) \right)_{i=1}^n = \lambda \left(\sum a_{ij} \xi_j \right)_{i=1}^n = \lambda A x$$

$\Rightarrow$ A متجانس $\Rightarrow$ A خطي

* لتكن $x_m = (\xi_i^{(m)})_{i=1}^n$ متتالية من عناصر E_n، ولنفرض انها متقاربة إلى العنصر $x_0 = (\xi_i^{(0)})_{i=1}^n$

عندها: $\|x_m - x_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$A x_m = (y_i^{(m)})_{i=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(m)} \right)_{i=1}^n \, , \, A x_0 = (y_i^{(0)})_{i=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(0)} \right)_{i=1}^n$$

$$(y_i^{(m)} - y_i^{(0)})^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(m)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j^{(0)} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(0)}) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(0)})^2 \right)$$ "متراجحة بونياكوفسكي"

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^{(m)} - y_i^{(0)})^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(0)} - \xi_j^{(m)})^2 \right)$$

بالجذر:

$$\| Ax_m - Ax_0 \| \leqslant \alpha \| x_m - x_0 \| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow Ax_m \longrightarrow Ax_0 \Rightarrow$$ x_0 مستمر في A

و x_0 كيفية من E_x $\Leftarrow$ A مستمر

مثال (2): ليكن المؤثر A المعرف في $C[0,1]$ وبأخذ قيمه في $C[0,1]$:

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds$$ (مؤثر فريدهولم التكاملي)

برهن أن A خطي ومستمر.

الحل:

علينا بسهولة علينا التأكد أن A خطي، ولنبرهن أن A مستمر.

لتكن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $C[0,1]$، ولنفرض أنها متقاربة إلى التابع $x_0(t)$ في الفضاء $C[0,1]$. (أي أنها متقاربة بانتظام إلى التابع $x_0(t)$)

$$\lim Ax_n(t) = \lim \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds$$

$$K(t,s) \quad x_0(s)$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(K(t,s)\, x_n(s)\right) ds$$

وذلك بسبب التقارب المنتظم للمتتالية السابقة الواقعة تحت إشارة التكامل:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A x_n(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x_0(s)\, ds = A x_0$$

$\Rightarrow$ A مستمر

ملاحظة (دون برهان):

نظرية: إذا كان A مؤثر جمعي فإن:

$$A\,\theta = \theta \quad (1)$$

حيادي E_x ، حيادي E_y

$$A(-x) = -Ax \quad (2)$$

$A(\lambda x) = \lambda A x \quad (3)$ عندما λ عدد عادي $(\lambda \in Q)$

ملاحظة:

نظرية: إذا كان المؤثر A جمعي ومستمر والمعرف في الفضاء الخطي المنظم E_x فإنه يكون متجانساً.

البرهان:

بما أن A جمعي حسب الملاحظة السابقة:

$$A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad ; \forall \lambda \in Q$$

وحتى يكون A متجانس يكفي أن نبرهن:

$$A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad ; \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus Q$$

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}\setminus Q$ وبما أن Q كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه توجد متتالية من الأعداد العادية ولتكن $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث:

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$$

$$A(\lambda x) = A\left(\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\right) x\right) \underset{\text{A مستمر فرضاً}}{=} \lim_{n\to\infty} A(\lambda_n x)$$

$$\underset{\text{"A جمعي" و } \lambda_n \in Q}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda_n A x = \lambda A x \Rightarrow$$ A متجانس

ملاحظة: إذا كان A خطياً فإن:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E_x \ , \ \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$$

$$\Rightarrow A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A x_i$$

دورة

مبرهنة: إذا كان المؤثر الجمعي A مستمراً في نقطة ما $x_0 \in E_x$ ($A: E_x \to E_y$)

فإنه يكون مستمراً في جميع نقاط E_x.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر E_x ولنفرض أنها متقاربة إلى $x \in E_x$

ولنبرهن أن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى Ax.

لدينا: $\{x_n - x + x_0\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من E_x ومتقاربة إلى x_0

وبما أن A مستمر في x_0 فإن: $\{A(x_n - x + x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى Ax_0

$$A(x_n - x + x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} Ax_0$$

وبما أن A جمعي:

$$Ax_n - Ax + \cancel{Ax_0} \xrightarrow[n \to \infty]{} \cancel{Ax_0}$$

$$Ax_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Ax \Rightarrow A \text{ مستمر}$$

هامة

مبرهنة: إذا كان المؤثر A خطياً في فضاء منتهي البعد فإنه يكون مستمراً.

البرهان:

ليكن E_x فضاء منتهي البعد وعدد أبعاده n. عندها توجد قاعدة $e_1, e_2, \dots, e_n$

بحيث:

$$\forall x \in E_x \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

لتكن $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر E_2 ولنفرض أنها متقاربة إلى x_0

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} e_i \quad , \quad x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(0)} e_i$$

ولنبرهن أن $\{Ax_m\}_{m=1}^{\infty}$ متقاربة إلى Ax_0

إن التقارب في الفضاء المنتهي البعد هو تقارب بالإحداثيات ولذلك: $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$

عندها:

$$\alpha_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_i^{(0)} \quad ; \quad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\lim (Ax_m - Ax_0) = \lim_{m\to\infty} \left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} e_i\right) - A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(0)} e_i\right) \right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} \underline{Ae_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(0)} \underline{Ae_i} \right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(0)})\, Ae_i \right)$$

ملاحظة

$0 \cdot x = \theta$

$1 \cdot x = x$

$\lambda \cdot \theta = \theta$,

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 0\, Ae_i \right) = \theta$$

$$\Rightarrow Ax_m \xrightarrow[m\to\infty]{} Ax \Rightarrow$$ مستمر A

جلسة /21/ .

الموضوع

2014-12-5

فضاء المؤثرات :

ليكن E_x ، E_y فضائين خطيين منظمين فوق الحقل السلمي K . لنعرف عمليتي الأولى جمع والثانية ضرب كمية سلمية كما يلي :

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad ; \forall x \in E_x$$

$$(\lambda A)(x) = \lambda Ax \qquad ; \forall x \in E_x , \lambda \in K$$

عندها تتحول مجموعة جميع المؤثرات الخطية المعرفة على E_x والتي تأخذ قيمها في E_y إلى فضاء خطي .

وإذا عرفنا عملية ضرب عنصرين من مجموعة جميع المؤثرات الخطية بالشكل :

$$(AB)x = A(Bx) \qquad ; \forall x \in E_x$$

* نقول عن المؤثر B بأنه مقلوب يميني للمؤثر A إذا كان :

$$AB = I$$

نقول عن المؤثر C بأنه مقلوب يساري للمؤثر A إذا كان :

$$CA = I$$

مع العلم أن عملية ضرب المؤثرات ليست تبديلية بالحالة العامة

إذا وجد للمؤثر A مقلوب يميني ومقلوب يساري فإنهما متساويين .

$$AB = I \quad , CA = I \Rightarrow B = C$$

$$AB = I \Rightarrow \underbrace{CAB}_{} = C \Rightarrow B = C$$

$CI = IC = C$ عندها نقول أن لـ A مقلوب ونرمزله بـ A^{-1}

تعريف (التقارب النقطي) :

لتكن متتالية المؤثرات الخطية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على E_x والتي تأخذ قيمها في E_y .

نقول أن المتتالية متقاربة نقطياً إلى المؤثر الخطي A إذا كان :

$$A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} Ax \qquad ; \forall x \in E_x$$

نقطة مشتبه

KORANI

هام

تعريف (المؤثر المحدود):

ليكن A مؤثر خطي معرف من الفضاء الخطي المنتظم E_x ويأخذ قيمه في الفضاء الخطي المنتظم E_y

نقول عن المؤثر A أنه محدود إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث:

$$\underbrace{\|Ax\|}_{E_y} \leq M \underbrace{\|x\|}_{E_x} \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

ملاحظة: سنرمز لمجموعة جميع المؤثرات الخطية والمحدودة المعرفة على E_x والتي تأخذ قيمها في E_y بالرمز $(E_x \to E_y)$.

ملاحظة: في حالة خاصة عندما تكون $E_y = \mathbb{R}$ فإن المجموعة $(E_x \to \mathbb{R})$ تسمى بالفضاء المرافق للفضاء E_x ونرمز لها ب E_x^*.

(أي الفضاء المرافق لـ E_x هي مجموعة جميع الدالات الخطية والمحدودة المعرفة على E_x)

$$E_x^* = (E_x \to \mathbb{R})$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر الخطي A مستمراً هو أن يكون محدوداً

نظرية هامة

البرهان:

($\Leftarrow$): بفرض A مؤثر خطي ومستمر ولنبرهن أنه محدود:

نفرض جدلاً أنه غير محدود، عندها من أجل أي $M > 0$، يوجد $x \in E_x$ بحيث:

$$\|Ax\| > M \|x\|$$

وبحالة خاصة عندما نختار $\boxed{M = n \in \mathbb{N}}$ يوجد $x_n \in E_x$ بحيث:

$$\|Ax_n\| > n \|x_n\|$$

لنضع:

$$\xi_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

لدينا : $\|\xi_n - \theta\| = \|\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\|$

$= \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot\|x_n\| = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

أي : $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

ولكن : $\|A\xi_n - A\theta\| = \|A\xi_n\| = \|A\left(\frac{1}{n\|x_n\|}\cdot x_n\right)\|$

$= \|\frac{1}{n\|x_n\|}Ax_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot n\|x_n\|$

$= 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

أي : $A\xi_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} A\theta$

وهذا ما يناقض كون A مستمراً، إذاً A محدود.

$(\Longrightarrow)$: نفرض A خطي محدود ولنبرهن انه مستمر :

$M>0 \; ; \; \|Ax\| \leq M\|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_1$

ونفرض $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ولنبرهن ان $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$

$\|Ax_n - Ax\| \underset{\text{خطي}}{=} \|A(x_n - x)\| \leq M\underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax \Rightarrow$ A مستمر

دورة

تعريف (نظيم مؤثر):

ليكن $A \in (E_x \to E_y)$، بالتعريف نسمي أصغر الأعداد M التي تحقق المتراجحة:

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

نظيم المؤثر A ونرمز له بـ $\|A\|$

من تعريف نظيم المؤثر نجد:

حفظ

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \ldots (1)$$

سنستنتج صيغتين ثابتتين لنظيم مؤثر

بما أن $\|A\|$ هو إحدى الأعداد M فإنه تحقق المتراجحة:

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \Rightarrow$$

حفظ

$$\underbrace{\|Ax\|}_{E_y \text{ نظيم في}} \leqslant \underbrace{\|A\|}_{\text{نظيم مؤثر}} . \underbrace{\|x\|}_{E_x \text{ نظيم في}} \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

لدينا:

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$$

لنضع: $\xi = \dfrac{x}{\|x\|}$

$$\|\xi\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$$

$$\|A\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|A\xi\|$$

وبالعودة للرمز المعتاد:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \ldots (2)$$

لدينا :

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| . \|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

وعندما $\|x\| \leqslant 1$:

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \quad ; \quad \forall x \in E_x \; ; \; \|x\| \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \Rightarrow \boxed{\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|} \quad \dots(3)$$

مهم

سؤال : أثبت أن مجموعة جميع المؤثرات الخطية والمحددة المعرفة على E_x والتي تأخذ قيمها في E_y هي فضاء خطي منظم . (أي لنتأكد من تحقيق شروط التنظيم لعبارة نظيم المؤثر).

الحل :

لدينا : $\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

واضح أن : $\|A\| \geqslant 0$ وعندما $\|A\| = 0$ لدينا : (1)

$$\|A\| = 0 \Rightarrow \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \quad ; \quad \forall x \in E_x \; ; \; x \neq \theta$$

$$\Rightarrow \|Ax\| = 0 \; ; \; \forall x \in E_x \Rightarrow Ax = \theta \; ; \; \forall x \in E_x \Rightarrow A = \theta$$

(المؤثر الصفري)

$$(2) \; \|\lambda A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\lambda (Ax)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|$$

$$(3) \; \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} \underset{\uparrow \text{ خطي منظم } E_y}{\leqslant} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \quad ; \quad \forall x \in E_x ; x \neq \theta$$

$$\leqslant \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$= \underbrace{\|A\| + \|B\|}_{\text{عدد}} \quad ; \quad \forall x \in E_x \; ; \; x \neq \theta$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq \theta} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

تحققت شروط النظيم فالفضاء $(E_x \to E_y)$ هو فضاء خطي منظم.

A محدود $\Rightarrow \exists M > 0 \; ; \; \|Ax\| \leq M\|x\| \; ; \; \forall x \in E_x$ *

مستمر $\Leftrightarrow$ محدود

A خطي

① A خطي

② مستمر (محدود) $\quad \|Ax\| \leq \dots \leq \underset{\|A\|}{M} \|x\|$

③ نظيم $\quad \Rightarrow \|A\| \leq M$

$\|A\| \geq M$
$\|A\| < M$

دورة

تمرين: برهن أن المؤثر: $\quad A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$$Ax(t) = \int_0^1 (t+s)\, x(s)\, ds$$

خطي ومستمر وأوجد نظيمه.

الحل:

$$\forall x_1(t), x_2(t) \in C[0,1] \Rightarrow A(x_1 + x_2) = \int_0^1 (t+s)\big(x_1(s) + x_2(s)\big)\, ds$$

$$= \int_0^1 (t+s)\, x_1(s)\, ds + \int_0^1 (t+s)\, x_2(s)\, ds$$

$$= Ax_1 + Ax_2$$

$\forall x \in C[0,1], \; \lambda \in R \Rightarrow$

$$A(\lambda x) = \int_0^1 (t+s)\, \lambda x(s)\, ds = \lambda \int_0^1 (t+s)\, x(s)\, ds = \lambda A x \Rightarrow \text{خطي } A$$

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1} |Ax(t)| = \max_{0\le t\le 1} \left|\int_0^1 (t+s)\, x(s)\, ds\right|$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 |t+s|\, |x(s)|\, ds \le \underbrace{\max_{0\le t\le 1} |x(s)|}_{\|x\|} \max_{0\le t\le 1} \underbrace{\int_0^1 (t+s)\, ds}$$

$$= \|x\| \max_{0\le t\le 1} \left[ts + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \|x\| \max_{0\le t\le 1} \left(t + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\|x\| \quad ; \quad \forall x \in C[0,1] \Rightarrow$$

$$\|Ax\| \le \frac{3}{2}\|x\| \quad ; \quad \forall x \in C[0,1] \Rightarrow$$

A محدود و $\|A\| \le \frac{3}{2}$

بما أن A خطي ومحدود بالمبرهنة السابقة يكون A مستمر

ولنوجد المتراجحة المعاكسة:

نأخذ عنصر نظيمه = 1
ونوجد صورته M
عنصر خاص

لنأخذ عنصراً خاصاً: $x_0(t) = 1 \quad ; \quad \forall t \in [0,1]$

$$\boxed{\|x_0\| = \max_{0\le t\le 1} |x_0(t)| = \max_{0\le t\le 1} |1| = 1}$$

$$\boxed{\|Ax_0\| = \left\|\int_0^1 (t+s)\, ds\right\| = \max \left|\int_0^1 (t+s)\, ds\right| = \frac{3}{2}} \quad M$$

$$\Rightarrow \|Ax_0\| = \frac{3}{2} \Rightarrow \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}_{\text{عام}} \ge \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{خاص}}$$

$$\Rightarrow \|A\| \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \|A\| = \frac{3}{2}$$

ملاحظة: لحساب المتراجحة المعاكسة لدينا طريقتين:

نأتي بعنصر خاص x_0 $\|x_0\| = 1$ و $\|Ax_0\| = M$

نأتي بعنصر خاص x_0 $\|x_0\| \ne 1$ و $\|Ax_0\| = M\|x_0\|$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = M \Rightarrow \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge M \Rightarrow \|A\| \ge M$$

جلسة /12/
2014-12-6

الموضوع

تعريف (التقارب بالنظيم):

نقول عن متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}$ أنها متقاربة بمفهوم النظيم إذا تحقق الشرط:

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أو:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N} ;\ n>n_0 \Rightarrow \|A_n - A\| < \varepsilon$$

تعريف (المتتالية الأساسية نقطياً):

نقول عن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ أنها أساسية نقطياً إذا كانت $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في E_y لكل $x\in E_x$.

تعريف (المتتالية الأساسية بالنظيم):

نقول عن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ أنها أساسية بمفهوم النظيم إذا كان:

$$\|A_n - A_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

أو:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N} ;\ n,m>n_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

مبرهنة: إذا كان E_x فضاء خطي منظم، و E_y فضاء باناخ فإن $\mathcal{B}(E_x \to E_y)$ هي فضاء باناخ بمفهوم النظيم. دورة

خطي تام

البرهان:
لتكن متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولنفرض أنها أساسية بمفهوم النظيم أي:

$$\|A_n - A_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \qquad (1)$$

أو:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N} ;\ n,m>n_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

خطوات الحل:
① A_n أساسية بالنظيم
② إيجاد A
③ خطي ومحدود
④ $A_n \xrightarrow[\text{بالنظيم}]{} A$

لنكن $x \in E_x$ مثبت.

$$\|A_n x - A_m x\| = \|\underbrace{(A_n - A_m)}_{\text{محدود}}x\| \leq \|A_n - A_m\|\,\|x\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

KORANI

أي أن $\{A_n x\}$ أساسية في E_y و E_y فضاء باناخ فرضاً فهي متقاربة إلى عنصر وليكن y ،
إذاً من أجل x المثبتة وجدنا $y \in E_y$ فيتشكل مؤثر ولنسميه A من E_x إلى E_y حيث :

$$\boxed{Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_n x} \qquad (*)$$

(2) لنبرهن أن A خطي :

$$\forall x_1, x_2 \in E_x \Rightarrow A(x_1+x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1+x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2$$

$$= Ax_1 + Ax_2$$

$$\forall x \in E_x, \lambda \in K \Rightarrow A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n x$$

$$= \lambda Ax$$

$\Rightarrow$ A خطي .

(3) محدود

لنبرهن أن A محدود :

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|$$

$$\Big| \|A_n\| - \|A_m\| \Big| \leq \|A_n - A_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

إذاً $\{\|A_n\|\}$ أساسية في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ تام فهي متقاربة فهي محدودة، أي يوجد $M>0$ حيث

$$\|A_n\| \leq M \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq M\|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

ومنه A محدود .

لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; n,m \geq n_0 \Rightarrow \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|(A_n - A_m)x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

الموضوع

بأخذ النهاية عندما $m \to \infty$:

$$\Rightarrow \|(A_n - A_m)x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

ومن أجل $\|x\| \leq 1$:

$$\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \quad ; \quad \forall x \in E_x \quad ; \|x\| \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\{A_n\}$ متقاربة للمؤثر A بمفهوم النظيم

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon)$$

تعريف (التقارب بانتظام) :

نقول عن متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}$ أنها متقاربة بانتظام إلى المؤثر A على المجموعة M

إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \underline{n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \ ; n > n_0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \varepsilon \quad ; \quad \underline{\forall x \in M}$$

مبرهنة : الشرط اللازم والكافي لكي تكون متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم هو أن تكون متقاربة بانتظام على كرة مغلقة $\bar{S}(\theta, r)$. دورة

البرهان :

$(\Leftarrow)$: نفرض $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم عندها :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

حيث $\bar{S}(\theta, r)$ كرة مغلقة ، ولنثبت أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام على $\bar{S}(\theta, r)$.

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| \quad ; \quad \forall \underbrace{x \in \bar{S}(\theta, r)}_{\|x\| \leq r}$$

$$\leq \|A_n - A\| . r < \frac{\varepsilon}{r} . r = \varepsilon$$

أي حصلنا على :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \varepsilon \quad ; \quad \forall x \in \bar{S}(\theta, r)$$

وهذا ما يعني أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام على كل كرة مغلقة $\bar{S}(\theta, r)$.

($\Longrightarrow$) : بفرض أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى A على كرة مغلقة $\bar{S}(\theta,r)$ ولنبرهن

أنها متقاربة بالنظيم : ($\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\|$) .

لدينا:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; n > n_0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < r.\varepsilon \ ; \ \forall x \in \bar{S}(\theta,r)$

$$\Rightarrow \|A_n(\frac{x}{r}) - A(\frac{x}{r})\| < \varepsilon \quad ; \quad \forall x \in \bar{S}(\theta,r)$$

بوضع $\xi = \frac{x}{r}$ عندها :

$$\|\xi\| = \|\frac{x}{r}\| = \frac{1}{r}\|x\| \leq \frac{r}{r} = 1$$

$$\Rightarrow \|A_n\xi - A\xi\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\|(A_n - A)\xi\| < \varepsilon \quad ; \quad \forall \xi \ ; \|\xi\| \leq 1$$

$$\Rightarrow \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|(A_n - A)\xi\| < \varepsilon \Rightarrow \|A_n - A\| < \varepsilon$$

وهذا ما يعني أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنظيم إلى A .

* من الواضح أن كل متتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم إلى A فإنها تكون متقاربة نقطياً .

سؤال : برهن أنه إذا كانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم إلى A فإنها تكون متقاربة نقطياً .

الحل :

بما أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم إلى A عندها :

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولنبرهن أنها متقاربة نقطياً .

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي : $A_n x \longrightarrow A_x$ لكل $x \in E_x$ وهو تقارب نقطي

★ إن العكس ليس صحيح ، ونناقش المثال التالي :

مثال : ليكن $E_x = E_y = H$ ولتكن $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ قاعدة في الفضاء H :

$$\forall x \in H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \;;\; c_i = (x, e_i) \;;\; i \geq 1$$

ولتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من مؤثرات الإسقاط على الفضاءات الجزئية $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$

حيث H_n هو الفضاء الجزئي المولد بالعناصر $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ،

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) . e_i$$

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i = x = Ix$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى المؤثر الواحدي I .

ولكن :

$$A_n e_{n+1} = \theta \quad , \quad A_{n+p} e_{n+1} = e_{n+1}$$

حيث :

$$e_{n+1} = 0.e_1 + 0.e_2 + \ldots + 0.e_n + 1.e_{n+1} + 0.e_{n+2} + \ldots$$

$$\|(A_n - A_{n+p}) e_{n+1}\| = \|A_n e_{n+1} - A_{n+p} e_{n+1}\| = \|\theta - e_{n+1}\|$$

$$= \|e_{n+1}\| = 1$$

$$\Rightarrow \|(A_n - A_{n+p}) e_{n+1}\| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A_{n+p}) x\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|A_n - A_{n+p}\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

فالمتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست أساسية بمفهوم النظيم فهي ليست متقاربة بمفهوم النظيم .

جلسة / 23 / .
2014 - 12 - 7

الموضوع

نتيجة

مبرهنة (باناخ شتينهاوس). ((دون برهان))

إذا كانت متتالية المؤثرات الخطية المحدودة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (1) أساسية بالمفهوم النقطي في كل نقطة x من فضاء باناخ (2) في E_x فإن متتالية النظائم $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ (3) محدودة.

دورة

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي تكون متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالمفهوم النقطي إلى المؤثر A في E_x فضاء باناخ هو أن تكون:

(1) $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة.

$\mathcal{L}(X)$

(2) أن تتقارب $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى A في كل نقطة x من مجموعة X التراكيب الخطية لها كثيفة في كل مكان في E_x. $(\overline{\mathcal{L}(X)} = E_x)$

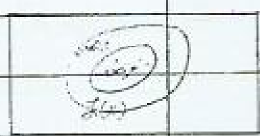
البرهان:

($\Leftarrow$): نفرض $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى A في E_x. عندها تكون $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية نقطياً
ح ب مبرهنة باناخ شتينهاوس تكون متتالية النظائم $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة.
ومن جهة ثانية تكون $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى A في كل $x \in X$.

($\Rightarrow$): نفرض الشرطين و محققان. ولنبرهن أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً في كل E_x.

- واضح من الشرط أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى A نقطياً في كل x من X.
- لنأخذ $y \in \mathcal{L}(X)$ عندها:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \;;\; x_i \in X \;;\; 1 \le i \le m$$



$$\lim_{n\to\infty} A_n y = \lim_{n\to\infty} A_n\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_n x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lim A_n \underset{X}{x_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A x_i$$

$$= A\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = Ay$$

إذاً $\{A_n\}_{i=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى A في كل $y \in \mathcal{L}(X)$.

- ليكن $x \in E_x$. من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\xi \in \mathcal{L}(x)$ بحيث :

$$\|x - \xi\| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

وذلك لأن $\overline{\mathcal{L}(x)} = E_x$. حيث : $\forall n \geq 1$; $\|A_n\| \leq M$ و $M > 0$

$$\begin{aligned}
\|A_n x - A x\| &= \|A_n x - A_n \xi + A_n \xi - A\xi + A\xi - Ax\| \\
&= \|A_n(x - \xi) + (A_n - A)\xi - A(x - \xi)\| \\
&\leq \|A_n(x - \xi)\| + \|(A_n - A)\xi\| + \|A(x - \xi)\| \\
&\leq \|A_n\| \|x - \xi\| + \|A_n \xi - A\xi\| + \|A\| \|x - \xi\| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M}
\end{aligned}$$

وذلك لأن $\xi \in \mathcal{L}(x)$ و $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى A من كل نقطة $\xi = \mathcal{L}(x)$ عندها يمكن جعل :

$$\|A_n \xi - A\xi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

أي : $A_n x \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} Ax$ من كل $x \in E_x$.

المؤثر المعاكس :

إذا كان المؤثر $A : E_x \to E_y$ مكان غامر ومتباين (تقابل) عندها يكون A^{-1} موجود .

$$A^{-1} : E_y \to E_x$$

A^{-1} مطبق من E_y وأخذ قيمه في E_x .

سنبرهن أنه إذا كان A خطي فإن A^{-1} خطي :

$$\forall y_1, y_2 \in E_y \quad ; \quad A^{-1} y_1 = x_1 \quad \text{و} \quad A^{-1} y_2 = x_2$$

نضع :

$$x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1} y_1 - A^{-1} y_2$$
$$Ax = A[A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1} y_1 - A^{-1} y_2]$$

$$A^{-1} \text{ "خطي" } = y_1 + y_2 - y_1 - y_2 = \theta \Rightarrow Ax = \theta$$

وبما أن A متباين (لأن A^{-1} موجود) فإن $x = \theta$ أي:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ جمعي}$$

$$\forall y \in E_y \, , \lambda \in K \; ; \; A^{-1}y = x$$

$$z = A^{-1}(\lambda x) - \lambda A^{-1}x$$

$$Az = A\left[A^{-1}(\lambda x) - \lambda A^{-1}x\right] = \lambda x - \lambda x = \theta \Rightarrow z = \theta$$

$$\Rightarrow A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1} \text{ متجانس} \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ خطي}$$

دورة

مبرهنة: لتكن $A : E_x \to E_y$ مؤثر خطي من الفضاء الخطي المنتظم E_x على الفضاء الخطي المنتظم E_y. عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لوجود A^{-1} وخطيته ومحدوديته هو أن يوجد ثابت $m > 0$ بحيث:

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\| \quad ; \; \forall x \in E_x$$

البرهان:

$(\Leftarrow)$: موجود وخطي ومحدود. عندها يوجد ثابت $M > 0$ بحيث:

$$\|A^{-1}y\| \leqslant M\|y\| \quad ; \; \forall y \in E_y$$

وبوضع: $A^{-1}y = x$ عندها: $y = Ax \Leftarrow$

$$\|x\| \leqslant M\|Ax\| \quad ; \; \forall x \in E_x$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \geqslant \frac{1}{M}\|x\| \quad ; \; \forall x \in E_x$$

وهو الشرط المطلوب حيث:

$$0 < m = \frac{1}{M}$$

$(\Rightarrow)$: بفرض وجود ثابت $m > 0$ بحيث:

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\| \quad ; \; \forall x \in E_x$$

ولنبرهن أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود

نفرض $Ax = \theta$ عندها:

$$0 = \|\theta\| = \|Ax\| \geqslant m\|x\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$$

ومنه A متباين وبالتالي A^{-1} موجود.

بما أن A خطي و A^{-1} موجود فإن A^{-1} خطي أيضاً.

بما أن:

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \;;\; \forall x \in E_x$$

وبوضع $Ax=y$ عندها $x=A^{-1}y$.

$$\|y\| \geq m\|A^{-1}y\| \;;\; \forall y \in E_y$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \;;\; \forall y \in E_y$$

وهذا يعني أن: A^{-1} محدود $0<M=\frac{1}{m}$

ومنه A^{-1} موجود وخطي ومحدود.

هام تمرين: لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتان من المؤثرات الخطية والمحدودة من $(E \to E)$ ولنفرض:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad , \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B$$ وذلك بمفهوم النظيم.

أثبت أن:

$$A_nB_n \xrightarrow[n\to\infty]{} AB$$ بمفهوم النظيم

الحل:

$$\|A_nB_n - AB\| = \|A_nB_n - AB_n + AB_n - AB\|$$
$$= \|(A_n-A)B_n + A(B_n-B)\|$$
$$\leq \|(A_n-A)B_n\| + \|A(B_n-B)\|$$
$$\leq \underbrace{\|A_n-A\|}_{\to 0}\,\|B_n\| + \|A\|\,\underbrace{\|B_n-B\|}_{\to 0}$$ "حسب مبرهنة إثباتي"

بما أن $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم فهي أساسية بمفهوم النظيم فهي أساسية نقطياً وحسب مبرهنة باناخ شتاينهاوس يكون متتالية النظائم $\{\|B_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة، أي يوجد ثابت $0<M$ بحيث: $\|B_n\| \leq M \;;\; \forall n \geq 1$ عندها:

$$\|A_nB_n - AB\| \leq \underbrace{\|A_n-A\|}_{\to 0}M + \|A\|\,\underbrace{\|B_n-B\|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه $\{A_nB_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بمفهوم النظيم إلى AB

تمرين: إذا كان A, B مؤثرين خطيين ومحدودين معرفين في E فضاء متجهي E

فإن AB محدود و $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$

الحل:

$\forall x \in E$; $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \underset{A\ \text{محدود}}{\leqslant} \|A\|\,\|Bx\| \underset{B\ \text{محدود}}{\leqslant} \underbrace{\|A\|\,\|B\|}\,\|x\|$

$\Rightarrow$ AB محدود $\leqslant \|A\|\,\|B\|$

جلسة /24/ :
2014 - 12 - 12

الموضوع

هامة (انتقال شي)

مبرهنة :

إذا كان E_y و E_x فضاء باناخ عندها فإن مجموعة جميع المؤثرات الخطية والمحدودة المعرفة على E_x والتي تأخذ قيمها في E_y هو فضاء باناخ تام بالمفهوم النقطي.

البرهان :

لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة ولنفرض أنها أساسية نقطياً ، لتكن x عنصر مثبت من E_x . إن $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في E_y (لأن $\{A_n\}$ أساسية نقطياً) .

و E_y فضاء باناخ فهي متقاربة ولتكن إلى y ، عندها نشكل مؤثر نسميه A :

$$A : E_x \longrightarrow E_y$$

نقطات لحل:
① A_n أساسية نقطياً
② A تشكيل
③ A محدود
④ $A_n \to A$ بالمفهوم النقطي

$$Ax = y = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

$$\forall x_1, x_2 \in E_x \Rightarrow A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2$$

$$= Ax_1 + Ax_2 \Rightarrow A \text{ جمعي}$$

$$\forall x \in E_x, \lambda \in K \Rightarrow A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x$$

$$= \lambda Ax \Rightarrow A \text{ متجانس}$$

$$\Rightarrow A \text{ خطي}$$

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \, \|x\|$$

النظيم تابع مستمر — محدودة A_n

بما أن E_x فضاء باناخ و $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية نقطياً فإن متتالية النظائم $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة حسب مبرهنة باناخ شتينهاوس ، أي يوجد M حيث:

KORANI

$$\|A_n\| \leq M\|x\| \quad ; \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq M\|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_x \Rightarrow$$ A محدود

واضح من طريقة تشكيل المؤثر A ($Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$)

أن المؤثر A هو نهاية لمتتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ وذلك بالمفهوم النقطي وهو المطلوب.

سؤال دورة: عرف البيان للمؤثر A أثبت أن المؤثر المغلق وبرهن أنه إذا كان A مغلقاً فإن بيانه مجموعة مغلقة؟

دورة **المؤثرات المغلقة والبيانات المغلقة:**

بفرض أن X, Y مجموعتين كيفيتين و $A : D(A) \subset X \to Y$ تطبيق. نسمي مجموعة الأزواج المرتبة $\langle x, Ax \rangle$ حيث $x \in D(A)$ بيان التطبيق A ونرمز له بـ $G_r(A)$.

$$G_r(A) = \{\langle x, Ax \rangle \; ; \; x \in D(A)\} \subset X \times Y \simeq X \oplus Y$$

إن المجموع المباشر لفضائين خطيين منظمين X, Y نحصل منه على فضاء خطي إذا عرفنا عليه عمليتي جمع وضرب بكمية سلمية على النحو:

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, \lambda y \rangle$$

عندها يكون: $X \oplus Y$ فضاء خطي

مبرهنة: ليكن X, Y فضائين خطيين منظمين $A : D(A) \subset X \to Y$ عندها:

A خطي $\Leftrightarrow$ $G_r(A)$ متنوعة خطية في $X \oplus Y$

البرهان:

($\Leftarrow$): بفرض A خطي ولنبرهن أن $G_r(A)$ متنوعة خطية.

$$\forall \langle x_1, Ax_1 \rangle, \langle x_2, Ax_2 \rangle \in G_r(A) \quad ; \quad x_1, x_2 \in D(A)$$

$$\Rightarrow \langle x_1, Ax_1 \rangle + \langle x_2, Ax_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, Ax_1 + Ax_2 \rangle$$

"A خطي" $= \langle x_1 + x_2, A(x_1 + x_2) \rangle \in G_r(A)$

$$\forall \langle x, Ax\rangle \in G_r(A),\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda\langle x, Ax\rangle = \langle \lambda x, \lambda Ax\rangle$$

$$\text{"A خطي"} = \langle \lambda x, A\lambda x\rangle \in G_r(A)$$

$\Rightarrow G_r(A)$ متنوعة خطية

($\Longrightarrow$) : بفرض $G_r(A)$ متنوعة خطية ولنبرهن أن A خطي:

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \Rightarrow \langle x_1, Ax_1\rangle , \langle x_2, Ax_2\rangle \in G_r(A)$$

وبما أن $G_r(A)$ متنوعة خطية عندها:

$$\langle x_1, Ax_1\rangle + \langle x_2, Ax_2\rangle \in G_r(A)$$

$$\Rightarrow \langle x_1 + x_2, Ax_1 + Ax_2\rangle \in G_r(A)$$

ومن تعريف بيان مؤثر ما يكون:

$$Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$$

ومنه A جمعي

$$\forall x \in D(A),\ \lambda \in K \Rightarrow \langle x, Ax\rangle \in G_r(A)$$

وبما أن $G_r(A)$ متنوعة خطية فإن:

$$\lambda\langle x, Ax\rangle \in G_r(A) \Longrightarrow \langle \lambda x, \lambda Ax\rangle \in G_r(A)$$

وحسب تعريف البيان:

$$\lambda Ax = A(\lambda x)$$

ومنه A متجانس ومنه A خطي

تعريف: ليكن X, Y فضائين خطيين منظمين، يمكن تعريف نظيم في الفضاء الخطي $X \oplus Y$ بإحدى العلاقات:

مثلا (1) $\|\langle x, y\rangle\| = \|x\| + \|y\|$

(2) $\|\langle x, y\rangle\| = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$; $p \geq 1$

(3) $\|\langle x, y\rangle\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

مبرهنة: إذا كان X, Y فضاءين باناخ فإن $X \oplus Y$ فضاء باناخ.

البرهان:

لتكن المتتالية $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $X \oplus Y$ حيث:

$$z_n = \langle x_n , y_n \rangle$$

ولنفرض أنها أساسية، أي:

$$\| z_n - z_m \| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \Rightarrow \| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle \| =$$

$$= \| \langle x_n - x_m , y_n - y_m \rangle \| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\| x_n - x_m \| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \quad \& \quad \| y_n - y_m \| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

إذاً $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في X و X فضاء باناخ فهي متقاربة إلى عنصر وليكن x

وكذلك $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في Y و Y فضاء باناخ فهي متقاربة إلى عنصر وليكن y

نشكل عنصر $z = \langle x, y \rangle \in X \oplus Y$

$$\| z_n - z \| = \| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \| = \| \langle x_n - x , y_n - y \rangle \|$$

$$= \underbrace{\| x_n - x \|}_{0 \text{ لأنها متقاربة}} + \underbrace{\| y_n - y \|}_{0 \text{ لأنها متقاربة}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ومنه $X \oplus Y$ باناخ.

دورة

تعريف (المؤثر المغلق):

ليكن A مؤثر $A : D(A) \subset X \to Y$ نقول عن هذا المؤثر أنه مغلق إذا تحقق الشرط:

$$\left. \begin{array}{l} D(A) \ni x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{فرض (1)}} x \\ A x_n \xrightarrow[\text{فرض (2)}]{} y \end{array} \right\} \Rightarrow x \in D(A) \ \& \ y = A x$$

دورة
أكثر من دورة

مبرهنة: إذا كان A مؤثر خطي عندها الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثر A مغلقاً هو أن بيانه $G_r(A)$ مغلقاً.

$G_r(A)$ فضاء جزئي
شروط الفضاء مغلقة

البرهان:

($\Leftarrow$): نفرض A مغلق ولنبرهن أنه بيانه $G_r(A)$ مغلقاً:

لتكن $\langle x,y\rangle$ نقطة تراكم لـ $G_r(A)$، عندها توجد متتالية من $G_r(A)$

ولتكن $\{\langle x_n, Ax_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $D(A)\ni x_n$ ولنبرهن أن: $\langle x,y\rangle \in G_r(A)$.

$$\langle x_n, Ax_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x,y\rangle \Rightarrow \|\langle x_n, Ax_n\rangle - \langle x,y\rangle\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\|\langle x_n - x, Ax_n - y\rangle\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|x_n - x\| + \|Ax_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \& \quad \|Ax_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow D(A)\ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \& \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \Rightarrow A \text{ مغلق}$$

وبما أن A مؤثر مغلق فإن:

$$x\in D(A) \quad \& \quad y = Ax$$

$$\langle x,y\rangle = \langle x, Ax\rangle \in G_r(A) \Rightarrow G_r(A) \text{ مغلق}$$

($\Rightarrow$): نفرض $G_r(A)$ مغلق ولنبرهن أن A مغلق.

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $D(A)$ ولنفرض أنها متقاربة إلى عنصر ما x.

ولنفرض أن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى y ولنبرهن أن:

$$x\in D(A) \quad \& \quad y = Ax$$

لدينا: $\{\langle x_n, Ax_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $G_r(A)$

$$\| \underbrace{\langle x_n , Ax_n \rangle}_{G_r(A)} - \langle x,y \rangle \| = \| \langle x_n - x , Ax_n - y \rangle \|$$

$$= \underbrace{\| x_n - x \|}_{0} + \underbrace{\| Ax_n - y \|}_{0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

إذاً $\{\langle x_n, Ax_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $G_r(A)$ ومتقاربة إلى العنصر $\langle x,y \rangle$ و $G_r(A)$ مغلقة فرضاً عندها : $\langle x,y \rangle \in G_r(A)$

حسب تعريف البيان :

$$\underbrace{x \in D(A)}_{(1)} \quad \& \quad \underbrace{y = Ax}_{(2)}$$

ومنه A مغلقة.

جلسة /١٢٥/ :
2014 - 12 - 13

الموضوع

"زين والعدش"

دورة

"المرتين"

مثال : أثبت أن مؤثر الاشتقاق $A : \frac{d}{dt}$ مؤثر مغلق (1) إلا أنه غير محدود (2).

الحل :

لنبرهن أن : "(2) هذا غير محدود"

$$A : \underbrace{C_0[0,1]}_{D(A)} \subset C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

حيث $C_0[0,1]$ مجموعة كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[0,1]$.

لنضع :

$$\boxed{x_n(t) = t^n}$$

$$\|x_n\| = \|t^n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t^n| = 1$$

$$Ax_n = x_n' = (t^n)' = n t^{n-1}$$

$$\|Ax_n\| = \|n t^{n-1}\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |n t^{n-1}| = n$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq n \Rightarrow \|A\| \geq n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يعني أن A مؤثر غير محدود

* لنبرهن أن : "(1) هذا مؤثر مغلق"

$A : C^{(1)}[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$ (*) مغلقة :

لنفرض أن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $C^{(1)}[0,1]$ متقاربة إلى عنصر $x(t)$

ولنفرض أن $\{\underbrace{Ax_n(t)}_{\text{مشتقة}}\}_{n=1}^{\infty}$ $\underbrace{\text{متقاربة}}_{\text{بانتظام}}$ إلى عنصر $y(t)$

ولنبرهن أن : $x(t) \in C^{(1)}[0,1]$ و $Ax = y$

قابلة للاشتقاق   مشتقتها مستمرة

KORANI

بما أن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القابلة للإشتقاق من المرتبة الأولى ومشتقاتها مستمرة ومتقاربة بانتظام إلى التابع $x(t)$ عندها (حسب خواص سابقة).

$$x'(t) = \lim_{n\to\infty} x_n'(t) = \lim_{n\to\infty} A x_n(t) = y(t)$$

$$\Rightarrow x'(t) = y(t) \Rightarrow Ax(t) = y$$

واضح أن $x(t)$ تابع قابل للاشتقاق ولنبرهن أن $x'(t)$ مستمر.

$Ax_n(t) = x_n'(t)$ متتالية من التوابع المستمرة ومتقاربة بانتظام إلى $y(t) = x'(t)$

وحسب مبرهنة سابقة يكون تابع النهاية أيضاً مستمراً، أي: $y(t) = x'(t)$ مستمرة

عندها: $x \in C^{(1)}[0,1]$ ومنه،

$A = \frac{d}{dt}$ مؤثر مغلق

مبرهنة: ليكن $A: D(A) \subseteq X \to Y$ خطي محدود و $D(A)$ جزئي $\Rightarrow$ A مغلق

البرهان:

لنفرض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $D(A)$ متقاربة إلى عنصر x.

ولنفرض أن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى عنصر y، ولنبرهن:

$Ax = y$ و $x \in D(A)$

بما أن $D(A)$ فضاء جزئي فإن: $x \in D(A)$.

بما أن A خطي محدود فهو مستمر:

$$y = \lim A x_n = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Ax \Rightarrow A \text{ مغلق}$$

مبرهنة: إذا كان المؤثر A خطي ومغلق $A: D(A) \subseteq X \to Y$ وكان A^{-1} موجوداً فإن: A^{-1} مغلق.

دورة هامة

البرهان:

بما أن A مغلق، وبمبرهنة سابقة يكون بيانه $G_r(A)$ مجموعة مغلقة.

$$G_r(A) = \{\langle x, Ax\rangle ;\ x \in D(A)\} \subset X \oplus Y$$

لنعرف التطبيق :

$$B\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \;;\; \forall \langle x,y\rangle \in X\oplus Y$$

ولنبرهن أن B ايزومتري :

$$\|B\langle x,y\rangle\| = \|\langle y,x\rangle\| = \|y\|+\|x\|$$

$$= \|x\|+\|y\| = \|\langle x,y\rangle\| \;;\; \forall\langle x,y\rangle\in X\oplus Y$$

فإن B ايزومتري :

$$B: X\oplus Y \longrightarrow Y\oplus X$$

لدينا A^{-1} موجود و $A: D(A)\longrightarrow R(A)$ و $A^{-1}: R(A)\longrightarrow D(A)$

لدينا B تطبيق ايزومتري و $G_r(A)$ مجموعة مغلقة عندها $B(G_r(A))$ مغلقة.

$$B(G_r(A)) = \{B\langle x,Ax\rangle \;;\; x\in D(A)\}$$

B ايزومتري ← تقابل / شرط $\|x\|=\|Bx\|$

$$= \{\langle Ax,x\rangle \;;\; x\in D(A)\} \;;\; Ax=y \Rightarrow x=A^{-1}y$$

$$= \{\langle y, A^{-1}y\rangle \;;\; y\in R(A)\}$$

فرضنا A^{-1} $\quad D(A^{-1})=R(A)$

$$= G_r(A^{-1})$$ مغلقة

ومن المبرهنة السابقة فإن A^{-1} مغلقة (لأن بيانه $G_r(A^{-1})$ مجموعة مغلقة.

مبرهنة : إذا كان $A: D(A)\subseteq X \longrightarrow Y$ خطي ومحدود ومغلق وكان Y فضاء باناخ $\Leftarrow$ $D(A)$ فضاء جزئي مغلق في X.

البرهان :

لتكن x نقطة تراكم للمجموعة $D(A)$ ، عندها توجد متتالية من عناصر $D(A)$

ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x

$$D(A)\ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{①} x$$

ولنبرهن أن $x \in D(A)$: (بالاستفادة من كون A مغلق)

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

إذاً $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في Y و Y فضاء باناخ فهي متقاربة إلى عنصر وليكن y.

$$Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$$

إذاً $D(A) \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ، $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

وبما أن A مؤثر مغلق فإن: $Ax = y$ ، $x \in D(A)$

إذاً $D(A)$ فضاء جزئي.

مبرهنة: (البيان المغلق).

ليكن المؤثر الخطي: $A: X \to Y$ حيث X, Y فضاءا باناخ.

إذا كان A مغلقاً $\Leftarrow$ A محدود.

البرهان:

بما أن X, Y فضاءا باناخ فإن: $X \oplus Y$ فضاء باناخ

بما أن A مغلق فإن بيانه $G_r(A)$ مجموعة مغلقة (فضاء جزئي) (باناخ)

لنعرف التطبيق المساعد B.

$$B: \overset{\text{باناخ}}{G_r(A)} \to \overset{\text{باناخ}}{X}$$

$$B = \langle x, Ax\rangle = x$$

لنبرهن أن B تقابلي ومحدود وخطي.

$$B\langle x, Ax\rangle = \theta \Rightarrow x = \theta \Rightarrow Ax = A\theta = \theta$$

$\Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \langle \theta, \theta\rangle \Rightarrow$ B متباين

$\forall x \in X \Rightarrow \exists \langle x, Ax\rangle \in G_r(A)$; $B\langle x, Ax\rangle = x \Rightarrow$ B غامر

ومنه B تقابلي أي: B^{-1} موجود.

الموضوع ....

$$\|B\langle x, Ax\rangle\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|\langle x, Ax\rangle\|$$

$$\Rightarrow \|B\langle x, Ax\rangle\| \leq 1 . \|\langle x, Ax\rangle\| \quad , \quad \forall \langle x, Ax\rangle \in G_r(A)$$

ومنه B محدود

$$\forall \langle x_1, Ax_1\rangle , \langle x_2, Ax_2\rangle \in G_r(A) \Rightarrow$$

$$B(\langle x_1, Ax_1\rangle + \langle x_2, Ax_2\rangle) = B(\langle x_1 + x_2, Ax_1 + Ax_2\rangle)$$

$$= x_1 + x_2$$

$$= B(\langle x_1, Ax_1\rangle) + B(\langle x_2, Ax_2\rangle)$$

$$\forall \langle x, Ax\rangle \in G_r(A) , \lambda \in K \Rightarrow B(\lambda\langle x, Ax\rangle) = B\langle \lambda x, \lambda Ax\rangle$$

$$= \lambda x = \lambda B\langle x, Ax\rangle$$

[illegible]
① إيجاد B
② [illegible]
③ [illegible]

$\Rightarrow$ B خطي

حسب مبرهنة باناخ فإن B^{-1} خطي ومحدود.

(B تقابلي - خطي - محدود - منطلقة ومستقرة فضاء باناخ)

ومنه B^{-1} مستمر

* لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر X ولنفرض أنها متقاربة إلى x ولنفرض أن:

$$Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$$

بما أن B^{-1} مستمر فإن:

$$(B^{-1} : X \to G_r(A)) \quad B^{-1}x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B^{-1}x$$

$$\Rightarrow \langle x_n, Ax_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, Ax\rangle$$

$$\|\langle x_n, Ax_n\rangle - \langle x, Ax\rangle\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta = \langle \theta, \theta\rangle$$

$$\langle x_n - x, Ax_n - Ax\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta \Rightarrow Ax_n - Ax \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta \Rightarrow$$

$$Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax \Rightarrow$$ A مستمر $\Rightarrow$ A محدود

جلسة /26/ :
2014 - 12 - 14

الموضوع

تمارين الفصل الثالث :

تمرين (1) : ليكن X و Y فضائين خطيين ولكن $A: X \to Y$ مؤثر خطي ولتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جملة من العناصر المنتمية لـ $D(A)$ والمرتبطة خطياً برهن أن جملة العناصر $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ مرتبطة خطياً.

الحل :

بما أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مرتبطة خطياً فإنه توجد مجموعة من الثوابت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ بحيث: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$

وحيث λ_i ليست جميعها أصفار.

لنأخذ صورة الطرفين وفق A :

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = A0 \underset{\uparrow_{A \text{ خطي}}}{=} 0$$

$$\text{"}A \text{ خطي"} \Rightarrow \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_n A_n = 0$$

وحيث أن λ_i ليست جميعها أصفار فإن العناصر $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ مرتبطة خطياً في Y .

تمرين (2) : ليكن X و Y فضائين خطيين وليكن $A: X \to Y$ مؤثراً خطياً . برهن أن صورة أي مجموعة محدبة في $D(A)$ هي مجموعة محدبة في الفضاء Y .

البرهان :

لتكن M مجموعة محدبة واقعة في $D(A)$ ولنبرهن أن $A(M)$ مجموعة محدبة في Y .

$$\forall y_1, y_2 \in A(M) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M \ ; \ y_1 = Ax_1 \ , \ y_2 = Ax_2$$

ولنشكل القطعة المستقيمة الواصلة بين y_1 و y_2 :

$$z = (1-t)y_1 + ty_2 \ ; \ 0 \leq t \leq 1$$

ولنبرهن أن $z \in A(M)$:

$$z = (1-t)Ax_1 + tAx_2 \underset{\uparrow_{\text{خطي}}}{=} A[(1-t)x_1 + tx_2]$$

KORANI

$0 \leq (a-b)^2$

$a \leq a^2+b^2-2ab$

$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2$

201

الموضوع

علماً أن $x_1, x_2 \in M$ و A محدبة فإن M محدبة فإن

$(1-t)x_1 + t x_2 \in M$ لكل $0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow z \in A(M) \quad ; \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow A(M)$ محدبة

تمرين (3): برهن أن المؤثر $A: l_2 \to l_2$ المعرف بالعلاقة:

$$Ax = (3\xi_1, \xi_2+\xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \dots)$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_3, \dots) \in l_2$$

محدد. حيث

الحل:

$$\forall x \in l_2 \Rightarrow \|Ax\|^2 = (3\xi_1)^2 + (\xi_2+\xi_3)^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots$$

$$= 9\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots$$

$$\leq 9\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + (\xi_2^2+\xi_3^2) + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots$$

$$= 9\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \dots$$

$$\leq 9(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots)$$

$$= 9\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|^2 \leq 9\|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\| \leq 3\|x\| \quad ; \forall x \in l_2$$

$$\Rightarrow A \text{ محدد} \quad , \quad \|A\| \leq 3$$

تمرين (4): احسب نظيم المؤثر $A: l_1 \to l_1$ المعرف بالعلاقة:

$$Ax = (3\xi_1, \xi_2+\xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \dots)$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_1$$

حيث

الحل:

$$\forall x \in l_1 \Rightarrow \|Ax\| = |3\xi_1| + |\xi_2+\xi_3| + |\xi_3| + |\xi_4| + \dots$$

$$\leq 3|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_3| + |\xi_4| + \dots$$

$$= 3|\xi_1| + |\xi_2| + 2|\xi_3| + |\xi_4| + \dots$$

$$\leq 3(|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| + \dots) = 3\|x\|$$

KORANI

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq 3\|x\| \Rightarrow A \text{ محدود } , \boxed{\|A\| \leq 3} \quad \dots (1)$$

«عندما تكون الفضاء ضمن تتابعات تحت النظيم الرابع»

لنختار العنصر الخاص :

$$x_0 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\|x_0\| = |1| + |0| + |0| + \dots = 1$$

$$Ax_0 = (3, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow \|Ax_0\| = |3| + |0| + |0| + \dots = 3$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq 3 \Rightarrow \boxed{\|A\| \geq 3} \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$\|A\| = 3$$

دورة

تمرين : احسب نظيم المؤثر A المعرف في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ بالعلاقة :

(a) $$A\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right)$$

الحل :

$$\forall \varphi(t) \in \mathcal{L}^p[0,1] \Rightarrow \|A\varphi\| = \left(\int_0^1 |A\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^1 \left|\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

لنجري تغيير في المتحول : $s = \frac{t}{2} \Rightarrow dt = 2ds$

عندما $t : 0 \to 1 \Rightarrow s : 0 \to \frac{1}{2}$

$$\|A\varphi\| = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi(s)|^p 2ds\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \|\varphi\| \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{L}^p[0,1]$$

$$\Rightarrow A \text{ محدود } , \boxed{\|A\| \leq 2^{\frac{1}{p}}} \quad \dots (I)$$

لنختار النظير الخاص:

$$G_0(t)=\begin{cases}1 & ; 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 0 & ; \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases} \neq 0$$

$$\Rightarrow \|G_0\|\neq 0$$

$$\|AG_0\|=\left(\int_0^1 |AG_0(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1 |G_0(\tfrac{t}{2})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

بإجراء تغيير في المتحول نجد:

$$dt=2\,ds \quad , \quad \frac{t}{2}=s$$

وعندما $t:0\to 1$ فإن $s:0\to \frac{1}{2}$

$$\|AG_0\|=\left(2\int_0^{\frac{1}{2}} |G_0(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |G_0(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}\|G_0\|$$

لأن G_0 معدوم في المجال $]\frac{1}{2},1]$

$$\Rightarrow \frac{\|AG_0\|}{\|G_0\|}=2^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \sup_{\|G\|\neq 0}\frac{\|AG\|}{\|G\|}\geq 2^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \|A\|\geq 2^{\frac{1}{p}} \quad ...(\mathrm{II})$$

من (I) و (II) نجد:

$$\|A\|=2^{\frac{1}{p}}$$

(b) $AG(t)=G\left(\frac{2t+1}{3}\right)$

الحل:

$$\forall G\in \mathcal{L}^p[0,1] \Rightarrow \|AG\|=\left(\int_0^1 |AG(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^1 \left|G\left(\tfrac{2t+1}{3}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

لنجري تغيير في المتحول:

$$dt=\frac{3}{2}\,ds \text{ ؛ ومنه } s=\frac{2t+1}{3}$$

وعندما $t: 0 \to 1$ فإن: $s: \frac{1}{3} \to 1$ نعوض:

$$\|AG\| = \left(\int_{\frac{1}{3}}^{1} |G(s)|^p \tfrac{3}{2}\, ds\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{3}}^{1} |G(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} |G(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|G\|$$

$$\Rightarrow \|AG\| \leq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|G\| \quad ; \forall G \in \mathcal{L}^p[0,1] \Rightarrow$$

$$\|A\| \leq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \dots \text{(I)}$$ و A محدود

لنختار النظم الخاص:

$$G_0(t) = \begin{cases} 1 & ; \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \\ 0 & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \end{cases} \neq \theta \Rightarrow \|G_0\| \neq 0$$

$$\|AG_0\| = \left(\int_0^1 |AG_0(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left|G\left(\tfrac{2t+1}{3}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

لنجري تغيير في المتحول: $s = \frac{2t+1}{3}$ ومنه $dt = \frac{3}{2} ds$

عندما $t: 0 \to 1$ فإن: $s: \frac{1}{3} \to 1$ نعوض:

$$\|AG_0\| = \left(\tfrac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} |G_0(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\text{G_0 معدوم في المجال $[0,\frac{1}{3}]$}}{=} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |G_0(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|G_0\| \Rightarrow \frac{\|AG_0\|}{\|G_0\|} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\sup_{\|G\| \neq 0} \frac{\|AG\|}{\|G\|} \geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \|A\| \geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \dots \text{(II)}$$

من (I) و (II) نجد:

$$\|A\| = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

تمرين: احسب نظيم المؤثر $A: \mathbb{R}^n \to \ell_2$ المعرف بالعلاقة :

هام

$$Ax = \left(\frac{\xi_1}{1}, \dots, \frac{\xi_n}{1}, \frac{\xi_1}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{2}, \dots, \frac{\xi_1}{k}, \dots, \frac{\xi_n}{k}, \dots\right)$$

حيث :

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

الحل:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|Ax\|^2_{\ell_2} = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{1^2} + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{2^2}$$

$$+ \dots + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{k^2} + \dots$$

$$= (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) \quad \|x\|^2_{E_n}$$

بالجذر $\Rightarrow \|Ax\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \quad ; \forall x \in E_n$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \forall x \in E_n \ ; x \neq \theta$$

$$\sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|A\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

تمرين: ابحث في التقارب المتنظم (النظيم) والتقارب النقطي لمتتالية المؤثرات:

① $E = l_2$; $A_n = \left(\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_2}{n}, \dots, \frac{\xi_k}{n}, \dots\right)$

الحل:

إن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ متقاربة نقطياً إلى المؤثر الصفري

نقطي

لأن: متقاربة غير متقاربة

غير متقاربة بالنظم متقاربة متقاربة بالنظم $\|A_n x - 0\| = \|A_n x\| = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{n}\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

من أجل كل نقطة مثبتة $x \in l_2$

ايضا:

$$\|A_n x\| = \frac{1}{n}\|x\| \quad ; \forall x \in l_2$$

$$\frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \frac{1}{n} \quad ; \forall x \in l_2 \; ; x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\sup_{\|x\|\neq 0}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \frac{1}{n} \Rightarrow \|A_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنظيم إلى المؤثر الصفري

② $E = l_2$; $A_n x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$

الحل:

إن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نقطياً إلى المؤثر المطابق (الواحدي) لأن:

$$\|A_n x - I x\| = \|(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) - (\xi_1, \xi_2, \dots)\|$$

$$= \|(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ مرة}}, -\xi_{n+1}, -\xi_{n+2}, \dots)\|$$

$$= \left(\underbrace{|0|^2 + |0|^2 + \dots + |0|^2}_{n \text{ مرة}} + |\xi_{n+1}|^2 + |\xi_{n+2}|^2 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

لأنه يمثل الجذر التربيعي للمتسلسلة $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ المتقاربة (لأن $x\in l_2$)

لكنها ليست متقاربة بالنظم لأن :

$$x_0 = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n \text{ مرة}},1,0,\dots) = e_{n+1}$$

$$\|x_0\| = \|e_{n+1}\| = 1$$

$$\|(A_n - I)x_0\| = \|A_n x_0 - I x_0\|$$

$$= \|(0,0,\dots,0,0,\dots) - (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)\|$$

$$= \|(0,0,\dots,0,-1,0,0,\dots)\| = 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A_n - I)x\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|A_n - I\| \geq 1 \Rightarrow \|A_n - I\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$ أي ليست متقاربة بالنظم

جلسة 12/
2014 - 12 - 19
الموضوع

③ $E = C[0,1]$, $A_n x = t^n(1-t)\,x(t)$; $t \in [0,1]$

الحل:

$$\|A_n x - 0\| = \|A_n x\| = \|t^n(1-t)\,x(t)\|$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} |t^n(1-t)\,x(t)|$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} |t^n(1-t)|\,|x(t)|$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} |t^n(1-t)| \cdot \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)| \quad \|x\|$$

$[t^n(1-t)]' = 0$
$\Rightarrow n t^{n-1}(1-t) - t^n = 0$
$t^{n-1}[n(1-t) - t] = 0 \Rightarrow$
$n(1-t) - t = 0 \Rightarrow$
$n - nt - t = 0 \Rightarrow t = \frac{n}{n+1}$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \|x\|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{e} \lim \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \|A_n x(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه تكون متتالية المؤثرات المفروضة متقاربة نقطياً إلى المؤثر الصفري.

★ ومن جهة ثانية.

$$\|A_n x\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{1} - \frac{n}{n+1}\right) \|x\| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \|x\|$$

$$\Rightarrow \|A_n x\| \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \|x\| \quad ; \quad \forall x \in C[0,1]$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وهذا يعني أن متتالية المؤثرات المفروضة $\{A_n\}$ متقاربة ~~نقطياً~~ إلى المؤثر الصفري

بالنظيم ✓

KORANI

④ $E = C[0,1]$, $A_n x = t^n x(t)$; $t \in [0,1]$

الحل:

$$\psi(t) = \lim_{n \to \infty} A_n x(t) = Ax = \begin{cases} 0 & ; 0 \le t < 1 \\ x(1) & ; t = 1 \end{cases} \notin C[0,1]$$

إن هذه المتتالية ليست متقاربة نقطياً لأنه من أجل أي تابع $x(t) \in C[0,1]$ وبحيث $x(1) \neq 0$ متقارب $t^n x(t)$ إلى التابع $\psi(t)$ الذي لا ينتمي إلى الفضاء $C[0,1]$ (لأنه غير مستمر).

إذاً A_n ليست متقاربة نقطياً وبالتالي فهي ليست متقاربة بانتظام

ملاحظة: سنقتصر في التمارين القادمة على مبرهنة باناخ التالي نصها.

" إذا كان E_x و E_y فضاءا باناخ وكان A مؤثر خطي ومحدود ومقلوب A^{-1} موجود عندها يكون A^{-1} خطي ومحدود ".

تمرين: تأكد من وجود واستمرارية مقلوب المؤثر: $A: l_2 \to l_2$

دورة

إذا كانت:

ⓐ $Ax = \{\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots\}$; $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$

الحل:

واضح أن l_2 فضاء باناخي.

واضح أن A مؤثر خطي، ولنبرهن أن A محدود.

$$\|Ax\|^2 = |\xi_3|^2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_4|^2 + |\xi_5|^2 + \dots$$
$$= |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + |\xi_4|^2 + |\xi_5|^2 + \dots$$
$$= 1 \cdot \|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\| = \|x\| \underset{\forall x \in l_2}{\Longrightarrow} A \text{ محدود}$$

لنبرهن أن A^{-1} موجود، بغية ذلك سنبرهن عن وجود حل وحيد للمعادلة $Ax = y$ لكل $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$

$$\{\xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5, \dots\} = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

$$\xi_3 = y_1, \quad \xi_1 = y_2, \quad \xi_2 = y_3, \quad \xi_K = y_K \; ; \; \forall K \geq 4$$

إذاً حل وحيد وهو:

$$x = (y_2, y_3, y_1, y_4, y_5, \dots)$$

ومنه حسب مبرهنة باناخ تكون A^{-1} موجود وخطي ومحدود.

ⓑ $Ax = \{\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots\} \; ; \; \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$

الحل:

- واضح أن l_2 فضاء باناخ.
- واضح أن A خطي، ولنبرهن أن A محدود.

$$\|Ax\|^2 = |\xi_1 + 2\xi_2|^2 + |\xi_1 - \xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + |\xi_4|^2 + \dots$$

$$= \xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 + |\xi_3|^2 + |\xi_4|^2 + \dots$$

$$\leq \xi_1^2 + 4\xi_2^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1^2 + \xi_2^2 + |\xi_3|^2 + |\xi_4|^2 + \dots$$

$$= 3\xi_1^2 + 6\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \dots$$

$$\leq 6(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots) = 6\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \sqrt{6}\|x\| \; ; \; \forall x \in l_2 \Rightarrow A \text{ محدود}$$

لنبرهن أن A^{-1} موجود، أي لنبرهن على وجود حل وحيد للمعادلة $Ax = y$ لكل:

$$y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xi_1 + 2\xi_2 = y_1 \\ \xi_1 - \xi_2 = y_2 \\ \xi_K = y_K \; ; \; \forall K \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1 = \frac{y_1 + 2y_2}{3}, \quad \xi_2 = \frac{y_1 - y_2}{3}$$

$\xi_K = y_K \; ; \; K \geq 3$ ومنه A^{-1} موجود وحسب مبرهنة باناخ تكون A^{-1} خطي ومحدود أو خطي ومستمر

الموضوع

(c) $Ax = \{\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \dots\}$

الحل:

وبرهنا عليها * واضح أن l_2 فضاء باناخ.

* وأن A مؤثر خطي، و A محدود (أثبت ذلك)

أن A^{-1} غير موجود، لأن: لنحاول حل المعادلة:

$y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$ لكل $Ax = y$

$$Ax = y \Rightarrow \{\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \dots\} = \{y_1, y_2, \dots\}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= y_1 \\ \xi_2 + \xi_3 &= y_2 \\ 2\xi_2 - 2\xi_1 &= y_3 \\ \xi_k &= y_k \; ; \; \forall k \geq 4 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

إذاً يوجد عدد لانهائي من الحلول ومنه A^{-1} غير موجود

(أو لمعرفة نواة $\ker A$)

$$Ax = \theta \Rightarrow \left.\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= 0 \\ \xi_2 + \xi_3 &= 0 \\ 2\xi_2 - 2\xi_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \{\xi_1, \xi_1, -\xi_1, 0, 0, \dots\}$$

$$\xi_k = 0 \; ; \; k \geq 4$$

$\ker A = \{(\xi_1, \xi_1, -\xi_1, 0, 0, \dots) \; ; \; \xi_1 \in \mathbb{R}\} \neq \theta \Rightarrow$ غير متباين A

الفصل الرابع:

الداليات الخطية:

تعريف (الدالي):

عندما يأخذ المؤثر قيماً عددية $E_y = \mathbb{R}$ فإننا نسمي ذلك المؤثر دالي ونرمز له بـ f

- نقول عن الدالي f أنه دالي خطي إذا حقق الشرطين:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \; ; \; \forall x, y \in E_x \; ,$ (جمعي f)

(2) $f(\lambda x) = \lambda f(x) \; ; \; \forall x \in E_x, \lambda \in K \; ,$ (متجانس f)

تعريف (الفضاء المرافق):

ليكن E فضاء خطي منظم ما. إن الفضاء المرافق للفضاء E هو مجموعة جميع الداليات الخطية والمحدودة المعرفة على E ونرمز لها بـ E^*.

مبرهنة (هان باناخ الحقيقية): «دون برهان»

ليكن E فضاء خطي، وليكن p دالياً (حقيقياً) معرفاً على E ولنفرض أن:

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \; ; \; \forall x, y \in E$

(2) $p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x) \; ; \; \forall x \in E \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$

وليكن f دالياً خطياً معرفاً على متنوعة خطية $\mathcal{L}$ محتواة في E ومحقق الشرط:

$$\boxed{|f(x)| \leq p(x) \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}}$$

عندئذٍ يوجد دالي F خطي معرف على E ويحقق:

(1) $F(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}$

(2) $|F(x)| \leq p(x) \; ; \; \forall x \in E$

الموضوع

دورة

مبرهنة هان باناخ ①

لتكن f دالي خطي ومحدود معرف على متنوعة خطية $\mathcal{L}$ محتواة في E عندئذٍ يوجد دالي خطي F (ممدد الدالي f) معرف على E ويحقق :

② (1) $F(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}$

③ (2) $\|F\|_E = \|f\|_{\mathcal{L}}$

البرهان :

بما أن f دالي خطي ومحدود عندئذٍ :

محدد يحقق $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}$

لنعرف دالي على E بالشكل :

$$p(x) = \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| \; ; \; \forall x \in E$$

$$p(x+y) = \|f\|_{\mathcal{L}} \|x+y\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| + \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|y\| = p(x) + p(y)$$

$$\Rightarrow p(\alpha x) = \|f\|_{\mathcal{L}} \|\alpha x\| = \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$= |\alpha| \cdot \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| = |\alpha| \cdot p(x)$$

$$\Rightarrow p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) \; ; \; \forall x \in E \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$$

ولدينا : $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|x\| = p(x) \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}$

وحسب مبرهنة هان باناخ العامة يوجد دالي F خطي معرف على E ويحقق :

(1) $F(x) = f(x) \; ; \; \forall x \in \mathcal{L}$

(2) $|F(x)| \leqslant p(x) \; ; \; \forall x \in E$

$$\Rightarrow |F(x)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \|x\| \; ; \; \forall x \in E$$

ومنها ينتج أن F محدود وأن :

$$\|F\|_E \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \quad \ldots \text{(I)}$$

الموضوع

$$\|F\|_E = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in E}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in \mathcal{L}}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in \mathcal{L}}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{\mathcal{L}}$$

$$\Rightarrow \|F\|_E \geqslant \|f\|_{\mathcal{L}} \quad \dots (\mathrm{II})$$

من (I) و (II) نجد المساواة:

$$\|F\|_E = \|f\|_{\mathcal{L}}$$

جلسة /28/ :
2014 - 12 - 20

الموضوع

دورة

نتيجة (1) :

ليكن E فضاء خطي منظم، وليكن $x_0 \neq \theta$ عنصر مثبت من E.

عندئذٍ يوجد دالي f معرف على E بحيث :

(1) $f(x_0) = \|x_0\|$

(2) $\|f\| = 1$

البرهان :

لنشكل المنوعة الخطية المولدة بالعنصر المثبت x_0 ولتكن $\mathcal{L}$:

حفظ $\mathcal{L} = \{ x \in E \; ; \; x = t x_0 \; ; \; t \in \mathbb{R} \}$

لنعرف الدالي φ على المنوعة الخطية $\mathcal{L}$ بالشكل :

$\forall x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = t x_0 \; ; \; t \in \mathbb{R}$

حفظ $\varphi(x) = t \|x_0\|$

لنبرهن أن φ خطي ومحدود :

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow x_1 = t_1 x_0 \; , \; x_2 = t_2 x_0 \; ; \; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 + x_2 = t_1 x_0 + t_2 x_0 = (t_1 + t_2) x_0$

$\varphi(x_1 + x_2) \underset{\text{تعريف } \varphi}{=} (t_1 + t_2)\|x_0\| = t_1 \|x_0\| + t_2 \|x_0\| = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

$\forall x \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{R} \; ; \; x = t x_0 \; ; \; t \in \mathbb{R}$

$\alpha x = \alpha (t x_0) = (\alpha t) x_0$

$\varphi(\alpha x) = (\alpha t)\|x_0\| = \alpha (t \|x_0\|) = \alpha \varphi(x)$

ومنه φ خطي

من أجل أي $x \in \mathcal{L}$ حيث $x = t x_0$ لدينا :

$|\varphi(x)| = |t \|x_0\|| = |t| . \|x_0\| = \|t x_0\| = \|x\|$

$\Rightarrow$ φ محدود

KORANI

ومنه: $\dfrac{|G(x)|}{\|x\|} = 1 \quad ; \forall x \in L \; ; x \neq 0$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L}} \frac{|G(x)|}{\|x\|} = 1 \Rightarrow \|G\|_L = 1$$

ولدينا:

$x_0 = 1.x_0$ (بشروط الفضاء الخطي)

$G(x_0) = 1.\|x_0\| = \|x_0\|$

الآن ومن مبرهنة هان باناخ يوجد دالي f معرف على E وحيث:

(1) $f(x) = G(x) \quad ; \forall x \in L$

(2) $\|f\|_E = \|G\|_L$

في حالة خاصة عندما $x = x_0 \in L$ يكون:

$f(x_0) = G(x_0) = \|x_0\|$

كذلك: $\|f\|_E = \|G\|_L = 1$

نتيجة (2): دورة

ليكن E فضاء خطي منظم، ولتكن L متنوعة خطية و x_0 عنصر بحيث $x_0 \notin \bar{L}$

وليبعد مسافة d عن L

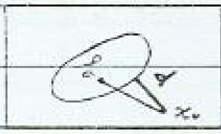
$$0 < d = \inf_{x \in L} \|x_0 - x\|$$

عندئذ يوجد دالي f معرف على E وحيث:

(1) $f(x) = 0 \quad ; \forall x \in L$

(2) $f(x_0) = 1$

(3) $\|f\| = \dfrac{1}{d}$



البرهان:

لتكن المتنوعة الخطية المولدة بـ L, x_0:

$G = (L, x_0)$

$\forall u \in G \Rightarrow u = x + t x_0 \quad ; x \in L \; ; t \in R$

الموضوع

ولنعرف الدالي φ على G بالشكل:

$$\varphi(u) = t$$

ولنبرهن أن φ خطي ومحدود:

$$\forall u_1, u_2 \in G \Rightarrow u_1 = x_1 + t_1 x_0 \quad , \quad u_2 = x_2 + t_2 x_0$$

$$; x_1, x_2 \in \mathcal{L} \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + t_1 x_0) + (x_2 + t_2 x_0) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{(t_1 + t_2)}_{\in \mathbb{R}} x_0$$

$$\varphi(u_1 + u_2) = t_1 + t_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\forall u \in G \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = x + t x_0 \ ; \ x \in \mathcal{L} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha u = \alpha(x + t x_0) = \alpha x + \alpha (t x_0)$$

$$= \underbrace{\alpha x}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{(\alpha t)}_{\in \mathbb{R}} x_0$$

$$\varphi(\alpha u) = \alpha t = \alpha \varphi(u) \Rightarrow$$ φ خطي

لدينا من أجل أي $u \in G$:

$$u = x + t x_0 \ ; \ x \in \mathcal{L} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

$$|\varphi(u)| = |t| = \frac{|t|}{\|u\|} \cdot \|u\| = \frac{|t|}{\|x + t x_0\|} \cdot \|u\|$$

$$= \frac{|t|}{|t| \cdot \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|} \cdot \|u\| = \frac{1}{\|x_0 - \underbrace{(-\frac{1}{t} \cdot x)}_{\in \mathcal{L}}\|} \cdot \|u\|$$

لدينا:

$$d \leq \|x_0 - \underbrace{(-\frac{1}{t} x)}_{\text{عنصر من } \mathcal{L}}\|$$ عندها:

$$\frac{1}{d} \geq \frac{1}{\|x_0 - (-\frac{1}{t} x)\|}$$

بالعودة :

$$|G(u)| = \frac{1}{\|x_0 - (-\frac{1}{t}x)\|}\|u\| \leq \frac{1}{d}\|u\| \quad ; \quad \forall u \in G$$

وهذا يعني أن : G محدود وأن :

$$\|G\|_G \leq \frac{1}{d} \quad \ldots(\mathrm{I})$$

لدينا من أجل $x \in L \subset G$.

$$x = x + 0\,x_0$$

$$G(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in L$$

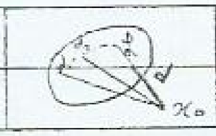
$$x_0 = 0 + 1x_0 \Rightarrow G(x_0) = 1$$

لدينا من خواص الحد الأدنى الأعظمي مع أن :

$$d = \inf_{x \in L} \|x_0 - x\|$$

توجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من L بحيث :

$$\|x_0 - x_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d$$



لدينا :

$$|G(x_0 - x_n)| \underset{G\ \text{محدود}}{\leq} \|G\|_G \|x_0 - x_n\|$$

$$|G(x_0) - \underset{\in L}{G(x_n)}| \leq \|G\|_G \|x_0 - x_n\|$$

$$|1 - 0| \leq \|G\|_G \|x_0 - x_n\|$$

وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نجد :

$$1 \leq \|G\|_G\, d \Rightarrow \|G\|_G \geq \frac{1}{d} \quad \ldots(\mathrm{II})$$

من (I) و (II) نجد:

$$\|G\|_G = \frac{1}{d}$$

التشوه بمبرهنة هان باناخ يوجد دالي f معرف على E بحيث:

(1) $f(u) = G(u) \quad ; \forall u \in G$

(2) $\|f\|_E = \|G\|_G$

لدينا: وعندما $u = x \in \mathcal{L} \subset G$:

$f(x) = G(x) = 0 \quad ; \forall x \in \mathcal{L}$

$f(x_0) = G(x_0) = 1$ وإذن $x_0 \in G$ لدينا:

$$\|f\|_E = \|G\|_G = \frac{1}{d}$$

تمرين: لتكن الدالي f المعرف في الفضاء $C[0,1]$ بالشكل:

$f(x(t)) = x(t_0) \quad ;$ t_0 عدد مثبت من المجال $[0,1]$

برهن أن f خطي ومحدود واحسب نظيمه.

الحل:

$\forall x_1(t), x_2(t) \in C[0,1] \Rightarrow$

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(t_0) = x_1(t_0) + x_2(t_0) = f(x_1) + f(x_2)$$

$; \forall x \in C[0,1] \ , \alpha \in R \Rightarrow$

$f(\alpha x) = (\alpha x)(t_0) = \alpha(x(t_0)) = \alpha f(x) \Rightarrow$ خطي f.

$|f(x)| = |x(t_0)| \leq \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow$

$$|f(x)| \leq \|x\| \quad ; \forall x \in C[0,1]$$

وهذا يعني أن f محدود وأن:

$$\|f\| \leq 1 \quad \ldots (I)$$

لنختار العنصر الخاص :

$$x_0(t)=1 \quad ; \ \forall\ 0\leq t\leq 1$$

$$\|x_0\| = \max_{0\leq t\leq 1}|x_0(t)| = \max_{0\leq t\leq 1}|1| = \underline{\underline{1}}$$

تساوي

$$|f(x_0)| = |(x_0)(t_0)| = |1| = 1$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1}|f(x)| \geq \underset{\text{اختيار خاص}}{1} \Rightarrow \|f\| \geq 1 \quad \dots (\text{II})$$

من (I) و (II) نجد :

$$\|f\| = 1$$

الشكل العام للداليات الخطية :

① الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء الإقليدي E_n :

دورة

ليكن E_n الفضاء الإقليدي ولتكن $e_1, e_2, \dots, e_n$ قاعدة في E_n.

$$\forall x \in E_n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

ليكن f دالي خطي معرف على E_n، $f : E_n \to R$:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \underset{\uparrow\, f \text{ خطي}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$$

لنضع: $1 \le i \le n$; $f(e_i) = f_i$ عندها سيكتب الدالي f :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

وبالعكس فإنه من أجل n من الثوابت: $c_1, c_2, \dots, c_n$ فإن العلاقة :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

لأ م x
e_i , c_i ح f أو G

ستعرف دالي خطي، لأن :

$$\forall x_1, x_2 \in E_n \ , \ x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} e_i \ , \ x_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)} \cdot e_i$$

$$x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}\right)}_{\downarrow} e_i$$

$$G(x_1 + x_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}\right) c_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} c_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i^{(2)}$$

$$= G(x_1) + G(x_2)$$

$$\forall x \in E_n \ , \ \alpha \in R \ ; \ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\alpha \alpha_i)}_{\downarrow} e_i$$

$$\mathcal{C}(\alpha x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) c_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \alpha \mathcal{C}(x)$$

$\Rightarrow$ خطي $\mathcal{C}$

الآن عكسيا بالقواعد المتبادلة بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

حيث $f_1, f_2, \dots, f_n$ ثوابت تتعرف بشكل وحيد بالدالي f تعرف بالشكل العام للداليات الخطية من الفضاء الإقليدي

★ لنحسب نظيم الدالي f:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i| \leq$$

"متراجحة بونياكوفسكي" $\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M} \Rightarrow$

$$(I) \dots \quad \boxed{\|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad f \text{ محدود}$$

لنختار العنصر الخاص:

$$x_0 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$ قانون نظيم عنصر من E_n

$$\|x_0\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بدون رمز القيمة المطلقة

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_i}_{\text{مركبات } x_0} \underbrace{f_i}_{\text{قانون}} = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \Rightarrow |f(x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right| = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$$

$x = \sqrt{x}\sqrt{x}$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x_0\|} = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x_0\|$$

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

الموضوع

$$\sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (\mathrm{II})$$

من (I) و (II) نجد :

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

سؤال دورة: أوجد الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء الإقليدي E_n .

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

جلسة /29/ .
2014 - 12 - 21

الموضوع

ملاحظة : في فقرة الفضاءات المرافقة سنحاول إيجاد فضاء X ايزومورفي وايزومتري مع الفضاء E^* عندها نقول بأن الفضاء المرافق للفضاء E هو X .

دورة

الفضاء المرافق للفضاء الإقليدي E_n :

من أجل أي دالي خطي f معرف على E_n (أي $f \in E_n^*$) توجد مجموعة من الثوابت $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ حيث :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \quad ; \quad \forall x = (\xi_i)_{i=1}^{n} \in E_n$$

حيث الثوابت f_i تتعرف بشكل وحيد من الدالي f .

وبالعكس، فإن كل مجموعة من الثوابت $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ تعرف دالي خطي بالعلاقة :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i c_i$$

إذاً يوجد تقابل بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على الفضاء الإقليدي E_n (أي E_n^*) وبين الفضاء الإقليدي E_n

إن هذا التقابل ايزومورفي أي :

$$f \leftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

و

$$g \leftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

عندها :

$$f + g \leftrightarrow (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_n + g_n)$$

وإذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\lambda f \leftrightarrow (\lambda f_1, \lambda f_2, \dots, \lambda f_n)$$

ومن الشكل العام لدينا :

$$\|f\|_{E_n^*} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(f_1, f_2, \dots, f_n)\|_{E_n}$$

إذاً هذا التقابل ايزومتري

KORAN

عندها نستطيع القول أن الفضاء المرافق للفضاء E_n (E_n^*) هو E_n نفسه لأنه وجد تقابل ايزومورفي وايزومتري بين E_n^* و E_n.

«سؤال دورة: اعط برهنة أن الفضاء المرافق للفضاء الإقليدي E_n ؟»

* إن عبارة المسافة في الفضاء E_n^*:

$$d(f,g) = \|f-g\|_{E_n^*}$$

$$f \leftrightarrow (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$g \leftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

عندها:

$$d(f,g) = \|f-g\|_{E_n^*} = \|(f_1, f_2, \dots, f_n) - (g_1, g_2, \dots, g_n)\|_{E_n}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i - g_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

دورة

② الشكل العام للداليات الخطية في فضاء هيلبرت:

تعريف دورة + نجح الدكتور

ملاحظة: في غالب الأحيان عندما نقول بأن f دالي خطي فإننا نقصد أن f خطي ومستمر عندها f متجانس.

* ليكن f دالي خطي معرف في فضاء هيلبرت H.

$$f : H \to \cancel{H}\ \mathbb{C}$$

فوق حقل الأعداد المركبة

لنشكل المجموعة $\mathcal{L} \subset H$.

$$\mathcal{L} = \{x \in H \;;\; f(x) = 0\} = (\operatorname{Ker} f)$$

$$\forall x, y \in \mathcal{L},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{L} \Rightarrow$$ متنوعة خطية $\mathcal{L}$

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $\mathcal{L}$ ولنفرض أنها متقاربة إلى x ولنبرهن أن $x\in\mathcal{L}$:

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\underset{f\ \text{مستمر}}{=}\lim_{n\to\infty}f(x_n)\underset{x_n\in\mathcal{L}}{=}\lim_{n\to\infty}(0)=0$$

$\Rightarrow x\in\mathcal{L} \Rightarrow$ مغلقة $\mathcal{L}$ $\Rightarrow$ فضاء جزئي $\mathcal{L}$

لتكن x_0 نقطة ما من H على $\mathcal{L}^{\perp}=H\ominus\mathcal{L}$

ولنسمي $f(x_0)=\alpha$ إذن $\alpha\neq0$ (لو كان $\alpha=0$ لكان $x_0\in\mathcal{L}$ وهذا تناقض)

ولنسمي: $x_1=\frac{x_0}{\alpha}$ عندها:

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}f(x_0)=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$$

واضح أن $x_1\perp\mathcal{L}$ لأن: $x_0\perp\mathcal{L}$

* لتكن $x\in H$ ولنسمي $f(x)=\beta$

$f(x)-\beta=0 \Rightarrow f(x)-\beta\cdot1=0$

$f(x)-\beta f(x_1)=0 \Rightarrow f(x-\beta x_1)=0$

$z=x-\beta x_1\in\mathcal{L} \Rightarrow x=z+\beta x_1$

* $(x,x_1)=(z+\beta x_1,x_1)=\underbrace{(z,x_1)}_{\in\mathcal{L}\ ,\ \perp\mathcal{L}}+\beta(x_1,x_1)=0+\beta\|x_1\|^2$

$$\Rightarrow f(x)=\beta=\frac{1}{\|x_1\|^2}(x,x_1)=\left(x,\frac{x_1}{\|x_1\|^2}\right)\ ;\ \frac{x_1}{\|x_1\|^2}=u$$

$$f(x)=(x,u)$$

لنبرهن أن u يتعين بشكل وحيد بالدالي f:

بفرض وجود عنصر آخر وليكن $H\ni v$ بحيث:

$f(x)=(x,v)\ ;\ \forall x\in H$

$$\Rightarrow (x,u) = (x,v) \quad ; \forall x \in H \Rightarrow$$

$$(x,u) - (x,v) = 0 \quad ; \forall x \in H$$

$$(x, u-v) = 0 \quad ; \quad \forall x \in H$$

أي أن : $u - v \perp H$ ونعلم أن العنصر الوحيد الذي يعامد فضاء هيلبرت هو العنصر الصفري

أي : $u - v = 0$ ومنه : $u = v$

وبالعكس كل عنصر مثبت $u \in H$ سيعرف دالياً خطياً f معرف على H بحيث :

$$f(x) = (x, u) \quad ; \forall x \in H$$

$$\forall x, y \in H \Rightarrow f(x+y) = (x+y, u) = (x,u) + (y,u)$$

شروط الجداء الداخلي

$$= f(x) + f(y)$$

$$\forall x \in H, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\lambda x) = (\lambda x, u) = \lambda (x,u) = \lambda f(x)$$

بفرض $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر H ومتقاربة لـ x عندها :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n, u) = (\lim_{n\to\infty} x_n , u)$$

الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة لمتنوعه

$$= (x, u) = f(x)$$

ومنه f خطي ومستمر

الآن يمكننا القول أن العلاقة :

$$f(x) = (x, u) \quad ; \quad \forall x \in H$$

تمثل الشكل العام للداليات الخطية في فضاء هيلبرت حيث u عنصر مثبت من H ويتعين بشكل وحيد بالدالي f .

لنحسب نظيم الدالي f :

$$|f(x)| = |(x,u)| \leq \|u\| \cdot \|x\| \quad ; \quad \forall x \in H$$

كوشي شوارتز

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \|u\| \cdot \|x\| \quad ; \quad \forall x \in H$$

ومنه :

$$\|f\| \leqslant \|u\| \quad \dots (I)$$

لنختار العنصر الخاص : $x_0 = u$

$$\|x_0\| = \|u\|$$

$$|f(x_0)| = |f(u)| = |(u,u)| = \|u\|^2 = \|u\| \cdot \|u\|$$

$$= \|u\| \cdot \|x_0\| \Rightarrow \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \|u\|$$

$$\sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \|u\| \Rightarrow \|f\| \geqslant \|u\| \quad \dots (II)$$

من (I) و (II) نجد المساواة .

$$\|f\| = \|u\|$$

الفضاء المرافق لفضاء هيلبرت .

بما أن من أجل كل دالي خطي f معرف في H يوجد عنصر وحيد $u \in H$ بحيث :

$$f(x) = (x,u) \quad ; \forall x \in H$$

حيث u عنصر يتعين بشكل وحيد بالدالي f وذلك هو الشكل العام للداليات الخطية في فضاء هيلبرت

وبالعكس فإن كل عنصر وحيد $u \in H$ يعرف دالياً خطياً f على H بالشكل :

$$f(x) = (x,u) \quad ; \forall x \in H$$

أي يوجد تقابل بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على H وبين H .

إن هذا التقابل ايزومتري لأن :

$$f \leftrightarrow u \quad , \quad g \leftrightarrow v$$

فإن:

$$f+g \leftrightarrow u+v$$

وإذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ فإن:

$$\alpha f \leftrightarrow \alpha u$$

وبما أن حسب الشكل العام للداليات الخطية في فضاء هيلبرت:

$$\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$$

فإن هذا التقابل ايزومتري.

وبالتالي يوجد تقابل ايزومورفي وايزومتري بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على H (H^*) وبين H. فالفضاء المرافق للفضاء H (H^*) هو H نفسه.

③ الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء l_p . $(f : l_p \to \mathbb{R})$

هام (عملي) يبرهن على أنه من أجل أي دالي خطي f معرف على l_p فإنه توجد متتالية $\{c_k\}$ من l_q بحيث :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \quad ; \quad \forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$$

ويبرهن أيضاً أن :

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

وبالعكس فإن كل متتالية مثبتة $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ من l_q تعرف دالي خطي معرف في الفضاء l_p بالشكل

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k$$

سؤال: تحدث عن الفضاء المرافق للفضاء l_p (سنجد أن $l_p^* = l_q$)

الحل :

إن من أجل كل دالي خطي f معرف على l_p فإنه يوجد متتالية $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ من l_q بحيث :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \quad ; \quad \forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$$

حيث c_k تتعرف بشكل وحيد بالدالي f .

وبالعكس فإن كل متتالية مثبتة $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ من l_q تعرف دالي خطي في الفضاء l_p بالشكل

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k d_k \quad ; \quad \forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$$

إذاً يوجد تقابل بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على الفضاء l_p أي (l_p^*)
وبين الفضاء l_q
إن هذا التقابل هو تقابل إيزومورفي أي إذا كان .

$$f \longleftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$$

$$g \longleftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots)$$

$$f + g \longleftrightarrow (c_1+d_1, c_2+d_2, \dots, c_k+d_k, \dots)$$

وإذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\lambda . f \longleftrightarrow (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_k, \dots)$$

ومن الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء ℓ_p لدينا:

$$\|f\|_{\ell_p^*} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)\|_{\ell_q}$$

إذاً هو تقابل ايزومتري.

وبالتالي يوجد تقابل إيزومورفي وإيزومتري بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة

ℓ_p (ℓ_p^*) وبين ℓ_q

فالفضاء المرافق للفضاء ℓ_p (ℓ_p^*) هو ℓ_q.

$$\ell_p^* \simeq \ell_q$$

④ الشكل العام للداليات الخطية من الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$: $\mathcal{L}^q[0,1]$

هام (عملي) يبرهن على أنه من أجل أي دالي خطي f معرف على $\mathcal{L}^p[0,1]$ فإنه يوجد تابع $\alpha(t) \in$

بحيث:

$(f : \mathcal{L}^p[0,1] \to \mathbb{R})$ $\quad f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^p[0,1]$

وأن:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

وبالعكس فإن كل تابع مثل $\alpha(t)$ من $\mathcal{L}^q[0,1]$ يعرف دالياً خطياً في الفضاء بالشكل:

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(t) x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^p[0,1]$$

سؤال: تحدث عن الفضاء المرافق للفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$. $(\mathcal{L}^{p^*}[0,1]=\mathcal{L}^q[0,1])$

الحل:

من أجل كل دالي خطي f معرف على $\mathcal{L}^p[0,1]$ فإنه يوجد تابع $\alpha(t)\in\mathcal{L}^q[0,1]$ بحيث:

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad ; \quad \forall x\in\mathcal{L}^p[0,1]$$

حيث $\alpha(t)$ تتعرف بشكل وحيد بالدالي f.

وبالعكس فإن كل تابع $\beta(t)$ من $\mathcal{L}^q[0,1]$ يعرف دالياً خطياً g على الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ بالشكل:

$$g(x)=\int_0^1 \beta(t)\,x(t)\,dt \quad ; \quad \forall x\in\mathcal{L}^p[0,1]$$

إذاً يوجد تقابل بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ $(\mathcal{L}^{p^*}[0,1])$ والفضاء $\mathcal{L}^q[0,1]$.

إن هذا التقابل هو تقابل إيزومورفي لأن:

$$f \longleftrightarrow \alpha(t)$$

$$g \longleftrightarrow \beta(t)$$

$$f+g \longleftrightarrow (\alpha+\beta)(t)$$

وإذا كان $\lambda\in\mathbb{R}$ فإن:

$$\lambda f \longleftrightarrow (\lambda\alpha)(t)$$

ومن الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ لدينا:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p^*}}=\left(\int_0^1|\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}=\|\alpha\|_{\mathcal{L}^q}$$

إن هذا تقابل إيزومتري

وبالتالي يوجد تقابل إيزومورفي وإيزومتري بين مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ $(\mathcal{L}^{p^*}[0,1])$ وبين $\mathcal{L}^q[0,1]$

فالفضاء المرافق للفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ $(\mathcal{L}^{p^*}[0,1])$ هو $\mathcal{L}^q[0,1]$

أي:

$$\mathcal{L}^{p^*}[0,1]\simeq\mathcal{L}^q[0,1]$$

$\xi_n^{(n)} = 1$

(5) الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء s:

إن s هي مجموعة جميع المتتاليات العددية لتكن $e_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ حيث:

و $\xi_i^{(n)} = 0$ حيث $i \neq n$

عندها:

$$\forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in s \Rightarrow x = \sum_{x=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

ليكن f دالي معرف على الفضاء s: $f : s \to \mathbb{R}$ عندها:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$$

لنفرض: $f(e_k) = a_k$ عندها:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\overset{n}{\infty}} \xi_k a_k \quad ; \quad x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in s$$

إن هذه السلسلة السابقة لن تكون متقاربة إلا إذا فرضنا أن الثوابت a_k معدومة من حد معين وليكن $n+1$. عندها يكون الدالي f بالشكل:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k$$

* وبالعكس فإن من أجل أية مجموعة من الثوابت $a_1, a_2, \dots, a_n$ حيث n عدد طبيعي فإننا نعرف دالياً خطياً في s بالشكل:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k$$

تعريف (التابع ذو التغير المحدود):

ليكن f تابع معرف في المجال $[0,1]$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

لنجزئ المجال $[0,1]$ بالشكل: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

لنشكل المجموع على الشكل:

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

إذا كانت المجاميع من الشكل السابق تملك حداً أعلى أصغرياً من أجل جميع التجزئات الممكنة للمجال [0,1]
عندها نقول بأن التابع f هو تابع ذو تغير محدود
ونسمي هذا الحد الأعلى الأصغري بالتغير الكلي للتابع f على المجال [0,1] ونرمز له ب $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \sup_{V} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

⑥ الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء C[0,1]. «دون برهان»

«مهم جداً»

يبرهن على أنه من أجل أي دالي خطي f معرف في الفضاء C[0,1] يوجد من أجله تابع ذو تغير محدود g(t) بحيث g(0) = 0 وحيث :

$$f(x(t)) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t)$$

«تكامل استلجس»

وبالعكس فإن كل تابع ذو تغير محدود g(t) وحيث g(0) = 0 يعرف دالياً خطياً في الفضاء C[0,1] بالشكل :

حفظ $f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t) \quad ; \quad \forall x \in C[0,1]$

ويحصل أيضاً :

حفظ $\|f\| = \overset{1}{\underset{0}{V}} g(t)$

سؤال دورة : تحدث بالتفصيل عن الفضاء المرافق للفضاء C[0,1]

الحل :

لتكن V مجموعة التوابع ذات التغيرات المحدودة g(t) والتي تحقق : g(0)=0
تكمن جعل V فضاء خطي بأن نعرف عليها عمليتي جمع وضرب بعدد كيفي سلمي :

$$(g+h)(t) = g(t) + h(t) \quad ; \quad \forall\, 0 \le t \le 1$$

$$(\lambda g)(t) = \lambda g(t)$$

يمكن جعل V فضاء خطي منظم بأن نعرف النظيم بالشكل :

$$\|g(t)\| = \overset{1}{\underset{0}{V}} g(t)$$

«التغير الكلي»

- بما أنه حسب الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء C[0,1] فإنه من أجل الدالي f الخطي المعرف في C[0,1] يوجد تابع ذو تغير محدود g(t) و g(0)=0 بحيث :

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t) \quad \forall x \in C[0,1]$$

الموضوع

وبالعكس من أجل أي تابع ذو تغير محدود $g(t)$ و $g(0)=0$ فإنه يعرف دالياً خطياً f بالشكل: $f(x)=\int_0^1 x(t)\,dg(t)\ ,\ \forall x\in C[0,1]$

إذاً يوجد تقابل بين مجموعة جميع الداليات المعرفة على الفضاء $C[0,1]$ ($C^*[0,1]$) وبين V

إن هذا التقابل ايزومورفي لأن:

$f_1 \longleftrightarrow g(t)$, $f_2 \leftrightarrow h(t)$ ~~$\leftrightarrow g(t)$~~

$f_1+f_2 \longleftrightarrow (g+h)(t)$ ~~$\leftrightarrow (g+h)(t)$~~

$f \longleftrightarrow g$

و $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \leftrightarrow (\lambda g)(t)$

وإن هذا التقابل ايزومتري لأنه حسب الشكل العام للداليات الخطية

لدينا: $\|f\|_{C^*[0,1]} = \overset{1}{\underset{0}{V}}\, g(t) = \|g\|_V = \|f\|_{C^*[0,1]}$

أصبح الفضاءان $C^*[0,1]$ و V ايزومورفيان وايزومتريان إذاً يمكن القول أن الفضاء المرافق للفضاء $C[0,1]$ هو V (مجموعة التوابع ذات التغيرات المحدودة $g(0)=0$)

تعريف (الفضاء المتراافق ذاتياً):

نقول عن الفضاء الخطي المنظم E بأنه مترافق ذاتياً إذا كان $E^*=E$

مثلاً: H ، E_n ، ℓ_2 فضاءات مترافقة ذاتياً

تعريف (الفضاء الانعكاسي):

نقول عن الفضاء الخطي المنظم E بأنه انعكاسي إذا كان: $(E^*)^*=E$

كل فضاء مترافق ذاتياً هو فضاء انعكاسي

$(E^*)^*=E^*=E$

* مثلاً E_n و H و ℓ_p و $L^p[0,1]$

$(\ell_p^*)^* = \ell_q^* = \ell_p$

سؤال: أثبت أن كلاً من الفضائين ℓ_p ، $L^p[0,1]$ تامين.

الحل:

نعلم أن الفضاء المرافق لأي فضاء خطي منظم E هو فضاء تام. $E^* = (E \to \mathbb{R})$

وذلك حسب مبرهنة سابقة حيث أن الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ تام.

$\ell_p = (\ell_q)^*$ تام

$L^p[0,1] = (L^q[0,1])^*$ تام

الفضاء	الشيء الذي يوجد	الشكل العام	عبارة المعيار	الفضاء المرافق
	*			*
1) E_n	$(f_1, f_2, \dots, f_n) \in E_n$	$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k$	$\Vert f \Vert = \left(\sum_{k=1}^{n} \vert f_k \vert^2\right)^{\frac{1}{2}}$	E_n
2) H	$u \in H$	$f(x) = (x, u)$	$\Vert f \Vert = \Vert u \Vert$	H
*3) l_p [illegible]	$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_q$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$	$\Vert f \Vert = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \vert c_k \vert\right)^{\frac{1}{q}}$	l_p
*4) $\mathcal{L}^p[0,1]$ [illegible]	$\alpha(t) \in \mathcal{L}^q[0,1]$	$f(x) = \int_0^1 \alpha(t) x(t)\, dt$	$\Vert f \Vert = \left(\int_0^1 \vert \alpha(t) \vert^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$	$\mathcal{L}^p[0,1]$
5) S'	$a_1, a_2, \dots, a_n$	$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k$	—	—
6) $C[0,1]$	$g(t)$ ذو تغير محدود $g(0) = 0$	$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$	$\Vert f \Vert = \bigvee_0^1 g(t)$	V

سؤال دورة : أثبت أن العلاقة :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \quad \text{حيث :}$$

$x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\in l_p$ و $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية مثبتة من l_q تعرف دالياً خطياً ومستمراً في l_p .

الحل : $\forall x,y\in l_p\ ;\ x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\ ,\ y=(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$

$$\Rightarrow f(x+y)=f\big((\xi_k+\eta_k)_{k=1}^{\infty}\big)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\xi_k+\eta_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\eta_k=f(x)+f(y)$$

$$\forall x\in l_p,\ \lambda\in R\ ;\ x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\Rightarrow f(\lambda x)=f\big((\lambda\xi_k)_{k=1}^{\infty}\big)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda\xi_k)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k=\lambda f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x)|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k\xi_k|\leqslant$$

$$\text{"هولدر"}\quad\leqslant\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\Big)^{\frac1q}}_{M<\infty}\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{\frac1p}}_{\|x\|_{l_p}}$$

$$\Rightarrow |f(x)|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\Big)^{\frac1q}\|x\|_{l_p}\ ;\ \forall x\in l_p$$

وهذا يعني أن f دالي محدود وبالتالي خطي محدود ومستمر

حيث أن :

$M=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\Big)^{1/q}<\infty$ لأن : $\{c_k\}\in l_q$ فرضاً

KORAN

الموضوع

سؤال دورة: ((مشابه)) ليكن $\alpha(t)$ تابعاً من الفضاء $\mathcal{L}^q[0,1]$ برهن أن العلاقة:

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $x(t)\in\mathcal{L}^p[0,1]$ حيث $G(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt$

تعرف دالياً خطياً محدوداً في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$

الحل:

$$\forall x,y\in\mathcal{L}^p[0,1]\Rightarrow G(x+y)=\int_0^1(x+y)(t)\,\alpha(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt+\int_0^1 y(t)\alpha(t)\,dt=G(x)+G(y)\Rightarrow$$ G جمعي

$$\forall x\in\mathcal{L}^p[0,1]\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow G(\lambda x)=\int_0^1(\lambda x)(t)\,\alpha(t)\,dt$$

$$=\lambda\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt=\lambda\,G(x)\Rightarrow$$ G متجانس

$\Leftarrow$ G خطي

ولنبرهن أن G محدود

$$|G(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^1|x(t)\alpha(t)|\,dt$$

$$\leqslant\left(\int_0^1|\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\underbrace{\left(\int_0^1|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}}_{\|x\|_{\mathcal{L}^p}}$$ "هولدر"

$$\Rightarrow|G(x)|\leqslant\left(\int_0^1|\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\cdot\|x\|_{\mathcal{L}^p}\ ;\ x\in\mathcal{L}^p[0,1]$$

$\Leftarrow$ إن الدالي G محدود

إذاً G دالي خطي ومحدود في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$ حيث أن:

$$\|G\|=\left(\int_0^1|\alpha(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

لأن فرضاً $\alpha(t)\in\mathcal{L}^q[0,1]$

KORANI

تمارين الفصل الرابع :

الشكل العام

دورة

تمرين : تحقق من أن العلاقة

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k+\xi_{k+1}}{2^k}$$

حيث : $x=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\ldots\}\in l_2$ تعرف دالياً خطياً ومستمراً في l_2 واحسب نظيمه .

الحل :

لنحاول كتابة f بشكله العام كدالي معرف في الفضاء l_p :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k+\xi_{k+1}}{2^k}=\frac{\xi_1+\xi_2}{2^1}+\frac{\xi_2+\xi_3}{2^2}+\frac{\xi_3+\xi_4}{2^3}+\cdots$$

$$=\frac{\xi_1}{2^1}+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}\right)\xi_2+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)\xi_3+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\xi_1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\underset{(2)}{\frac{1}{2^{k-1}}}+\underset{(1)}{\frac{1}{2^k}}\right)\xi_k=\frac{1}{2}\xi_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{2^k}\xi_k$$

حتى يكون f دالي خطي ومستمر معرف في الفضاء l_2 يجب أن تكون الأمثال $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ منتمية إلى l_2 حيث :

$$c_1=\frac{1}{2}\ ,\ c_k=\frac{3}{2^k}\ ;\ k\geq 2$$

لدينا :

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{9}{2^{2k}}=\frac{1}{4}+9\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4}+9\cdot\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+9\cdot\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1<\infty$$

حسب الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء l_2 يكون f دالي خطي ومستمر في l_2 . وحسب الشكل العام أيضاً فإن نظيمه يعطى بالعلاقة

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=(1)^{\frac{1}{2}}=1$$

الموضوع

تمرين: ليكن $p > 1$ عدداً مثبتاً. من أجل أي قيم لـ $\alpha \in \mathbb{R}$

«مهم جداً»

$$f(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha}\, dt$$ (إذا علمت أن التابع [illegible] ... متكاملة [illegible] وكان [illegible])

$\underbrace{\text{للفضاء } \mathcal{L}^{p*}[0,1]}_{\text{خطياً ومستمراً}}$ واحسب نظيمه.

$\to \mathbb{R}$

الحل:

إن $\mathcal{L}^{p*}[0,1]$ هي مجموعة جميع الداليات الخطية والمستمرة المعرفة

على $\mathcal{L}^p[0,1]$

نلاحظ أن الدالي f مكتوب بصيغة الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء

$$f(x) = \int_0^1 a(t)\, x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^p[0,1]$$

$\mathcal{L}^q[0,1]$

حيث: $a(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

وحتى يكون الدالي f خطياً ومستمراً (محدوداً) يجب أن يكون: $\mathcal{L}^p[0,1]$

$$a(t) \in \mathcal{L}^q[0,1]$$

$$\int_0^1 |a(t)|^q dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t^\alpha}\right)^q dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha q}} \to < 1$$

ويكون هذا التكامل متقارباً إذا كان $\alpha q < 1$ أي:

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow \alpha$$

$$\alpha < \frac{p-1}{p}$$

وحسب الشكل العام أيضاً فإن نظيم الدالي f يعطى بالعلاقة

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |a(t)|^q dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha q}}\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 t^{-\alpha q} dt\right)^{1/q} = \left(\frac{t^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \left(\frac{1}{1-\alpha q}\right)^{1/q}$$

دورة

تمرين: برهن أن الدالي f المعرف في l_2 بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}$$

هو دالي خطي ومستمر واحسب نظيمه.

الحل:

نلاحظ بأن الدالي f المعطى مكتوب بصيغة الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء l_2:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \quad ; \quad \forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$$

حيث:

$$c_k = \frac{1}{k} \quad ; \quad \forall k \geq 1$$

وحتى يكون الدالي f خطياً ومستمراً يجب أن تكون الأمثال $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ منتمية إلى l_2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad \text{(سلسلة ريمان)}$$

إذاً f خطي ومستمر

وحسب الشكل العام أيضاً فإن نظيم الدالي f يعطى بالعلاقة:

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

دورة

تمرين: برهن على أن الدالي

$$f(x) = \int_a^b \frac{x(t)}{(t-a)^{\alpha}} \, dt$$

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

حيث: $\alpha < \frac{p-1}{p}$ محدود في $\mathcal{L}^p[a,b]$ واحسب نظيمه

الحل:

حسب الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^p[a,b]$ لدينا:

$$f(x) = \int_a^b \alpha(t)\, x(t) \, dt \quad ; \quad \forall x(t) \in \mathcal{L}^p[a,b] \;,\; \alpha(t) \in \mathcal{L}^q[a,b]$$

موجب x
$=0=0$

الموضوع

لدينا:
$$x(t)=\frac{1}{(t-a)^{\alpha}}$$

$$\int_a^b |x(t)|^q dt=\int_a^b \frac{1}{(t-a)^{\alpha q}}\,dt=\frac{(t-a)^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}\Big|_a^b$$

$$=\frac{(b-a)^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}-0$$

$$=\frac{(b-a)^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}$$

$=\infty$

$\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi}{6}$

لأن: $\alpha<\frac{p-1}{p}=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}\Rightarrow \alpha q<1$

حيث: $1-\alpha q>0$ فرضاً.

ومنه f دالي خطي ومحدود ومن الشكل العام أيضاً فإن نظيم الدالي f يعطى بالعلاقة

$$\|f\|=\left(\int_a^b |x(t)|^q dt\right)^{1/q}=\left[\frac{(b-a)^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}\right]^{1/q}$$

دورة — تمرين: هل الدالي الخطي المعرف بالعلاقة:
$$f(x)=\int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$$

" دورة الأستاذ "

محدود في الفضاء $C[0,1]$ ؟

ما هي قيم p التي من أجلها يكون الدالي مستمراً في $L^p[0,1]$

الحل:
$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt\right|\leq\int_0^1 |x(\sqrt{t})|\,dt$$

$x(\sqrt{t})$ أعظم قيمة

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|\int_0^1 dt=\|x\|$$

$$\Rightarrow |f(x)|\leq\|x\| \quad ; \ \forall x\in C[0,1] \Rightarrow$$

f محدود

$\|f\|\leq 1$

* $f : \mathcal{L}^p[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t})\, dt$$

لنجري تغييراً في المتحول . $\sqrt{t} = u$ ومنه $t = u^2$

$dt = 2u\, du$

وعندما : $t : 0 \to 1$ فإن $u : 0 \to 1$

$$f(x(u)) = \int_0^1 x(u)\, 2u\, du = \int_0^1 (2u)\, x(u)\, du$$

إذا كتبنا الدالي f بصيغته وفق الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^p[0,1]$:

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(u)\, x(u)\, du \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^p[0,1]$$

حيث : $\alpha(u) = 2u$

وحتى يكون الدالي f مستمراً يجب أن تكون الدالة $\alpha(u)$ منتمية إلى الفضاء $\mathcal{L}^q[0,1]$

$$\int_0^1 |\alpha(u)|^q\, du = \int_0^1 (2u)^q\, du = 2^q \int_0^1 u^q\, du = 2^q \left. \frac{u^{q+1}}{q+1} \right|_0^1$$

$$= 2^q \left(\frac{1}{q+1} - \frac{0^{q+1}}{q+1} \right)$$

لازم الأس موجباً حتى يكون = 0

أس موجب

$$= \frac{2^q}{q+1}$$

وذلك بشرط : $0 < q+1$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{p-1} + 1 = \frac{2p-1}{p-1}$$

وهذا الشرط دوماً محقق من أجل $1 < p$.

جلسة /32/ :
2014-12-28

الموضوع

دورات

تمرين : احسب نظيم الدالي f في كل من الحالات الآتية :

ⓐ $f(x)=\int_{-1}^{1} t\, x(t)\,dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^2[-1,1]$

الحل:

نعلم أن الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^2[-1,1]$ هو.

حيث: $f(x)=\int_{-1}^{1} \alpha(t)\, x(t)\,dt \quad ; \quad \forall x\in \mathcal{L}^2[-1,1]$

وأن : $\|f\|=\left(\int_{-1}^{1} |\alpha(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$

$=\left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

ⓑ $f(x)=\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{3}}\, x(t)\,dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^2[0,1]$

الحل:

حسب الشكل العام للدالية الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^2[0,1]$ فإن:

$f(x)=\int_{0}^{1} \alpha(t)\, x(t)\,dt \quad , \quad \forall x\in \mathcal{L}^2[0,1]$

حيث: $\alpha(t)\in \mathcal{L}^2[0,1]$

وأن: $\|f\|=\left(\int_{0}^{1} |\alpha(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_{0}^{1} t^{-\frac{2}{3}}\,dt\right)^{1/2}$

$=\left(3t^{\frac{1}{3}}\Big|_{0}^{1}\right)^{1/2}=\sqrt{3}$

ⓒ $f(x)=\int_{-1}^{1} x(t)\, Q(t)\,dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^p[-1,1]$

حيث:

$$Q(t)=\begin{cases} -1 & ; \ t\in[-1,-\frac{1}{2}] \\ 0 & ; \ t\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\\ 1 & ; \ t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

KORANI

الحل :

حسب الشكل العام للداليات الخطية في فضاء $\mathcal{L}^p[-1,1]$ لدينا :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^p[-1,1]$$

حيث : $\alpha(t) \in \mathcal{L}^q[-1,1]$

وأن :

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |\alpha(t)|^q\, dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} |Q(t)|^q\, dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_{-1}^{-1/2} |-1|^q\, dt + \int_{-1/2}^{1/2} |0|^q\, dt + \int_{1/2}^{1} |1|^q\, dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(t\Big|_{-1}^{-1/2} + 0 + t\Big|_{1/2}^{1} \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^{1/q}$$

$$= (1)^{1/q} = 1$$

جلسة /32/ :

2014-12-28 الموضوع

تمرين: احسب نظيم الدالي f في كل من الحالات الآتية.

دوري

(a) $f(x)=\int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^2[-1,1]$

الحل:

نعلم أن الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^2[-1,1]$ هو:

$f(x)=\int_{-1}^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x\in \mathcal{L}^2[-1,1]$ حيث:

وأن: $\|f\|=\left(\int_{-1}^{1} |\alpha(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\int_{-1}^{1} t^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(b) $f(x)=\int_{0}^{1} t^{-\frac{1}{3}}\, x(t)\, dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^2[0,1]$

الحل:

حسب الشكل العام للدالية الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^2[0,1]$ فإن:

$f(x)=\int_{0}^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \quad , \quad \forall x\in \mathcal{L}^2[0,1]$

حيث: $\alpha(t)\in \mathcal{L}^2[0,1]$

وأن: $\|f\|=\left(\int_{0}^{1} |\alpha(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{0}^{1} t^{-\frac{2}{3}} dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(3t^{\frac{1}{3}}\Big|_{0}^{1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

(c) $f(x)=\int_{-1}^{1} x(t)\, Q(t)\, dt \quad ; \quad x\in \mathcal{L}^p[-1,1]$

حيث:

$$Q(t)=\begin{cases} -1 & ; \ t\in[-1,-\frac{1}{2}] \\ 0 & ; \ t\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\\ 1 & ; \ t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

KORANI

الحل:

حسب الشكل العام للدالات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^P[-1,1]$ لدينا:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^P[-1,1]$$

حيث: $\alpha(t) \in \mathcal{L}^q[-1,1]$

وأن: $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |\alpha(t)|^q\, dt\right)^{1/q}$

$$= \left(\int_{-1}^{1} |Q(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_{-1}^{-1/2} |-1|^q dt + \int_{-1/2}^{1/2} |0|^q dt + \int_{1/2}^{1} |1|^q dt\right)^{1/q}$$

$$= \left(t\Big|_{-1}^{-1/2} + 0 + t\Big|_{1/2}^{1}\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{1/q}$$

$$= (1)^{1/q} = 1$$

(d) $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, Q(t)\, dt \quad ; \quad x \in \mathcal{L}^P[-1,1]$

$$Q(t) = \begin{cases} t & ; \ t \in [-1,1] \setminus Q \\ t^2 & ; \ t \in Q \end{cases}$$

الحل:

حسب الشكل العام للدالات الخطية في الفضاء $\mathcal{L}^P[-1,1]$ فإن:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{L}^P[-1,1]$$

حيث: $\alpha(t) \in \mathcal{L}^P[-1,1]$ وأن:

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |\alpha(t)|^q dt\right)^{1/q} = \left(\int_{-1}^{1} |Q(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

ولكن الدالتان: t و $Q(t)$ متكافئتان لأن قياس المجموعة التي لا تتطابقان عليها معدوم

(Q و Q مماثلة العد $\mu(Q) = 0$).

$$\Rightarrow \|f\| = \Big(\underset{\text{متناظر}}{\int_{-1}^{1}} \underbrace{|t|^9}_{\text{زوجي}}\,dt\Big)^{1/9} = \Big(\int_{-1}^{0} (-t)^9\,dt + \int_{0}^{1} t^9\,dt\Big)^{1/9}$$

$$= \Big((-1)^9 \int_{-1}^{0} t^9\,dt + \int_{0}^{1} t^9\,dt\Big)^{1/9}$$

$$= \Big((-1)^9 \frac{t^{9+1}}{9+1}\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^{9+1}}{9+1}\Big|_{0}^{1}\Big)^{1/9}$$

$$= \Big((-1)^9 \frac{(-1)(-1)^{9+1}}{9+1} + \frac{1}{9+1}\Big)^{1/9}$$

$$= \Big(\frac{(-1)^{2q+2}}{9+1} + \frac{1}{9+1}\Big)^{1/9}$$

$$2\int_{0}^{1} |t|^9\,dt$$

$$2\int_{0}^{1} t^9\,dt$$

$$= \Big(\frac{[(-1)^2]^{9+1}}{9+1} + \frac{1}{9+1}\Big)^{1/9}$$

$$= \Big(\frac{2}{9+1}\Big)^{1/9}$$

ملاحظة: يمكن حساب التكامل بأن نعتمد على القاعدة (تكامل تابع زوجي على مجال متناظر يساوي ضعفي تكامل هذا التابع إلى نصف المجال)

$$= \Big(2\int_{0}^{1} |t|^9\,dt\Big)^{1/9} = \Big(2\int_{0}^{1} t^9\,dt\Big)^{1/9}$$

$$= \Big(2\,\frac{t^{9+1}}{9+1}\Big|_{0}^{1}\Big)^{1/9}$$

$$= \Big(\frac{2}{9+1}\Big)^{1/9}$$

تمرين: أي من الداليات الآتية خطي ومستمر:

① $f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt \quad ; \quad x \in C[0,1]$

الحل:

$$\forall x(t), y(t) \in C[0,1] \Rightarrow f(x+y) = \int_0^1 [x(t)+y(t)]^2\,dt$$

$$= \int_0^1 x^2(t)\,dt + \int_0^1 y^2(t)\,dt + 2\int_0^1 x(t)y(t)\,dt$$

$$= f(x) + f(y) + 2\int_0^1 x(t)y(t)\,dt$$

إن التكامل $\int_0^1 x(t)y(t)\,dt$ ليس بالضرورة معدوم لأن x, y توابع كيفية من الفضاء $C[0,1]$

إن f ليس جمعي ومنه f ليس خطي.

ولكن f مستمر لأن:

لتكن متتالية عناصر من الفضاء $C[0,1]$ $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ولنفرض أنها متقاربة إلى $x(t)$.

ولنبرهن أن: $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى $f(x)$، أي لنبرهن أن:

$$\int_0^1 x_n^2(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 x^2(t)\,dt$$

$$\|x_n^2(t) - x^2(t)\| = \max_{0\le t\le 1} |x_n^2(t) - x^2(t)|$$

$$= \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) + x(t)|\,|x_n(t) - x(t)|$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) + x(t)| \cdot \underbrace{\max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x(t)|}_{d(x_n, x)} \quad \ldots (*)$$

$$|x_n(t) + x(t)| \le |x_n(t)| + |x(t)|$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} |x_n(t)| + \overbrace{\max_{0\le t\le 1} |x(t)|}^{\text{ثا}} \quad ; \ \forall\, 0\le t\le 1$$

$$= \|x_n\| + \|x\| \quad ; \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1$$

بما أن $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة فهي محدودة إذاً يوجد ثابت $C > 0$ بحيث:

$$\|x_n\| \leq C \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

وإن التابع في الطرف الأيسر من المتراجحة السابقة معرف ومستمر على منطقة مغلقة ومحدودة فهو يملك قيمة عظمى ومنه الصيغة تحقق نفس المتراجحة:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) + x(t)| \leq C + \|x\|$$

بالعودة للمتراجحة (☆) نجد:

$$\|x_n^2 - x\| \leq (C + \|x\|)\, \|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

فالمتتالية التابعية $\{x_n^2(t)\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $x^2(t)$ وبالتالي نستطيع المكاملة حداً حداً (حسب مبرهنة سابقة) فيكون:

$$\int_0^1 x_n^2(t)\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 x^2(t)\, dt \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

ومنه f مستمر

② $f(x) = \int_0^1 x(t) \sin^2 t\, dt \quad ; \quad x \in \mathcal{L}^{p}_{(*)}[0,1]$

الحل:

إن f خطي لأن:

$$\forall x, y \in \mathcal{L}^2[0,1] \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow$$

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 [\alpha x(t) + \beta y(t)] \sin^2 t\, dt$$

$$= \alpha \int_0^1 x(t) \sin^2 t\, dt + \beta \int_0^1 y(t) \sin^2 t$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y) \Rightarrow \quad f \text{ خطي}$$

بأن f خطي سنبرهن أن f مستمر بالبرهان على أنه محدود (حسب مبرهنة):

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t) \sin^2 t \, dt\right| \leq$$

"متراجحة بونياكوفسكي" $\leq \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \sin^4 t \, dt\right)^{1/2} =$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \sin^4 t \, dt\right)^{1/2}}_{=M} \|x\|_{L^2[0,1]}$$

$(\sin^2 t)^2 = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos^2 2t - 2\cos 2t) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1+\cos 4t}{2} - 2\cos 2t\right)$

$$= M \|x\|_{L^2[0,1]} \quad ; \forall x \in L^p[0,1]$$

ومنه f محدود فهو مستمر

"الامتحان صيفي"

③ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k \quad ; x \in L$

حيث L هي المتنوعة الخطية من عناصر l_2 والتي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k$.

الحل:

$$f : L \subset l_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

[illegible]

$$\forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}, \; y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in L \; ; \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \xi_k + \beta \eta_k) \sin k$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \sin k$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

ومنه f خطي

* إن f غير مستمر لأنه غير محدود لأن :

لنختار المتتالية التالية من عناصر ℓ^2 :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\sin 1}{1^{\alpha}}, \frac{\sin 2}{2^{\alpha}}, \dots, \frac{\sin n}{n^{\alpha}}, 0, 0, \dots\right)$$

حيث: $\alpha = \frac{1}{2} + \sigma$ $\quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}$$

$$\|x_n\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^{2\alpha}}\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^{2\alpha}}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} = 1 \Rightarrow \|x_n\| \leq 1 , \quad \forall n \geq 1$$

$$|f(x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^{(n)}) \sin k\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\sin k}{k^{\alpha}} \sin k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\sin^2 k}{k^{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k}{k^{\alpha}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^{\alpha}} = \infty$$

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$

ومن المعلوم في التحليل الرياضي أن السلسلة :

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^{\alpha}}$ متباعدة

ومنه f غير محدود ومنه f غير مستمر

تمرين «الفصل الثاني» : هل تشكل المجموعة:

$$\mathcal{L} = \left\{ x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in E \ ; \ \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \ ; \ \xi_k \in \mathbb{R} \right\}$$

فضاء جزئي في E في كل من الحالتين :

متنوعة خطية ، مغلقة

① $E = \ell_1$

لنبرهن أن $\mathcal{L}$ متنوعة خطية :

$$\forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \ , \ y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{L} \Rightarrow x + y = (\xi_k + \eta_k)_{k=1}^{\infty}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + \eta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \mathcal{L}$$

$$\forall x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{L} \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x = (\alpha \xi_k)_{k=1}^{\infty}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \xi_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \alpha (0) = 0 \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{L}$$

ومنه $\mathcal{L}$ متنوعة خطية

لنبرهن أن $\mathcal{L}$ مغلقة :

لتكن المتتالية $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ من عناصر $\mathcal{L}$ ولنفرض أنها متقاربة إلى $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$

ولنبرهن أن $x \in \mathcal{L}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k - \xi_k^{(n)} + \xi_k^{(n)} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k - \xi_k^{(n)} \right) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)}}_{=0} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k - \xi_k^{(n)} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \xi_k - \xi_k^{(n)} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ومنه : $x \in \mathcal{L}$ ومنه $\mathcal{L}$ مغلقة عندها $\mathcal{L}$ فضاء جزئي.