التكامل وتطبيقاته

$\int_a^b f = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

تكامل محدد

التكامل غير المحدد (الناتج الأصلي)

الناتج الأصلي عكس المشتقة

1) التكامل المحدد باستخدام القواعد
2) التكامل المحدد للمقية المطلقة
3) التكامل بالتجزئة
4) تكامل الكسور الجزئية

$F'(x) = f(x)$ قواعد

i) $f(x) = 0$	$F(x) = c$ ثابت
ii) $f(x) = a$	$F(x) = ax$
iii) $f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
iv) $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
v) $f(x) = \cos x$	$F = \sin x$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
vi) $f(x) = e^x$	$F = e^x$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$f(x) = g' \cdot e^g$	$F = e^{g(x)}$

$e^{g(x)}$ مشتقة ⟵ ⟶ تكامل $g' \cdot e^{g(x)}$

vii) $f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x) = \ln\lvert g(x)\rvert$

$\ln(g(x))$ مشتقة ⟵ ⟶ تكامل $\frac{g'}{g}$

viii) $f(x) = g' \cdot g^n$	$F(x) = \frac{g^{n+1}}{n+1}$
$\tan x$ مشتقة ⟵ ⟶ تكامل $\frac{1}{\cos^2 x}$	
ix) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F = \tan x$
$\cot x$ مشتقة ⟵ ⟶ تكامل $-\frac{1}{\sin^2 x}$	

طرق البسط أصغر من طرق المقام

نستخدم تفريق البسط لجعل البسط أكبر من أو يساوي المقام ثم نقوم بكسر الكسر لأجزاء المقام

طرق البسط أكبر من أو يساوي طرق المقام

نستخدم القسمة المطولة

الكسر = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

نقوم بتحليل المقام لعوامل أبسط ما يمكن

i) $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + c$

ii) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$

وسائر التحويل

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Scanned by CamScanner

المساحة والحجم

المساحة

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

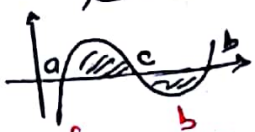
الحالة الأولى

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

الحالة الثانية

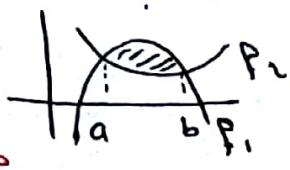
$$S=\int_a^b -f(x)\,dx$$

الحالة الثالثة



$$S=\int_a^c f+\int_c^b -f$$

الحالة الرابعة



$$S=\int_a^b (f_1-f_2)$$

- لإيجاد حدود التكامل في حالات الشكل الأول نحل المعادلة $f(x)=0$
- لمعرفة السطح فوق Ox أم تحت Ox نعوض قيمة تجريبية من حدود التكامل في المعادلة الناتج موجب السطح فوق Ox سالب " " تحت Ox.
- لإيجاد حدود التكامل في حالات الشكل الرابعة نحل المعادلة $f_1(x)=f_2(x)$
- لمعرفة أيهما أكبر نعوض قيمة تجريبية من حدود التكامل الناتج أكبر هو الأكبر.

الحجم

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

مثال: ليكن $f(x)=x^2-2x$

1) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Ox.

2) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول Ox دورة كاملة.

- لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة
$f(x)=0 \Rightarrow x^2-2x=0$
$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

نعوض $x=1$ في $f(x)$ نجد $f(1)=-1<0$ إذن C تحت Ox.

$$S=\int_0^2 -f(x)=\int_0^2 (-x^2+2x)$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+4-0=\frac{4}{3}$$ وحدة مربعة.

$$V=\pi\int_0^2 (x^2-2x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\pi\left[\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}-0\right]$$

وحدة مكعبة.

Scanned by CamScanner