أولاً:

السؤال الأول:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{x^2+2x+1}{x}=x+2+\frac{1}{x}$$

$$I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln x\right]_1^2$$

$$I=\left[2+4+\ln 2\right]-\left[\frac{1}{2}+2\right]=6+\ln 2-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}+\ln 2$$

السؤال الثاني:

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

السؤال الثالث:

$$f(x)=x\sqrt[3]{(x^2-2)^2}=x.(x^2-2)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.2x.(x^2-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}.\frac{(x^2-2)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{1}{2}.\frac{(x^2-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}.\frac{3}{5}.(x^2-2)^{\frac{5}{3}}=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2-2)^5}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$$

(1

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}=\frac{ax(x+1)(x-2)+b(x-2)+c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$f(x)=\frac{ax(x^2-x-2)+bx-2b+cx+c}{x^2-x-2}=\frac{ax^3-ax^2-2ax+bx-2b+cx+c}{x^2-x-2}$$

$$f(x)=\frac{ax^3-ax^2+(-2a+b+c)x+(-2b+c)}{x^2-x-2}$$

بالمطابقة نجد

$$a=1 \quad (1)$$

$$-a=-1 \quad (2)$$

$$-2a+b+c=1 \quad (3)$$

$$-2b+c=-3 \quad (4)$$

من (1) أو (2) نجد $a=1$

نعوض في (3) فنجد $-2+b+c=1$ أي $c=3-b$

نعوض في (4) فنجد $-2b+3-b=-3$ أي $b=2$ ومنه $c=1$ وبالتالي:

$$f(x)=x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$

(2

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2\ln(x+1)+\ln(2-x)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}+2\ln 2\right]-\left[\ln 2\right]=\frac{1}{2}+\ln 2$$

التمرين الثاني:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

1)
$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$$

$$I=\left[\ln(1+\sqrt{2})\right]-[0]=\ln(1+\sqrt{2})$$

2)
$$K=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx \text{ و } J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$I+J=I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=K$$

3)
$$K=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$u=\sqrt{x^2+1}$	$u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$v'=1$	$v=x$

$$K=\left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-J$$

لدينا $I+J=K$ وبالتالي:

$$\ln(1+\sqrt{2})+J=\sqrt{2}-J$$

$$2J=\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$$

$$J=\frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

و
$$K=\sqrt{2}-J=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}=\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

التمرين الثالث:

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\frac{x+1}{e^x}$ بما أن $e^x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $x+1$

عندما $x>-1$ فإن C فوق المقارب

عندما $x<-1$ فإن C تحت المقارب

(2
$$S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x+1}{e^x}\,dx=\int_0^1(x+1)e^{-x}\,dx$$

$u=x+1$	$u'=1$
$v'=e^{-x}$	$v=-e^{-x}$

$$S=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})\,dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1-\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$S=\left[-2e^{-1}\right]-[-1]-\left(\left[e^{-1}\right]-[1]\right)=-\frac{2}{e}+1-\frac{1}{e}+1=2-\frac{3}{e}=\frac{2e-3}{e}$$

(3 P من الدرجة الثانية أي $P(x)=ax^2+bx+c$ وبالتالي $G(x)=P(x)e^{-2x}=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$

$G(x)$ تابع أصلي للتابع $(f(x))^2$ أي: $G'(x)=(f(x))^2$

$$(2ax+b)e^{-2x}-2e^{-2x}(ax^2+bx+c)=((x+1)e^{-x})^2$$

$$(2ax+b-2ax^2-2bx-2c)e^{-2x}=(x^2+2x+1)e^{-2x}$$

$$-2ax^2+(2a-2b)x+(b-2c)=x^2+2x+1$$

$-2a=1 \quad (1)$

بالمطابقة $2a-2b=2 \ (2)$ من (1) نجد $a=-\frac{1}{2}$

$b-2c=1 \ \ (3)$

نعوض في (2) فنجد $-1-2b=2$ أي $b=-\frac{3}{2}$

نعوض في (3) فنجد $-\frac{3}{2}-2c=1$ أي $c=-\frac{5}{4}$

وبالتالي يكون $G(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)e^{-2x}$

(4
$$V=\pi\int_0^1(f(x))^2\,dx=\pi\left[G(x)\right]_0^1=\pi\left[\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^1$$

$$V=\pi\left(\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)e^{-2}\right]-\left[-\frac{5}{4}\right]\right)=\pi\left(\left[-\frac{13}{4}e^{-2}\right]-\left[-\frac{5}{4}\right]\right)=\pi\left(-\frac{13}{4e^2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{\pi(5e^2-13)}{4e^2}$$

التمرين الرابع:

$$f(x)=x(1+e^{-x}) \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=xe^{-x}$ بما أن $e^{-x}>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة x

عندما $x>0$ فإن C فوق المقارب

عندما $x<0$ فإن C تحت المقارب

2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$ لا يمكن معرفة إشارة المشتق ، لذلك نفرض التابع $g(x)=e^{-x}-xe^{-x}+1$ المعرف على $\mathbb{R}$

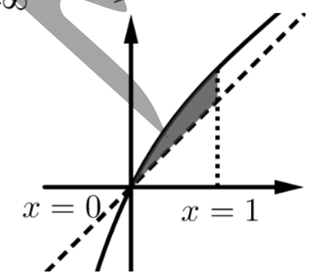
$$g'(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

عندما $g'(x)=0$ فإن $x=2$ حيث $g(2)=e^{-2}-2e^{-2}+1=-e^{-2}+1=-\frac{1}{e^2}+1=\frac{e^2-1}{e^2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$\frac{e^2-1}{e^2}$	↗	

من جدول اطراد g نجد أن $g(x)>0$ وبالتالي $f'(x)>0$ والتابع f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



3) $$S=\int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,dx=\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

$u=x$	$u'=1$
$v'=e^{-x}$	$v=-e^{-x}$

$$S=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\,dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$S=\left[-e^{-1}\right]-[0]-\left(\left[e^{-1}\right]-[1]\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}$$

انتهى حل النموذج الأول

التكامل والتوابع الأصلية

أولاً:

السؤال الأول:

$$I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_0^1$$

$$I=\frac{1}{3}\left(\left[\sqrt{8}\right]-[1]\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

السؤال الثاني:

$$f(x)=\sin 2x.\cos x=\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x\right)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x$$

السؤال الثالث:

$f(x)=\dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$ على المجال $]1,+\infty[$

$$f(x)=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2-2-1}{(x-1)^2}=\frac{2(x^2-2x+1)-3}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2-3}{(x-1)^2}=2-\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=2-3(x-1)^{-2}$$

$$F(x)=2x-3\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}=2x-3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=2x+\frac{3}{x-1}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)=e^{x}\sin x$ و $G(x)$ تابع أصلي للتابع $g(x)=e^{x}\cos x$

1) $$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x e^{x}\sin x\,dx$$

$u=e^{x}$	$u'=e^{x}$
$v'=\sin x$	$v=-\cos x$

$$F(x)=\Big[-e^{x}\cos x\Big]_0^x+\int_0^x e^{x}\cos x\,dx$$

$$(1)\ldots \qquad F(x)=-e^{x}\cos x+1+G(x)$$

$$G(x)=\int_0^x g(x)\,dx=\int_0^x e^{x}\cos x\,dx$$

$u=e^{x}$	$u'=e^{x}$
$v'=\cos x$	$v=\sin x$

$$G(x)=\Big[e^{x}\sin x\Big]_0^x-\int_0^x e^{x}\sin x\,dx$$

$$(2)\ldots \qquad G(x)=e^{x}\sin x-F(x)$$

2) نعوض (1) في (2) فنجد:

$$G(x)=e^{x}\sin x-\left(-e^{x}\cos x+1+G(x)\right)$$

$$G(x)=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-1-G(x)$$

$$2G(x)=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-1$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-1\right)$$

نعوض (2) في (1) فنجد:

$$F(x)=-e^{x}\cos x+1+\left(e^{x}\sin x-F(x)\right)$$

$$F(x)=-e^{x}\cos x+1+e^{x}\sin x-F(x)$$

$$2F(x)=-e^{x}\cos x+1+e^{x}\sin x$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(-e^{x}\cos x+1+e^{x}\sin x\right)$$

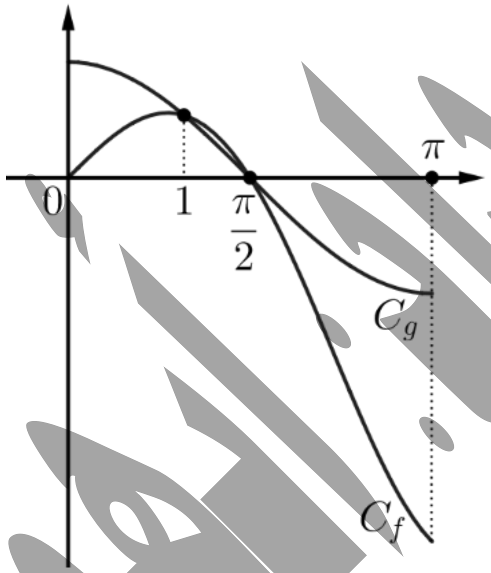
التمرين الثاني:

$f(x)=x\cos x$ خطه البياني C_f و $g(x)=\cos x$ خطه البياني C_g

1) $$f(x)-g(x)=x\cos x-\cos x=(x-1)\cos x$$

x	0		1		$\frac{\pi}{2}$		π
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C_f تحت C_g		C_f فوق C_g		C_f تحت C_g	

2)



3) $$S=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)-g(x))\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-1)\cos x\,dx$$

$u=x-1$	$u'=1$
$v'=\cos x$	$v=\sin x$

$$S=-\left(\left[(x-1)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx\right)=-\left(\left[(x-1)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$S=-\left(\left[(\pi-1)\sin\pi\right]-\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\frac{\pi}{2}\right]-\left[-\cos\pi\right]+\left[-\cos\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$S=-\left(\left[0\right]-\left[\frac{\pi}{2}-1\right]-\left[1\right]+\left[0\right]\right)=-\left(-\frac{\pi}{2}+1-1\right)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

التمرين الثالث:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x} \quad \text{و} \quad D_f=]1,+\infty[$$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

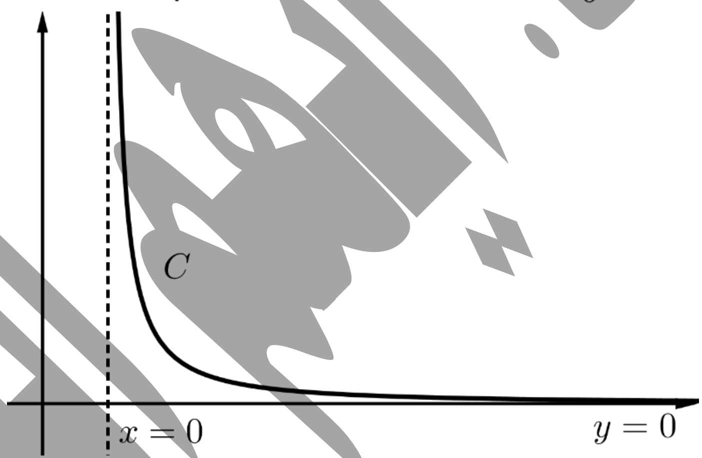
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{-\left(\ln x+\frac{1}{x}.x\right)}{(x\ln x)^2}=\frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $\ln x=-1$ أي $x=e^{-1}=\frac{1}{e}\notin D_f$ مرفوض

وبالتالي التابع f متناقص تماماً

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0



2) $$S=\int_e^{e^2} f(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\left[\ln(\ln x)\right]_e^{e^2}$$

$$S=\left[\ln(\ln e^2)\right]-\left[\ln(\ln e)\right]=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

3) $$g(x)=\frac{\ln x-1}{x\ln x}$$

$$\int_e^{e^2}\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln x}+\frac{\ln x-1}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{1+\ln x-1}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{\ln x}{x\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int_e^{e^2}\big(f(x)+g(x)\big)dx=[\ln x]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$$

$$\int_e^{e^2} f(x)dx+\int_e^{e^2} g(x)dx=1$$

أي $\int_e^{e^2} g(x)dx=1-\int_e^{e^2} f(x)dx=1-\ln 2$

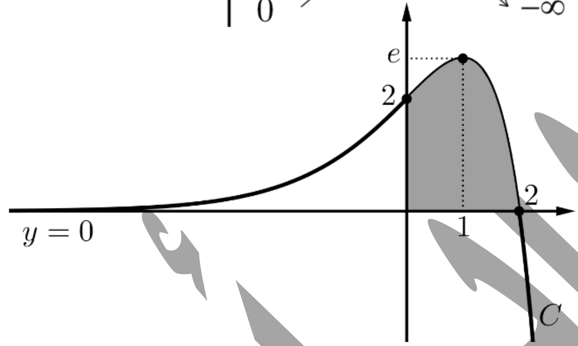
التمرين الرابع:

$$f(x)=(2-x)e^{x} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x}-xe^{x})=0$ وبالتالي المستقيم $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$f'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}=(-1+2-x)e^{x}=(1-x)e^{x}$ عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1$ حيث $f(1)=e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



2) $$S=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (2-x)e^{x}\,dx$$

$u=2-x$	$u'=-1$
$v'=e^{x}$	$v=e^{x}$

$$S=\Big[(2-x)e^{x}\Big]_0^2+\int_0^2 e^{x}\,dx=\Big[(2-x)e^{x}\Big]_0^2+\Big[e^{x}\Big]_0^2=[0]-[2]+\Big[e^{2}\Big]-[1]=e^{2}-3$$

3) التابع $G(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $(f(x))^{2}$ أي: $G'(x)=(f(x))^{2}$

$$(2ax+b)e^{2x}+2e^{2x}(ax^{2}+bx+c)=(2-x)^{2}e^{2x}$$

$$2ax+b+2ax^{2}+2bx+2c=4-4x+x^{2}$$

$$2ax^{2}+(2a+2b)x+(b+2c)=x^{2}-4x+4$$

بالمطابقة نجد

$2a=1 \quad (1)$

$2a+2b=-4 \quad (2)$ من (1) نجد $a=\dfrac{1}{2}$

$b+2c=4 \quad (3)$

نعوض في (2) فنجد $1+2b=-4$ أي $b=-\dfrac{5}{2}$ نعوض في (3) فنجد $-\dfrac{5}{2}+2c=4$ أي $c=\dfrac{13}{4}$

وبالتالي $G(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^{2}-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{13}{4}\right)e^{2x}$

4) $$V=\pi\int_0^2 \big(f(x)\big)^{2}\,dx=\pi\Big[G(x)\Big]_0^2=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{5}{2}x+\frac{21}{8}\right)e^{2x}\right]_0^2$$

$$V=\pi\left(\left[\left(2-5+\frac{13}{4}\right)e^{4}\right]-\left[\frac{13}{4}\right]\right)=\frac{\pi(e^{4}-13)}{4}$$

انتهى حل النموذج الثاني

أولاً:

السؤال الأول:

$$I=\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}dx$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(a+b)x+(2a-2b)}{x^2-4}$$

بالمطابقة نجد $\begin{matrix} a+b=0 \\ 2a-2b=4 \end{matrix}$ وتكافئ $\begin{matrix} a+b=0 \\ a-b=2 \end{matrix}$

بالجمع نجد $a=1$ ومنه $b=-1$ وبالتالي: $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$$I=\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}dx=\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx=\left[\ln(2-x)\right]_0^1-\left[\ln(x+2)\right]_0^1$$

$$I=[\ln 1]-[\ln 2]-[\ln 3]+[\ln 2]=-\ln 3$$

السؤال الثاني:

$$f(x)=\sin x.\cos^2 x=-(-\sin x)(\cos x)^2$$

$$F(x)=-\frac{(\cos x)^3}{3}=-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

السؤال الثالث:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}}=\frac{1}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}=(2x+3)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}.2.(2x+3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}.\frac{(2x+3)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{2}.\frac{(2x+3)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$f(x)=e^{2x}\sin x$$

1) $$f'(x)=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=2f(x)+e^{2x}\cos x$$

$$f''(x)=2f'(x)+2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=2f'(x)+2e^{x}\cos x-f(x)$$

2) $$f''(x)=2f'(x)+2\left(f'(x)-2f(x)\right)-f(x)$$

$$f''(x)=2f'(x)+2f'(x)-4f(x)-f(x)$$

$$f''(x)=4f'(x)-5f(x)$$

$$5f(x)=4f'(x)-f''(x)$$

$$f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$$

3) $$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\left(\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)\right)dx=\left[\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)\right]_0^x$$

$$F(x)=\left[\frac{4}{5}e^{2x}\sin-\frac{1}{5}\left(2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x\right)\right]_0^x=\left[\frac{4}{5}e^{2x}\sin-\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x\right]_0^x$$

$$F(x)=\left[\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x\right]_0^x$$

$$F(x)=\left[\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x\right]-\left[\frac{2}{5}e^{0}\sin 0-\frac{1}{5}e^{0}\cos 0\right]$$

$$F(x)=\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+\frac{1}{5}$$

التمرين الثاني:

$$f(x)=\min\left(4-(x-1)^2,\frac{3}{2}x\right) \text{ و } [0,3]$$

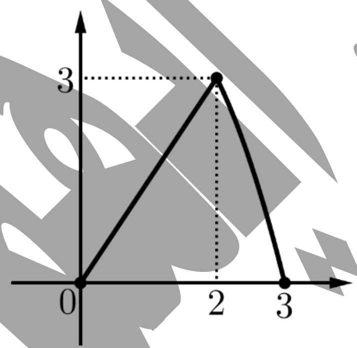
1) ندرس إشارة الفرق $4-(x-1)^2-\frac{3}{2}x=4-x^2+2x-1-\frac{3}{2}x=-x^2+\frac{1}{2}x+3$

$$\Delta=\frac{1}{4}-4(-1)(3)=\frac{1}{4}+12=\frac{49}{4}$$

$$x_2=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2 \text{ و } x_1=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{-2}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x^2+\frac{1}{2}x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & : x\in[0,2]\\ 4-(x-1)^2 & : x\in[2,3]\end{cases}$$



2) $$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2\frac{3}{2}x\,dx+\int_2^3(4-(x-1)^2)dx$$

$$\int_0^3 f(x)dx=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^2+\left[4x-\frac{(x-1)^3}{3}\right]_2^3$$

$$\int_0^3 f(x)dx=[3]-[0]+\left[12-\frac{8}{3}\right]-\left[8-\frac{1}{3}\right]=3+12-\frac{8}{3}-8+\frac{1}{3}=7-\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$$

التمرين الثالث:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \text{ و } D_f=]0,+\infty[$$

1)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$\frac{\ln x}{x}$		$-$	0	$+$	

2)
$$S=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$u=\ln x$	$u'=\frac{1}{x}$
$v'=\frac{1}{x}$	$v=-\frac{1}{x^2}$

$$S=\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^3}dx=\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^e+\int_1^e x^{-3}dx=\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^e+\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^e=\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^e+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^e$$

$$S=\left[-\frac{\ln e}{e^2}\right]-\left[\frac{\ln 1}{1}\right]+\left[-\frac{1}{2e^2}\right]-\left[-\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{1}{e^2}\right]-[0]+\left[-\frac{1}{2e^2}\right]-\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$S=-\frac{1}{e^2}-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}=\frac{e^2-3}{2e^2}$$

3) نوجد مشتق التابع $G(x)=\frac{-(\ln x)^2-2\ln x-2}{x}$ فنجد:

$$G'(x)=\frac{\left(-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}\right)x-\left(-(\ln x)^2-2\ln x-2\right)}{x^2}=\frac{-2\ln x-2+(\ln x)^2+2\ln x+2}{x^2}=\frac{(\ln x)^2}{x^2}=(f(x))^2$$

أي أن $G(x)$ تابع أصلي للتابع $(f(x))^2$ على المجال $]0,+\infty[$

4)
$$V=\pi\int_1^e (f(x))^2\,dx=\pi\left[G(x)\right]_1^e=\pi\left[\frac{-(\ln x)^2-2\ln x-2}{x}\right]_1^e$$

$$V=\pi\left(\left[\frac{-(\ln e)^2-2\ln e-2}{e}\right]-\left[\frac{-(\ln 1)^2-2\ln 1-2}{1}\right]\right)$$

$$V=\pi\left(\left[\frac{-1-2-2}{e}\right]-[-2]\right)=\pi\left(-\frac{5}{e}+2\right)=\frac{\pi(2e-5)}{e}$$

التمرين الرابع:

$$f(x)=x+2^x=x+e^{x\ln 2} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln 2}=0$$

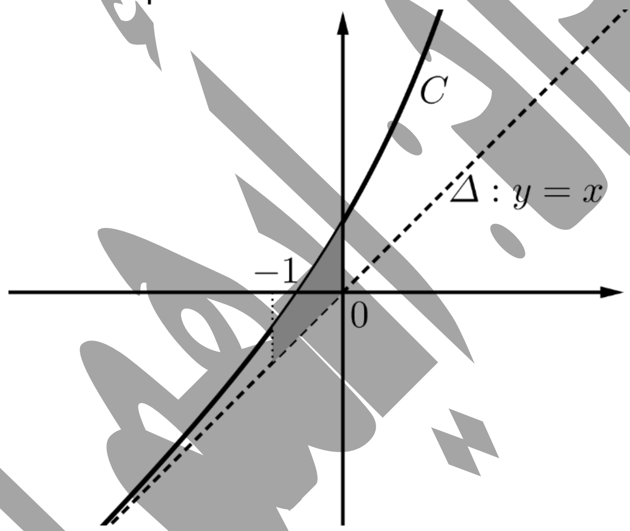
وبالتالي المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=e^{x\ln 2}>0$ وبالتالي C فوق المقارب

2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

وبالتالي التابع متزايد تماماً $f'(x)=1+\ln 2e^{x\ln 2}>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



3) $$S=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-y_\Delta\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{x\ln 2}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{0}(\ln 2e^{x\ln 2})dx=\frac{1}{\ln 2}\left[e^{x\ln 2}\right]_{-1}^{0}$$

$$S=\frac{1}{\ln 2}\left([1]-\left[e^{-\ln 2}\right]\right)=\frac{1}{\ln 2}\left([1]-\left[e^{\ln\frac{1}{2}}\right]\right)=\frac{1}{\ln 2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\ln 2}$$

انتهى حل النموذج الثالث

التكامل والتوابع الأصلية

أولاً:

السؤال الأول:

$$I=\int_{-3}^{-1} x\,|x+2|\,dx$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$\|x+2\|$		$-x-2$		$x+2$	

$$I=\int_{-3}^{-2} x(-x-2)\,dx+\int_{-2}^{-1} x(x+2)\,dx=\int_{-3}^{-2}(-x^2-2x)\,dx+\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)\,dx$$

$$I=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{-1}=\left[\frac{8}{3}-4\right]-\left[9-9\right]+\left[-\frac{1}{3}+1\right]-\left[-\frac{8}{3}+4\right]$$

$$I=\frac{8}{3}-4-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-4=-2$$

السؤال الثاني:

$$f(x)=(x+1)\ln x$$

$$F(x)=\int_1^x f(x)\,dx=\int_1^x (x+1)\ln x\,dx$$

$u=\ln x$	$u'=\dfrac{1}{x}$
$v'=x+1$	$v=\dfrac{1}{2}x^2+x$

$$F(x)=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\frac{1}{x}\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx$$

$$F(x)=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]_1^x-\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_1^x$$

$$F(x)=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x\right]-\left[0\right]-\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]+\left[\frac{1}{4}+1\right]$$

$$F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{5}{4}$$

السؤال الثالث:

$$f(x)=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3x+6-1}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=3-\frac{1}{x+2}$$

$$F(x)=3x-\ln(-x-2)$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$f(x)=\cos^4 x$$

$$f(x)=\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) \qquad (1$$

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$f(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x \qquad (2$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\left[\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{12}} \qquad (3$$

$$I=\left[\frac{3\pi}{96}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{3}\right]-\left[\frac{1}{4}\sin 0+\frac{1}{32}\sin 0\right]$$

$$I=\left[\frac{3\pi}{96}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]-[0]$$

$$I=\frac{3\pi}{96}+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{64}$$

التمرين الثاني:

$$J=\int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx \text{ و } I=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}dx$$

(1

$$J=\int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{x^2}+1\right)\right]_0^1$$

$$J=\frac{1}{2}\left(\left[\ln(e+1)\right]-\left[\ln 2\right]\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=\ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$$

$$I+J=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}dx+\int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\int_0^1 \frac{x+xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\int_0^1 \frac{x\left(e^{x^2}+1\right)}{e^{x^2}+1}dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}-J=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$$

(2

$$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}+1}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{e^{(-x)^2}+1}=-\frac{x}{e^{x^2}+1}=-f(x)$$

وبالتالي التابع f فردي

بما أن التابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ فإن مساحة السطح المحصور بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=-a$ متناظرة بالنسبة للمبدأ

$$\int_0^a f(x)dx=-\int_{-a}^0 f(x)dx$$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

التمرين الثالث:

$$f(x)=x\sqrt{2x^2+1} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) بما أن $\sqrt{2x^2+1}>0$ إشارة $f(x)$ من إشارة x

عندما $x>0$ فإن $f(x)>0$

عندما $x<0$ فإن $f(x)<0$

2)
$$S=-\int_{-1}^{0}x\sqrt{2x^2+1}\,dx=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}4x.(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^{0}$$

$$S=-\frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2x^2+1)^3}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{6}\left[\sqrt{(2x^2+1)^3}\right]_{-1}^{0}$$

$$S=-\frac{1}{6}\left([1]-\left[\sqrt{27}\right]\right)=-\frac{1}{6}\left(1-3\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}-1}{6}$$

3)
$$(f(x))^2=\left(x\sqrt{2x^2+1}\right)^2=x^2.(2x^2+1)=2x^4+x^2$$

تابعه الأصلي $G(x)=\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3$

4)
$$V=\pi\int_{-1}^{0}(f(x))^2\,dx=\pi\left[G(x)\right]_{-1}^{0}=\pi\left[\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$V=\pi\left([0]-\left[-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right]\right)=\pi\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11\pi}{15}$$

التمرين الرابع:

$$f(x)=x^3-3x+1 \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\Delta: y=x+1$$

$$f(x)-y_\Delta=x^3-3x+1-x-1=x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت Δ		C فوق Δ		C تحت Δ		C فوق Δ	

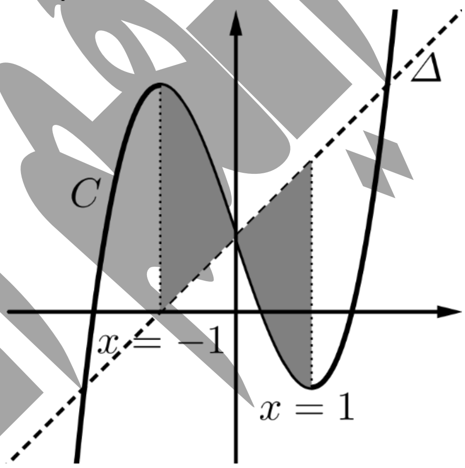
2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1$ حيث $f(1)=-1$ أو $x=-1$ حيث $f(-1)=3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

3)



3) $$S=\int_{-1}^{1}|f(x)-y_\Delta|dx=\int_{-1}^{0}(f(x)-y_\Delta)dx+\int_{0}^{1}(y_\Delta-f(x))dx=\int_{-1}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+4x)dx$$

$$S=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{1}=[0]-\left[\frac{1}{4}-2\right]+\left[-\frac{1}{4}+2\right]-[0]$$

$$S=-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}+2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

انتهى حل النموذج الرابع

التكامل والتوابع الأصلية