مركز أونلاين التعليمي

الجلسات الامتحانية

رياضيات

الثالث الثانوي العلمي

دمشق

2024

الأستاذ . فارس جقل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

♦ الجلسات الامتحانية ..دمشق 2024 ♦

جلسة مراجعة التحليل

السؤال الأول: ليكن f تابعاً معرفاً على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

المطلوب:

1. أثبت أن f مستمر عند الصفر.
2. ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.
3. اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

السؤال الثاني: ليكن التابع f ا لمعرف على المجال $\mathcal{R}\ /\ \{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x}{x+1}$. المطلوب:

1. أوجد النهاية عند $+\infty$
2. اعط عدداً حقيقياً A يحقق $x>A$ وكان $f(x)\in\ ]1.9, 2.1[$
3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

السؤال الثالث: ليكن $1 \leq x$ أثبت أن $\frac{-1}{x+1}\leq\frac{cosx}{x+1}\leq\frac{1}{x+1}$

ثم أوجد نهاية $f(x)=\frac{cosx}{x+1}$ عند $+\infty$

السؤال الرابع : $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ المعرف على $[0,+\infty[$

1. تحقق أن $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$
2. استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\leq f(x)\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f$

السؤال الخامس: بفرض لدينا $|f(x)-2|\leq e^{-x}.\ln x$

1. أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}.\ln x$
2. استنتج نهاية التابع $f(x)$

وظيفة : ليكن لدينا $|f(x)-1|\leq\frac{E(x)}{x^2+1}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال السادس: ليكن التابع $f(x)=x-lnx$ المعرف على $I=]0,+\infty[$ المطلوب :

1. جد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على المجال ثم $f'(1)$
2. ما نهاية $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-lnx-1}{x-1}$

السؤال السابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ والمطلوب:

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}-2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

✓ هام.. توكل على الله ولا تيأس ..بعد كل تعب راحة ونجاح إن شاء الله

السؤال الثامن: بفرض التابعان المعرفان $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $f(x)=x-1+e^x$, على

أثبت ان c_f و c_g متماسان في المبدأ واكتب معادلة المماس المشترك.

السؤال التاسع: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R $f(x)=3x+\frac{\sin x+2}{x^2+1}$

1. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط C

وظيفة : ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق: $f(x)=-2x+xe^{-x}$ والمطلوب :

1. حسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ و الخط C

السؤال العاشر: ليكن f المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$

1. ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظم جدولاً بها
2. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً
3. اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3
4. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$
5. هل يقبل C مماساً أفقياً

السؤال الحادي عشر:

حل المعادلة: $4^x+2^{x+1}-8=0$ في R

السؤال الثاني عشر: لنتأمل التابع f المعرف على R وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$

1. تحقق أن f دوري و أن 2π دور له . ادرس الصف الزوجية أو الفردية للتابع f ، ثم استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$
2. أثبت أنه في حالة عدد حقيقي x لدينا $f`(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

لا تمل ..الملل عدو النجاح ....لا تخاف خليك شجاع ...لا تتلبك ..كول مشبك ...

♦ الجلسات الامتحانية ..دمشق 2024 ♦

3. ادرس تغيرات f على المجال $[0, \pi]$

السؤال الثالث عشر: أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً في R ثمّ بيّن ان $\alpha \in]-1, 0[$

السؤال الرابع عشر: ليكن التابع المعرف على R وفق:
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

1. a. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1))$

b. استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C الخط البياني للتابع f في جوار ال $+\infty$

c. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

السؤال الخامس عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية، (متمماً إلى مربع كامل)
3. استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني واكتب معادلته

السؤال السادس عشر: أوجد المنحني التكاملي (التابع الأصلي) الذي يحقق $F(0) = 3$ للتابع $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

السؤال السابع عشر: ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = xe^{-x}$ والمطلوب:

1. احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)\ d(x)$
2. أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$
3. وظيفة ادرس التغيرات

السؤال الثامن عشر: ليكن التابع $f(x) = x\ln x - x$ المعرف على $]0, +\infty[$

1. ادرس التغيرات
2. استنتج أن للمعادلة $x\ln x - x + 1 = 0$ حل وحيد في المجال $]0, +\infty[$
3. ارسم الخط البياني للتابع

السؤال التاسع عشر: حل المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$ علماً أن الخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4, 1)$

السؤال العشرون: حل في R :

① $\ln(x + 11) = \ln(x + 2) + \ln(x + 3)$

② $\ln(x - 2) \le \ln(2x - 1)$

السؤال الحادي والعشرون: حل جملة المعادلتين:
$$\begin{cases} 3^x . 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

السؤال الثاني والعشرون: بفرض لدينا
$$p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

1. تحقق أن $x = 1$ حل للمعادلة $p(x) = 0$
2. أثبت أن $p(x)$ يكتب بالشكل
$$p(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$
3. أوجد حلول المتراجحة $p(x) \le 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة $2\ln(x) + \ln(x + 4) \le \ln(6 - x)$

السؤال الثالث والعشرون : حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$

السؤال الرابع والعشرون : أثبت أنه أياً كانت $x > 0$ فإن $\ln x < x$

السؤال الخامس والعشرون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = e^x + \ln x$ وليكن g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق: $g(x) = xe^x + 1$ والمطلوب :

1. ادرس تغيرات g و نظم جدولاً بها
2. أوجد نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف
3. أثبت أن $f`(x) = \frac{g(x)}{x}$
4. مستفيداً من تغيرات g ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

السؤال السادس والعشرون : تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $I = R$
$$F(x) = \sin^2 x \quad و \quad G(x) = 2 - \cos^2 x$$

السؤال السابع والعشرون : نظم جدول تغيرات للتوابع التالية :

① $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$

② $f(x) = x^2 \ln x$ المعرف على $]0, +\infty[$

③ $f(x) = xe^{-x}$ المعرف على R

④ $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ المعرف على R

⑤ $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ المعرف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

⑥ $f(x) = e^x + e^{-x}$ $D = R$ و نفس التابع لكن طرح

⑦ $f(x) = e^x(1 - x)$ $D = R$

⑧ $f(x) = x - \ln(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$

⑨ $f(x) = \ln(\frac{x-2}{x-4})$ $D =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$ مع طلب اثبات نقطة مركز تناظر $A(3, 0)$

⑩ $f(x) = x\ln x - x$ المعرف على $]0, +\infty[$

⑪ $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ المعرف على R

⑫ $f(x) = e^{-x} + x - 2$ المعرف على R

⑬ $f(x) = \frac{2e^x}{x^2+1}$ المعرف على R

✓ راجع تغيرات تابع من الكتاب صفحة 202

وظيفة1 (75درجة) : ليكن لدينا التابع $g(x) = x\ln x$ المعرف على $]0,+\infty[$

1. حل المعادلة $g(x) = 0$
2. جد مجموعة تعريف $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$
3. احسب التكامل التالي $I = \int_e^{e^2} f(x)\,dx$

وظيفة2: 75د : بفرض لدينا التابع $f(x) = (x^2+1)\,e^{2x}$ ليكن $F(x)$ المعرف و الاشتقاقي على R حيث

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

1. عين الثوابت a, b, c إذا كان F تابع أصلي ل f
2. احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

وظيفة 3 (مسألة 100 علامة): $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ تابع معرف على R

1. أثبت أن التابع زوجي
2. ادرس التغيرات
3. أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلان في R
4. إذا كان حلول المعادلة $f(x) = m$ حلان هما α, β أثبت أن $\alpha + \beta = 0$
5. ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$

وظيفة 4: ليكن $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ ثم احسب $\int_2^3 f(x)\,dx$

وظيفة 5: احسب $S_\lambda = \int_1^\lambda \frac{2}{x(x+1)}\,dx$ ثم احسب $\lim_{\lambda\to+\infty}(S_\lambda)$

وظيفة 6: 21 ملحق : f معرف على R وفق : $f(x) = \sin x$ وبافتراض أن f أشتقاقية n مرة على R أثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin(\frac{\pi}{2}n + x)$

هاام: راجع فكرة التمرينين 24 و 25 من تمرينات وحدة التابع الأسي

جلسة مراجعة المتتاليات

السؤال الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = 3n + 1$

1. أثبت أنها حسابية وعيّن أساسها ثمّ احسب المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{14}$
2. برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً

السؤال الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

1. أثبت أن (v_n) هندسية ثمّ عيّن أساسها وحدها الأول
2. اكتب u_n بدلالة n

السؤال الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$

1. أثبت أن $u_n \ge u_{n+1} \ge 1$
2. استنتج أن (u_n) متناقصة

السؤال الرابع : $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية فيها $u_1 = 6$ و $u_0 = -2$

1. أوجد أساس المتتالية ثمّ اكتب u_n *بدلالة* n
2. احسب المجموع $S = u_2 + u_3 + \cdots u_{10}$

السؤال الخامس: $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية فيها $u_0 = -2$ و $q = 2$

1. احسب u_5
2. احسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

السؤال السادس: المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج ، أن $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$
2. استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$
3. أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة

السؤال السابع : لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق: $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ و $t_n = 1 - \frac{1}{n}$, أثبت أنهما متجاورتان ثمّ بيّن نهايتهما المشتركة

السؤال الثامن: ليكن n عدد طبيعي اثبت بالتدريج : $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

السؤال التاسع: لتكن المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{3^n}$ والمطلوب:

1. أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً
2. أثبت أن S_n تكتب بالشكل

لا تمل ..الملل عدو النجاح ....لا تخاف خليك شجاع ...لا تتلبك ..كول مشبك ...

$S_n = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$, ثمّ استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبيّن أنها متقاربة

السؤال العاشر: نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \geq 0$ والمطلوب

1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$
2. أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n
3. استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

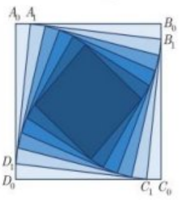
السؤال العادي عشر:

ليكن $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n}$ في حالة $n \geq 1$

أثبت أن $\frac{1}{2+n} \leq u_n \leq \frac{3}{n-2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

السؤال الثاني عشر:

مربع $A_0B_0C_0D_0$ نرمز له S_0 طول ضلعه 10 تقع على أضلاعه رؤوس مربع $A_1B_1C_1D_1$ نرمز له S_1 حيث $A_0A_1 = 1$ بالمثل نرسم المربعات $S_2 \dots S_n$ نرمز لطول المربع S_n بالرمز ℓ_n ولتكن المتتالية التدريجية $(\ell_n)_{n\geq0}$ حيث $\ell_0 = 10$ و المطلوب :



1. أثبت أن $1 \leq \ell_{n+1} \leq \ell_n$
2. أثبت أن $\ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}$
3. استنتج أن المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها

السؤال الثالث عشر:

ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n و ليكن $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_1 \dots + u_n$ والمطلوب :

1. استنتج عبارة S_n ثم أثبت صحتها بالبرهان بالتدريج

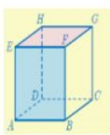
هاااام : راجع فكرة تمرين 14 من الكتاب صفحة 141

جلسة مراجعة الهندسة

السؤال الأول:

1. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$
2. تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: \ x - y + z + 3 = 0$ يمس الكرة S

السؤال الثاني: في الشكل المجاور: ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2، نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ، $\overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath}$



1. اكتب معادلة المستوي (GBD)
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)
3. جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)
4. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق: $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$
5. أثبت تعامد المستقيمين (EC) و (HM)

السؤال الثالث:

اكتب شعاعيّ التوجيه للمستقيمين d و d' :

$$d: \begin{cases} X = t + 1 \\ Y = -3t + 2 \\ Z = -3t + 3 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$d': \begin{cases} X = s \\ Y = -3s \\ Z = -s + 1 \end{cases} \quad ; s \in \mathbb{R}$$

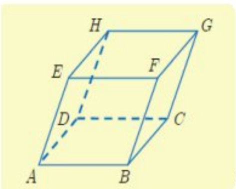
وهل المستقيمان d و d' يقعان في مستوي واحد؟ علل إجابتك..

السؤال الرابع: نتأمل في المعلم المتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ النقطتين A(2,0,1) و B(1,2,1) والمطلوب: اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال الخامس :

ليكن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2), (B, 2), (C, -1)$ ماطبيعة مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق : $\|\overrightarrow{2MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \sqrt{15}$

السؤال السادس:



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[FE]$ والمطلوب:

1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2. عيّن موضع النقطة M التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

السؤال السابع :

في معلم متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$, C (4,0,0) , $D(0, 4, 0)$, $E(1, -1, 1)$

1. جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$.
2. أثبت أن النقاط C, D, E ليست واقعة على استقامة واحدة
3. أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)

♦ الجلسات الامتحانية ..دمشق 2024 ♦

4. اكتب معادلة المستوي (CDE)
5. احسب بعد B عن المستوي (CDE)
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

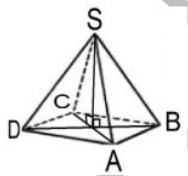
السؤال الثامن:
نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط التالية:
$\mathrm{B}(-1,2,-1)$, $\mathrm{A}(0,2,-2)$
$\mathrm{D}(0,3,-3)$,$\mathrm{C}(-2,1,1)$

1. أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوي واحد
2. أثبت أن النقاط D, C, B تقع على استقامة واحدة

السؤال التاسع: عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ التي تحقق:

$$X^2+Y^2+Z^2-2X+6Y-2=0$$

السؤال العاشر: ليكن $S-ABCD$ هرم قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 5 وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 5 ولتكن O مرتسم S القائم على القاعدة والمطلوب :



1. احسب $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{SC}$
2. احسب طول القطر BD ثمّ احسب $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DS}$

السؤال الحادي عشر: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان
$\mathrm{B}(7,-2,0)$, $\mathrm{A}(2,1,-2)$
والشعاعان $\vec{u}(2,-1,0)$, $\vec{v}(-3,1,2)$ والمطلوب:

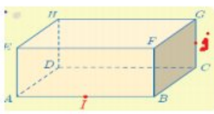
1. أثبت أن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً
2. اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه له ويمر من A

✓ أو (اكتب معادلة المستوي المعين بالمستقيمين)

السؤال الثاني عشر:
لتكن النقاط $\mathrm{A}(1,0,-1)$, $\mathrm{B}(2,2,3)$, $\mathrm{C}(3,1,-2)$
$\mathrm{D}(-4,2,1)$ بيّن مع التعليل صحة أو خطأ المقولات التالية :

1. المثلث ABC قائم
2. النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة
3. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

السؤال الثالث عشر:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $CG=2$ و $BC=2$
والنقطة I منتصف AB والنقطة J منتصف CG ولدينا المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:

1. اكتب معادلة المستوي (IFH)
2. جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (C,γ) , (B,β) , (A,α)
3. برهن أن الأشعة $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{DB}$ مرتبطة خطياً
4. جد إحداثيات M التي تحقق: $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$
5. احسب بعد G عن المستوي (IFH) ثمّ أوجد مسقطه القائم على المستوي (IFH)

السؤال الرابع عشر: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط
$\mathrm{A}(1,0,-1)$
$\mathrm{D}(-4,2,1)$, $\mathrm{C}(3,1,-2)$,$\mathrm{B}(2,2,3)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته
2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي(ABC)
3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABC\mathrm{D}$

السؤال الخامس عشر: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $\mathrm{A}(1,1,0)$
$\mathrm{B}(1,2,1)$, $\mathrm{C}(4,0,0)$ والمطلوب:

1. أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة
$$X+3Y-3Z-4=0$$
3. ليكن المستويان Q و P معادلتهما
$$\mathrm{P}: X+2Y-Z-4=0$$
$$\mathrm{Q}: 2X+3Y-2Z-5=0$$
أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d ذو التمثيلات الوسيطية التالية:
$$d:\begin{cases} X=t-2 \\ Y=3 \\ Z=t \end{cases} ;\ t\in \mathrm{R}$$
4. ماهي نقطة تقاطع المستويات Q و P و (ABC)
5. احسب بعد A عن المستقيم d

✓ ممكن يطلب إيجاد معادلات الفصل المشترك

✓ ملاحظة هامة : إذا طلب بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين متعامدين فإننا نوجد بعد النقطة عن المستوي الأول وليكن d_1 ثم

♦ الجلسات الامتحانية ..دمشق 2024 ♦

نوجد بعدها عن المستوي الثاني وليكن d_2 ثم حسب فيثاغورث نجد :

$$dist^2 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

جلسة مراجعة العقدية

السؤال الأول:

ليكن العددان العقديان : $Z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ و $Z_2 = 1 + i$ والمطلوب:

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد Z_1 و Z_2 و $\frac{Z_1}{Z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$, واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

✓ ممكن نفس السؤال لكن جداء

السؤال الثاني: لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $Z = -1 + i$ والمطلوب:

1. أثبت أن Z^8 عدداً حقيقياً
2. جد العدد Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه A $(1+ i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي

السؤال الثالث: احسب جداء الضرب

$$(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$$

ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$$

السؤال الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C و M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية

$b = 1 - i$, $a = -i$

$m = -1 + i$, $d = 2i$ والمطلوب:

1. مثّل الأعداد $a = -i$ و $b = 1 - i$ و $m = -1 + i$ و $d = 2i$ في المستوي
2. احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3. أثبت أن النقاط B و O و M تقع على استقامة واحدة.
4. احسب $\arg\left(\frac{d-c}{m}\right)$ واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان
5. حلل في C ما يلي إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى: $$Z^3 + 4Z^2 + 29Z = 0$$
6. عيّن العددين العقديين Z و W المحققان لجملة المعادلتين: $$\begin{cases} 2Z - W = -3 \\ 2\overline{Z} + \overline{W} = -3 + 2\sqrt{3}\, i \end{cases}$$

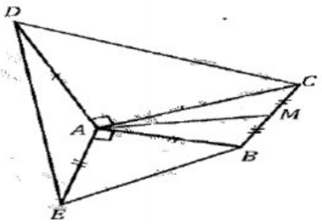
7. أوجد e صورة m وفق تحاكي مركزه b ونسبته -3
8. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $Z = 3 + 4\, i$

السؤال الخامس:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية $c = -4i$, $b = -4 + 4i$, $a = 8$ على الترتيب والمطلوب :

1. احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين
2. جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$
3. جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربع

السؤال السادس:



نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[BC]$ وليكن AEB , ACD مثلثين قائمين في A متساويي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A

و نرمز بالرمزين b , c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B , C

1. احسب بدلالة b , c الأعداد العقدية e , d, m الممثل للنقاط E , C , M بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B, 1), (C, 1), (E, 3), (D, 2)$ ، احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال السابع: ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ والمطلوب :

1. أثبت أن $p(-1) = 0$
2. اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z) = (z+1)Q(z)$
3. حل المعادلة $p(z) = 0$
4. A , B , C ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

لا تمل ..الملل عدو النجاح ....لا تخاف خليك شجاع ...لا تتلبك ..كول مشبك ...

♦ الجلسات الامتحانية ..دمشق 2024 ♦

السؤال الثامن: ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ والمطلوب :

1. عين عددين a و b يحققان

$$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

2. حل في C المعادلة $p(z) = 0$

السؤال التاسع: ليكن لدينا العدد العقدي $u = \frac{z+w}{L+zw}$ حيث $|z| = 1\ ,\ |w| = 1$ أثبت أن u حقيقي

✓ ملاحظة هامة : نفس السؤال يأتي و لكن أثبت أن u تخيلي بحت

جلسة مراجعة التحليل التوافقي + الاحتمالات

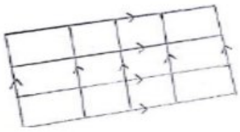
السؤال الأول:
في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال, كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة

السؤال الثاني:
في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمس عمال ، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر؟

السؤال الثالث: في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة:

1. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟
2. بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟

السؤال الرابع: في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب, احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة



السؤال الخامس: صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء و (5) كرات حمراء نسحب عشوائيا ثلاث كرات معاً, نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك والمطلوب:

1. نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري
2. أعِد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة

السؤال السادس: عيّن في منشور $(x^2 - \frac{2}{x})^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x

السؤال السابع: نلقي قطعة نقود غير متوازية ثلاث مرات متتالية, بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$, نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار ، اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X, واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه

السؤال الثامن: صندوق يحوي 11 كرة متماثلة فيها 7 كرات خضراء و واحدة بيضاء و3 كرات حمراء نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة ونتأمل المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة والمطلوب, عيّن قيم المتحول العشوائي X ثمّ نظم جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

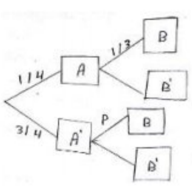
السؤال التاسع: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 6,5,4,3,2,1 نسحب منه عشوائيا بطاقتين على التتالي دون إعادة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين والمطلوب:

1. عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي
2. احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$

السؤال العاشر: أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علما أن المتحولين العشوائيين Y, X مستقلان احتماليا

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

السؤال الحادي عشر: ليكن B وA حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور... كيف نختار P حتى يكون الحدثان B وA مستقلين احتماليا



السؤال الثاني عشر: يشتري أحد المحلات 70% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A ويشتري الباقي من المصنع B..نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% نختار عشوائيا قطعة غيار من المحل والمطلوب:

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة

لا تمل ..الملل عدو النجاح ....لا تخاف خليك شجاع ...لا تتلبك ..كول مشبك ...

2. إذا كانت القطعة معيبة, فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B

السؤال الثالث عشر: لدينا مجموعة الأرقام $0,1,2,3,4,5$

1. بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مكون من ثلاث منازل
2. بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مكون من ثلاث منازل مختلفة
3. بكم طريقة يمكن تشكيل عدد مكون من ثلاث منازل مختلفة اصغر من 300
4. كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة *yousef*

السؤال الرابع عشر: عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية :

❶ $\binom{n}{2} = 36$ ❷ $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

❸ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

السؤال الخامس عشر: ليكن x متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية..الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات و $P(X=0)=\frac{1}{27}$ و $P(X=1)=\frac{6}{27}$

K	0	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	....

1. جد $P(X=2)$ و $P(X=3)$
2. احسب التوقع الرياضي للمتحول للعشوائي X ؟
3. احسب تباين المتحول العشوائي X ؟

السؤال السادس عشر: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0,1,2,3,4,5$ والمطلوب:

1. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

السؤال السابع عشر: يحتوي صندوق على خمس كرات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة :

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثامن عشر: يحتوي صندوق على خمس كرات,ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام $0,1,2$ وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام $0,1$ نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق:

1. الحدث A: الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته, احسب $P(A)$
2. نعرّف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
3. عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي, ثمّ احسب توقعه الرياضي

السؤال التاسع عشر:
صندوق يحوي 10 كرات ، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة
كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

السؤال العشرون : تتألف عائلة من أربعة أطفال.
نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفل أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً.

نرمز A و B و C إلى الأحداث:
A : (للأطفال الأربعة الجنس نفسه)
B : (هناك طفلان ذكران وطفلتان)
C : (الطفل الثالث أنثى)

1. احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A وB و C
2. احسب $P(A\cap C)$ ثمّ $P(C\mid A)$ أيكون الحدثان A و C مستقلين احتمالياً؟
3. احسب $P(B\cap C)$ ثمّ $P(C\mid B)$ أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً؟

السؤال الواحد و العشرون : عين قيمة n في المعادلة الآتية $P_{n+2}^{4} = 14P_{n}^{3}$

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ و إذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب :

1. ارسم مخططاً شجرياً ثمّ احسب احتمال نجاح سعاد في الحلقة الثانية
2. اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون :

نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية
احسب احتمال الحدث A (الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات)

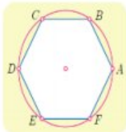
السؤال الرابع و العشرون :

نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آنٍ معاً ما احتمال على الوجه H مرتين على الأقل

السؤال الخامس و العشرون :

يتواجه لاعبان B و A في مباراة كرة المضرب مكونة من خمسة أدوار ويربح اللاعب المباراه عندما يكسب أكبر عدد من الأدوار ، يكسب B الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6 ما احتمال أن يربح B المباراه ؟

السؤال السادس و العشرون :



لدينا مسدس منتظم مرسوم في دائرة

1. كم عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها
2. كم عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها
3. كم عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن تشكيلها
4. كم عدد المثلثات الحادة التي يمكن تشكيلها
5. كم عدد الأقطار التي يمكن تشكيلها
6. ما عدد نقاط تلاقي أقطار المسدس
7. كم عدد المصافحات ل n شخص في حفل يصافح كل منهم الآخر مرة واحدة
8. احسب n إذا علمت أن عدد المصافحات 10

هام : راجع مثال الاستقلال الاحتمالي لمتحولين من الكتاب صفحة

السؤال السابع و العشرون :

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي.. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

و تستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

احسب احتمال إنجاز المهمة خلال ثلاثة أيام أو أقل علماً أن المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً

مخطط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) هي نفسها(3 ،2)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدا الأساسي $\frac{-}{5} \times \frac{-}{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفةعن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{-}{5} \times \frac{-}{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

بكالوريا سوريا
2024

♦ **السؤال الأول**: لتكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-\ln x) & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

والمطلوب: [1] أثبت أن f مستمر عند الصفر.

[2] ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.

[3] اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$.

الحل

[1] الشرط. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

$$\lim_{x\to0^+} x^2(1-\ln x) = \lim_{x\to0^+} x^2 - x^2\ln x$$

$$= \lim_{x\to0^+} x^2 - x\cdot \underset{\sim}{x\ln x} = 0-0.0 = 0 = f(0)$$

⇐ التابع مستمر عند الصفر من اليمين.

[2] $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to0^+} x(1-\ln x) = \lim_{x\to0^+} x - x\ln x$$

$$= 0-0=0$$

⇐ التابع قابل للاشتقاق عند الصفر من اليمين ويقبل نصف مماس أفقي

$$y = f(0) = 0$$

[3] $$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = 2x(1-\ln x) - \frac{1}{x}\cdot x^2$$

$$= 2x - 2x\cdot\ln x - x = x - 2x\ln x$$

$$f'(1) = 1 - 2(1)\ln 1 = 1$$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$$y - 1 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$$

$$f(1.1) \simeq f(1) + f'(1)\cdot(0.1)$$

$$\simeq 1 + 1(0.1) \simeq \boxed{1.1}$$

♦ **حل ورقة السؤال الخامس**: لتكن لدينا

$$|f(x)-1| \leq \frac{E(x)}{x^2+1}$$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\boxed{x-1 < E(x) \leq x}$$

الحل

نقسم على x^2+1 (الموجب):

$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{E(x)}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+1} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^2+1} = 0$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^2+1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

♦ السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}$$

والمطلوب: ① أوجد النهاية عند $+\infty$

② أعط عدداً حقيقياً A تحقق $x>A$ كان $f(x)\in\,]1.9\,,\,2.1[$

③ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل: ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

$y=2$ مقارب أفقي

②

$$f\in\,]\ell-\varepsilon\,,\,\ell+\varepsilon[\,=\,]1.9\,,\,2.1[$$

$$\ell+\varepsilon=2.1 \Rightarrow 2+\varepsilon=2.1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon=0.1}$$

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x}{x+1}-2\right|<0.1$$

$$\left|\frac{2x-2x-2}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{-2}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\frac{2}{x+1}<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x+1}{2}>10$$

$$x+1>20 \Rightarrow \boxed{x>19}$$

③

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=f\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

$$=f(2)=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{4}{3}}$$

♦ السؤال الثالث: أثبت

$$\frac{-1}{x+1}\leqslant\frac{\cos x}{x+1}\leqslant\frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x\geqslant 1$

- ثم أوجد نهاية $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$.

الحل: نعلم أن: $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$

نقسم على $x+1$

(نضرب بـ $\frac{1}{x+1}$):

$$\frac{-1}{x+1}\leqslant\frac{\cos x}{x+1}\leqslant\frac{1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

♦ السؤال الرابع: ليكن $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ المعرف على $[0,+\infty[$ والمطلوب:

① تحقق من أن $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

② استنتج أن: $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

الحل: ①

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

وهو المطلوب.

② ولدينا

$$\sqrt{1+x}\geqslant\sqrt{x}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\geqslant 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{1+x}$

$$2\sqrt{1+x}\geqslant\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0\\ \lim\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

السؤال الخامس: $|f(x)-2| \leq e^{-x} . \ln x$

1) نقدر ب $\frac{x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} . \frac{\ln x}{x}$$

$$= 0 . 0 = 0$$

لأن $\lim_{t\to+\infty} t e^{-t} = 0$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} . \ln x = 0$

♦ السؤال السادس: ليكن التابع $f(x) = x - \ln x$ المعرف على $]0,+\infty[$ والمطلوب:

1) أوجد $f(1)$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال ثم $f'(1)$

2) ما نهاية $\lim_{x\to+1} \frac{x-\ln x-1}{x-1}$

3) استنتج مشتق التابع $h(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$

الحل:

1) $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$

2) $\lim_{x\to1} \frac{x-\ln x-1}{x-1} = f'(1) = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)}$$

3) $h(x) = f(\sqrt{x})$

$h'(x) = f'(\sqrt{x}) . (\sqrt{x})' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}}$$

♦ السؤال السابع: ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ،

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5} - 2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x| . \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \sqrt{4+\frac{5}{\infty}} = \boxed{\sqrt{4} = 2 = a}$$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+5} - 2x\right) = +\infty - \infty$ ع.ت

نضرب بالمرافق:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = \frac{5}{+\infty} = 0 = b$$

$\Leftarrow$ المقارب المائل: $y = ax + b$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

▲ السؤال الثامن: نعرف التابعان المعرفان على R

$$f(x) = x - 1 + e^{x}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

أثبت أن C_f, C_g متماسان في المبدأ واكتب معادلة المماس المشترك.

الحل

$$f(0) = 0 - 1 + e^{0} = 0 \Rightarrow (0,0) \in C_f$$

$$g(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \Rightarrow (0,0) \in C_g$$ نقطة مشتركة

$$f'(x) = 1 + e^{x} \Rightarrow m_1 = f'(0) = 1 + 1 = 2$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{2}{1} = 2$$

⇐ معادلة المماس المشترك:

$$\boxed{T: y = x}$$

▲ السؤال التاسع: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق: $f(x) = 3x + \frac{\sin x + 2}{x^2+1}$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 3x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل

$$f(x) - y_\Delta = 3x + \frac{\sin x + 2}{x^2+1} - 3x$$

$$= \frac{\sin x + 2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin x + 2}{x^2+1}\right)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضيف $(+2)$: $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$

نقسم على (x^2+1): $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x + 2}{x^2+1} \leq \frac{3}{x^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + 2}{x^2+1} = 0$$

⇐ $y = 3x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

لدراسة الوضع النسبي: $f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x + 2}{x^2+1} > 0$

لأن: $\sin x + 2 > 0$

⇐ وفقه الخط C فوق y_Δ.

*واجب: $f(x) = -2x + xe^{-x}$

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$، أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -2x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

▲ السؤال العاشر: ليكن f المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

والمطلوب: (1) ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظم جدولاً بها.

(2) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً.

(3) اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3.

(4) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$

(5) هل يقبل C مماساً أفقياً.

الحل

(1) التابع مستمر واشتقاقي على $]2,+\infty[$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

2) $f(x) = 0$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]2,+\infty[$

$f(x) = 0 \in f(]2,+\infty[) =]-2,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]2,+\infty[$

3) $f(3) = 3-4+\sqrt{3-2} = -1+1 = 0$

نقطة $(3,0)$

$m = f'(3)$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \Rightarrow f'(3) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3-1}} = \frac{3}{2}$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y = \frac{3}{2}(x-3) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

4) نحل المعادلة $f'(x) = 1$ فإذا وجد حلول فإنه يقبل مماس.

5) نحل المعادلة $f'(x) = 0$

$1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = 0 \Rightarrow \dots$ مستحيلة الحل

⇐ لا يوجد حل ⇐ γ يقبل مماس

◆ السؤال الحادي عشر: حل المعادلة:

$4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$ في R.

الحل

$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2 - 8 = 0$

$(2^x+4)(2^x-2) = 0 \Rightarrow$ إما $2^x = -4$

$\ln 2^x = \ln(-4)$ مستحيلة الحل.

أو $2^x = 2 \Rightarrow \ln 2^x = \ln 2 \Rightarrow x\ln 2 = \ln 2$

$\boxed{x = 1}$

◆ السؤال الثاني عشر: لنتأمل التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

1) تحقق أن f دوري وأن 2π دور له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f، ثم استنتج امكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

2) أثبت أنه في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

3) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

الحل

1] $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi) = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$

فالتابع f تابع دوري ويقبل العدد 2π دوراً فتكفي مثلاً دراسته على المجال $[-\pi,\pi]$ ولدينا أيضاً:

$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$

f تابع فردي فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$

2] $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$

$= 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$

$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

بما أن: $1 + \cos x \geq 0$ دوماً إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2\cos x - 1)$

وعلى المجال $[0,\pi]$ للمعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ حل وحيد هو $x = \frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

♦ السؤال الثالث عشر :

أثبت أن للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً α في R ثم بين أن $\alpha \in]-1,0[$

الحل :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2+1 \Rightarrow f'(x)=0$$

$$3x^2+1=0 \Rightarrow 3x^2=-1 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{3}$$

مستحيلة

$$f'(x) = 3x^2+1 > 0$$

التابع متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,+\infty[$

والصفر ينتمي إلى صورة المجال :

$$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

$\Leftarrow$ يوجد حل وحيد في R.

$$f(-1) \cdot f(0) = 1 \times -1 = -1 < 0$$

فإن : $\alpha \in]-1,0[$

♦ السؤال الرابع عشر :

ليكن التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1))$

2- استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C الخط البياني للتابع f في جوار ال $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل :

[1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x+1))$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+4-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)} = 0$$

[2 $y = x+1$ مقارب مائل

[3 الخط C فوق Δ لأن

$$f(x) - y_\Delta > 0$$

حيث

$$\sqrt{x^2+2x+4} > x+1$$

بتربيع الطرفين يمكن التحقق من ذلك

♦ السؤال الخامس عشر :

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

1- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية، (متمماً الى مربع كامل)

3- استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني واكتب معادلته

الحل:

① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② $f(x) = (x+2)^2 + 1$

③ x كبيرة جداً نهمل العدد 1 أمام $(x+2)^2$

ومنه: $\sqrt{(x+2)^2} = x+2$

ومنه $y = x+2$ مقارب مائل لأن:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1} + x + 2} = 0$$

♦ السؤال السادس عشر :

أوجد المنحني التكاملي (التابع الأصلي) الذي يحقق $F(0) = 3$ للتابع $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

الحل: تكامل:

$$F(x) = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x + K$$

حيث $K \in R$

الشرط: $F(0) = 3 \Rightarrow \boxed{K = 3}$

ومنه:

$$F(x) = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x + 3$$

♦ السؤال السابع عشر :

- ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x e^{-x}$$

المطلوب:

1- احسب $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$

2- أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

الحل:

1]

$$\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 3} x . e^{-x}\,dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = u.v - \int_0^{\ln 3} v . u'\,dx$$

$$= -x e^{-x} + \int_0^{\ln 3} e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$$

$$= (\quad) - (\quad) = \ldots$$

2]

$$y' + y = e^{-x}$$

$$e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = e^{-x}$$

$\Leftarrow$ $y = f(x)$ حل للمعادلة.

الفكرة: نعوض بدل

$y \to f(x)$

$y' \to f'(x)$

♦ السؤال الثامن عشر :

- ليكن التابع $f(x)=x\ln x - x$ المعرف على $]0,+\infty[$

1- ادرس التغيرات

2- استنتج أن للمعادلة $x\ln x - x+1=0$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$

3- ارسم الخط البياني للتابع

الحل:

[1] التابع مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	-1	↗	$+\infty$

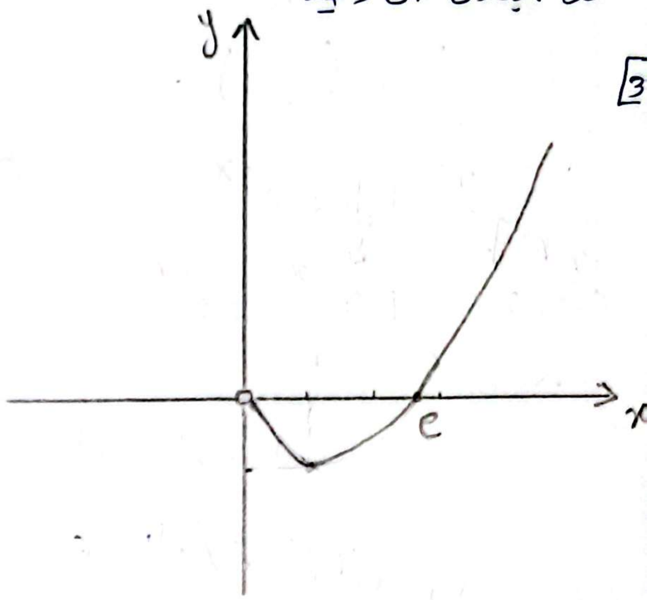
[2]

$x\ln x - x+1=0 \Rightarrow x\ln x - x=-1$

$f(x)=-1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

من الجدول حل وحيد

[3]



♦ السؤال التاسع عشر :

- حل المعادلة التفاضلية $2y'+3y=0$ علماً أن الخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4,1)$

الحل:

$$y'=ay+b \Rightarrow y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$$

$$2y'+3y=0 \Rightarrow 2y'=-3y$$

$$y'=\frac{-3}{2}y \Rightarrow y=ke^{-\frac{3}{2}x}$$

الخط البياني يمر بالنقطة $A(\ln 4,1)$

$$\Rightarrow 1=ke^{-\frac{3}{2}(\ln 4)}$$

نحسب k:

$$1=ke^{\ln(4)^{-\frac{3}{2}}} \Rightarrow 1=k(4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$k=\frac{1}{4^{-\frac{3}{2}}}=4^{\frac{3}{2}}$$

$$=\sqrt{(4)^3}=8$$

$$\Rightarrow y=8e^{\frac{-3}{2}x}$$

- طلب إضافي: حل المعادلة التفاضلية السابقة إذا علمت أن ميل المماس في نقطة ما طلتها (D) هو $\frac{1}{2}$

الحل: نعوض $y'=\frac{1}{2}$ في المعادلة التفاضلية:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+3y=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{3}$$

فنقطة التماس هي $\left(0,\frac{-1}{3}\right)$ مفقود للحالة السابقة في التمرين السابق....

السؤال العشرون :

حل المعادلة :

$$\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$$

$x > -11$ $\quad$ $x+3>0$ $\quad$ $x+2>0$

$x>-3$ $\quad$ $x>-2$

شرط الحل $]-2, +\infty[$

$$\ln(x+11) = \ln\left[(x+3)(x+2)\right]$$

$$x+11 = x^2+3x+2x+6$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0$$

إما $x=-5$ مرفوض أو $x=1$ مقبول

حل المتراجحة

$$\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$$

$x>2$ $\quad$ $2x-1>0$

$x>\frac{1}{2}$ $\quad$ $]\frac{1}{2}, +\infty[$

شرط الحل $]2, +\infty[$

$$x-2 \leq 2x-1 \Rightarrow -1 \leq x$$

نقاطعه مع شرط الحل $[-1, +\infty[$

الحل $S =]2, +\infty[$

السؤال الحادي والعشرون:

حل جملة المعادلتين

$$3^x \cdot 3^y = 9$$

$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3}$$

نفرض $3^x = X$, $3^y = Y$

$X \cdot Y = 9 \quad \ldots (1)$

$X + Y = 4\sqrt{3} \quad \ldots (2)$

من (1) $Y = \frac{9}{X}$ ⇐ نعوض في (2)

$$X + \frac{9}{X} = 4\sqrt{3}$$

نضرب بـ X

$$X^2+9 = 4\sqrt{3}X$$

$$X^2 - 4\sqrt{3}X + 9 = 0$$

إما $X = \sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

أو $X = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

$Y = \frac{9}{X} \Rightarrow$ إما $Y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$3^y = 3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$

أو $Y = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$3^y = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$

السؤال الثاني والعشرون:

$p(x) = (x^3+4x^2+x-6)$ نفرض لدينا

1] تحقق أن $x=1$ حل للمعادلة $p(x)=0$

الحل: $p(1) = 1+4+1-6 = 0$

2] أثبت أن $p(x)$ يكتب بالشكل

$$p(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+x-6 & x-1 \\ -(x^3-x^2) & x^2+5x+6 \\ \hline 5x^2+x-6 & \\ -(5x^2-5x) & \\ \hline 6x-6 & \\ -(6x-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$p(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$$

3 أوجد حلول المتراجحة $p(x)\le 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة

$2\ln(x)+\ln(x+4)\le\ln(6-x)$

الحل: ندرس اشارة $p(x)$

$(x-1)(x^2+5x+6)=0$

اما $\boxed{x=1}$ أو $(x+3)(x+2)=0$

$\boxed{x=-3}$ أو $\boxed{x=-2}$

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_1: x\in]-\infty,-3]\cup[-2,1]$

حل المتراجحة $2\ln(x)+\ln(x+4)\le\ln(6-x)$

شرط الحل $D_2=]0,6[$

$\ln(x)+\ln(x+4)\le\ln(6-x)$

$\ln(x^3+4x^2)\le\ln(6-x)$

$x^3+4x^2\le 6-x \Rightarrow x^3+4x^2+x-6\le 0$

$\Rightarrow p(x)\le 0$

نتقاطع حل المتراجحة مع شرط الحل فنجد

$D_1\cap D_2=]0,1[$

السؤال الثالث والعشرون:

حل المعادلة $4^x=5^{x+1}$

شرط الحل R

$\ln 4^x=\ln 5^{x+1}$

$x(\ln 4)=(x+1)\ln 5$

$x\ln 4=x\ln 5+\ln 5$

$x\ln 4-x\ln 5=\ln 5$

$x(\ln 4-\ln 5)=\ln 5$

$x=\dfrac{\ln 5}{\ln 4-\ln 5}$ مقبول

السؤال الرابع والعشرون:

أثبت أنه أياً كانت $x>0$ فإن $\ln x<x$

الحل: $x-\ln x>0$

$f(x)=x-\ln x$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=0$

$\boxed{x=1}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		0	$+$	
$f(x)$	‖		1		

$f(1)=1$

$f(x)\geq 1$

$\Rightarrow f(x)>0$

$x-\ln x>0$

$\ln x<x$

♦ السؤال الخامس والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=e^{x}+\ln(x)$. وليكن g التابع المعرف على R^{*+} وفق: $g(x)=xe^{x}+1$. والمطلوب:

1 ادرس تغيرات g ونظم جدولاً لتغيراته

2 أوجد نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف

3 أثبت أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

4 مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لتغيراته.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\infty$$

$$g'(x)=e^{x}+xe^{x} \Rightarrow g'(x)=0$$

$$\Rightarrow e^{x}(1+x)=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}\ ;\ e^{x}>0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	1	$\nearrow +\infty$

2

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\infty$$

3

$$f'(x)=e^{x}+\frac{1}{x}=\frac{xe^{x}+1}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

4 نلاحظ من تغيرات g أن:

$g(x)>1 \Rightarrow g(x)>0$

فإن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة x بالمجال $]0,+\infty[$ أي $f'(x)>0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

♦ السؤال السادس والعشرون:

تحقق أن F، G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

$F(x)=\sin^2 x$ $\qquad I=R$

$G(x)=2-\cos^2 x$

الحل: الفكرة إما نشتق التابعين وينتج نفس الجواب أو نطرح التابعين ويكون ناتج الطرح عدد

طريقة الطرح ⇐

$$F(x)-G(x)=$$
$$=\sin^2 x-(2-\cos^2 x)$$
$$=\sin^2 x+\cos^2 x-2$$
$$=1-2=-1=\text{const}$$

السؤال الأول: (حلول المتتاليات)

1) $U_{n+1}-U_n = 3(n+1)+1-(3n+1)$

$= 3n+3+1-3n-1 = 3 = const$

متتالية حسابية أساسها $r = 3$

$U_0+U_1+U_2+\dots+U_{14}$

$S = 15 \times \frac{U_0+U_{14}}{2}$

$U_0 = 3(0)+1 = 1$, $U_{14} = 3(14)+1 = 43$

$\Rightarrow S = 15 \times \frac{1+43}{2} = \frac{44}{2} \times 15$

$= 330$

2) $U_{n+1} > U_n$

$3n+4 > 3n+1$

محققة.

السؤال الثاني:

1) $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1}{U_{n+1}-3}}{\frac{1}{U_n-3}} = \frac{\frac{1}{2U_n-6}}{\frac{1}{U_n-3}}$

$= \frac{U_n-3}{2U_n-6} = \frac{U_n-3}{2(U_n-3)} = \frac{1}{2} = const = q$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = -1$

2) نكتب V_n بدلالة n ثم U_n

$\frac{V_n}{V_0} = q^{n-0} \Rightarrow \frac{V_n}{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow V_n = \frac{-1}{2^n}$

نبحث عن علاقة بين U_n و V_n

$V_n = \frac{1}{U_n-3} \Rightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = \frac{1}{\frac{-1}{2^n}} + 3 = -2^n + 3$

السؤال الثالث:

1) نرمز للقضية $E(n)$.

2) نبرهن صحة $E(n)$ من أجل العدد (0)

$U_0 \geq U_1 \geq 1$; $U_1 = \frac{2U_0}{U_0+1} = \frac{4}{3}$

$2 \geq \frac{4}{3} \geq 1$ محققة

3) لنفرض صحة $E(n)$

$U_n \geq U_{n+1} \geq 1$

4) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

أي سنبرهن $U_{n+1} \geq U_{n+1} \geq 1$

البرهان: نفرض تابع

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$

مستمر واشتقاقي على $R \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \frac{2(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$

متزايد تماماً ومنه

$U_n \geq U_{n+1} \geq 1$

$\Rightarrow f(U_n) \geq f(U_{n+1}) \geq f(1)$

$U_{n+1} \geq U_{n+2} \geq 1$

وهو المطلوب (2) من الطلب السابق

$U_n \geq U_{n+1} \Rightarrow$ متناقصة (U_n)

السؤال الرابع:

1) $U_* - U_♡ = (* - ♡)r$

$U_0 - U_1 = (0-1)r$

$-2-6 = -r \Rightarrow -r = -8 \Rightarrow r = 8$

$U_n - U_0 = nr \Rightarrow U_n = U_0 + nr$

$U_n = -2 + 8n$

2) $S = 9 \times \frac{U_2+U_{10}}{2} = +414$

حيث $U_2 = -2+8(2) = 14$, $U_{10} = -2+8(10) = 78$

السؤال الخامس:

1) $\frac{U_5}{U_0} = q^{5-0} \Rightarrow \frac{U_5}{-2} = 2^5 \Rightarrow U_5 = -64$

2) $S = \text{الحد الأول} \times \frac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}$

$= -4 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow S = 4 - 4(2)^n$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 4 - 4(+\infty) = -\infty$

لأن 2^n هندسية أساسها $q > 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال السادس:

1) نرمز للقضية $E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

نبرهن صحة القضية $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}} \Rightarrow 1 \leq 1$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad (*)$$

نبرهن صحة القضية $E(n+1)$:

أي سنبرهن: $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

البرهان: ننطلق من $(*)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نقسم الطرفين على $(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)\,n!} \leq \frac{1}{(2^{n-1})(n+1)}$$

استبدال

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}$$

كبرنا الكبير حيث:

$$n \geq 1$$
$$\Rightarrow n+1 \geq 2$$
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

(2)

$$U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$U_n \leq 1 + \left[1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$U_n \leq 1 + \left[2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$U_n \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$U_n \leq 3$$

لتحمل كبرنا الكبير

ومنه العدد 3 راجح

(3) لبيان أن المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 3 فيكفي برهان أنها متزايدة.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

13

الخلاصة $E(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة: بالتالي n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

14

السؤال السابع :

لنفرض تابع $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

مستمر واشتقاقي على R^*

$f'(x) = 0 - \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$

⇐ التابع f متزايد تماماً ⇐ المتتالية متزايدة .

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

مستمر واشتقاقي على R

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} < 0$ بالمجال $x \geq 1$

⇐ f متناقص ⇐ المتتالية متناقصة

$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$

السؤال الثامن : 2

$E(n) = 4^n + 5 = 3K$

$E(0) = 4^0 + 5 = 6 = 3K$ محققة

$E(n) = 4^n + 5 = 3K \longrightarrow *$

$E(n+1) = 4^{n+1} + 5 = 3K$

البرهان :

$P_1 = 4^{n+1} + 5 = 4^n \cdot 4 + 5 = (3K-5)\cdot 4 + 5$ حسب *

$= 12K - 20 + 5 = 12K - 15$

$= 3(4K-5) = 3K' = P_2$

السؤال التاسع :

1) $S_{n+1} - S_n =$

$= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}\right)$

$= \frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$

⇐ المتتالية متزايدة .

2) $S_n = \frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$

$S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$

$= 1 + \left[\frac{1}{3} \times \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}\right] = 1 + \left[\frac{1-\frac{1}{3^n}}{2}\right]$

$= 1+\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{3^n}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$

$= \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$

* المتتالية المتزايدة نهايتها تعتبر عنصر راجح أو العنصر الراجح أكبر من نهايتها .
* المتتالية المتناقصة نهايتها عنصر قاصر أي العنصر القاصر أصغر من نهايتها .

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$

بما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

السؤال العاشر :

[1] نشتق ونضع جدول الإشارة .

[2] نستخدم البرهان بالتدريج مع حضور الأطراف وفق التابع f

[3] بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

جبرياً ~~...~~ حل المعادلة النهائية

$f(x) = x$ فنجد $x = 2$ وهي النهاية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حلول جلسة الهندسة :

السؤال الأول :

[1] $(x - x_{المركز})^2 + (y - y_{المركز})^2 + (z - z_{المركز})^2 = R^2$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \sqrt{3}^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

[2] الشرط : $dist(O,P) = R$

$\frac{|0-0+0+3|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = R$

السؤال الثاني :

[1] نأخذ شعاعين من المستوي : $\vec{GB}$, $\vec{BD}$

$\vec{GB} = (0,-2,-2)$

$\vec{BD} = (-2,2,0)$

وهما غير مرتبطان لعدم تناسب مركباتهما

نفرض ناظم : $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{GB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{GB} = 0$

$\Rightarrow (0)(a) + (-2)(b) + (-2)(c) = 0$

$\Rightarrow \boxed{-2b - 2c = 0}$ (1)

$\vec{n} \perp \vec{BD} \Rightarrow \boxed{-2a + 2b = 0}$ (2)

نفرض $c=1$ ونعوض في (1)

$-2b - 2 = 0 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow b = -1$

نعوض في (2) :

$-2a + 2(-1) = 0 \Rightarrow a = -1$

الناظم : $\vec{n}(-1,-1,1)$

معادلة المستوي :

$a(x-x_G) + b(y-y_G) + c(z-z_G) = 0$

$\Rightarrow -1(x-2) - 1(y-2) + 1(z-2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{-x - y + z + 2 = 0}$

[2] قانون :

$$x = x_E + at,\quad y = y_E + bt,\quad z = z_E + ct \;;\; t \in R$$

$\vec{EC} = (2,2,-2) \Rightarrow$

$$x = 0 + 2t,\quad y = 0 + 2t,\quad z = 2 - 2t \;;\; t \in R$$

[3] نعوض معادلات المستقيم في المستوي :

$-(2t) - (2t) + (2-2t) + 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

نعوض في x, y, z :

$\Rightarrow x = \frac{4}{3},\ y = \frac{4}{3},\ z = \frac{2}{3}$

[4] نفرض $M(x,y,z)$ $\Rightarrow$ $\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EC}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ y = \frac{2}{3}$$

$z - 2 = \frac{-2}{3} \Rightarrow z = \frac{4}{3}$

[5] نضرب شعاعي التوجيه والناتج صفر .

$\vec{EC}(2,2,-2)$ $\quad \vec{HM}(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

$\Rightarrow \vec{EC}\cdot\vec{HM} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 0$

$\Rightarrow \vec{EC} \perp \vec{HM}$

الشعاعان متعامدان . فالمستقيمان متعامدان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث :

$\vec{U_d} = (1, -3, -3)$

$\vec{U'_d} = (1, -3, -1)$

$\frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-3}{-1}$

المركبات غير متناسبة

⇐ الشعاعات غير مرتبطان خطياً

فالمستقيمان غير متوازيان

ندرس التقاطع :

$t + 1 = s$ (1)

$-3t + 2 = -3s$ (2)

$-3t + 3 = -s + 1$ (3)

نعوض (1) في (3)

$-3t + 3 = -(t+1) + 1$

$-3t + 3 = -t - \cancel{1} + \cancel{1}$

$-2t = -3 \Rightarrow t = +\frac{3}{2}$

نعوض في (1)

$s = +\frac{3}{2} + 1 = +\frac{5}{2}$

للتأكد نعوض في (2)

$-3\left(+\frac{3}{2}\right) + 2 = -3\left(+\frac{5}{2}\right)$

$\frac{-9}{2} + 2 = \frac{-15}{2}$

$\frac{-5}{2} \neq \frac{-15}{2}$ مساواة خاطئة

فالجملة متناقضة فالمستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستوٍ واحد.

السؤال الرابع :

$\vec{n} = \vec{AB} = (-1, +2, 0)$

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}$

$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1$

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1$

$I\left(\frac{3}{2}, 1, 1\right)$

$-1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2(y - 1) + 0(z - 1) = 0$

$-x + \frac{3}{2} + 2y - 2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{-x + 2y - \frac{1}{2} = 0}$

السؤال الخامس : $\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = \sqrt{15}$

$\|3\vec{MH}\| = \sqrt{15} \Rightarrow 3\|\vec{MH}\| = \sqrt{15}$

$\Rightarrow \|\vec{MH}\| = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow$

مجموعة النقاط كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{15}}{3}$

السؤال السادس :

[1]

$\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos 45^\circ$

$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

[2]

$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$

$= \vec{AB} + \vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{GH}$

$= \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{GH}$

$= \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{FE}$

$= \vec{AF} + \vec{FI} = \vec{AI}$

⇐ إذن M تنطبق على I.

السؤال السابع :

[1] $\vec{AB} = (-1, -1, -4)$, $\vec{CE}(-3, -1, 1)$

$\vec{CD} = (-4, 4, 0)$

[2] نأخذ شعاعين : $\vec{CE}, \vec{CD}$

$\Rightarrow \frac{-4}{-3} = \frac{-1}{4} = \frac{1}{0}$

⇐ الأشعة غير مرتبطة خطياً ⇐ النقاط ليست على استقامة واحدة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكملة السؤال السابع :

|3| $\vec{AB} \perp \vec{CE}$

$\Rightarrow (-1,-1,-4)\times(-3,-1,+1)$

$= +3+1-4 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$

$\Rightarrow (-1,-1,-4)\times(-4,4,0)$

$= +4-4+0 = 0$

<= AB عمودي على المستوي (CDF)

|4| $\vec{n} = \vec{AB} = (-1,-1,-4)$

$\Rightarrow a(x-x_c)+b(y-y_c)+c(z-z_c)=0$

$\Rightarrow (-1)(x-4)+(-1)(y-0)+(-4)(z-0)=0$

$\Rightarrow \boxed{-x-y-4z+4=0}$

|5| $dist(B, CDE)$

$$= \frac{|(-1)-(0)-4(-1)+4|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-4)^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{18}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$$

|6| $(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2=R$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{18}}\right)^2$

السؤال الثامن :

|1| $\vec{AB}(-1,0,1)$, $\vec{AC}(-2,-1,3)$

$\vec{AD}(0,1,-1)$

$\Rightarrow \vec{AB} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD}$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$-1 = -2\alpha \quad \ldots ①$

$0 = -\alpha+\beta \quad ②$

$1 = 3\alpha-\beta \quad ③$

من ① $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

<= نعوض في ② : $\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$

نعوض عن α و β في ③ :

$1 = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{1 = 1}$

$\Rightarrow \vec{AB} = 1\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$

<= الأشعة $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ مرتبطة خطياً

فالنقاط D, C, B, A تقع في مستوي واحد.

|2| $\vec{DC}(-2,-2,4)$, $\vec{CB}(1,1,-2)$

$\Rightarrow \frac{-2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} \Rightarrow -2=-2=-2$

الأشعة مرتبطة خطياً <= النقاط تقع على استقامة واحدة.

السؤال التاسع :

$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$

$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+z^2-2=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-12=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-12$

وهي معادلة كرة نصف قطرها $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ومركزها : $(1,-3,0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال العاشر :

[1] $\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SC}$

$= \|\overrightarrow{SD}\|\cdot\|\overrightarrow{SC}\|\cdot\cos 60^\circ$

$= 25\times\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$

[2] $BD^2 = 5^2+5^2$ $\boxed{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DO}}$

$\Rightarrow BD^2 = 50 \Rightarrow BD = 5\sqrt2$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DO} =$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{DB}\|\cdot\|\overrightarrow{DO}\|\cdot\cos(0)$

$= 5\sqrt2 \times \frac{5\sqrt2}{2}\times 1 = 25$

استبدلنا الشعاع $\overrightarrow{DS}$ بمسقطه $\overrightarrow{DO}$ على حامل الشعاع الآخر ..

السؤال الحادي عشر :

(1) الشرط $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

نعوض ..

(2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow ---$ (1)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow ---$ (2)

نفرض عدد $c=$ ونعوض ونوجد الناظم ثم نعوض في معادلة المستوي العامة

$x+2y+\frac{1}{2}z-3=0$

السؤال الثاني عشر :

Q : نحسب $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[AC]$ ثم نحسب بحسب فيثاغورس ..

(2) نختبر شرط الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}$

(3) يجب أن يعامد $(\overrightarrow{AD})$ شعاعين غير مرتبطين في المستوي $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$.

السؤال الثالث عشر

$A(0,0,0)$

$B(4,0,0)$, $C(4,2,0)$, $D(0,2,0)$.

$E(0,0,2)$, $F(4,0,2)$, $G(4,2,1)$

$H(0,2,2)$, $I(2,0,0)$, $J(4,2,1)$

(1) $\vec{n}\perp\overrightarrow{IF} \Rightarrow 2a+2c=0$ (1)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{FH} \Rightarrow -4a+2b=0$ (2)

نفرض $c=1$ فنجد $\vec{n}(-1,-2,1)$

$\Rightarrow \boxed{-x-2y+z+2=0}$

(2) من الرسم :

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=0$

(3) الشرط : $\overrightarrow{DB} = \alpha\overrightarrow{AF}+\beta\overrightarrow{AH}$

$\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha=1$, $\beta=-1$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH}$

(4) نفرض $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

(5) نوجد معادلات وسيطية لمستقيم مار من G وشعاع توجيهه ناظم المستوي (IFH) أي:

$\vec{u}=\vec{n}=(-1,-2,1) \Rightarrow x=4-t$

$y=2-2t$; $t\in\mathbb{R}$

$z=2+t$

ثم نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي (IFH) ونحسب t ثم نعوض في المعادلات الوسيطية $\Rightarrow G'\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$

للتأكد نعوض $G'\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$ بمعادلة المستوي

تتمة حلول جلسة الهندسة :

السؤال الرابع عشر :

1] نحسب [AB] و [BC] , [AC]
ثم عكس فيثاغورث .

أو: نضرب شعاعين فينتج العدد (صفر)

S مثلث قائم $= \frac{1}{2} \times$ طول ضلع القائم الأول $\times$ طول ضلع القائم الثاني

2] يجب أن يتحقق :

$\vec{n}.\vec{AB}=0$, $\vec{n}.\vec{AC}=0$

ثم : قانون معادلة المستوي وتعويض .

3] $dist[D,(ABC)] = \frac{|\ \ |}{\sqrt{\ \ }}$

$V = \frac{1}{3}.S.h$ ⟵ بالطلب الأول .

السؤال الخامس عشر :

1] نوجد شعاعين ونبرهن غير مرتبطين خطياً .

2] نعوض احداثيات A و B و C في المعادلة فينتج $0=0$

3] نعوض المعادلات الوسيطية للفصل المشترك في معادلتي المستويين فينتج ($0=0$)

4] نعوض معادلات الفصل المشترك لـ P و Q في معادلة (ABC) فينتج t
ثم نعوضها مرة أخرى في المعادلات الوسيطية . فينتج نقطة التقاطع $(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2})$

5] نوجد معادلة مستوي يمر من A ويعامد شعاع توجيه d $(1,0,1)$
ثم نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي ونحسب t ثم نعوض في معادلات d فينتج المسقط القائم لـ A وليكن A' ثم نوجد [AA'] بقانون بعد نقطة عن نقطة

$AA' = \sqrt{(x_{A'}-x_A)^2+(y_{A'}-y_A)^2+(z_{A'}-z_A)^2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* حلول جلسة العقدية : *

النسؤال الأول :

$\boxed{1}$ $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow Z_1=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow Z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ← الشكل الأسي

$r=\sqrt{1+1}\Rightarrow r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow Z_2=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow Z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ← الشكل الأسي

$\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]}$

عند القسمة نطرح الزوايا ونقسم الطويلتين (r)

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$\boxed{2}$ $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}i\,(1-i)}{1+i\,(1-i)}=\dfrac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

استنتاج الزاوية : من المثلث

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})(\sqrt{2})}$

من الكبير

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dots$

أو بالمطابقة ...

السؤال الثاني :

$\boxed{1}$ $Z^8=(-1+i)^8$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow Z=\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

دوموافر :

$\Rightarrow Z^8=\sqrt{2}^8\left[\cos 8\,\frac{3\pi}{4}+i\sin 8\,\frac{3\pi}{4}\right]$

$=\sqrt{2}^8\left[\cos 6\pi+i\sin 6\pi\right]$

$=\sqrt{2}^8\left[\cos 6\pi+i\sin 6\pi\right]$

$=2^4\left[1+i0\right]=16\in R$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[2] $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}[z-(1+i)]$

$z' - 1 - i = [1\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]$

$\times [-1+i-1-i]$

$\Rightarrow z'-1-i = [\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}][-2]$

$\Rightarrow z' = -\sqrt{2} + 1 + i(1-\sqrt{2})$

وهو المطلوب.

السؤال الثالث:

$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$

بالنشر:

$z^4+2z^3+5z^2+2z^3+4z^2+10z$

$-3z^2-6z-15$

$= ......$

فنجد:

$z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$

حل المعادلة:

$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)=0$

إما $z^2+2z-3=0$

نحسب Δ

$x_1 = ...$

$x_2 = ...$

أو $z^2+2z+5=0$

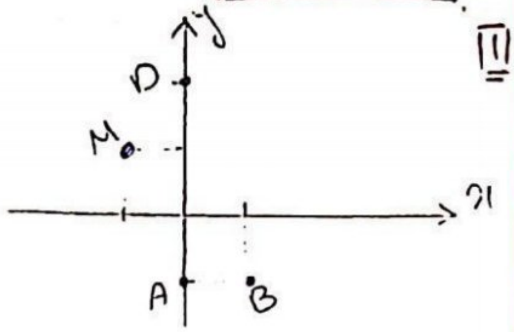
نحسب Δ

$x_1 = ...$

$x_2 = ...$

السؤال الرابع:

[1]



[2] $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$c-(0) = i(2i-0)$

$\Rightarrow c = -2$

[3] $\vec{BO}(-1,1)$, $\vec{BM}(-2,2)$

$\Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

المركبات متناسبة فالشعاعان مرتبطان خطيا والنقاط على استقامة واحدة.

[4] $\arg = 0$, $\arg\left(\frac{d-c}{m}\right)$

$\arg\left(\frac{2i+2}{-1+i}\right) = \arg\frac{(2i+2)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$

$= \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \vec{cd} \perp \vec{OM}$

فالمستقيمان (OM) و (cd) متعامدان.

[5]

z^3+4z^2+29z

$z(z^2+4z+29) \rightarrow$ نحل بطريقة Δ

$\Delta = b^2-4ac = -100$

$\Rightarrow z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4+10i}{2} = -2+5i$

$z_2 = \bar{z}_1 = -2-5i$

$(z-(-2-5i))(z-(-2-5i)) = (z+2-5i) \times (z+2+5i)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(6)

$2z - w = -3$ (1)

$2\bar{z} + \bar{w} = -3 + 2\sqrt{3}\,i$ (2)

نأخذ مرافق المعادلة الثانية:

$2z + w = -3 - 2\sqrt{3}\,i$ (2'')

نجمع (1) مع (2''): $4z = -6 - 2\sqrt{3}\,i$

نقسم على الأمثال: $z = \frac{-6 - 2\sqrt{3}\,i}{4}$

$= \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$

ثم نعوض في (1) ونحسب w .

7 (المركز - الأصل) × النسبة = $e - b$ (المركز)

$e - b = -3(m - b)$

$\Rightarrow e - (1 - i)$

$= 3 \times [-1 + i - (1 - i)] \Rightarrow e = ...$

8 نفرض $w = x + iy$ جذر تربيعي

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ... (1)

$x^2 - y^2 = a$ ... (2)

$x \cdot y = \frac{b}{2}$ ... (3)

نعوض: $x^2 + y^2 = \sqrt{25} = 5$ (1)

$x^2 - y^2 = 3$ (2)

$x \cdot y = 2$ (3)

نجمع (1) مع (2): $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = +2 , x = -2$

نعوض في (3): $x_1 = 2 \Rightarrow 2 \cdot y = 2 \Rightarrow y = 1$

$w = x + iy$

$\Rightarrow w_1 = 2 + 1i \Rightarrow w_2 = -w_1$

أو: $x_2 = -2 \Rightarrow y = -1$

$\Rightarrow w_2 = -2 - i$

انتبه الجذران هنا متعاكسان وليسا مترافقان

السؤال الخامس:

1 $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8+4i}$

$= \frac{(-4+8i)(8-4i)}{64+16} = \frac{80i}{80} = i$

$\Rightarrow \frac{b-c}{a-c} = i$.

$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ⇐ مثلث قائم في C ABC

2 $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| \Rightarrow \frac{CB}{CA} = 1$

⇐ مثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2 $d - o = e^{i\frac{\pi}{4}}(a - o) \Rightarrow d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)8$

$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$

3 بما أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين ⇐ حتى تكون $ACBE$ مربع يجب أن يكون متوازي أضلاع أي:

$\vec{AC} = \vec{EB} \Rightarrow z_{AC} = z_{EB}$

$\Rightarrow z_C - z_A = z_B - z_E$

$c - a = b - e \Rightarrow -4i - 8 = -4 + 4i - e$

$\Rightarrow e = -4 + 4i + 4i + 8 = 4 + 8i$

أو: $\frac{a+b}{2} = \frac{c+e}{2} \Rightarrow A + B = C + E$

$8 + 4 + 4i = -4i + e \Rightarrow e = 4 + 8i$

السابع

1 $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

$P(-1) = 0$ نعوض -1 في $P(z)$

2 بالقسمة الإقليدية أو المطابقة نجد:

$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

3 $P(z) = 0$

إما $z_1 = -1$

أو $z_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}\,i}{2} = 2 + \sqrt{3}\,i$ حسب Δ

$z_3 = \bar{z}_2 = 2\sqrt{3}\,i$

4 $AB = BC = AC$

$\sqrt{12} = \sqrt{12} = \sqrt{12}$

فالمثلث متساوي الأضلاع.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$a = 0 \quad (3$$

بما أن A مركز أبعاد

$$a = \frac{1.b + 1.c + 2.d + 3.e}{1+1+3+2}$$

$$0 = \frac{b+c+2d+3e}{7} \Rightarrow 0 = \frac{b+c+2ic-3ib}{7}$$

$$\Rightarrow 0 = -b(3i-1) + c(1+2i) = 0$$

$$c(1+2i) = b(3i-1)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{(3i-1)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{5+5i}{5} \Rightarrow \frac{c}{b} = 1+i$$

حساب قياس الزاوية BAC :

$$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = 1+i$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

السؤال ~~الخامس~~ الثامن :

ننشر $P(z)$ فنجد :

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + az^3 + 4az^2 + 2a^2z + 6z^2 + 4bz + 2ab$$

$$\Rightarrow P(z) = z^4 + (4+a)z^3 + (6a+b)z^2 + (2a^2+4b)z + 2ab$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$$4 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

$$6a + b = -19 \Rightarrow -24 + b = -19$$

$$\boxed{b = 5} \Leftarrow$$

$$2a^2 + 4b = 52$$

$\Leftarrow$ نعوض $a = -4$, $b = 5$ فنجد

أننا نحقق بالشكل $2ab = -4$

$\boxed{2}$ $P(z) = 0$ ⇐ إما ... أو ...

21

السؤال ~~[redacted]~~ التاسع : لإثبات u حقيقي

يجب إثبات $\bar{u} = u$

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{1 + \bar{z}.\bar{w}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{z}.\frac{1}{w}}$$

نوحد المقامات $\Rightarrow \dfrac{\frac{w+z}{wz}}{\frac{wz+1}{wz}} = \dfrac{z+w}{1+zw} = u$

لإثبات تخيلي بحت نبرهن أنّ : المرافق = المعكوس أي

$$\bar{u} = -u$$

السؤال السادس : بما أن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين فإن

1) d صورة c وفق دوران مركزه a وزاويته $+\frac{\pi}{2}$

$$d - a = e^{+i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

حيث $\boxed{a = 0}$ (مبدأ المعلم)

$$d = +ic$$

e صورة b وفق دوران مركزه a وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$e - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

$$e = -i(b) \Rightarrow e = -ib$$

وبما أن M منتصف $[BC]$: $m = \dfrac{b+c}{2}$

(2

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{+ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = +\frac{i(c+b)}{\frac{b+c}{2}}$$

$$= +2i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$$

$\Leftarrow$ AM هو ارتفاع في المثلث AED .

$$\frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM$$

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \left|\frac{d-e}{m-a}\right| = 2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* حلول جليحة (تحليل توافقي + احتمالات)

السؤال الأول:

عدد طرق اختيار مهندس واحد هو $\binom{3}{1}$

عدد طرق اختيار عاملات $\binom{5}{2}$

⇐ عدد طرق اختيار اللجنة:

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30$$

السؤال الثاني:

عدد طرق اختيار الرئيس 8

عدد طرق اختيار نائب الرئيس 7

عدد طرق اختيار أمين السر 6

⇐ حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

السؤال الثالث:

① $\binom{8}{5} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$

② $\binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = 10$

السؤال الرابع:

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{2} = ..$$

السؤال الخامس:

① $X(\Omega) = \{5, 3, 0\}$

$$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84}$$

$$P(X=0) = 1 - \left[\frac{10}{84} + \frac{40}{84}\right] = \frac{34}{84}$$

X_i	5	3	0
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{34}{84}$

$$E(X) = 5\left(\frac{10}{84}\right) + 3\left(\frac{40}{84}\right) + 0\left(\frac{34}{84}\right) = \frac{170}{84}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \left(25 \times \frac{10}{84} + 9 \times \frac{40}{84} + 0\right) - \left(\frac{170}{84}\right)^2$$

$=$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$$

②

$$P(X=5) = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} =$$

$$P(X=3) = \left(\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}\right) \times 3 =$$

$$P(X=0) =$$

③

$$P(X=5) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} =$$

$$P(X=3) = \left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}\right) \times 3 =$$

السؤال السادس:

$$T_r = \binom{12}{r} \cdot (x^2)^{12-r} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^r$$

$$= \binom{12}{r} \cdot x^{24-2r} \cdot (-2)^r \cdot \frac{1}{x^r}$$

$$= \binom{12}{r} x^{24-2r} \cdot (-2)^r \cdot x^{-r}$$

$$= \binom{12}{r} \cdot x^{24-3r} \cdot (-2)^r$$

$24 - 3r = 12 \Rightarrow r = 4 \Leftarrow x^{12}$ من أجل

$$\binom{12}{4} \cdot x^{24-12} \cdot (-2)^4 = \binom{12}{4} x^{12} \cdot (-2)^4$$

$=$ نكتب الجواب

من أجل الحد المستقل نضع x^0

$$24 - 3r = 0$$

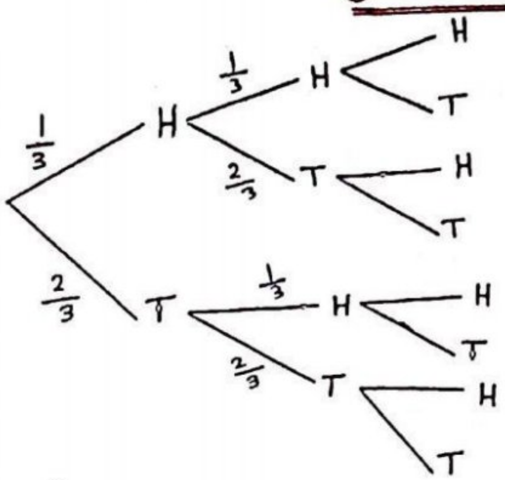
$$\Rightarrow 24 = 3r$$

$$\Rightarrow r = 8$$

فالحد هو: $\binom{12}{8} x^0 \cdot (-2)^8 = ...$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال السابع:



$$X = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times 3 = \frac{12}{27}$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times 3 = \frac{6}{27}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{12}{27} + 4 \cdot \frac{6}{27} + 9 \cdot \frac{1}{27}$$

$$= 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - (1)^2 = \frac{18}{27}$$

السؤال الثامن:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = \frac{10}{11} \times \frac{10}{11} = \frac{100}{121}$$

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{11} \times \frac{10}{11}\right) \times 2 = \frac{20}{121}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{121}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{100}{121}$	$\frac{20}{121}$	$\frac{1}{121}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{100}{121} + 1 \cdot \frac{20}{121} + 2 \cdot \frac{1}{121}$$

$$= 0 + \frac{20}{121} + \frac{2}{121} = \frac{22}{121}$$

السؤال التاسع:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P(X=1) = \frac{10}{30}, \quad P(X=2) = \frac{8}{30}$$

$$P(X=3) = \frac{6}{30}, \quad P(X=4) = \frac{4}{30}$$

$$P(X=5) = \frac{2}{30}$$

2

$E(X) = ----$

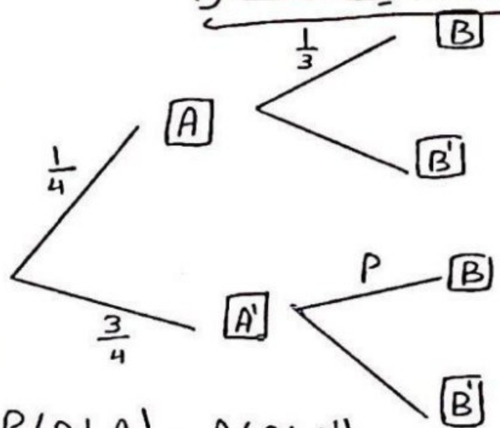
$V(X) = ----$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال العاشر:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	1

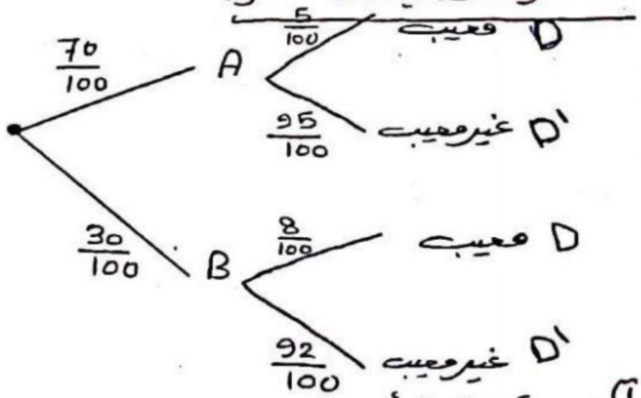
السؤال الحادي عشر:



$P(B|A) = P(B|A')$

$\frac{1}{3} = P$

السؤال الثاني عشر:



1) معيبة من A أو B

نفرض D حدث معيب

$P(D) = \frac{70}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{8}{100}$

$= \boxed{}$

ب)

$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$

نحسب المقام قبل البسط.

$= \frac{\frac{30}{100} \times \frac{8}{100}}{\frac{70}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{8}{100}} = \boxed{}$

السؤال الثالث عشر:

1) $5 \times 6 \times 6 = 180$

2) $5 \times 5 \times 4 = 100$ 3) $2 \times 5 \times 4 = 40$

4) الطلب $6 \times 6 \times 6 = 216$

السؤال الرابع عشر:

1) $\binom{n}{2} = 36$ شرط الحل: $n \geq 2$

$\frac{n(n-1)}{2!} = 36 \Rightarrow n^2 - n = 72$

$n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$

إما $n = 9$ مقبول

أو $n = -8$ مرفوض

2) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ شرط الحل: $n \geq 4$

$3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 14\,\frac{n(n-1)}{2 \times 1}$

$\Rightarrow \frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$

$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$

$n^2 - 5n - 50 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+5) = 0$

إما $n = 10$ مقبول

أو $n = -5$ مرفوض

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $\binom{10}{3n} , \binom{10}{n+2}$

شرط الحل: $0 \le n \le 3.33$

إما $3n = n + 2 \Rightarrow 2n = 2$

$\Rightarrow n = 1$ مقبول

أو

$3n + n + 2 = 10 \Rightarrow n = 2$ مقبول

السؤال الخامس عشر:

$P(X=1) = \frac{6}{27}$, $P(X=0) = \frac{1}{27}$

K	0	1	2	3
$P(X=K)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} . P^0 . (1-P)^{3-0}$

$\frac{1}{27} = 1 . 1 . (1-P)^3$

$\frac{1}{3} = 1 - P \Rightarrow P = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

$P(X=2) = \binom{3}{2} . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^1$

$= \frac{12}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^0$

$= \frac{8}{27}$

$E(X) = n . P = 3 . \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$

$V(X) = n . P . q = 3 . \frac{2}{3} . \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

السؤال السادس عشر:

① عدد الرمازات: $6 \times 6 \times 6$

② عدد طرق اختيار الخانة الأولى: 6

عدد طرق اختيار الخانة الثانية: 5

عدد طرق اختيار الخانة الثالثة: 4

$6 \times 5 \times 4 = 120$

السؤال السابع عشر:

① $5 \times 5 = 25$

② $(2 \times 3) \times 2 = 12$ ← عدد التبديلات

السؤال الثامن عشر:

① $P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{20}$

② $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{2}{20}$, $P(X=1) = \frac{8}{20}$

$P(X=2) = \frac{6}{20}$, $P(X=3) = \frac{4}{20}$

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P_i = \frac{0+8+12+12}{20}$

$= \frac{32}{20}$

السؤال التاسع عشر:

عدد طرق سحب الكرة الأولى 10

" " " " الثانية 10

" " " " الثالثة 10

حسب المبدأ الأساسي بالعد

$10 \times 10 \times 10 = 1000$

② نحسب العكس (م م م)

عدد طرق اختيار الكرة الأولى 9

" " " " الثانية 9

" " " " الثالثة 9

حسب المبدأ الأساسي بالعد

$9 \times 9 \times 9 = 729$

فالمطلوب هو $1000 - 729 = 271$ طريقة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال العشرون :

$\boxed{1}$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \times 6 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$

$$P(A\cap C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A)\,.\,P(C) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(A\cap C) = \frac{1}{16}$$

$\Leftarrow$ مستقلة احتمالياً .

$\boxed{3}$

$$P(B\cap C) = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]\times 3 = \frac{3}{16}$$

$$P(C|B) = \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$$

نعوض:

$$P(B)\,.\,P(C) = P(C\cap B)$$

$\Leftarrow$ مستقلان احتمالياً .

السؤال الواحد والعشرون :

$$P^4_{n+2} = 14\,P^3_n$$

شرط الحل: $n \geq 3$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14\,n(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$$

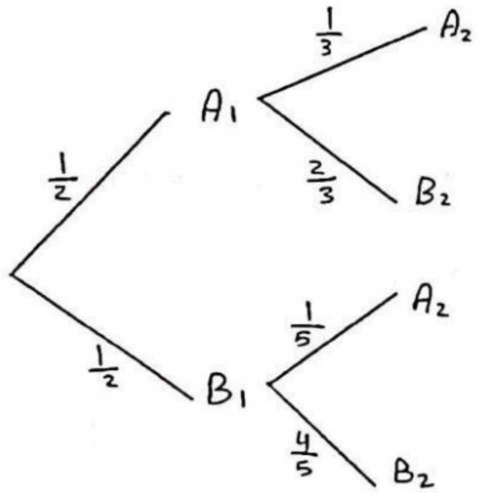
$$\Rightarrow n^2 - 11n + 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n-6)(n-5) = 0$$

إما $n = 6$ مقبول

أو $n = 5$ مقبول

السؤال الثاني والعشرون :



$$P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \underset{(10)}{\frac{1}{6}} + \underset{(6)}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{60} + \frac{6}{60} = \frac{16}{60}$$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = ----$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث والعشرون :

$$n=6 ,\ p=\frac{1}{6} ,\ q=\frac{5}{6}$$

$$k=3$$

$$P(X=3)=\binom{6}{3}p^3q^3$$

$$=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$=20\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{125}{216}=\frac{2500}{46656}$$

السؤال الرابع والعشرون :

$$n=5 ,\ p=\frac{1}{2} ,\ q=\frac{1}{2}$$

$$K=\{2,3,4,5\}$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{32}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{32}$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$=5\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$=1\cdot\frac{1}{32}\cdot 1=\frac{1}{32}$$

أو نقتصر على المكمل :

$$1-[P(0)+P(1)]$$

$$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=\frac{10+10+5+1}{32}=\frac{26}{32}$$

السؤال الخامس والعشرون :

$$n=5 ,\ p=\frac{6}{10} ,\ q=\frac{4}{10}$$

$$P(B)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2$$

$$=10\cdot\frac{216}{1000}\cdot\frac{16}{100}=\frac{34560}{100000}$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(\frac{4}{10}\right)^1$$

$$=5\cdot\frac{1296}{10000}\cdot\frac{4}{10}=\frac{25920}{100000}$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{6}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^0$$

$$=1\cdot\frac{7776}{10000}\cdot 1=\frac{7776}{100000}$$

$$P(B)=\frac{34560+25920+7776}{100000}$$

$$=\frac{68256}{100000}$$

مركز أونلاين

أ. سهى عجوز

أ. مروى حميشه

أ. نجوى العلي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكملة قسم (المتتاليات)

السؤال الحادي عشر:

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n}$$

أثبت $\frac{1}{2+n} \le u_n \le \frac{3}{n-2}$

الحل: لدينا $n \le 1+n \le n+2$

ومنه: $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{n+2}$

ومنه $3\times\frac{1}{n+2} \le u_n \le 3\times\frac{1}{n}$

ومنه: $\frac{3}{n+2} \le u_n \le \frac{3}{n}$

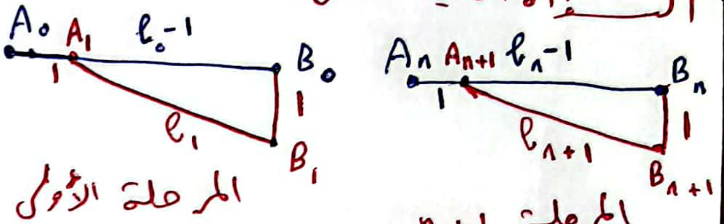
$$\Rightarrow \frac{1}{n+2} < u_n < \frac{3}{n-2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n-2}\right) = 0$$

ومنه

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ بالحصر

السؤال الثاني عشر:



المرحلة الأولى — المرحلة n+1

الحل: ① في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ طول الوتر أكبر من طول أي من الضلعين القائمتين

أي: $[B_nB_{n+1}] < [A_{n+1}B_{n+1}]$

أي: $1 < l_{n+1}$

كذلك طول أي ضلع في المثلث أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الآخرين أي:

$$[A_{n+1}B_{n+1}] < [A_{n+1}B_n] + [B_nB_{n+1}]$$

أي: $l_{n+1} < l_n - 1 + 1$

$$\Rightarrow l_{n+1} < l_n$$

ومنه $1 < l_{n+1} < l_n$

② حسب فيثاغورس في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$

نجد: $l_{n+1} = \sqrt{1+(l_n-1)^2}$

③ بما أن (l_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 (من الطلب الأول) فالمتتالية متقاربة ولإيجاد النهاية نحل المعادلة $f(x)=x$ أي

$$x = \sqrt{1+(x-1)^2}$$

ومنه $x=1$ أي $\lim_{n\to+\infty} l_n = 1$

السؤال الثالث عشر: طريقة أولى: تفريق الكسر

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

حساب A و B ثم حساب الحدود واكتشاف S_n

طريقة ثانية:

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{n+1}$ نلاحظ كل بسط أصغر من المقام بـ 1

إثبات S_n بالتدريج: نفرض $E(n): S_n = u_1+u_2+\dots+u_n = \frac{n}{n+1}$

نبرهن صحة $E(1)$: $S_1 = \frac{1}{1\times2} = \frac{1}{1+1}$ محقق

نفرض $E(n)$ صحيحة:

نبرهن $E(n+1)$ صحيحة: أي نبرهن:

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$l_1 = S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

نوحد المقامات $= \dots = \frac{n+1}{n+2} = l_2$