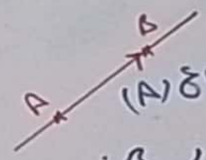
١) مراجعة عامة عن الأشعة :

أ) الشعاع : هو السهم المنطلق من النقطة A الى النقطة B ويرمز له بـ $\overrightarrow{AB}$.

٢) عناصر الشعاع :



١) المبدأ : مبدأ الشعاع (A)

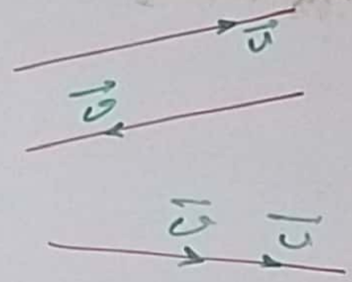
٢) الجهة : من A الى B .

٣) الحامل : هو المستقيم (AB)

٤) الطويلة : « النظيم » طول القطعة المستقيمة [AB]

* المنحى : اذا كان لدينا شعاعين متوازيين في صوص أمكن القول بأنهما لهما المنحى ذاته .

١



٣) أشعة خاصة :

الشعاع الصفري : هو شعاع تنطبق نهايته على بدايته ويرمز له بـ $\vec{0}$

الشعاعين المتساويين : هما شعاعين لهما الطول والجهة والمنحى ذاته . ونكتب

$\vec{u}=\vec{v}$

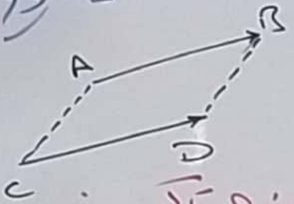
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ملاحظة : اذا تساوى شعاعين متقابلين فإن رباعي ما لهما رباعي متوازي أضلاع .

٢

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

فإن رباعي ABDC متوازي أضلاع



الشعاعين المتعاكسين : هما شعاعين لهما الطول والمنحى ذاته ولكن بجهتين متعاكستين .

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

مجموع شعاعين متعاكسين هو الشعاع الصفري

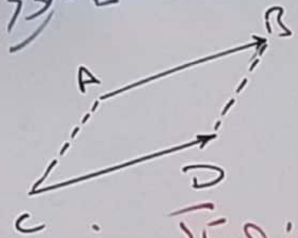
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

٣

$\vec{AB} = \vec{CD}$

فإن رباعي ABDC متوازي أضلاع



الشعاعين المتعاكسين:

هما شعاعين لهما الطول ذاته وتكون بجهتين متعاكستين.

$\vec{AB} = -\vec{BA}$

مجموع شعاعين متعاكسين هو الشعاع الصفري.

$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

$\vec{D} + \vec{D'} = \vec{0}$

٣

② جمع الأشعة

① طريقة شال:

(نهاية — بداية)

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

عكس شال:

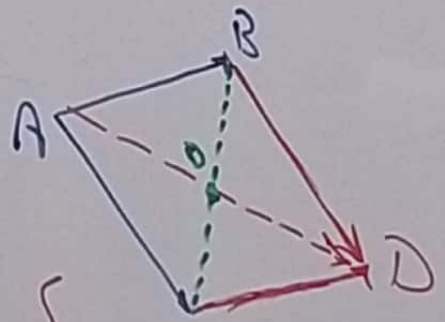
(البداية — نهاية)

$\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$

② طريقة متوازي الأضلاع:

(بداية — بداية)

الناتج: قطر متوازي الأضلاع الخارج من صدر الشعاعين



$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$

ملاحظة: إذا تساوى شعاعين لهما البداية ذاتها فالنهايات متطابقة.

$\vec{AM} = \vec{AB}$

إذاً M منطبق على B.

$\vec{AN} = \vec{AD}$

N منطبق على D.

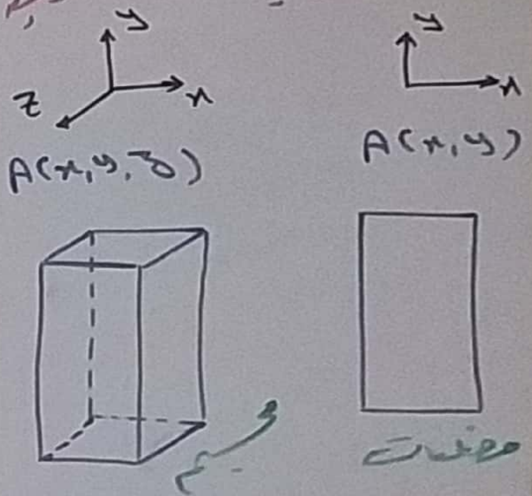
③ طريقة الاستبدال

نستبدل شعاع الذي نريد استبداله بشعاع آخر يساويه ثم نكمل بشال أو متوازي الأضلاع

ص ١٦٩

الهندسة :

هندسة مستوية — هندسة فراغية



المنشور القائم : هو مجسم فراغي قاعدتاه متوازيتان ومتطابقتان.

ويسمى المنشور بحسب عدد أضلاع قاعدته.

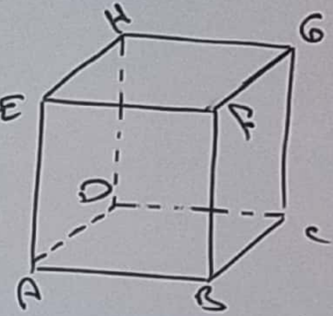
منشور ثلاثي قائم - منشور رباعي قائم.

أوجهه الجانبية مستطيلات.

أحرفه الجانبية متساوية الطول ـ تعامد القاعدتين.

٦

المكعب : هو منشور رباعي قائم أوجهه الستة كلها مربعات متطابقة.



قطرا المكعب : HB - AG

المساحة الجانبية $= 4a^2$

المساحة الكلية $S = 6a^2$

V حجم $: a^3$

طول قطر المكعب : $\sqrt{3}\,a$

" " قطر المربع : $\sqrt{2}\,a$

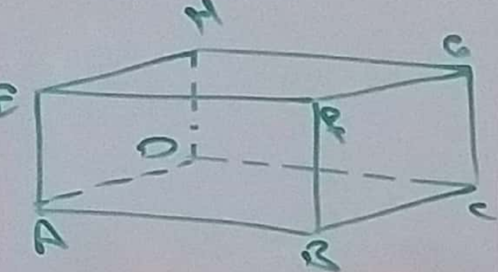
" " المستطيل : $\sqrt{a^2+b^2}$

" " متوازي المستطيلات : $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

٧

متوازي المستطيلات : هو منشور رباعي قائم قاعدتاه مستطيل.

متوازي السطوح : هو منشور رباعي قائم قاعدتاه متوازيا أضلاع.



الاستبدال

$\vec{AB} \to \vec{DC},\ \vec{EF},\ \vec{HG}$

$\vec{AE} \to \vec{BF},\ \vec{CG},\ \vec{DH}$

$\vec{AH} \to \vec{BG}$

$\vec{AF} \to \vec{DG}$

٨

2) قوانين :

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

$C(x_3, y_3, z_3)$

1) الشعاع $\vec{AB}$.

$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

2) مركبات الشعاع $\vec{AB}$

$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

3) طول القطعة $[AB]$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_B - z_A)^2}$

4) احداثيات I منتصف AB.

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

5) احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC.

$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

6) نظيم (طويلة) الشعاع

9

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7) معادلة كرة :

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

1) $0 > R^2$ تمثل مجموعة خالية .

2) $R^2 = 0$ تمثل النقطة $\Omega(x_0, y_0, z_0)$

3) $R^2 > 0$ تمثل كرة مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R.

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

$\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$

$R^2 = \begin{cases} = 0 & \text{نقطة} \\ \text{سالب} & \text{خالية} \\ \text{موجب} & \text{كرة} \end{cases}$

10

8) الارتباط الخطي لشعاعين :

المفهوم الهندسي : هو التوازي في الانطباق .

المفهوم الجبري : $\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً

أ) $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

الشعاع الصفري مرتبط خطياً مع أي شعاع آخر .

ب) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

$\vec{u}(0, 0, 4)$

$\vec{v}(0, 0, 3)$ مرتبطان خطياً .

$\vec{u} = \frac{4}{3}\vec{v}$ ومنه $\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = \frac{4}{3}$

الفائدة : 1) اثبات توازي

2) وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة .

3) اثبات ثلاث نقاط ليست على استقامة انها تعين مستوي .

11

$A(3,5,2)$ $B(2,-1,3)$

$C(0,-2,2)$ $D(-2,5,1)$

$E(3,9,2)$ $F(8,13,3)$ $\frac{1}{2}$

AB CD EF

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{EF}$

K — $ABCK$

$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$

نقطة I منتصف AB

$I\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

نقطة J منتصف CD

$J\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

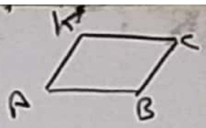
نقطة H منتصف EF

$H\left(\frac{11}{2}, 11, \frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$

$\overrightarrow{CD}(-2,7,-1)$

$\overrightarrow{EF}(5,4,1)$



بفرض $K(x,y,z)$

لكي يكون متوازي أضلاع يجب أن يكون

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$

$(-1,-6,1) = (-x, -2-y, 2-z)$

بالمطابقة:

$-x = -1 \Rightarrow x = 1$

$-2-y = -6 \Rightarrow y = 4$

$2-z = 1 \Rightarrow z = 1$

$K(1,4,1)$

$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

$= 3(-1,-6,1) + 2(-2,7,-1)$

$= (-3,-18,3) + (-4,14,-2)$

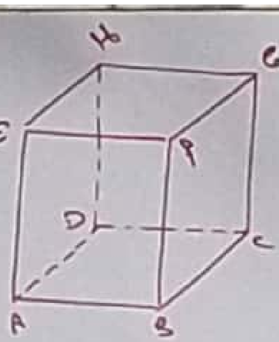
$= (-7,-4,1)$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$

$= 2(-1,-6,1) - \frac{1}{2}(-2,7,-1) + 3(5,4,1)$

$= (-2,-12,2) + \left(1, -\frac{7}{2}, +\frac{1}{2}\right) + (15,12,3)$

$= \left(14, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$



$A(2,1,-1)$ $B(1,3,-1)$

$C(-3,2,0)$ $E(3,-1,3)$

جد احداثيات الرؤوس الباقية للمكعب

بفرض $D(x,y,z)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(-1,2,0) = (-3-x, 2-y, -z)$

$-3-x = -1 \Rightarrow x = -2$

$2-y = 2 \Rightarrow y = 0$

$0 = -z \Rightarrow z = 0$

$D(-2,0,0)$

باقي النقاط $H.G.F$

١٥

$A(3,0,-1)$ $B(-2,3,2)$

$C(1,2,-2)$

① $I \sim AB$

② احداثيا D نظيرة I بالنسبة لـ C

③ M $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

④ N $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$

① $I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

② 

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CD}$

$D(x,y,z)$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right) = (x-1, y-2, z+2)$

بالتطابق

$x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$y-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

$z+2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow z = \frac{-9}{2}$

③ $M(x,y,z)$

$(x+2, y-3, z-2) = (-5,3,3) + 3(-2,2,-1)$

$= (-5,3,3) + (-6,6,-3)$

$= (-11,9,0)$

١٦

$x+2 = -11 \Rightarrow x = -13$

$y-3 = 9 \Rightarrow y = 12$

$z-2 = 0 \Rightarrow z = 2$

$M(-13,12,2)$

④ $N(x,y,z)$

$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$

$(3-x, -y, -1-z) = 2(1-x, 2-y, -2-z)$

$= (2-2x, 4-2y, -4-2z)$

$3-x = -2-2x \Rightarrow x = -1$

$-y = 4-2y \Rightarrow y = 4$

$-1-z = -4-2z \Rightarrow z = -3$

$N(-1,4,-3)$

١٧

$\frac{4}{24}$

$A(2,3,-2)$

$B(5,-1,0)$

أ) $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad M(x,y,z)$

$(2-x, 3-y, -2-z) = 2(3,-4,2)$
$= (6,-8,4)$

$\left.\begin{aligned} 2-x=6 &\Rightarrow x=-4 \\ 3-y=-8 &\Rightarrow y=11 \\ -2-z=4 &\Rightarrow z=-6 \end{aligned}\right\} M(-4,11,-6)$

ب) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

$(2-x, 3-y, -2-z) = (5-x, -1-y, -z)$

بالمطابقة:

$2-x = 5-x \Rightarrow 2 = 5$

غير محققة أي لا يوجد احداثيات لوجود M.

$3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$3(-3,4,-2) + (5-x,-1-y,-z) = \vec{0}$

$(-9,12,-6) + (5-x,-1-y,-z) = \vec{0}$

$(-4-x, 11-y, -6-z) = (0,0,0)$

١٨

$-4-x=0 \Rightarrow x=-4$

$11-y=0 \Rightarrow y=11$

$-6-z=0 \Rightarrow z=-6$

$M(-4,11,-6)$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

$(2-x,3-y,-2-z) - (5-x,-1-y,-z) = (-3,4,-2)$

$(2-x,3-y,-2-z) + (-5+x,1+y,z) = (-3,4,-2)$

$(-3,4,-2) = (-3,4,-2)$

أي أن M كل نقاط في الفضاء

له ∞ حلول

ملاحظة حول المعادلات:

المعادلة مستحيلة ليس لها حل $2=3$

المعادلة لها عدد لا نهائي من الحلول $0=0$

∞ حلول:

١٩

5

$A(2,3,0)$

$B(3,2,1)$

$M(a,b,2)$

لكي تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان مرتبطين خطياً.

$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$

$\overrightarrow{AM}(a-2,b-3,2)$

$\frac{1}{a-2} = \frac{-1}{b-3} = \frac{1}{2}$

- $\frac{1}{a-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a-2 = 2$
  $a = 4$
- $\frac{-1}{b-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow b-3 = -2$
  $b = 1$

$\frac{6}{24}$

$\vec{u}(2,a,5)$

$\vec{v}(1,-2,a)$

$\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} = \frac{5}{a}$

٢٠

$\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} \Rightarrow a = -4$

$\frac{2}{1} = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

لا يوجد قيمة لـ a يكون فيها $\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً.

7

$A(3,-1,2)$

$B(0,2,4)$

$C(2,0,-3)$

$\overrightarrow{AB}(-3,3,2)$

$\overrightarrow{AC}(-1,1,-5)$

$\frac{-3}{-1} \neq \frac{2}{-5}$

فالشعاعان غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

$A(1,-1,0)$ $\quad B(1,-1,4)$

$C(1,-1,-3)$

مرتبطان خطياً

$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}(0,0,4) \\ &\overrightarrow{AC}(0,0,-3) \end{aligned}\right\}$ فالشعاعان متوازيان مشتركان بنقطة

فالنقاط A، B، C على استقامة واحدة.

٢١

$\frac{1}{27}$

$\vec{u}(2,-2,3)$

$\vec{v}(4,-4,-2)$

• $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$

• $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+0+25} = \sqrt{26}$

2

$A(1,3,-1)$ $B(3,6,-2)$

$C(0,4,0)$

$AB = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$AC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$BC = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

$BC^2 \overset{?}{=} AB^2 + AC^2$

$17 = 3 + 14$

فالمثلث قائم في A.

3

$A(5,2,-1)$

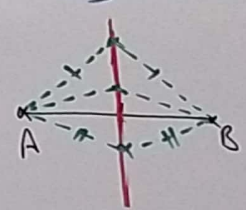
$B(3,0,1)$

$E(3,2,1)$ $D(1,1,-3)$

$C(-2,5,-2)$

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة: هو العمود على القطعة المستقيمة في منتصفها.

ومن أهم خواصه: أي نقطة منه تكون متساوية البعد عن طرفيها.



$AC = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$

$BC = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$

إذن C تنتمي للمستوي المحوري للقطعة AB

وبالمثل D ∉ المستوي المحوري

$\notin E$

$A(1,1,\sqrt{2})$ $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ $\frac{4}{27}$

نظيرة A بالنسبة للمبدأ:

النظير بالنسبة للمبدأ هو المعاكس

$C(-1,-1,-\sqrt{2})$

$AB = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(1+\sqrt{2})^2+2}$

$= \sqrt{2-2\sqrt{2}+1+1+2\sqrt{2}+2+2}$

$= \sqrt{8}$

$BC = \sqrt{8}$

$AC = \sqrt{} = 4$

المثلث متساوي الساقين

$AB = BC$

قائم لأن

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$\frac{5}{27}$

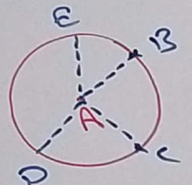
$A(2,3,-1)$

$B(2,8,-1)$

$C(7,3,-1)$

$D(-1,3,3)$

$E(5,3,3)$



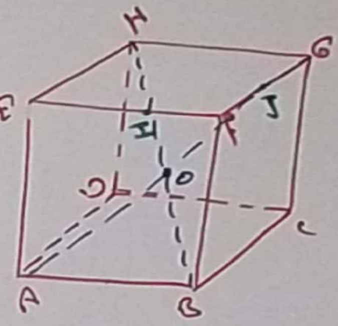
$AB = \sqrt{} = 5$

$AC = = 5$

$AD = = 5$

$AE = = 5$

إذن B, C, D, E تقع على كرة مركزها A.



i) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F .

ii) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{AG}$

M تنطبق على G .

iii) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{DH}$

$= \overrightarrow{AE}$

M تنطبق على E

ت6

iv) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}$

M لا تنطبق على أي رأس من رؤوس المكعب

v) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{AB}$

M تنطبق على B .

ت2

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$

$= \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J .

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق J

ت7

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

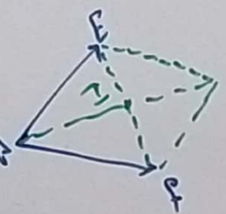
N تنطبق على I .

ت3

$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EC}$

$= \overrightarrow{EG}$



$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF} =$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI}$

ت8

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

نفرض O منتصف BG.

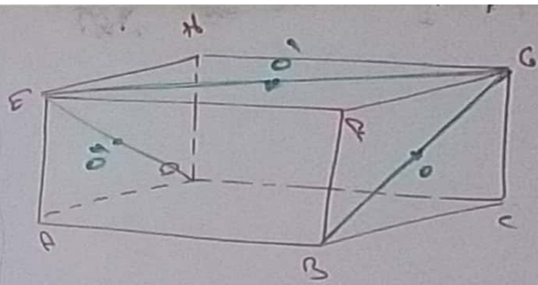
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$

$= \overrightarrow{AO}$

P تنطبق ع O

أي أن P منتصف BG.

٢٩



$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{EO'} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AO'}$

إذاً Q تنطبق ع O'

إذاً Q في منتصف EG.

٣٠

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{DO''} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO''}$

R تنطبق ع O''

R تقع في منتصف DE.

٣١

$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$

$L_1 = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{FD}$

٣٣

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} = \vec{0}$

$L_1 = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{EF} = \vec{0}$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$L = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$

$= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{FE} = \vec{0}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

$L_1 = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC}$

$= \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

٣٢

$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{DO''} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO''}$

R تنطبق على O''

R منتصف DE .

٣١

(٤) الارتباط الخطي للأشعة

نقول عن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا تحقق

$$\boxed{\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}}$$

* أربع نقاط:

الفائدة: إثبات أربع نقاط أنها تقع في مستوٍ واحد.

مثال:

$A(2,3,-5)$

$B(1,-1,0)$

$C(2,1,-3)$

$D(-3,2,1)$

أثبت أن A ، B ، C ، D تقع في مستوٍ واحد

٣٤

$\vec{AB}(-1,-4,5)$

$\vec{AC}(0,-2,2)$

$\vec{AD}(-5,-1,6)$

$\vec{AB} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AD}$

$(-1,-4,5) = \alpha(0,-2,2) + \beta(-5,-1,6)$

$(-1,-4,5) = (0,-2\alpha,2\alpha) + (-5\beta,-\beta,6\beta)$

$= (-5\beta, -2\alpha-\beta, 2\alpha+6\beta)$

بالمطابقة..

$-5\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{5}$

$-2\alpha - \beta = -4 \Rightarrow -2\alpha = -4 + \frac{1}{5}$

$-2\alpha = \frac{-19}{5}$

$\alpha = \frac{19}{10}$

٣٥

$2\alpha + 6\beta = 5$

نعوض α ، β للتأكد

$\frac{38}{10} + \frac{6}{5} \overset{?}{=} 5$

$\frac{38+12}{10} \overset{?}{=} 5$

$\frac{50}{10} \overset{!}{=} 5$

$5 = 5$

فالأشعة مرتبطة خطياً والنقاط A ، B ، C ، D تقع في مستوٍ واحد

* خمس نقاط:

الفائدة: إثبات مستقيم يوازي مستوٍ

مثال:

$A(2,3,4)$

$B(3,2,4)$

$C(-4,3,1)$

٣٦

$D(1,1,-2)$

$E(1,0,-1)$

أثبت أن AB يوازي المستوي CDE

$\vec{AB}(1,-1,0)$

$\vec{CD}(5,-2,-3)$

$\vec{CE}(5,-3,-2)$

يكفي ترابطها خطياً.

$\vec{AB} = \alpha \vec{CD} + \beta \vec{CE}$

$(1,-1,0) = \alpha(5,-2,-3) + \beta(5,-3,-2)$

$= (5\alpha,-2\alpha,-3\alpha) + (5\beta,-3\beta,-2\beta)$

$= (5\alpha+5\beta, -2\alpha-3\beta, -3\alpha-2\beta)$

٣٧

Scanned by CamScanner

$D(1,1,-2)$

$E(1,0,-1)$

ابحث هل AB يوازي المستوي CDE

$\vec{AB}(1,-1,0)$

$\vec{CD}(5,-2,-3)$

$\vec{CE}(5,-3,-2)$

غير مرتبطين خطياً.

$\vec{AB} = \alpha\vec{CD} + \beta\vec{CE}$

$(1,-1,0) = \alpha(5,-2,-3) + \beta(5,-3,-2)$

$= (5\alpha, -2\alpha, -3\alpha) + (5\beta, -3\beta, -2\beta)$

$= (5\alpha+5\beta, -2\alpha-3\beta, -3\alpha$

٣٧

بالمطابقة:

$5\alpha + 5\beta = 1$ (1)

$-2\alpha - 3\beta = -1$ (2)

$-3\alpha - 2\beta = 0$ (3)

نضرب (2) بـ -3

(3) بـ 2

$6\alpha + 9\beta = 3$

$-6\alpha - 4\beta = 0$ +

$5\beta = 3$

$\boxed{\beta = \frac{3}{5}}$

نعوض في (2)

$-2\alpha - \frac{9}{5} = -1$

$-2\alpha = -1 + \frac{9}{5}$

$-2\alpha = \frac{4}{5}$

$\boxed{\alpha = \frac{-2}{5}}$

٣٨

نعوض في (1) للتأكد.

$5\left(\frac{-2}{5}\right) + 5\left(\frac{3}{5}\right) \overset{?}{=} 1$

$-2 + 3 = 1$

$1 = 1$

فهي مرتبطة خطياً

نستنتج أن AB يوازي المستوي CDE

٣٩

① ج:

$\vec{AB}$ $\vec{AC}$ $\vec{BC}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

فالأشعة مرتبطة خطياً.

② $\vec{BE} = 4\vec{BC}$

$\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$

اثبت أن A، B، C، E، F في مستوٍ واحد.

A,B,C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوياً.

لدينا $\vec{BE} = 4\vec{BC}$

فالشعاعان $\vec{BE}$ ، $\vec{BC}$ مرتبطان خطياً ومشتركان بالنقطة B

فالنقاط B، C، E على استقامة واحدة.

٤

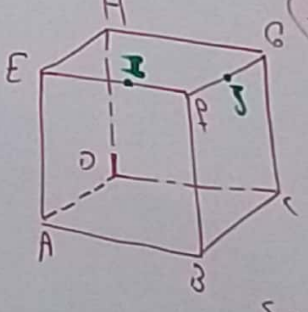
المستقيم (BC) يشترك مع المستوي ABC بنقطتين B, C إذاً E تقع في المستوي ABC.

"إذا اشترك مستقيم مع مستوٍ بنقطتين فإن كل نقاط المستقيم في هذا المستوي"

وبنفس الأسلوب تكون $F \in ABC$.

ومنه A، B، C، E، F في مستوٍ واحد.

③ ج



٤١

ⓘ $J \in ABI$

$\left.\begin{array}{l} ABFE \supset ABI \\ BCGF \supset J \end{array}\right\} \Rightarrow$

$J \notin ABI$.

② $\vec{AJ}$ ، $\vec{AI}$ ، $\vec{AB}$ في مستوٍ واحد.

بما أن $J \notin ABI$ إذاً الأشعة

$\vec{AJ}$ ، $\vec{AI}$ ، $\vec{AB}$

لا تقع في مستوٍ واحد.

④ ج

$\vec{AM} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{DC}$

① $\vec{AM}$ بدلالة $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$

$\vec{AM} = \underbrace{\vec{AD} + \vec{DC}}_{} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= \vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$

٤٢

$M \in ABC$ وجدنا

$\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$

فالأشعة مرتبطة خطياً.

فالنقاط A، B، C، M في مستوٍ واحد.

⑤ ج

$\vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{HE}$

$\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EH}$

$\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

① $\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

$\ell_1 = \vec{MN}$

$= \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN}$

$= \frac{1}{3}\vec{HE} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$= \frac{1}{3}(\vec{HE} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}\vec{DB} + \vec{EA}$

٤٣

وجدنا $M \in (ABC)$

$\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$

مرتبطة خطياً.

فالنقاط A, B, C, M

مستوية.

5/20

$\vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{HE}$

$\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EH}$

$\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$ ①

$\ell_1 = \vec{MN}$

$= \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN}$

$= \frac{1}{3}\vec{HE} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$= \frac{1}{3}(\vec{HE} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{EA}$

$= \frac{1}{3}\vec{DB} + \vec{EA}$

{2

$\vec{HB}, \vec{MN}, \vec{EA}$ ⓒ

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

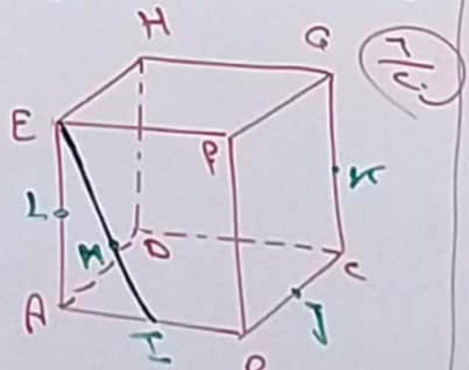
$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DH} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$= \vec{EA} - \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$= \frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

مرتبطة خطياً



$3\vec{EM} = 2\vec{EI}$

نأخذ المعلم $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$

$I(\frac{1}{2},0,0)$ $J(1,\frac{1}{2},0)$

$K(1,1,\frac{1}{2})$ $L(0,0,\frac{1}{2})$

$M(x,y,z)$ {3

$3\vec{EM} = 2\vec{EI}$

$3(x, y, z-1) = 2(\frac{1}{2}, 0, -1)$

$(3x, 3y, 3z-3) = (1, 0, -2)$

$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{array}\right\} M(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$

$M \in (AEB)$ ②

نقطة N مركز ثقل المثلث AEB

$N(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}) = M$

$\vec{HK}, \vec{CJ}, \vec{LM}$ ③

$\vec{HK}(1, 0, -\frac{1}{2})$

$\vec{CJ}(0, -\frac{1}{2}, 0)$

$\vec{LM}(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6})$

$\vec{LM} = \alpha\vec{HK} + \beta\vec{CJ}$

$(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}) = \alpha(1, 0, -\frac{1}{2}) + \beta(0, -\frac{1}{2}, 0)$

$= (\alpha, -\frac{1}{2}\beta, -\frac{1}{2}\alpha)$

$\alpha = \frac{1}{3}$

$\beta = 0$ $\alpha = \frac{1}{3}$

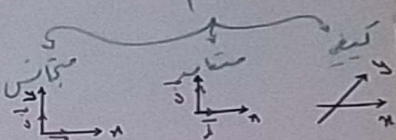
فالمتجهات مرتبطة خطياً.

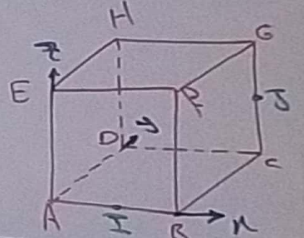
(لأن α لها نفس القيمة)

{5

المعلم المتجانس

المعلم





$(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

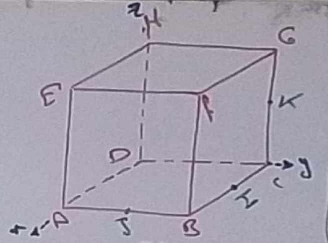
$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$

$C(1,1,0)$ $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$

$I(\frac{1}{2},0,0)$ $J(1,1,\frac{1}{2})$



$(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$

$D(0,0,0)$ $A(1,0,0)$

$B(1,1,0)$ $C(0,1,0)$

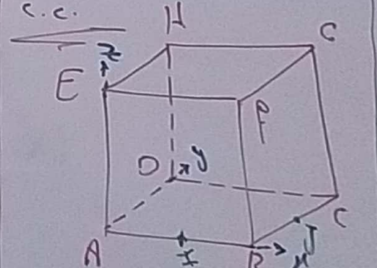
$E(1,0,1)$ $H(0,0,1)$

$F(1,1,1)$ $G(0,1,1)$

$I(\frac{1}{2},1,0)$ $J(1,\frac{1}{2},0)$

$K(0,1,\frac{1}{2})$

C.C.



مكعب طول ضلعه (3)

ومبدؤه A

$(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ [illegible]

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

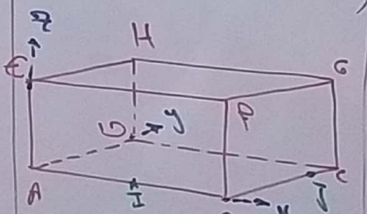
$A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$

$C(3,3,0)$ $D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$ $H(0,3,3)$

$F(3,0,3)$ $G(3,3,3)$

$I(\frac{3}{2},0,0)$ $J(3,\frac{3}{2},0)$



$AB = 2$ $BC = CG = 1$

(A) [illegible] مع تعليل ...

$(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$

$E(0,0,1)$ $C(2,1,0)$

$D(0,1,0)$ $H(0,1,1)$

$F(2,0,1)$ $G(2,1,1)$

$I(1,0,0)$

$\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$

$J(x,y,z)$

$(x-2, y, z) = \frac{3}{4}(0,1,0)$

$, \frac{3}{4}, 0)$

بالمطابقة:

$x = 2$

$y = \frac{3}{4}$

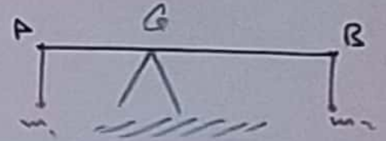
$z = 0$

$J(2, \frac{3}{4}, 0)$

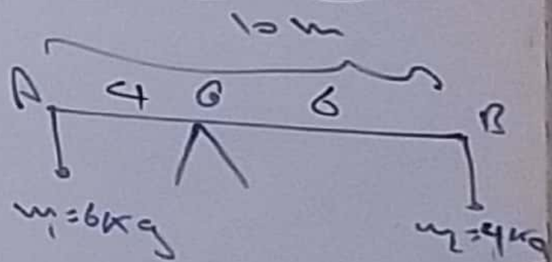
مركز الأبعاد المتناسبة

مركز التوازن

فيزيائياً: تكون الجملة في التوازن.



$$m_1 \times AG = GB \times m_2$$



مثال:

$m_1 = \alpha$

$m_2 = \beta$

$$\alpha \overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{GB}$$

D

$$\alpha \overrightarrow{AG} - \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

العلاقة الشعاعية لمركز مرسوم وحسنة كبيرة.

تعريف: G م.أ.م لنقطتين المثقلتين $(A,\alpha)(B,\beta)$ اذا وفقط اذا تحقق الشرطان.

1) $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

2) $\alpha + \beta \neq 0$

اوجد α ، β التي تحقق

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

1) $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 2 \quad \beta = -3$

D1

2) $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = 0 \quad \alpha = 3 \quad \beta = 2$

3) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 1 \quad \beta = 2$

تعيين موضع مركز الأبعاد

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

لتعيين موضع G.

D2

2) $3\vec{AG} - 2\vec{GB} = \vec{0}$

$3\vec{AG} + 2\vec{BG} = \vec{0}$ $\alpha = 3$, $\beta = 2$

3) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

$3\vec{AG} = 2\vec{AB}$

$3\vec{AG} - 2\vec{AB} = \vec{0}$

$3\vec{AG} - 2\vec{AG} - 2\vec{GB} = \vec{0}$

$\vec{AG} - 2\vec{GB} = \vec{0}$

$\vec{AG} + 2\vec{BG} = \vec{0}$

$\alpha = 1$ $\beta = 2$

+ تعيين موضع مركز الأبعاد

G م.أ.ع ل $(A,\alpha)(B,\beta)$

لتعيين موضع G .

٥٢

$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$

رابع: التثقيل الكلي

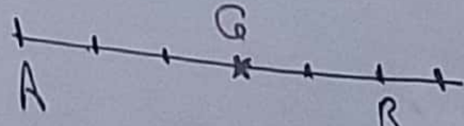
هو: مجموع التثقيلين .

تمارين + قواعد :

عين موضع G م.أ.ع ل $(A,\alpha)(B,\beta)$ في كل من الحالات الآتية .

1) G م.أ.ع ل $(A,2)(B,3)$

$\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB}$

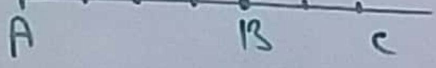


بداية الحل لاتعد

٥٣

قاعدة ١: إذا كانت التثقيلات لهما إشارة واحدة .
كان مركز الأبعاد داخل القطعة المستقيمة .

قاعدة ٢: التثقيل عكس الحالة (١)



B م.أ.ع ل $(A,2)(C,4)$

A م.أ.ع ل $(B,6)(C,-4)$

C م.أ.ع ل $(A,-2)(B,6)$

قاعدة ٣: إذا كانت التثقيلات لهما إشارتين مختلفتين
كان مركز الأبعاد خارج القطعة المستقيمة .

٥٤

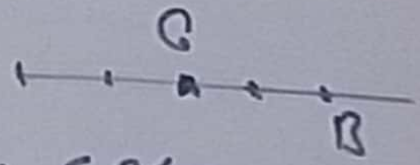
ج) G م.ا.ح لـ $(A,2)(B,-3)$

$$\vec{AG} = \frac{-3}{-1}\vec{AB}$$

$$\vec{AG} = 3\vec{AB}$$

د) G م.ا.ح لـ $(A,2)(B,2)$

$$\vec{AG} = \frac{2}{4}\vec{AB}$$



ملاحظة 4: اذا كانت المتغيرات متساوية فإن G هو مركز بالضبط منتصف القطعة المستقيمة

ملاحظة 5: اذا ضربنا او قسمنا المتغيرات على عدد واحد مغاير للصفر فلا يتغير موضع المرجح.

اذا كانت G م.ا.ح لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

فإن G م.ا.ح لـ $(A,k\alpha)(B,k\beta)$

$k \in \mathbb{R}^*$

التعميم:

• المساواة الشعاعية:

G م.ا.ح لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

يعني: $\alpha\vec{AG} + \beta\vec{BG} + \gamma\vec{CG} = \vec{0}$

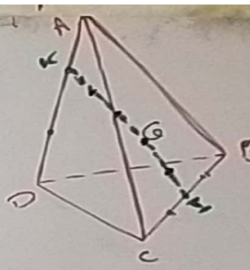
• تعيين موضع:

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BC}$$

مثال.

$\frac{1}{31}$



• لدينا نصف المسافة

I مرجح لـ $(C, c)(B, b)$

لدينا أيضا

I مرجح لـ $(C, 1)(B, 1)$

$\Rightarrow \frac{c}{1} = \frac{b}{1}$

(1) $\boxed{c = b}$

• لدينا نصف المسافة

K مرجح لـ $(A, a)(D, d)$

لدينا أيضا

K مرجح لـ $(A, 2)(D, 1)$

$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{d}{1}$

(2) $\boxed{a = 2d}$

• لدينا نصف المسافة

G مرجح لـ $(A, a)(B, b)(C, c)(D, d)$

$(K, a+d)$ $(I, b+c)$

لدينا أيضا

G مرجح لـ $(K, 2)(I, 3)$

$\Rightarrow \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{3} \Rightarrow \boxed{3a + 3d = 2b + 2c}$ (3)

٥٧

نعوض (1) - (2) في (3)

$6d + 3d = 2b + 2b$

$9d = 4b \Rightarrow$

$b = \frac{9}{4} d$

مثلا: $d = 4$

$b = 9 \rightarrow c = 9$

$\rightarrow a = 8$

$\frac{2}{31}$

$A(-4, -1, 2)$

$B(-2, 1, 0)$ $C(6, 3, -5)$

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

$G\left(\frac{-4-2+6}{3}, \frac{-1+1+3}{3}, \frac{2+0-5}{3}\right)$

$G(0, 1, -1)$

٥٨

$\frac{3}{31}$

$\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$

$\vec{MA} + \underbrace{\vec{MB} + \vec{CM}} = \vec{0}$

$\vec{MA} + \vec{CB} = \vec{0}$

$\vec{MA} = -\vec{CB} \Rightarrow$

$\vec{MA} = \vec{BC}$

• $M \leftarrow A, B, C$ على استقامة واحدة.

وجدنا $\vec{MA} = \vec{BC}$

مستطيل فرضية لها ستوازي بانه

A, B, C ليست على استقامة واحدة

اذن M ليست على استقامة A, B, C

• $M \leftarrow A, B, C$ ليست على استقامة واحدة.

اذن M, A, B, C تقع

في مستوى واحد.

وهو متوازي أضلاع.

وهو $MACB$

٥٩

$\overrightarrow{AM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

$(B,-1)\,(A, 2-(-1))$

$(B,-1)\,(A,3)$

③ $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

M

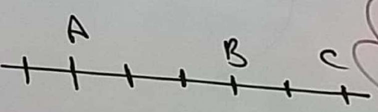
$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$(A,4)\,(B,-3)$

٣/٨١



A م.ا.ح ل

$(B,5)\,(C,-3)$

B م.ا.ح ل

$(A,2)\,(C,3)$

C م.ا.ح ل

$(A,2)\,(B,-5)$

٦٢

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

١/٨٠

① M م.ا.ح ل

$(A,-2)\,(B,1)$

G م.ا.ح ل $(A,\alpha)\,(B,\beta)$

$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-2+1}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

$\boxed{t=-1}$ ومنه

② M م.ا.ح ل $(B,3)\,(A,2)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$t = \frac{3}{5}$

M م.ا.ح β ، α ايجاد

٢/٨١

① $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

$(B,2)\,(A,7-2)$

$(A,5)$

② $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

٦١

$\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{IA} = \lambda\overrightarrow{BA}$

٤/٣١

$\overrightarrow{AJ} = \lambda\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CK} = \lambda\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CL} = \lambda\overrightarrow{CB}$

① $\overrightarrow{IJ} = \lambda\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$ بين ان

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

$= \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AD}$

$= \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= \lambda\overrightarrow{BD}$ --- ①

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK}$

$= \lambda\overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{CD}$

$= \lambda(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \lambda\overrightarrow{BD}$ --- ②

من ① و ② نجد $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \lambda\overrightarrow{BD}$

بما ان $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \Rightarrow I, J, K, L$

في مستوي واحد

ومنه IJKL متوازي اضلاع

٦٠

$\frac{3}{81}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

$(B,-1)\,(A,2-(-1))$

$(B,-1)(A,3)$

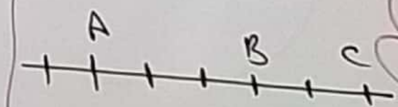
③ $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$(A,4)(B,-3)$



A م.ا.ح د

$(B,5)(C,-3)$

B م.ا.ح د

$(A,2)(C,3)$

C م.ا.ح د

$(A,2)(B,-5)$

ج٢

$\frac{4}{81}$

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

M م.ا.ح د

$(A,-1)(B,1)(C,1)$

$(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ G م.ا.ح د

$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{-1+1+1}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$x = 1 \quad y = 1$

$(A,3)(B,1)(C,2)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3+1+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3+1+2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$

$x = \frac{1}{6} \quad y = \frac{2}{6}$

ج٣

$\frac{5}{81}$

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$(B,2)(C,-1)(\alpha,1-(2-1))$

$(\alpha,0)$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$(A,1)(C,-1)(B,1-(1-1))$

$(B,1)$

$\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$(A,3)(B,2)(\gamma,1-5)$

$(\gamma,-4)$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

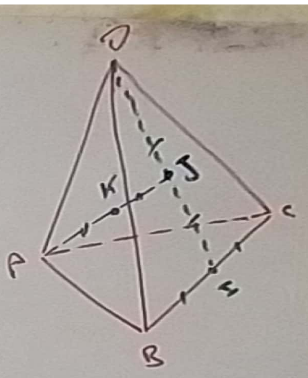
$-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

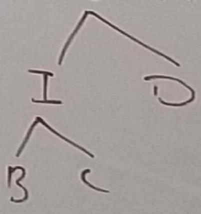
$(A,-\frac{1}{2})(B,-1)(C,-\frac{1}{2})$ M م.ا.ح د

$(A,1)(B,2)(C,1)$ M م.ا.ح د

ج٤



- I منتصف BC اذن
I م.ث.ع ل $(B,1)(C,1)$
- J في منتصف DI اذن
J م.ث.ع ل $(I,2)(D,2)$
- K في منتصف AJ اذن
K م.ث.ع ل $(J,4)(A,4)$



٦٥

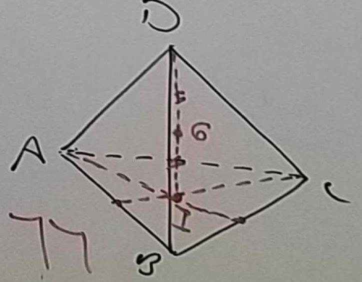
K م.ث.ع ل
$(B,1)(C,1)(D,2)(A,4)$
$\alpha=4 \quad \beta=1 \quad \gamma=1 \quad \delta=2$

$\frac{8}{81}$ G م.ث.ع ل
$(A,1)(B,1)(C,1)(D,3)$

ملاحظة: G م.ث.ع ل
$(A,1)(B,1)(C,1)$
تسمى G مركز ثقل المثلث ABC
(نقطة تلاقي المتوسطات)

لتكن I م.ث.ع ل $(A,1)(B,1)(C,1)$
اذن I مركز ثقل المثلث ABC

إذن G م.ث.ع ل $(I,3)(D,3)$
ومنه G في منتصف ID .

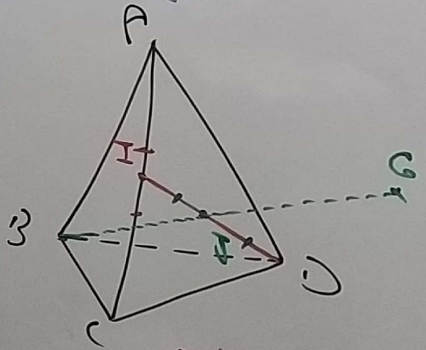


٦٦

$(A,-1)(B,2)(C,-1)(D,-2)$

لتكن I م.ث.ع ل $(A,-1)(C,-1)$
I في منتصف $[AC]$.
اذن
G م.ث.ع ل $(I,-2)(B,2)(D,-2)$

لتكن J م.ث.ع ل $(I,-2)(D,-2)$
اذن J في منتصف ID .
G م.ث.ع ل $(J,-4)(B,2)$
$\overrightarrow{BG}=\frac{-4}{-2}\overrightarrow{BJ}$
$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BJ}$



٦٧

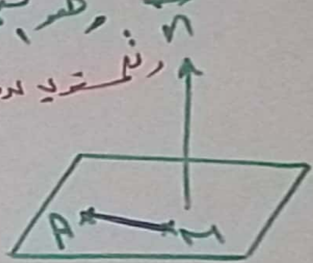
Scanned by CamScanner

معادلة المستوي ..

لإيجاد معادلة المستوي يلزمنا نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ، ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}$: هو العمود على المستوي.

(للمستوي عدد غير منته من النواظم)



$M(x, y, z)$

$\vec{n} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

$\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{AM}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ ⇐

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$

$ax+by+cz\underbrace{-ax_0-by_0-cz_0}_{d}=0$

$ax+by+cz+d=0$

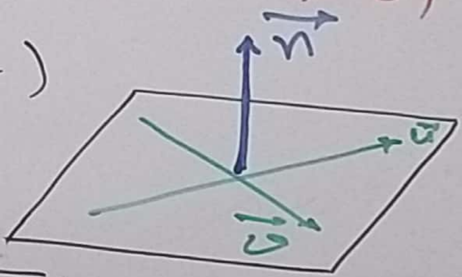
طرائق إيجاد معادلة مستوٍ :

1) المعطيات : نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ، ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

2) المعطيات : شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً ، ونقطة A

مثال : جد معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{u}(1,-1,0)$ ، $\vec{v}(2,1,-3)$ شعاعي توجيه له ويمر بالنقطة $A(2,0,-2)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$



$\vec{n} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

$\boxed{a - b = 0}$ ...(1)

$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

$\boxed{2a + b - 3c = 0}$ ...(2)

نفرض $a = 1 \xrightarrow{(1)} b = 1$ ، $\xrightarrow{(2)} c = 1$

$\vec{n}(1, 1, 1)$

$x + y + z + d = 0$

نعوض A

$2+0-2+d=0$

ومنه $d=0$

$x+y+z=0$

3) المستويات: تحديد نقط.

مثال: لتكن النقط

$A(1,-1,0)$ $B(2,1,-3)$ $C(1,1,-2)$

1) أثبت أن A، B، C تحدد مستوي

(لإثبات أنها ليست على استقامة واحدة)

2) أوجد معادلة المستوي ABC.

(إذا تحددت نقط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوي)

لدينا $\left\{\begin{array}{l}\vec{AB}(1,2,-3)\\ \vec{AC}(0,2,-2)\end{array}\right.$

$\frac{2}{2} \neq \frac{-3}{-2}$

غير مرتبطين خطياً فالنقاط A، B، C

ليست على استقامة واحدة

70

معادلة المستوي

$\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

$a+2b-3c=0 \quad \ldots (1)$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$

$2b-2c=0 \quad \ldots (2)$

نفرض $b=1$

$(2) \rightarrow c=1$

$(1) \rightarrow a=1$

$\vec{n}(1,1,1)$

$x+y+z+d=0$

نعوض A

$1-1+0+d=0$

ومنه $d=0$

$ABC: x+y+z=0$

71

دراسة الوضع النسبي لمستويين :

$P: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$Q: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

نوجد $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ونميز الحالات التالية

مرتبطان خطياً

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

فالمستويان متوازيان

توازي مع انطباق

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{d_1}{d_2}$

توازي دون انطباق

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$

غير مرتبطان خطياً

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

فالمستويان متقاطعان

مع التعامد

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

دون التعامد

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\neq0$

$P: 2x+3y+z-4=0$

$Q: 3x-2y-5=0$

اثبت أن P ، Q متعامدان .

$\vec{n_P}(2,3,1)$

$\vec{n_Q}(3,-2,0)$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=6-6+0=0$

فالمستويان متعامدان ..

بعد النقطة عن مستوي

بعد النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي P

$P: ax+by+cz+d=0$

$$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$A(2,-1,3)$

$P: x+3y-z+4=0$

احسب بعد A عن P .

$$dist(A,P)=\frac{|1(2)+3(-1)-1(3)+4|}{\sqrt{1+9+1}}$$

$$=\frac{|2-3-3+4|}{\sqrt{11}}=\frac{0}{\sqrt{11}}=0$$

إذن A تقع على المستوي P .

معادلة مستقيم

في الهندسة المستوية :

- الشكل العام :

$ax+by+c=0$ $\quad m=\frac{-a}{b}$

- الشكل المختزل :

$y=ax+b$ $\quad m=a$

- معادلة مستقيم مار بنقطة $A(x_0,y_0)$ وميله m معلوم

$y-y_0=m(x-x_0)$

- مستقيم افقي ومعادلة $y=y_0$ $\quad m=0$
- مستقيم شاقولي ومعادلة $x=x_0$ $\quad m=\infty$
- d_1 مستقيم ميله m_1

d_2 " " m_2

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$

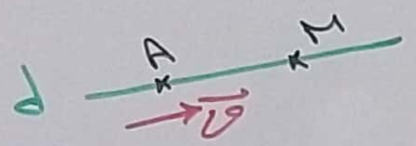
$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2=-1$

74

في الهندسة الفراغية :

لإيجاد المعادلات الوسيطية للمستقيم يلزمنا

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$



$M(x,y,z)$

بما أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطياً

$\overrightarrow{AM}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\vec{u}(a,b,c)$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

$$\frac{x-x_0}{a}=t \Rightarrow x=x_0+at$$

$$\frac{y-y_0}{b}=t \Rightarrow y=y_0+bt$$

$$\frac{z-z_0}{c}=t \Rightarrow z=z_0+ct$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم :

$t\in$
- $\mathbb{R}$ مستقيم .
- $[0,1]$ قطعة مستقيمة .
- $[0,+\infty[$ نصف مستقيم

75

دراسة وضع مستقيم مع مستقيم

$\vec{u_1}(a, b, c)$

$\vec{u_2}(a', b', c')$

وعندنا حالتين

① $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ مرتبطة خطياً.

فالمستقيمان متوازيان ويقعان في مستوٍ واحد

② $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ غير مرتبطة خطياً.

فالمستقيمان إما متقاطعان يقعان في مستوٍ واحد.

أو متخالفان لا يقعان في مستوٍ واحد.

مثال 1: $A(1,2,3)$ $B(-1,0,2)$

$$d:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

78

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (AB) و d

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1} = \vec{AB}(-2,-2,-1) \\ \vec{u_2}(1,-1,0) \end{array}\right\} \frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{-1}$$

غير مرتبطة خطياً

فالمستقيمان متقاطعان أو متخالفان

$x = x_B + a\lambda = -1-2\lambda$

$y = y_B + b\lambda = -2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$z = z_B + c\lambda = 2-\lambda$

بالمطابقة

$1+t = -1-2\lambda$ ①

$2-t = -2\lambda$ ②

$3 = 2-\lambda$ ③

③ $\Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

② $\Rightarrow 2-t = 2$

$\boxed{t = 0}$

79

Scanned by CamScanner

نعوض في ① للتأكد

$$1 + 0 \stackrel{?}{=} -1 - 2(-1)$$

$$1 = 1$$

فالمستقيمان متقاطعان

نعوض $t = 0$ في حزمة (t)

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} I(1,2,3)$$

نقطة التقاطع

مثال ٢:

$$d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d': \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 5-\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ادرس الوضع النسبي بين d و d'.

٨٠

$$\left.\begin{aligned} \vec{v_1}&(1,-1,1) \\ \vec{v_2}&(1,-1,-1) \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

غير متوازيين

فالمستقيمان إما متقاطعان أو متخالفان

بالمطابقة:

$$2 + t = 3 + \lambda \quad ①$$

$$3 - t = 5 - \lambda \quad ②$$

$$1 + t = 2 - \lambda \quad ③$$

من ③ $t = 2 - \lambda - 1$

$$\boxed{t = 1 - \lambda} \quad \ldots ④$$

نعوض ④ في ①

$$\cancel{3} + 1 - \lambda - \lambda = \cancel{3} + \lambda$$

$$0 = 2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

نعوض في ④ $\boxed{t = 1}$

نعوض في ①

$$3 - 1 \stackrel{?}{=} 5 - 0$$

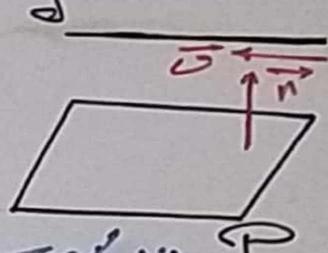
$$2 \neq 5$$

فالمستقيمان متخالفان ...

٨١

دراسة وضع مستقيم مع مستوٍ :

صيغة السؤال : اثبت ان المستقيم d يوازي المستوي P

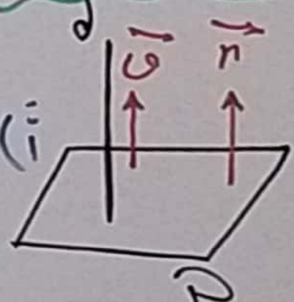


أ) $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$

ب) اذا كان شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع شعاعي توجيه المستوي غير مرتبطين خطياً.

«الارتباط الخطي لثلاث اشعة»

صيغة السؤال : اثبت ان المستقيم عمودي على المستوي



أ) $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً

ب) اذا كان $\vec{u}$ عمودياً مع شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي.

صيغة السؤال : ادرس الوضع النسبي لـ d و P.

خطوات الحل :

١) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم ان لم تكن معطاة

٢) نكتب معادلة المستوي ان لم تكن معطاة.

٣) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على المعادلة من الشكل.

$at=b$

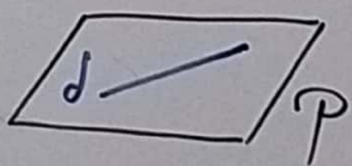
نميز حالات :

١) $a\in\mathbb{R}^*$ $\quad b\in\mathbb{R}$

فالمستقيم يقطع المستوي بنقطة واحدة ولإيجاد هذه النقطة نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية..

٢) $a=b=0$

المستقيم محتوى في المستوي.



3) $a=0$ $b\neq 0$

فالمستقيم لا يقطع المستوي بأي نقطة.

فهو يوازيه.

مثال:

$A(1,-2,1)$

$B(3,-2,4)$

$P: x+y+z=0$

ادرس تقاطع P مع المستقيم (AB)

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}(2,0,3)$

$x=1+2t$

$y=-2 \quad t\in\mathbb{R}$

$z=1+3t$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

$1+2t-2+1+3t=0$

$5t=0 \Rightarrow t=0$

فالمستقيم يقطع المستوي بنقطة واحدة

نعوض $t=0$ في المعادلات الوسيطية

$x=1$

$y=-2$ } $A(1,-2,1)$ نقطة التقاطع

$z=1$

$A(2,1,-3)$

$B(1,-1,0)$

$P: x+y+z=0$

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}(-1,-2,3)$

$x=x_B+at=1-t$

$y=y_B+bt=-1-2t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_B+ct=3t$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

$1-t-1-2t+3t=0$

$0t=0$

فالمستقيم محتوى في المستوي..

$x=1+t$

$y=2+t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=t$

$x+y-2z+1=0$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي..

$1+t+2+t-2t+1=0$

$0t=-4$

المعادلة مستحيلة أي المستقيم لا يشترك مع المستوي بأي نقطة فهو يوازيه.

Scanned by CamScanner

حساب البعد لنقطة من مستقيم :

اولاً : في الهندسة المستوية .

$A(x, y)$

صيغة السؤال : احسب البعد للنقطة $A(x_0, y_0)$ عن المستقيم

$ax + by + c = 0$

$$dist(A,d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ثانياً : في الهندسة الفراغية

$A(x, y, z)$

صيغة السؤال : احسب البعد للنقطة G عن المستقيم (AB)

خطوات الحل :

1) نكتب المعادلات الوسيطية لمستقيم (AB)

2) نبين ان النقطة G لا تقع على المستقيم (AB)
اي انها لا تحقق المعادلات الوسيطية

3) نختار نقطة K من المستقيم (AB) احداثياتها هي المعادلات الوسيطية .

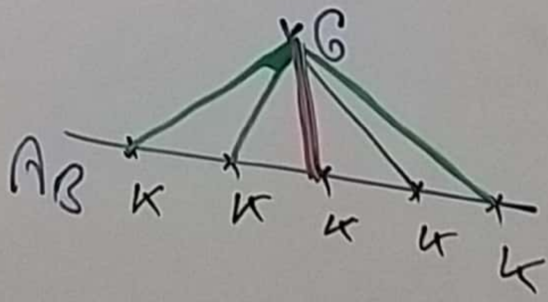
4) نحسب المسافة بين G و K .
ثم نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية

$$GK = \sqrt{a(t-b)^2 + c}$$

5) نختار اقصر مسافة وذلك من اجل $a(t-b)^2 = 0$

فيكون $GK = \sqrt{c}$

هو البعد G عن المستقيم (AB) .



(19) ٤٢

A(2,3,0) B(2,3,6)

M(4,-1,2)

احسب البعد M عن (AB)

1) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB)

$\vec{u} = \vec{AB}(0,0,6)$

$x = x_A + at = 2$

$y = y_A + bt = 3 \quad t \in \mathbb{R}$

$z = z_A + ct = 6t$

نعوض M في المعادلات الوسيطية

$4 = 2$

$M \notin (AB)$

نختار نقطة K من المستقيم (AB) بحيث $K(2,3,6t)$

$MK = \sqrt{4+16+(2-6t)^2}$

$= \sqrt{(2-6t)^2+20}$

٨٩

نختار أقرب مسافة وهي

ومنه $2-6t=0$

$2=6t \Rightarrow t=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$MK = \sqrt{20}$

وهو البعد M عن المستقيم (AB)

تمرين وظيفة

G(2,1,1)

I(1,0,0)

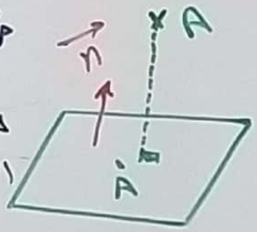
H(0,1,1)

احسب البعد G عن المستقيم (IH)

٩٠

ايجاد المسقط القائم للنقطة على مستوي ...

خطوات الحل



1) نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AA') المار بالنقطة A والذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي.

2) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

3) نحصل على قيمة الوسيط نعوض في المعادلات الوسيطية فنحصل على احداثيات A'.

$\frac{١٧}{٧٠} + \frac{٨}{٦٧}$

٩١

$G(2,1,1)$ $I(1,0,0)$

$H(0,1,1)$

احسب بعد G عن (IH)

$\vec{v} = \overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

$x = x_I + at = 1 - t$

$y = y_I + bt = t \qquad t \in \mathbb{R}$

$z = z_I + ct = t$

نعوض G في المستقيم = المسبقة

$2 = 1 - t \Rightarrow \boxed{t = -1}$

$\boxed{1 = t}$

$G \notin (IH)$

نأخذ النقطة $K(1-t, t, t)$

$GK = \sqrt{(2-1+t)^2 + (1-t)^2 + (1-t)^2}$

$= \sqrt{(1+t)^2 + 2(1-t)^2}$

$GK = \sqrt{1 + 2t + t^2 + 2 - 4t + 2t^2}$

$= \sqrt{3t^2 - 2t + 3}$

$= \sqrt{3(t^2 - \frac{2}{3}t) + 3}$

① $= \sqrt{3(\underbrace{t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}}) - \frac{1}{9}) + 3}$

$= \sqrt{3(t - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + 3}$

$= \sqrt{3(t - \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3}}$

نك: أقصر مسافة عندما يكون المقدار

$3(t - \frac{1}{3})^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

$GK = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

فاصلة G عن (IH)

٩٢ ٩٣

$A(1,2,0)\ B(0,0,1)$ ⑧/٦٤

$C(1,5,5)\ D(-11,9,-4)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)\\ \overrightarrow{AC}(0,3,5)\end{array}\right\}$ غير متوازيين فقط.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a-2b+c=0 \quad \ldots (1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow 3b+5c=0 \quad \ldots (2)$

نفرض $c=3 \xrightarrow{(2)} 3b=-15$

$b=-5$

$\xrightarrow{(1)} a=13$

$\vec{n}(13,-5,3)$

$13x-5y+3z+d=0$

نعوض B

$0-0+3+d=0$

$d=-3$

٩٤

$ABC: 13x-5y+3z-3=0$

لنوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم DD'.

المار بالنقطة D والذي يقبل $\vec{n}(13,-5,3)$ شعاع توجيه له

$x=x_D+at=-11+13t$

$y=y_D+bt=9-5t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_D+ct=-4+3t$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

$13(-11+13t)-5(9-5t)+3(-4+3t)-3=0$

$-143+169t-45+25t-12+9t-3=0$

$t=1$

$\left.\begin{array}{l}x=-11+13=2\\ y=9-5=4\\ z=-4+3=-1\end{array}\right\}\ D'(2,4,-1)$

٩٥

$A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$

$C(5,5,0)$ $D(-3,-5,6)$ $\frac{4}{36}$

$E(3,1,2)$

تمرين ١: أ) الارتباط الخطي للمتجهات

ب) احداثيات مركز أبعاد متناسبة للنقاط السابقة.

ج) نوجد معادلة المستوي ABC ثم نبين من D, E.

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$

$\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$

$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$(-5,-5,5) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,5,-1)$

$= (-\alpha,-2\alpha,0) + (3\beta,5\beta,-\beta)$

$= (-\alpha+3\beta, -2\alpha+5\beta, -\beta)$

بالمطابقة.

$-\alpha + 3\beta = -5$ ①

$-2\alpha + 5\beta = -5$ ②

$-\beta = 5$ ③

من ③ $\boxed{\beta = -5}$

نعوض في ①

$-\alpha - 15 = -5 \Rightarrow \boxed{\alpha = -10}$

نعوض α ، β في ② للتأكد

$20 - 25 \stackrel{?}{=} -5$

$-5 = -5$

نلاحظ تحقق جميع المعادلات.

فالنقاط A ، B ، C ، D تقع في مستو واحد.

$\overrightarrow{AE}(1,1,1)$

$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$(1,1,1) = (-\alpha+3\beta, -2\alpha+5\beta, -\beta)$

بالمطابقة.

$-\alpha + 3\beta = 1$

$-2\alpha + 5\beta = 1$

$-\beta = 1$

من ③ $\boxed{\beta = -1}$

نعوض في ②

$-\alpha - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -4}$

نعوض في ① للتأكد

$8 - 5 \neq 1$

$E \notin ABC$.

$d: A(3,-1,1)$ $\overrightarrow{u}(1,0,-2)$ $\frac{5}{37}$

$d': B(3,3,-1)$ $\overrightarrow{v}(2,1,-3)$

اثبت ان d, d' متقاطعان

وعين نقطة التقاطع.

بالمطابقة.

$-\alpha+3\beta=1$

$-2\alpha+5\beta=1$

$-\beta=1$

من (2) $\boxed{\beta=-1}$

نعوض في (1) $-\alpha-3=1 \Rightarrow \boxed{\alpha=-4}$

نعوض في (3) للتأكد

$8-5\neq 1$

$ABC \notin E$.

$d: A(3,-1,1)\ \vec{u}(1,0,-2)$ $\frac{5}{37}$

$d': B(3,-3,-1)\ \vec{v}(2,1,-3)$

اثبت ان d, d' متقاطعان

وعين نقطة التقاطع.

$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(1,0,-2)\\ \vec{v}(2,1,-3)\end{array}\right\} \frac{1}{2}\neq\frac{0}{1}$

غير مرتبطين خطياً

فالمستقيمان إما متقاطعان أو متخالفان

$$d\begin{cases} x=x_A+at=3+t \\ y=y_A+bt=-1 & t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct=1-2t \end{cases}$$

$$d'\begin{cases} x=x_B+a\lambda=3+2\lambda \\ y=y_B+b\lambda=-3+\lambda & \lambda\in\mathbb{R} \\ z=z_B+c\lambda=-1-3\lambda \end{cases}$$

بالمطابقة:

$\cancel{3}+t=\cancel{3}+2\lambda$ (1)

$-1=-3+\lambda$ (2)

$1-2t=-1-3\lambda$ (3)

من (2) $\boxed{\lambda=2}$

من (1) $t=2\lambda \longrightarrow \boxed{t=4}$

نعوض في (3) للتأكد

$1-8=-1-6$

$-7=-7$

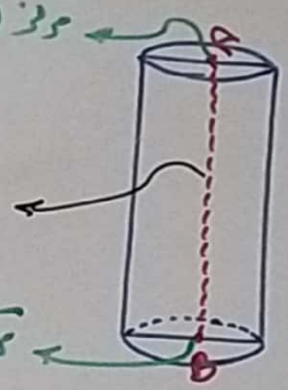
فالمستقيمان متقاطعان

ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض

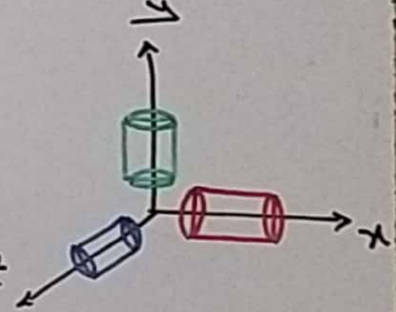
$t=4$ في معادلته.

$$\left.\begin{array}{l} x=7\\ y=-1\\ z=-7\end{array}\right\} I(7,-1,-7)$$

معادلة الاسطوانة ...



الاسطوانة: ناتج عن دوران مستطيل حول احد اضلاعه .



لدينا ثلاث محاور دوران

اما ox أو oy أو oz

- اولاً: محور الدوران oz:

$x^2+y^2=R^2$ $\quad z_B \leq z \leq z_A$

$h=z_A-z_B$

- ثانياً: محور الدوران oy:

$x^2+z^2=R^2$ $\quad y_B \leq y \leq y_A$

$h=y_A-y_B$

1.1

- ثالثاً: محور الدوران ox

$y^2+z^2=R^2$ $\quad x_B \leq x \leq x_A$

$h=x_A-x_B$

مثال: جد معادلة الاسطوانة التي محورها $\vec{ox}$ ومركز قاعدتها $A(3,0,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$

$y^2+z^2=R^2$ $\quad x_B \leq x \leq x_A$

$y^2+z^2=5$ $\quad 0 \leq x \leq 3$

بيّن أيّ من النقاط الآتية تنتمي الى الاسطوانة

$E(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ $\quad D(5,1,2)$

$H(2,2,3)$

$E(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$

- الشرط الاول محقق $\quad 2+3=5$

,, الثاني ,, $\quad 0 \leq 1 \leq 3$

اذن $E \in$ للاسطوانة

1.2

$D(5,1,2)$

$1+4=5$ الشرط الأول محقق.

$0\leqslant 5\leqslant 3$ غير محقق.

اذن $D \notin$ للاسطوانة.

$H(2,2,3)$

$4+9\neq 5$

اذن $H \notin$ للاسطوانة.

مثال: صف مجموعة النقاط الاتية

$x^2+y^2=3 \qquad 2\leqslant z\leqslant 7$

معادلة اسطوانة محور دورانها $\overrightarrow{oz}$ ، نصف قطر قاعدتها $R=\sqrt{3}$

ومركز قاعدتها العلوية $(0,0,7)$

" " السفلية $(0,0,2)$

مثال: جد معادلة الاسطوانة التي محورها $\overrightarrow{oy}$ ، ومركز قاعدتها العلوية $A(0,7,0)$ ، ارتفاعها 3 ، نصف قطرها $R=\sqrt{2}$

1.3

$x^2+z^2=R^2 \qquad y_B\leqslant y\leqslant y_A$

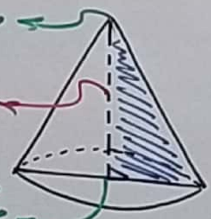
$h=y_A-y_B$

$3=7-y_B$

$y_B=7-3=4$

$x^2+z^2=2 \qquad 4\leqslant y\leqslant 7$

معادلات المخروط:



المخروط: ناتج عن دوران مثلث قائم حول احد اضلاع القائمة.

اولاً: محور الدوران ox

$y^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}x^2 \qquad x_B\leqslant x\leqslant x_A$

$h=x_A-x_B$

1.4

ثانياً: محور الدوران oz:

$x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2 \qquad z_B\leqslant z\leqslant z_A$

$h=z_A-z_B$

ثالثاً: محور الدوران oy:

$x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2 \qquad y_B\leqslant y\leqslant y_A$

$h=y_A-y_B$

جد معادلة المخروط الذي محوره $\overrightarrow{oy}$ ورأسه نقطة الأصل ، مركز قاعدته $A(0,3,0)$ ، نصف قطر قاعدته 5

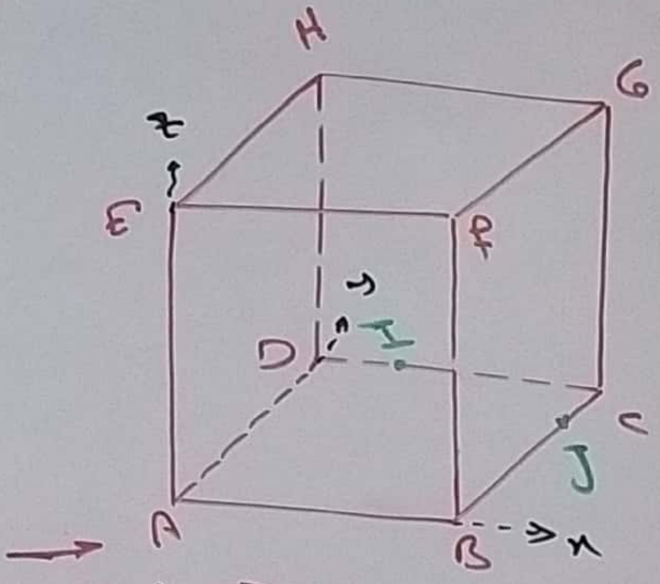
$x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2 \qquad y_B\leqslant y\leqslant y_A$

$h=y_A-y_B=3-0=3$

$x^2+z^2=\frac{25}{9}y^2 \qquad 0\leqslant y\leqslant 3$

1.5

$\frac{7}{25}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

اثبت $EGJ \parallel HI$

تمرين 1: المستقيم $AB \parallel$ المستوي P

① $\overrightarrow{U}_{AB} \cdot \overrightarrow{n}_{P} = 0$

② الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً.

حل: نختار معلماً متعامداً $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$

$F(1,0,1)$ $G(1,1,1)$

$I(\frac{1}{4},1,0)$ $J(1,\frac{3}{4},0)$

1.7

$d: A(3,-1,1)$ $\overrightarrow{U}(1,0,-2)$

$d': B(3,-3,-1)$ $\overrightarrow{V}(2,1,-3)$

$\frac{5}{25}$

تمرين 1: نثبت أن $\overrightarrow{U}$، $\overrightarrow{V}$ غير مرتبطين خطياً فالمستقيمان متقاطعان أو متخالفان

ثم نكتب المعادلات الوسيطية لـ d، d'.

ثم نجري عملية المطابقة.

الحل:

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{U}(1,0,-2) \\ \overrightarrow{V}(2,1,-3)\end{matrix}\right\} \quad \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$

غير مرتبطين خطياً فالمستقيمان متقاطعان أو متخالفان

نكتب المعادلات الوسيطية لـ d، d'.

$d: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1 \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad d': \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

بالمطابقة:

$\cancel{3}+t = \cancel{3}+2\lambda$ ①

$-1 = -3+\lambda$ ②

$1-2t = -1-3\lambda$ ③

من ② $\boxed{\lambda = 2}$ ① $\to \boxed{t = 4}$

نعوض في ③ لنتأكد

$1-8 = -1-6$

$-7 = -7$ المستقيمان متقاطعان

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=4$ في d

$\left.\begin{matrix} x = 7 \\ y = -1 \\ z = -7 \end{matrix}\right\} I(7,-1,-7)$

1.6

٤- P هي المسقط القائم لـ M على [BADC اذن

$P\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$

H هي المسقط القائم لـ P على المستقيم BA اذن

$H\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$

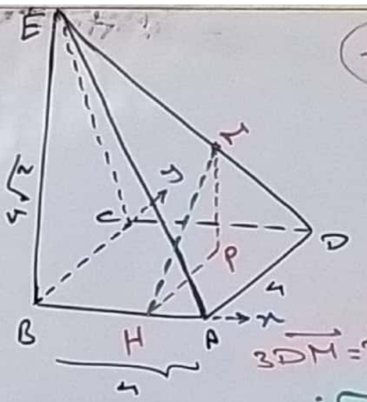
$$MH = \sqrt{0 + \frac{64}{9} + \frac{32}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{96}{9}}$$

تمارين الكتاب صـ القادمة

$\frac{١٢}{٢١} + \frac{١٢}{٢١} + \frac{١٠}{٢١} + \frac{٩}{٢٠}$

١١٠



$\frac{2}{19}$

$3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

الحل:

نختار معلماً متعامداً

$\left(B; \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$

$B(0,0,0) \quad A(4,0,0)$

$E(0,0,4\sqrt{2}) \quad D(4,4,0)$

$C(0,4,0)$ بفرض $M(x,y,z)$

$3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

$3(x-4, y-4, z) = (-4, -4, 4\sqrt{2})$

$(3x-12, 3y-12, 3z) = (-4, -4, 4\sqrt{2})$

$3x - 12 = -4 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

$3y - 12 = -4 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$

$3z = 4\sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$M\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

١٠٩

$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right)$

$\overrightarrow{EG}(1, 1, 0)$

$\overrightarrow{EJ}\left(1, \frac{3}{4}, -1\right)$ يجب دراسة ارتباط خطي

$\overrightarrow{HI} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$

$\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right) = \alpha(1, 1, 0) + \beta\left(1, \frac{3}{4}, -1\right)$

$= \left(\alpha + \beta, \alpha + \frac{3}{4}\beta, -\beta\right)$

بالمطابقة:

$\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ --- ①

$\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0$ --- ②

$-\beta = -1$ --- ③

③ $\boxed{\beta = 1}$

① $\boxed{\alpha = \frac{-3}{4}}$

نعوض في ②

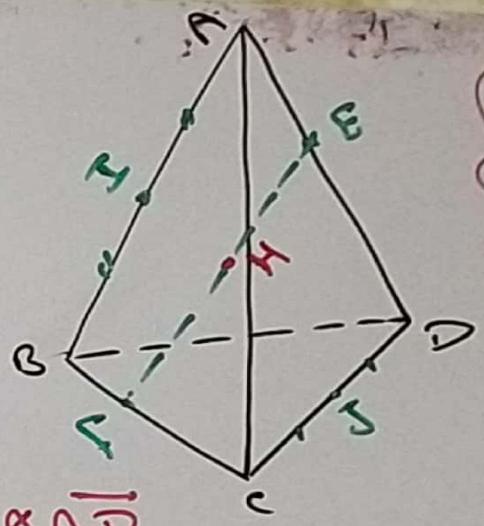
$\frac{-3}{4} + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 0$

$0 = 0$

فالمتجهات مرتبطة خطياً اذن

$EGJ \parallel HI$

١٠٨



$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$

H منتصف $[EF]$

اثبت ان H ، I ، J على استقامة واحدة

طرق الحل:

١) باستعمال [illegible] جعل النقاط مرتبطة خطيا.

٢) اجعلهن مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الاخريتين

الحل:

$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$

E م.ا.م ل $(D,\alpha)(A,1-\alpha)$

$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$

F م.ا.م ل $(C,\alpha)(B,1-\alpha)$

111

$\frac{٩}{٤٠}+\frac{١}{٩٤}$

$\frac{٢١}{٢}$

H في منتصف $[EF]$ أي أن

H م.ا.م ل E ، F

E: A ، D — F: C ، B

H م.ا.م ل $(A,1-\alpha)(D,\alpha)(C,\alpha)(B,1-\alpha)$

I لدينا I في منتصف $[AB]$

J لدينا J في منتصف $[DC]$

H م.ا.م ل I ، J

فالنقاط H ، I ، J على استقامة واحدة

ABC ليست على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$ $\quad$ $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$

$\frac{١٠}{٤١}$

① A ، B ، C ، D ، E [illegible]

② I ← CD ، J ← BE

A ، I ، J على استقامة واحدة.

ABC ليست على استقامة واحدة

فهي تحدد مستوي.

لدينا $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$

112

الشعاعان مرتبطان خطياً وبشرطه
بالنقطة E أو النقاط A، E، C
على استقامة واحدة.

المستقيم (AE) يشترك مع المستوي
ABC بالنقطتين A، C.

أو DE، ABC.

وبنفس الأسلوب يكون D تقع
في ABC.

إذا اشترك مستقيم مع مستوٍ
بنقطتين عندئذٍ يقع
كامل المستقيم في هذا المستوي

لنثبت $\vec{AE} = 3\vec{CE}$

$$\vec{AE} = 3\vec{CA} + 3\vec{AE}$$

$$3\vec{CA} + 2\vec{AE} = \vec{0}$$

$$3\vec{CA} - 2\vec{EA} = \vec{0}$$

A مركز أبعاد $(E,-2)(C,3)$

$$3\vec{AD} = 2\vec{AB}$$

$$3\vec{AD} - 2\vec{AB} = \vec{0}$$

A مركز أبعاد $(D,3)(B,-2)$

ومنه A مركز أبعاد $(E,-2)(C,3)(D,3)(B,-2)$

I في منتصف CD

J

لدينا J في منتصف BE.

A مركز أبعاد $(J,-4)(I,6)$

أذن A، J، I على استقامة واحدة

١٢ / ٤١

$A(3,2,1)$ $B(1,2,0)$

$C(3,1,-2)$

① A, B, C تحدد مستوي

② اوجد معادلة المستوي ABC

③ ميزة m التي تجعل $M(m,1,3)$ تنتمي لـ ABC

④ ما العلاقة بين x, y لتقع $A, B, C, D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد

ج①

$\vec{AB}(-2,0,-1)$

$\vec{AC}(0,-1,-3)$

$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$ غير مرتبطين خطياً

فالنقاط A, B, C تحدد مستوي.

ج② بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -2a-c=0 \quad ...①$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow -b-3c=0 \quad ...②$

بفرض $c=2 \xrightarrow{①} a=-1$, $\xrightarrow{②} b=-6$

$\vec{n}(-1,-6,2)$

$-x-6y+2z+d=0$

نعوض B.

$-1-12+d=0 \Rightarrow d=13$

$\boxed{ABC: -x-6y+2z+13=0}$

③ $M \in ABC \Leftrightarrow$

$-m-6+6+13=0 \Rightarrow m=13$

④ $D \in ABC \Leftrightarrow$

$-x-6y+6+13=0$

$-x-6y+19=0$

ملاحظة: يمكن حل الطلبين الثالث والرابع من خلال الارتباط الخطي للأشعة الثلاث.

حل الطلب ④

$\vec{AB}(-2,0,-1)$

$\vec{AC}(0,-1,-3)$

$\vec{AD}(x-3,y-2,2)$

١٤

$A(7,1,0)\quad B(5,0,0)$

$C(2,0,1)$

اكتب معادلة المستوي ABC.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-2,-1,0)\\ \overrightarrow{AC}(-5,-1,1)\end{array}\right\}$ غير مرتبطين خطياً

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -2a-b=0 \quad (1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -5a-b+c=0 \quad (2)$

بفرض $b=2 \xrightarrow{(1)} a=-1$

$\xrightarrow{(2)} c=-3$

$\vec{n}(-1,2,-3)$

$-x+2y-3z+d=0$

نعوض B.

$-5+d=0 \Rightarrow d=5$

$-x+2y-3z+5=0$

$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$(x-3,y-2,z)=\alpha(-2,0,-1)+\beta(0,-1,-3)$

$=(-2\alpha,-\beta,-\alpha-3\beta)$

بالمطابقة.

$x-3=-2\alpha \quad (1)$

$y-2=-\beta \quad (2)$

$z=-\alpha-3\beta \quad (3)$

من (1): $\boxed{\alpha=\dfrac{x-3}{-2}} \quad (4)$

من (2): $\boxed{\beta=2-y} \quad (5)$

نعوض (4)، (5) في (3)

$z=\dfrac{x-3}{2}-6+3y$

$4=x-3-12+6y$

$x+6y-19=0$

$\frac{16}{42}$

$A(2,-1,3)\quad B(0,5,-1)$

C تقع على محور الفواصل اوجد

$C(x,0,0)$

$AC = BC \Rightarrow AC^2 = BC^2$

$(x-2)^2+1+9 = x^2+25+1$

$\cancel{x^2}-4x+4+10 = \cancel{x^2}+26$

$-4x+14 = 26$

$-4x = 12 \Rightarrow x = -3$

$C(-3,0,0)$

$\frac{17}{42}$

$A(3,1,-3)\quad B(-1,5,-3)$

$C(-1,1,\alpha)$

ABC متساوي الساقين عين α

لكي يكون متساوي الاضلاع.

$AB = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

$BC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

ومنه ABC متساوي الساقين

رأسه C.

119

لكي يكون مثلثا متساوي الاضلاع

يجب ان يكون $AB = AC = BC$

$4\sqrt{2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

$32 = 16+(\alpha+3)^2$

$(\alpha+3)^2 = 16$

اما $\alpha+3 = 4$

$\alpha = 1$

او $\alpha+3 = -4$

$\alpha = -7$

18

$A(2,1,0)\quad B(-1,4,2)$

① اوجد نقط متساوية البعد عن A و B.

② هل $C(1,1,1)$ متساوية

③ اوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ملاحظة: تكون النقط متساوية البعد عن A ، B اذا كانت تقع على المستوي المحوري اي في منتصف $[AB]$.

120

لتكن I منتصف $[AB]$

$I(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1)$

ج) C متساوية البعد عن A ، B

اذن $AC = BC$

$AC^2 = BC^2$

$1+0+\lambda^2 = 4+9+(\lambda-2)^2$

$1+\cancel{\lambda^2} = 13+\cancel{\lambda^2}-4\lambda+4$

$4\lambda = 16 \Rightarrow \lambda = 4$

$C(1,1,4)$

د) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري ، اذن

$AM = BM \Rightarrow$

$AM^2 = BM^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2 =$

$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2$

بفك الأقواس

$\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2} =$

$\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-8y+16$

$+\cancel{z^2}-4z+\cancel{4}$

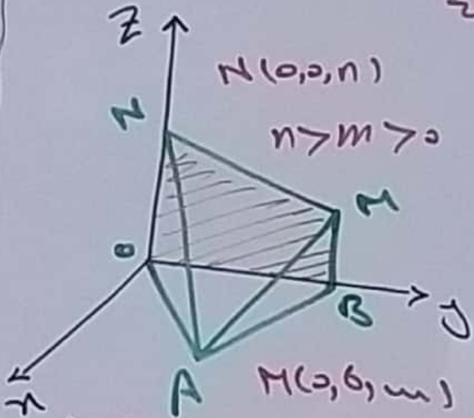
١٢١

$-4x-2y+1 = 2x-8y-4z+17$

$6x-6y-4z+16=0 \quad \div 2$

$3x-3y-2z+8=0$

٤ع



$N(0,0,n)$

$n>m>0$

$M(0,6,m)$

$A(\sqrt{3},3,0) \quad B(0,6,0)$

MAN قائم في A

$5\sqrt{3} =$ حجم $AOBMN$

$\overrightarrow{AM}(-\sqrt{3},3,m)$

$\overrightarrow{AN}(-\sqrt{3},-3,n)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ لأن AMN قائم في A

$3-9+m.n=0$

$\boxed{m.n=6}$ -- ①

$V = \frac{1}{3} S \cdot h$

$S_{OBMN} = \frac{\text{القاعدة الكبرى} + \text{الصغرى}}{2} \times \text{الارتفاع}$

$= \frac{BM+ON}{2} \times OB$

١٢٢

$BM = \sqrt{0+0+m^2} = m$

$ON = \sqrt{0+0+n^2} = n$

$OB = \sqrt{0+36+0} = 6$

$S = \frac{m+n}{2} \times 6$

$= 3(m+n)$

ارتفاع الهرم $= h = x_A = \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} S \cdot h$

$5\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}(m+n) \times \cancel{\sqrt{3}}$

$\boxed{5 = m+n}$ ②

من ١ و ٢

إما $m=3 \quad n=2$ مرفوض

أو $m=2 \quad n=3$ مقبول.

١٢٣

٢١
٤٢

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

G م.أ.م ←

$(A,1)(B,3)(C,1)(D,2)$

برهن G تقع ع $[EF]$.

لدينا $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

E م.أ.م ← $(C,1)(B,3)$

لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

F م.أ.م ← $(D,2)(A,1)$

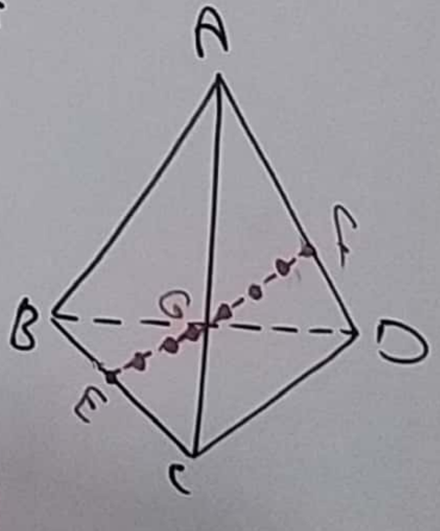
لدينا G م.أ.م ←

$\underbrace{(A,1)\underbrace{(B,3)(C,1)}_{(E,4)}(D,2)}_{(F,3)}$

G م.أ.م ← $(E,4)(F,3)$ إذن ~

G ، E ، F على استقامة واحدة.

$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$



(٢)

$\vec{IA} = 2\vec{IB}$

$\vec{JC} = 2\vec{JD}$

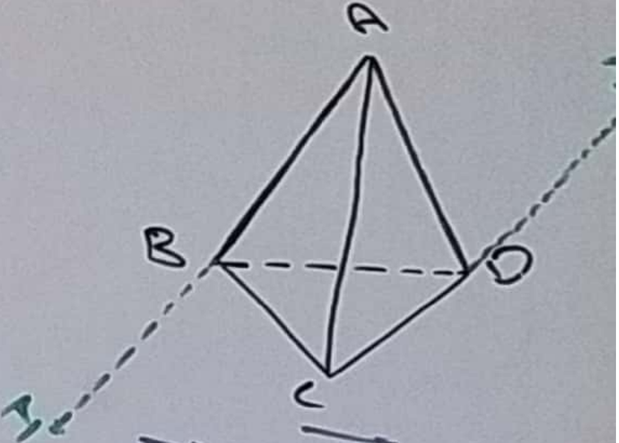
① اثبت

② $\vec{MA} - 2\vec{MB} = -\vec{MI}$

$\vec{MC} - 2\vec{MD} = -\vec{MJ}$

③ جد مجموعة النقاط

$\|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\|$



لدينا $\vec{IA} = 2\vec{IB}$

النقاط مرتبطة خطياً وتشترك

بالنقطة I .

فالنقاط I ، B ، A على استقامة

واحدة .

المستقيم (AI) يشترك مع

المستوي ABC بالنقطتين

A ، B .

إذن $(AI) \subset ABC$

بنفس الأسلوب نجد أن

$(CJ) \subset ACD$

ن المستقيمان (AI) و (CJ)

متخالفان إذن لا يمكن أن تتقاطع

مع I و J .

②

$\ell_1 = \vec{MA} - 2\vec{MB}$

$= \vec{MI} + \vec{IA} - 2\vec{MI} - 2\vec{IB}$

$= -\vec{MI} + \cancel{2\vec{IB}} - \cancel{2\vec{IB}}$

$= -\vec{MI} = \ell_2$

وبنفس الأسلوب

$\vec{MC} - 2\vec{MD} = -\vec{MJ}$

③

إذا كانت G م.أ.ح للجملة

$(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

وكانت M نقطة ما من الفراغ .

$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

بفرض G م.أ.ح للجملة $(B,1)(C,1)(D,1)$

$\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MG}$ ... ①

$-\vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = -3\vec{MG}$

$3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 3\vec{MA} - 3\vec{MG}$

$= 3(\vec{MA} - \vec{MG})$

$= 3(\vec{MA} + \vec{GM})$

$= 3\vec{GA}$ ... ②

نفرض ① – ② في نفس المسألة.

$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{GA}\| \quad \div 3$

$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$

تمثل معادلة كرة مركزها G

$r = \|\overrightarrow{GA}\|$

ملاحظات:

1) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

معادلة مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

2) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

معادلة كرة مركزها A ونصف قطرها $r = \|\overrightarrow{AB}\|$

3) $\|\overrightarrow{MA}\| = a\|\overrightarrow{AB}\|$

$a \neq 1 \; , \; a \neq 0$

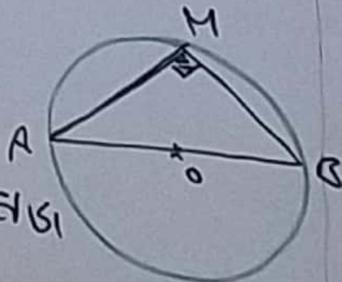
معادلة كرة

4) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

معادلة كرة قطرها AB.

5) $MA = MB$

معادلة مستوي محوري للقطعة $[AB]$



حالة 4

١٢٧

$A(2,-1,2) \quad B(-2,1,-2)$

$f(M) = MA^2 + MB^2$

① $f(M)$ بدلالة x, y, z

② $f(M) = 18$

③ $f(M) = 30$

④ $f(M) = K$

$M(x,y,z)$

$MA^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 9$

$MB^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 9$

بالجمع

$f(M) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18$

2) $f(M) = 18$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18 = 18$

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$

نقطة ($R = 0$ لأن)

3) $f(M) = 30$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 12$

$x^2 + y^2 + z^2 = 6$

معادلة كرة مركزها $(0,0,0)$

$R = \sqrt{6}$

4) $f(M) = K$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18 = K$

١٢٨

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{K-18}{2}$

$K = 18$ تمثل نقطة

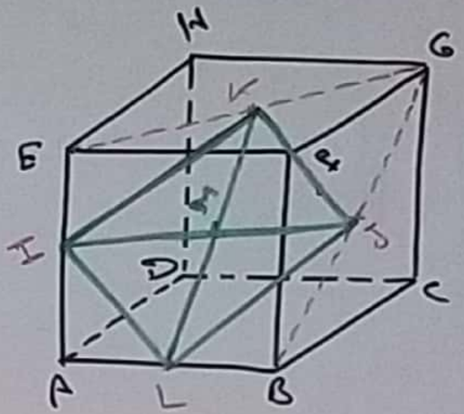
$K > 18$ كرة.

$K < 18$ مجموعة خالية.

١٢٩

Scanned by CamScanner

س٥)



M م.ا.م للجملة (A,1)(B,1)(G,1)(E,1)

أ) M ∈ IJ ب) M ∈ KL

ج) I، J، K، L تنتمي لمستوٍ واحد

د) عين طبيعة الرباعي ILJK

أ) لدينا M م.ا.م للجملة

(A,1)(B,1)(G,1)(E,1)

I لأنها في منتصف AE J لأنها في منتصف BG.

M م.ا.م للجملة (I,2)(J,2)

M، I، J على استقامة واحدة لأن M في منتصف [IJ].

ب) M م.ا.م للجملة

$\underbrace{(A,1)(B,1)}_{L}\underbrace{(G,1)(E,1)}_{K}$

M م.ا.م للجملة (L,2)(K,2)

M، K، L على استقامة واحدة لأن M في منتصف [LK]

د) المستقيمان (KL) و (IJ) يتقاطعان في النقطة M

إذن I، J، K، L في مستوٍ واحد.

الرباعي ILJK متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان

الجداء السلمي الوحدة الثانية

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

نتائج:

1) يسمى سلمياً لأن ناتجه عدد.

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

$\frac{1}{0}$

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-3)(5)$

$= 1 - 15 = -14$

$\vec{u}(2,-1) \quad \vec{v}\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1(3)$

$= -1 - 3$

$= -4$

$\frac{2}{0}$ أوجد معادلة المستقيم d' المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d

$d: 2x + 5y - 5 = 0 \quad A(5,3)$

$d \perp d' \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$

ميل $m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{5}$

$\frac{-2}{5} \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{\frac{-2}{5}} = \frac{5}{2}$

ومنه معادلة المستقيم d' هي

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 3 = \frac{5}{2}(x - 5)$

$\frac{3}{50}$

$2\,\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$\ell_2 = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$= (\vec{AB}+\vec{BC})(\vec{AB}-\vec{BC}) +$

$(\vec{CD}+\vec{DA})(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}) + \vec{CA}(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}) - \vec{AC}(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}-\vec{CD}+\vec{DA})$

$\|\vec{u}\| = 5 \quad \|\vec{v}\| = 3 \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -4$ ص/٥٢

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v}$ درجة كل تمرين ٤ = درجات

$= 25 - 4 = 21$

$\vec{v}\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^2$

$= -4 - 9 = -13$

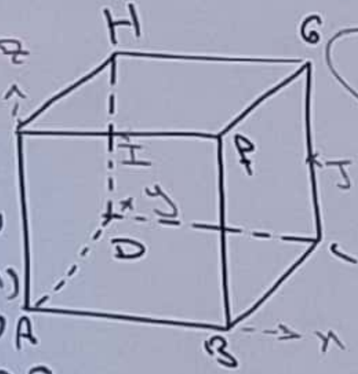
$2\vec{u}\,(\vec{v} - 3\vec{u}) = 2\,\vec{u}\vec{v} - 6\vec{u}^2$

$= 2(-4) - 6(25)$

$= -8 - 150 = -158$

نختار معلماً متجانساً

$(A; \frac{1}{a}\vec{AB}, \frac{1}{a}\vec{AD}, \frac{1}{a}\vec{AE})$



$\frac{4}{53}$

$A(0,0,0)\ B(a,0,0)$

$C(a,a,0)\quad D(0,a,0)$

$E(0,0,a)\quad H(0,a,a)$

$F(a,0,0)\quad G(a,a,a)$

$I(\frac{a}{2},0,a)\quad J(a,a,\frac{a}{2})$

$\vec{JH}\cdot\vec{JD} = (-a,0,\frac{a}{2})(-a,0,-\frac{a}{2})$

$= a^2 + 0 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\vec{EI}\cdot\vec{IA} = (\frac{a}{2},0,0)(-\frac{a}{2},0,-a)$

$= \frac{-a^2}{4} + 0 - 0 = \frac{-a^2}{4}$

١٣٥

$= \vec{AC}\left(\vec{DA} + \vec{AB} - (\vec{BC} + \vec{CD})\right)$

$= \vec{AC}\,(\vec{DB} - \vec{BD})$

$= \vec{AC}\,(\vec{DB} + \vec{DB})$

$= \vec{AC}\cdot 2\vec{DB} = 2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = \ell_1$

$\frac{4}{}$

$d\ 2x + y - 5 \qquad A(-2,4)$

$dist(A,d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \frac{|2(-2) + 1(4) - 5|}{\sqrt{4+1}}$

$= \frac{|-4+4-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5}$

$\vec{u}(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)\ \vec{v}(1-\sqrt{2}, 0, -1) \qquad \frac{1}{٥٢}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + 0 - 0$

$= 1 - 2 = -1$

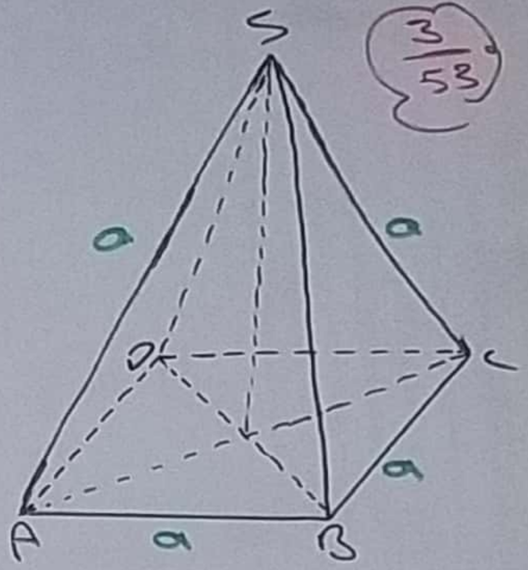
$\vec{u}(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})\ \vec{v}(\frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$= 1$

١٣٤

$\frac{3}{53}$



$\vec{SA}\cdot\vec{SB} = \|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SB}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

لأن ABS متقايس الأضلاع.

$= a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\vec{SA}\cdot\vec{SC} = \|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SC}\|\cos\frac{\pi}{2} = 0$

لأن المثلث ACS قائم في S.

وذلك حسب عكس فيثاغورث

$AC = \sqrt{2}a$ (قطر م.م $= \sqrt{2}a$)

$AC^2 = SA^2 + SC^2$

$2a^2 = a^2 + a^2$ ومنه قائم في S.

$\vec{SA}\cdot\vec{AC} = -\vec{AS}\cdot\vec{AC}$

$= -\|\vec{AS}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

لأن المثلث ACS قائم ومتساوي الساقين

$\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{u}-\vec{v}$ $\frac{4}{56}$

$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0$

$\vec{u}^2-\vec{v}^2=0$

$\vec{u}^2=\vec{v}^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

$\frac{1}{09}$ اكتب معادلة المستوي P

$\vec{n}(2,-3,-1)$ $A(\sqrt{2},-2,5)$

$2x-3y-z+d=0$ نعوض A

$2\sqrt{2}+6-5+d=0$

$d=-1-2\sqrt{2}$

$2x-3y-z-1-2\sqrt{2}=0$

$\frac{2}{09}$

$P: z=2$ $A(2,1,0)$

للمستويان المتوازيان لهما نفس الناظم

$\vec{n}_Q=\vec{n}_P(0,0,1)$ $\ni A$

$Q: cz+d=0$

$0+d=0 \Rightarrow d=0$

$Q: z=0$

١٣٨

$u\left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{56}$

$\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 2, 3\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{5}{4}\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{3}{2}(2)+\frac{1}{2}(3)$

$=-\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2} \neq 0$

غير متعامدين.

$\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$ $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},3,a\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow$

$2\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{2}(3)+5(a)=0$

$-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+5a=0$

$5a=\frac{23}{10} \Rightarrow a=\frac{23}{50}$

$\frac{3}{56}$

$\|\vec{u}\|=6$ $\|\vec{v}\|=8$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|=10$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}(100-36-64)$

$=0$

إذن $\vec{u} \perp \vec{v}$

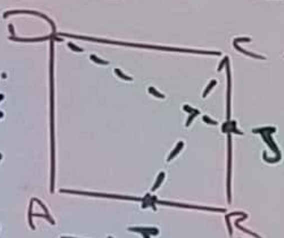
١٣٧

$P: 2x - y + 3z - 5 = 0$ 5

$A(5, -3, 4)$

$$\mathrm{dist}(A, P) = \frac{|10+3+12-5|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

تمرينات الوحدة الثانية



$\frac{2}{72}$

نختار معلم متجانس

$(A; \vec{AB}, \vec{AD})$

$A(0,0)$ $B(1,0)$

$C(1,1)$ $D(0,1)$

$I(\frac{1}{2}, 0)$ $J(1, \frac{1}{2})$

$\vec{DJ}(1, -\frac{1}{2})$

$\vec{CI}(-\frac{1}{2}, -1)$

$\vec{DJ} \cdot \vec{CI} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

فهما متعامدان

١٤

$\frac{3}{59}$

$P: 7x + 3y - z - 1 = 0$

$Q: 6x - 11y - 9z - 5 = 0$

$R: 2x - 3y + 5z + 4 = 0$

$\vec{n}_P(7, 3, -1)$

$\vec{n}_Q(6, -11, -9)$

$\vec{n}_R(2, -3, 5)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 42 - 33 + 9 \neq 0$

P و Q غير متعامدين

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 14 - 9 - 5 = 0$

$P \perp R$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = 12 + 33 - 45 = 0$

$Q \perp R$

$\frac{4}{59}$

$P: x - y + z = 0$

$Q: x - y + z - 3 = 0$

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_P(1, -1, 1)\\ \vec{n}_Q(1, -1, 1)\end{array}\right\}$ مرتبطان خطياً

فالمستويان غير متقاطعان

اذاً متوازيان

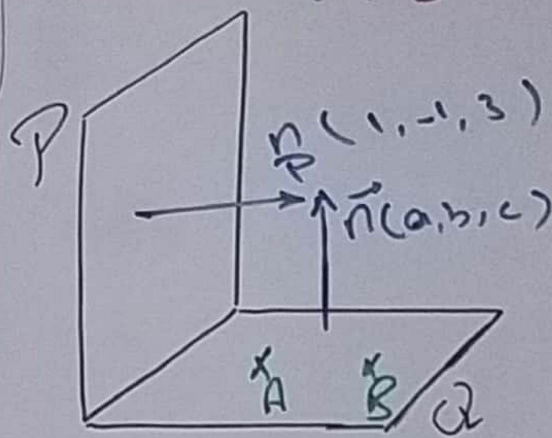
١٢٩

$A(1,-1,2)\quad B(2,0,4)$

$P: x-y+3z-4=0$

جد معادلة المستوي Q المار بـ A, B والعمودي على P.

$\frac{4}{65} + \frac{14}{69}$



نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$P \perp Q \iff \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

$a-b+3c=0 \quad \cdots (1)$

$\vec{n}_Q \perp Q \Rightarrow \vec{n}_Q \perp \vec{AB}$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (a,b,c)(1,1,2)=0$

$a+b+2c=0 \quad \cdots (2)$

نفرض $c=1$

$a-b+3=0$

$a+b+2=0$

$+$

$2a+5=0$

$a=\frac{-5}{2}$

١٤١

نعوض في (2)

$\frac{-5}{2}+b+2=0$

$b=\frac{1}{2}$

$\vec{n}_Q\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$\vec{n}_Q(-5,1,2)$

$Q: -5x+y+2z+d=0$

نعوض A.

$Q: -5-1+4+d=0$

$d=2$

$Q: -5x+y+2z+2=0$

$A(2,-1,0)\quad B(-1,3,5)\qquad \frac{6}{67}$

$P: 2x-3y+z-5=0$ ق٣

اثبت أن (AB) يقطع P وجد إحداثيات نقطة التقاطع

الحل: فكرة ١

$\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$

لإيجاد نقطة التقاطع مستقيم مع مستوي: نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي.

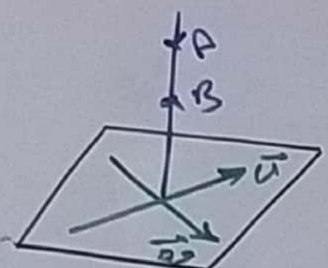
الحل:

١٤٢

$A(2,5,3)$ $B(-1,2,-1)$ $\frac{7}{67}$

$\vec{u}(1,1,-2)$ $\vec{v}(3,-1,-1)$

اثبت أن (AB) عمودي على المستوي P.



حل ١: المستقيم AB عمودي على P إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين:

١) (AB) عمودي على مستقيمين غير متوازيين ضمن المستوي.

٢) $\vec{AB}$ مرتبط خطياً مع ناظم المستوي.

الحل:

$\vec{AB}(-3,-5,-4)$

$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(1,1,-2)\\ \vec{v}(3,-1,-1)\end{array}\right\}$ غير مرتبطة خطياً

$\vec{AB}\cdot\vec{u} = -3-5+8=0$

$\vec{AB} \perp \vec{u}$ ...(1)

$\vec{AB}\cdot\vec{v} = -9+5+4=0$

$\vec{AB} \perp \vec{v}$ ...(2)

من (1) و (2) نجد أن $(AB) \perp P$

$\vec{v} = \vec{AB}(-3,4,5)$

$\vec{n}(2,-3,1)$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = -6-12+5 \neq 0$

فالمستقيم يقطع المستوي.

ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

لنوجد المعادلات الوسيطية

$x = x_A + at = 2-3t$

$y = y_A + bt = -1+4t \quad t\in\mathbb{R}$

$z = z_A + ct = 5t$

نعوض في معادلة المستوي:

$4-6t+3-12t+5t-5=0$

$-13t=-2 \Rightarrow t=\frac{2}{13}$

$x = 2-\frac{6}{13} = \frac{20}{13}$

$y = -1+\frac{8}{13} = \frac{-5}{13}$

$z = \frac{10}{13}$

$C\left(\frac{20}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{10}{13}\right)$

• بعد نقطة عن فصل مشترك

خطوات الحل:

نوجد $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ غير متوازيين

أولاً:

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \neq 0$

1) نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك

2) نبين ان النقطة لا تقع في أي من المستويين أي انها لا تقع على الفصل المشترك.

3) نختار نقطة K من الفصل المشترك احداثياتها تحقق المعادلات الوسيطية

4) نحسب المسافة بين النقطة A و K ونكتبها تحت الجذر بالصيغة القانونية

$AK = \sqrt{a(t-b)^2 + c}$

5) نختار أقصر مسافة وذلك من أجل $t = b$ فيكون $AK = \sqrt{c}$ هو بعد A عن الفصل المشترك.

المسائل الشائعة خلف المقرر

$\frac{12}{69} + \frac{5}{66}$

145

ثانياً:

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

فالمستويان متعامدان

1) نحسب d_1 بعد النقطة A عن المستوي (1)

2) نحسب d_2 بعد النقطة A عن المستوي (2)

3) بعد النقطة A عن الفصل المشترك نعطى بالعلاقة

$d^2 = d_1^2 + d_2^2$

وذلك لأن المثلث قائم بحسب مبرهنة الأعمدة الثلاث

13 ص النمط

$P: 2x - y + z - 4 = 0$ $\frac{5}{66}$

$Q: x + y + 2z - 5 = 0$

$A(3, -1, 2)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1}(2, -1, 1) \\ \vec{n_2}(1, 1, 2) \end{array}\right\} \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \neq 0$

المستويان متقاطعان وغير متعامدان

146

$$2x - y + z - 4 = 0$$
$$+\ x + y + 2z - 5 = 0$$
$$3x + 3z - 9 = 0 \quad \div 3$$
$$x + z - 3 = 0$$
$$\boxed{x = 3 - z} \quad \dots (1)$$

نعوض في (2)

$$3 - z + y + 2z - 5 = 0$$
$$\boxed{y = 2 - z}$$

بفرض $z = t$

$$x = 3 - t$$
$$y = 2 - t \qquad t \in R$$
$$z = t$$

نعوض A في المعادلات الوسيطية

$$3 = 3 - t \Rightarrow t = 0$$
$$-1 = 2 - t \Rightarrow t = 3$$
$\Rightarrow$

المستقيم ل١ $A \notin$

ثانياً: نقطة K من الفصل المشترك ل١

$$K(3-t,\ 2-t,\ t)$$

$$AK = \sqrt{(3-3+t)^2 + (-1-2+t)^2 + (t-2)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + (t-3)^2 + (t-2)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 4t + 4}$$
$$= \sqrt{3t^2 - 10t + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t^2 - \frac{10}{3}t + \frac{25}{9} - \frac{25}{9}\right) + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{3} + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}$$

تكون أصغر ما يمكن عندما $t = \frac{5}{3}$

$$AK = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

هو بعد A عن الفصل المشترك ل١

١٣
٦٩

$P: x + y - 2z - 1 = 0$

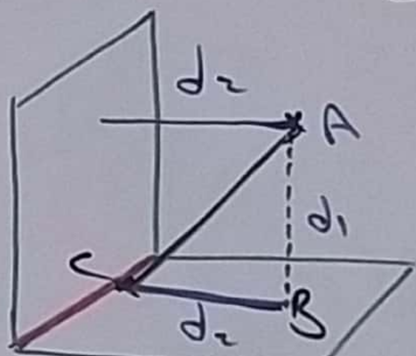
$Q: x + y + z = 0$

$A(2, 1, 2)$

احسب البعد A عن الفصل المشترك للمستويين P , Q .

$\vec{n}(1, 1, -2)$
$\vec{n}(1, 1, 1)$
$\Big\} \; 1 + 1 - 2 = 0$

ومنه $Q \perp P$



$$d_1 = \frac{|2 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$d_2 = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

١٤٩

والبعد A عن الفصل المشترك يحسب بالعلاقة

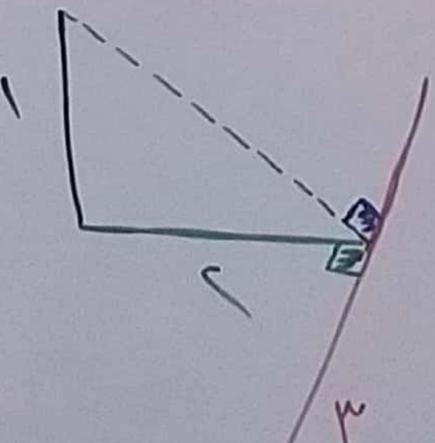
$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

وذلك لان المثلث ABC قائم في B لان C هي المسقط القائم لـ A على الفصل المشترك، وذلك حسب مبرهنة الأعمدة الثلاث

$$d^2 = \frac{4}{6} + \frac{25}{3} = \frac{54}{6}$$

$$= 9 \Rightarrow d = 3$$

نظرية الأعمدة الثلاث

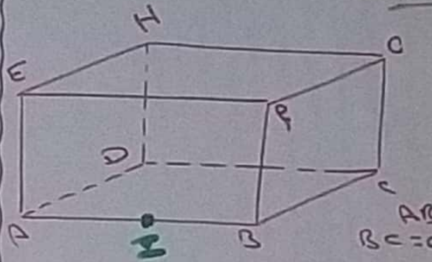


إ ١ ⊥ ٢ و ٢ ⊥ ٣ ⇐ ١ ⊥ ٣

المستقيم الواصل بين بداية الأول ونهاية الثاني يعامد الثالث

١٥.

11 •



(١) ... (٢) ... معادلة IFH

(٣) بعد G عن IFH (٤) بعد G عن IH

(١) $(A;\frac{1}{2}\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$

$C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$

$F(2,0,1)$ $G(2,1,1)$

$I(1,0,0)$

(٢) $\left.\begin{array}{l}\vec{IF}(1,0,1)\\ \vec{IH}(-1,1,1)\end{array}\right\}$ غير مرتبطين

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{IF}=0 \Rightarrow a+c=0$ --(1)

$\vec{n}\cdot\vec{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$ --(2)

بفرض $a=1$ $\xrightarrow{(1)} c=-1$ $\xrightarrow{(2)} b=2$

$\vec{n}(1,2,-1)$

$x+2y-z+d=0$

نعوض I نجد $d=-1$

$IFH: x+2y-z-1=0$

(٣) $dist(G,IFH)=\dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

(٤) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (IH):

$\vec{u}=\vec{IH}(-1,1,1)$

(٥) $x=x_I+at=1-t$

$y=y_I+bt=t$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_I+ct=t$

نختار نقطة K من (IH) حيث

$K(1-t,t,t)$

$GK=\sqrt{(2-1+t)^2+(1-t)^2+(1-t)^2}$

$=\sqrt{(1+t)^2+2(1-t)^2}$

$=\sqrt{1+2t+t^2+2-4t+2t^2}$

$=\sqrt{3t^2-2t+3}$

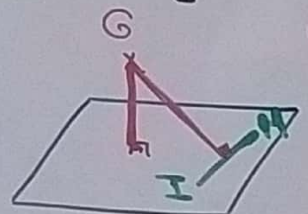
$=\sqrt{3(\underbrace{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}}-\frac{1}{9})+3}$

$=\sqrt{3(t-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}+3}$

$=\sqrt{3(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}}$

تكون أقصر مسافة ... أي $t=\frac{1}{3}$

$GK=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



بما أن بعد G عن المستوي

لا يساوي بعد G عن المستقيم

فالمسقط القائم للنقطة G

على المستوي لا يقع على المستقيم.

١٥٠
٢٠١٠ حج

$P: x-2y+3z-5=0$

$Q: x+y+z+1=0$

(أ) أوجد المعادلات الوسيطة للفصل المشترك للمستويين P، Q

(ب) اكتب معادلة المستوى R العمودي على كل من P، Q والمار بالنقطة $A(2,5,-2)$

$$
\begin{aligned}
x-2y+3z-5&=0\\
-x-y-z-1&=0\\
\hline
-3y+2z-6&=0
\end{aligned}
$$

$3y=2z-6 \Rightarrow$

$y=\frac{2}{3}z-2$

① $\rightarrow x+\frac{2}{3}z-2+z+1=0$

$x=1-\frac{5}{3}z$

بفرض $z=t$

$x=1-\frac{5}{3}t$

$y=-2+\frac{2}{3}t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=t$

تذكر: إذا كان مستوى عمودي على مستويين متقاطعين فإن متجه توجيه الفصل المشترك لهذين المستويين هو ناظم هذا المستوى

(ب) بما أن R عمودي على P، Q فإن متجه توجيه الفصل المشترك هو ناظم R:

$\vec{v}=\vec{n}_R\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},1\right)$

$=(-5,2,3)$

$R: -5x+2y+3z+d=0$

نعوض A:

$-10+10-6+d=0 \Rightarrow$

$d=6$

$R: -5x+2y+3z+6=0$

تذكير: إذا علم مستوٍ عمودي على مستويين متقاطعين فإن متجه توجيه الفصل المشترك لهذين المستويين هو ناظم هذا المستوي

(c) بما أن R يعامد P و Q فإن متجه توجيه الفصل المشترك هو ناظم R.

$$\vec{v} = \vec{n}_R\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

$$= (-5, 2, 3)$$

$$R: -5x + 2y + 3z + d = 0$$

نعوض A.

$$-10 + 10 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

$$R: -5x + 2y + 3z + 6 = 0$$

155

16

$A(2,1,3)$ $B(1,2,-1)$

$C(4,0,0)$ $D(0,4,0)$

$E(1,-1,1)$

(a) C ، D ، E ليست واقعة على استقامة واحدة

(b) $CDE \perp AB$

$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$
$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$ } غير متناسبين فقط

فالنقاط ليست على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -4 + 4 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \quad \ldots (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 3 + 1 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE} \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$CDE \perp AB$ لأنه

عمودي على مستقيمين متقاطعين

منه.

156

18

$\Omega(2,-1,3)$

$A(-1,0,1)$

جد معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بـ A.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = R^2$$

نعوض A.

$$9 + 1 + 4 = R^2 \Rightarrow R^2 = 14$$

ومنه $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$

19

$A(1,1,1)$ $\Omega(0,0,1)$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = R^2$$

$$A\Omega = R = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$$

20

$\Omega(1,2,3)$ $r = 2$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$$

21

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0$

$$\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) = (5, 0, -1)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$$

$$= 25 + 0 + 1 - 26 = 0$$

فهي تمثل النقطة وهي Ω.

157

$A(2,1,2)\quad B(-2,0,2)$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

$M(x,y,z)$

$\vec{MA}(2-x,1-y,2-z)$

$\vec{MB}(-2-x,-y,2-z)$

$(2-x)(-2-x)-y(1-y)+(2-z)^2=0$

$-4-\cancel{2x}+\cancel{2x}+x^2-y+y^2+4-4z+z^2=0$

$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$

$\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$

$R^2=0+\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

معادلة كرة مركزها Ω

$R=\frac{\sqrt{17}}{2}$ نصف قطرها

$r=\frac{1}{2}AB$ I منتصف $[AB]$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=MI^2-r^2$ ①

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ ②

$e_1=\vec{MA}\cdot\vec{MB}$

$=(\vec{MI}+\vec{IA})(\vec{MI}+\vec{IB})$

A   I   B

09

$P: x+2y+3z=5$

$A(2,-2,2)$

جد بعد مركز الكرة عن المستوي

ضروري dist

$dist(A,P)=$
- $=R$ المستوي مماس للكرة
- $>R$ المستوي خارج الكرة
- $<R$ المستوي يقطع الكرة بدائرة نصف قطرها $r^2=R^2-dist^2$

$R=dist$ الكرة مماسة للمستوي

$R=dist(A,P)=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}$

$=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

08

Scanned by CamScanner

$$= MI^2 + \vec{MI}\cdot\vec{IB} + \vec{MI}\cdot\vec{IA} + \vec{IA}\cdot\vec{IB}$$

$$= MI^2 + \vec{MI}(\vec{IB}+\vec{IA}) + (-\tfrac{1}{2}\vec{AB})(\tfrac{1}{2}\vec{AB})$$

$$= MI^2 + \vec{0} - \tfrac{1}{2}AB^2$$

$$= MI^2 - r^2 = f_{\circ}$$

② $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \iff$

$MI^2 - r^2 = 0 \Rightarrow MI^2 = r^2$

مجموعة النقاط كرة مركزها I

ونصف قطرها r.

$A(1,1,1)\ B(0,-1,-1)$

① $MA = 2MB$

② $MA = MB$

بفرض $M(x,y,z)$

$MA = 2MB \Rightarrow MA^2 = 4MB^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 4[x^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1 = 4x^2$
$+4y^2+8y+4+4z^2+8z+4$

$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5=0$

$x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}y+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$

$\Omega(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3})$

$R^2 = \frac{1}{9}+\frac{25}{9}+\frac{25}{9}-\frac{5}{3} = \frac{36}{9} = 4$

مجموعة النقاط كرة مركزها Ω ونصف قطرها

$R = 2$

الوضعية الثالثة:

- الحالة الثالثة: ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل (وهي تقاطع ثلاث مستويات)

طريقة غاوس:

$x+y+z=3 \quad L_1$

$2x+y-z=2 \quad L_2$

$3x-y-z=1 \quad L_3$

خطوات الحل:

① نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة.

② نحذف y من الثالثة.

③ نحل جملة مدرجة (ثلاثية) بأصل ثم مجهولين ثم مجهول)

الحل:

$-2L_1+L_2 \quad * \quad -3L_1+L_3$

$x+y+z=3 \quad L_1$

$-y-3z=-4 \quad L'_2$

$-4y-4z=-8 \quad L'_3$

$-4L_2 + L_3$

$x + y + z = 3$ (1)

$-y - 3z = -4$ (2)

$8z = 8$ (3)

(3) $z = 1 \xrightarrow{(2)} y = 1$

$\xrightarrow{(1)} x = 1$

$S(1,1,1)$

فالمستويات الثلاث تتقاطع ع بعضهن

بالنقطة (١،١،١)

وضح:

$x + y + z = 3$

$2x + y - z = 2$

$2x + 2y + 2z = 5$

$x + y + z = 3$

$2x + y - z = 2$

$2x + 2y + 2z = 6$

١٤٦

$x+y+z=3 \quad L_1$

$2x+y-z=2 \quad L_2$

$2x+2y+2z=5 \quad L_3$

$-2L_1+L_2 \ast -2L_1+L_3$

$x+y+z=3$

$-y-3z=-4$

$0=-1$

مستحيلة بل أي أن المستويات الثلاث لا تشترك مع بعضها البعض بأي نقطة

$x+y+z=3 \quad L_1$

$2x+y-z=2 \quad L_2$

$2x+2y+2z=6 \quad L_3$

$-2L_1+L_2 \ast -2L_1+L_3$

$x+y+z=3$ ①

$-y-3z=-4$ ②

$0=0$

للجملة عدد لا نهائي من الحلول فالمستويات الثلاث تشترك مع بعضها البعض بمستقيم يسمى الفصل المشترك.

١٧٣

ولإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك.

من ② $\boxed{y=4-3z}$

نعوض في ① $x+4-3z+z=3$

$\boxed{x=-1+2z}$

نفرض

$z=t$

$x=-1+2t$

$y=4-3t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=t$

$5x+y+z=-5 \quad L_1$

$2x+13y-7z=-1 \quad L_2$

$x-y+z=1 \quad L_3$

$L_1 \longleftrightarrow L_3$

$x-y+z=1 \quad L_1$

$2x+13y-7z=-1 \quad L_2$

$5x+y+z=-5 \quad L_3$

$-2L_1+L_2$

$-5L_1+L_3$

١٧٤

$x-y+z=1 \quad L_1$

$15y-9z=-3 \quad L_2'$

$6y-4z=-10 \quad L_3'$

$\frac{1}{3}L_2' \qquad \frac{1}{2}L_3'$

$x-y+z=1 \quad L_1$

$5y-3z=-1 \quad L_2'$

$3y-2z=-5 \quad L_3'$

$-3L_2' \ast 5L_3'$

$x-y+z=1 \quad L_1$

$-15y+9z=3 \quad L_2'$

$15y-10z=-25 \quad L_3'$

$L_2'+L_3'$

$x-y+z=1$ ①

$-15y+9z=3$ ②

$-z=-22$ ③

من ③ $\boxed{z=22}$

١٧٥

من ② $15y+198=3$

$15y=-195$

$\boxed{y=-13}$

من ① $x+13+22=1$

$\boxed{x=-34}$

$S=\{(-34,-13,22)\}$

١٧٧

بالطرح

① $1 - t = 1 - \frac{1}{2}\lambda$

② $\frac{1}{2} = \lambda$

③ $t = 1 - \lambda$

فرض ② في ③

$t = \frac{1}{2}$

فرض في ①

$1 - \frac{1}{2} \neq 1 - \frac{1}{4}$

فالمستقيمان متخالفان أي لا يقعان في مستوٍ واحد.

أي أن K, I, F, J لا تقع في مستوٍ واحد.

$\frac{1}{87}$

$P_1 : x + y = 2$

$P_2 : x + z = 1$

$\vec{n_1}(1,1,0)$
$\vec{n_2}(1,0,1)$ $\left.\right\} \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$

غير مرتبطين خطياً

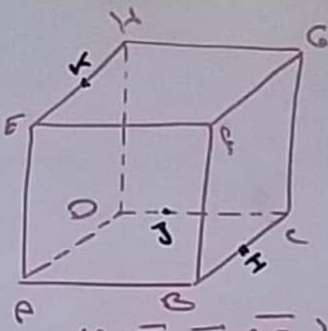
فالمستويان متقاطعان

من ① $y = 2 - x$

من ② $z = 1 - x$

نفرض $x = t$

١٦٨



$\frac{3}{84}$

$(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

② FJ , IK

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$ $I(1,\frac{1}{2},0)$

$J(\frac{1}{2},1,0)$ $K(0,\frac{1}{2},1)$

$\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$(IK)\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{FJ}(-\frac{1}{2},1,-1)$

$(FJ)\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

١٦٧

$\frac{1}{84}$

$A(-1,2,0)$ $\vec{v}(0,1,-1)$

$x = -1$

$y = 2 + t$ $t \in \mathbb{R}$

$z = -t$

$A(2,1,-1)$ $B(3,-1,1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1,-2,2)$

$x = 2 + t$

$y = 1 - 2t$ $t \in \mathbb{R}$

$z = -1 + 2t$

$\frac{2}{84}$

$A(-2,1,0)$ $B(2,3,1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(4,2,1)$

$x = -2 + 4t$

$y = 1 + 2t$ $t \in$ $\begin{cases} \mathbb{R} & (AB) \\ [0,1] & [AB] \\ [0,+\infty[& [AB) \end{cases}$

$z = t$

١٦٦

بملاحظة

(1) $1 - t = 1 - \frac{1}{2}\lambda$

(2) $\frac{1}{2} = \lambda$

(3) $t = 1 - \lambda$

نعوض (٢) في (٣) $t = \frac{1}{2}$

نعوض في (١)

$1 - \frac{1}{2} \neq 1 - \frac{1}{4}$

فالمستقيمان متخالفان أي لا يقعان في مستوٍ واحد.

أي أن K, I, J, L لا تقع في مستوٍ واحد.

$\frac{1}{87}$

$P_1 : x + y = 2$

$P_2 : x + z = 1$

$\vec{n_1}(1,1,0)$, $\vec{n_2}(1,0,1)$ $\Big\} \ \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$

غير متوازيين

فالمستويان متقاطعان

(1) من $y = 2 - x$

(2) من $z = 1 - x$

بفرض $x = t$

$x = t$

$y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R}$

$z = 1 - t$

المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P_1, P_2

$\frac{2}{87}$

$d: \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$

$3x - y - 2z = 1$

$-x + y + z = 0$

$2x - z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 2x - 1}$

(2) $\to x - y - 2x + 1 = 0$

$\boxed{y = -x + 1}$

بفرض $x = \lambda$

$d': \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{u_d}(1,-1,2)$

$\vec{u_{d'}}(1,-1,2)$

فالمستقيمان متوازيان أو منطبقان

نختار نقطة من d ولتكن من d:

$t = 0$

$A(0,0,-1)$

نعوض في d'

$\boxed{0 = \lambda}$

$0 = 1 - \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

ومنه $A \notin d'$

فالمستقيمان متوازيان تماماً

صحيح تماماً

$d: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 1 \\ z = 8s - 3 \end{cases}$

$\frac{4}{87}$

$P: 2x + 3y - z = 0$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

$2s + 2 + 6s + 3 - 8s + 3 = 0$

$0s = -8$

$s = \frac{-8}{0}$ غير ممكن

أي أن المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهو يوازيه.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$\frac{2}{92}$

تمرين محلول: تكون أربع نقاط في مستوٍ واحد إذا تحقق أحد الشرطين

أ) [illegible]

ب) إحداهما مركز أبعاد متناسبة

الحل: لدينا

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{D\underset{\uparrow M}{}A}$

$\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\cancel{\overrightarrow{MA}}$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

M مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1)(C,1)(D,1)$

ومنه B, C, D, M في مستوٍ واحد

$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{A\underset{\uparrow M}{}D}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+2\cancel{\overrightarrow{AM}}+2\overrightarrow{MD}=2\cancel{\overrightarrow{AM}}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

M مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1)(D,2)(C,1)$

B, D, C, M في مستوٍ واحد

$\frac{4}{92}$ ABCD رباعي وجوه، I مركز ثقل المثلث BCD

J منتصف [AI]، K نظيرة A بالنسبة لـ I

عيّن J، K كمراكز أبعاد متناسبة للنقاط A، B، C، D

لدينا I مركز ثقل المثلث BCD.

إذن I مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1)(C,1)(D,1)$

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

A ——— J ——— I

J في منتصف AJ

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JA}$

$3\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

J مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,3)(B,1)(C,1)(D,1)$

لدينا $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

K ——— I ——— A

$\overrightarrow{IK}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{KA}$

$3\vec{IF}+2\vec{FI}+2\vec{ID}=\vec{0}$

$3\vec{IF}-2\vec{IF}+2\vec{ID}=\vec{0}$

$\vec{IF}+2\vec{ID}=\vec{0}$

I ع . ا . ح

$(F,1)\ (D,2)$

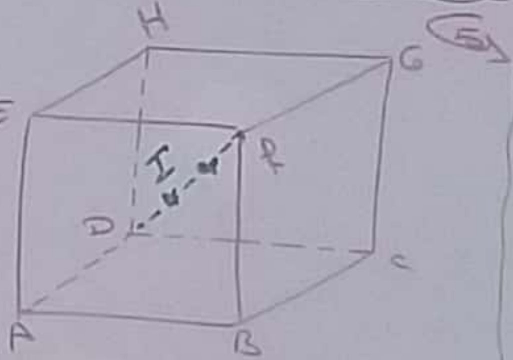
$\vec{FI}=\frac{2}{3}\vec{FD}$

$-\frac{3}{2}\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{KC}+\vec{KD}=\vec{0}$

و منه

K ع . ا . ح

$(A,-\frac{3}{2})\ (B,1)\ (C,1)\ (D,1)$



I : مرجح النقط AHC

اثبت ان D , I , F على استقامة واحدة وبين ان $I \in [DF]$

نختار معلما متعامدا $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

$A(0,0,0)\quad B(1,0,0)\quad C(1,1,0)$

$D(0,1,0)\quad E(0,0,1)\quad H(0,1,1)$

$F(1,0,1)\quad G(1,1,1)\quad I(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

$\vec{IF}(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3})$

$\vec{FD}(-1,1,-1)$ } مرتبطة خطيا

منه $\vec{IF}$ و $\vec{FD}$ مرتبطان خطيا إذن النقط F , I , D على استقامة واحدة.

$\vec{IF}=-\frac{2}{3}\vec{FD}$

$3\vec{IF}=-2\vec{FD}$

$3\vec{IF}+2\vec{FD}=\vec{0}$

I

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$

٦ $\quad$ I منتصف $[AC]$

J منتصف $[BD]$

اثبت تلاقي المستقيمات (PR) (IJ) (QS)

طريقة الحل: لاثبات تلاقي ثلاث مستقيمات يكفي ان نبرهن انها تشترك بمركز ابعاد متناسبة واحد.

الحل:

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$

P م.أ.م لـ $(A, 1-x)(B, x)$

$\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$

Q م.أ.م لـ $(A, 1-x)(D, x)$

$\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$

R م.أ.م لـ $(C, 1-x)(D, x)$

$\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$

S م.أ.م لـ $(C, 1-x)(B, x)$

لتكن G م.أ.م لـ

$$\underbrace{(A, 1-x)(B, x)}_{P}\underbrace{(C, 1-x)(D, x)}_{R}$$

176

G م.أ.م لـ P ، R .

G ، P ، R على استقامة واحدة ....(1)

• G م.أ.م لـ

$(A, 1-x)(B, x)(C, 1-x)(D, x)$

Q ، S

G م.أ.م لـ S ، Q ومنه

G ، S ، Q على استقامة واحدة ---(2)

• G م.أ.م لـ

$(A, 1-x)(B, x)(C, 1-x)(D, x)$

I ، J

G م.أ.م لـ I ، J

G ، I ، J على استقامة واحدة ---(3)

من (1) ، (2) ، (3) نجد ان المستقيمات (PR) (QS) (IJ) تتلاقى بالنقطة G فهي نقطة تلاقي المستقيمات الثلاث

177

$\frac{7}{96}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

I منتصف AD

J منتصف BC

G م.ا.م.ح $(A,2)(B,1)(C,1)(D,2)$

a) G ، I ، J على استقامة واحدة.

لدينا I في منتصف AD

I م.ا.م.ح $(A,2)(D,2)$

J في منتصف BC

J م.ا.م.ح $(B,1)(C,1)$

لدينا G م.ا.م.ح

$(A,2)(B,1)(C,1)(D,2)$

I J

G م.ا.م.ح $(I,4)(J,2)$

G ، I ، J على استقامة واحدة.

b) G ، K ، L على استقامة واحدة

لدينا $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

K م.ا.م.ح $(B,1)(A,2)$

$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

L م.ا.م.ح $(D,2)(C,1)$

ولدينا G م.ا.م.ح

$\underbrace{(A,2)(B,1)}_{K}\underbrace{(C,1)(D,2)}_{L}$

178

G م.ا.م.ح $(K,3)(L,3)$

ومنه G ، L ، K على استقامة واحدة.

c) I ، J ، K ، L في مستوٍ واحد.

من a ، b

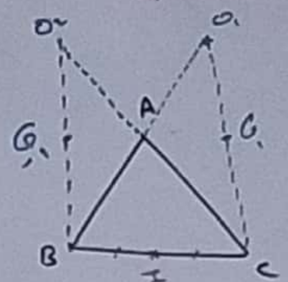
المستقيمان (JI) و (KL) يشتركان بالنقطة G فهما متقاطعان بالنقطة G.

فالنقاط I ، J ، K ، L في مستوٍ واحد.

179

9) لتكن G_k م.ا.ح لـ $(A,k^2+1)(B,k)(C,-k)$

النقطتين G_1 ، G_{-1}



النقطة G_1 : G_1 م.ا.ح لـ $(A,2)(B,1)(C,-1)$

لتكن Q م.ا.ح لـ $(A,2)(C,-1)$

ومنه G_1 م.ا.ح لـ $(Q,1)(B,1)$ ومنه

G_1 في منتصف $[QB]$

النقطة G_{-1} : G_{-1} م.ا.ح لـ $(A,2)(B,-1)(C,1)$

لتكن Q_2 م.ا.ح لـ $(A,2)(B,-1)$

ومنه G_{-1} م.ا.ح لـ $(Q_2,1)(C,1)$

أي G_{-1} في منتصف $[Q_2C]$

ب) اثبات ان مجموعة النقط G_k لما k يمسح $[-1,1]$

$$\vec{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\vec{CB} \quad \forall k$$

G_k م.ا.ح لـ $(A,k^2+1)(B,k)(C,-k)$

ومنه $(k^2+1)\vec{AG_k} + k\vec{BG_k} - k\vec{CG_k} = \vec{0}$

$(k^2+1)\vec{AG_k} + k(\vec{BG_k} - \vec{CG_k}) = \vec{0}$

$(k^2+1)\vec{AG_k} + k\vec{CB} = \vec{0}$

$(k^2+1)\vec{AG_k} = -k\vec{CB}$

$$\vec{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\vec{CB}$$

180

$$f(x) = \frac{-x}{1+x^2} \quad [-1,1]$$

$f(-1) = \frac{1}{2}$ $\quad f(1) = \frac{-1}{2}$

$$f'(x) = \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

$f' = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

إما $x=1$ أو $x=-1$

x	-1		1
f'		$-$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

ومنه عندما تتحرك k في المجال $[-1,1]$

تتحرك G_k في المجال $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

ج) تعيين E مجموعة النقط

$$\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|$$

قاعدة: اذا كانت G م.ا.ح لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

حيث M النقطة ما من الفضاء

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$$

لدينا G_1 م.ا.ح لـ $(A,2)(B,1)(C,-1)$

$2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC} = 2\vec{MG_1}$ ---(1)

لدينا G_{-1} م.ا.ح لـ $(A,2)(B,-1)(C,1)$

$2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC} = 2\vec{MG_{-1}}$ ---(2)

نعوض (1) و(2) في المساواة

$\|2\vec{MG_1}\| = \|2\vec{MG_{-1}}\|$

$\|\vec{MG_1}\| = \|\vec{MG_{-1}}\|$

E: مستوي محوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$

181

4) $\|2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\| = \|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\|$

$2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC} = 2\vec{MG_1}$ --- (1)

$2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}-2\vec{MB} = 2\vec{MG_1}-2\vec{MB}$

$2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC} = 2\vec{BG_1}$ --- (2)

نعوض (1) و(2) في المساواة

$\|2\vec{MG_1}\| = \|2\vec{BG_1}\|$

$\|\vec{MG_1}\| = \|\vec{BG_1}\|$

F: هي سطح كرة مركزها G_1 ونصف قطرها $R = \|\vec{BG_1}\|$

5) $A(0,0,2)$ $B(-1,2,1)$ $C(-1,2,5)$

ا) احسب احداثيات G_1 ، G_{-1}

قاعدة: G م.ا.ح لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ فإن

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

G_1 م.ا.ح لـ $(A,2)(B,1)(C,-1)$

$$x_{G_1} = \frac{2(0)+1(-1)-1(-1)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y_{G_1} = \frac{2(0)+1(2)-1(2)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$z_{G_1} = \frac{2(2)+1(1)-1(5)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$G_1(0,0,0)$

بنفس الطريقة

$G_{-1} = (0,0,4)$

182

4)

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1}$ --- (1)

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG_1}-2\overrightarrow{MB}$

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{BG_1}$ --- (2)

نعوض (1) ، (2) في نص السؤال

$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{BG_1}\|$

$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{BG_1}\|$

F : هي معادلة كرة مركزها G_1 ونصف قطرها

$R = \|\overrightarrow{BG_1}\|$

5)

$A(0,0,2)$ $B(-1,2,1)$ $C(-1,2,5)$

a) احسب احداثيات G ، G_1

قاعدة: G م.ت.ل $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

G_1 م.ت.ل $(A,2)(B,1)(C,-1)$

$$x_{G_1} = \frac{2(0)+1(-1)-1(-1)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$y_{G_1} = \frac{2(0)+1(2)-1(2)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$z_{G_1} = \frac{2(2)+1(1)-1(5)}{2+1-1} = \frac{0}{2} = 0$$

$G_1(0,0,0)$

بنفس الحل السابق

$G = (0,0,4)$

١٨٢

معادلة ξ :

نفرض $M(x,y,z) \in \xi$

$MG = MG_1 \Rightarrow$

$MG^2 = MG_1^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+z^2 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+(z-4)^2$

$\cancel{z^2} = \cancel{z^2}-8z+16$

$\xi : z = 2$

معادلة F :

مركزها $\Omega = G_1(0,0,0)$

$R = \|\overrightarrow{BG_1}\| = \sqrt{1+4+1}$

$= \sqrt{6}$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 6$

$F : x^2+y^2+z^2 = 6$

قاعدة: دراسة وضع مستوٍ مع كرة

نحسب البعد بين مركز الكرة عن المستوي

من خلال dist نميز

1) $dist > R$ المستوي خارج

2) $dist = R$ " مماس الكرة

3) $dist < R$ " يقطع الكرة

محدداً للكرة دائرة نصف قطرها

$r^2 = R^2 - dist^2$

نحسب بعد G_1 عن المستوي ξ

$$dist(G_1,\xi) = \frac{|0-2|}{\sqrt{0+0+1}}$$

$= 2$

١٨٣

$\left.\begin{array}{l} dist = 2 \\ R = \sqrt{6} \end{array}\right\} dist < R$

فالمستوي يقطع

الكرة بحدود للكرة دائرة

نصف قطرها

$r^2 = R^2 - dist^2$

$= 6 - 4$

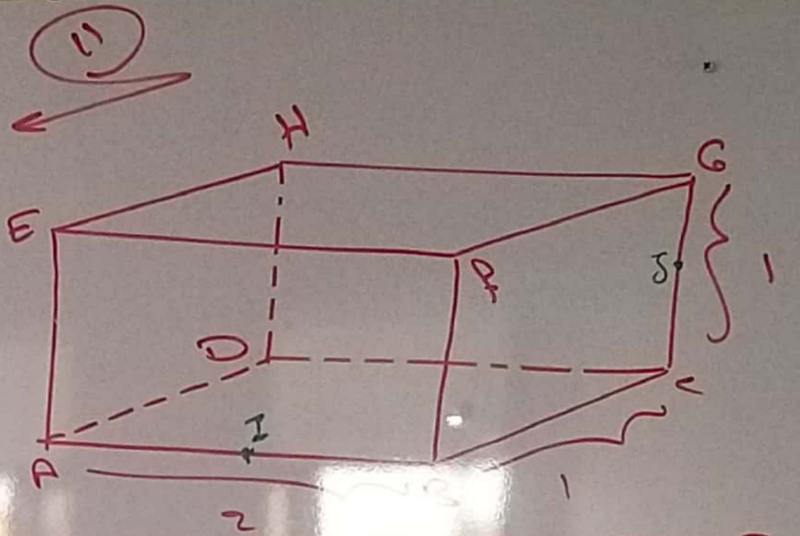
$= 2 \Rightarrow$

$\boxed{r = \sqrt{2}}$

انتهت المسألة 9

١٨٤

(11)



① احسب DJ ، IJ ② DI ، IJ متعامدان
$\cos IJD$

③ a) DIJ
b) بعد H عن DIJ

④ حجم $HDIJ$ a) J HDI
b) [illegible] HDI

$\boxed{1}$ $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ $F(2,0,1)$ $H(0,1,1)$

$G(2,1,1)$ $I(1,0,0)$ $J(2,1,\frac{1}{2})$

$IJ = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

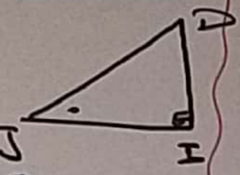
b) $DJ = \sqrt{4+0+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\boxed{2}$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IJ}(1,1,\frac{1}{2})\\ \overrightarrow{DI}(1,-1,0)\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1-1+0 = 0$

$\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{IJ}$

١٨٥

المثلث IJD قائم في I .



$\cos J = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$= \frac{JI}{JD} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

او $\cos I\hat{J}D = \frac{\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JD}}{\|\overrightarrow{JI}\|\cdot\|\overrightarrow{JD}\|}$

③ a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DI}(1,-1,0)\\ \overrightarrow{IJ}(1,1,\frac{1}{2})\end{array}\right\}$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow a-b=0$ ...①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow a+b+\frac{1}{2}c = 0$ ...②

نفرض $a=1$ $\xrightarrow{①} b=1$ $\xrightarrow{②} c=-4$

$\vec{n}(1,1,-4)$

$DIJ: x+y-4z+d=0$

نعوض I $1+0-0+d=0 \Rightarrow d=-1$

$DIJ: x+y-4z-1=0$

$\text{dist}(H - DIJ) = \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}}$

$= \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

١٨٧

$\vec{n}(1,1,0)$

$HDI: x+y+d=0$

نعوض I

$1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$HDI: x+y-1=0$

$\vec{v}=\vec{n}(1,1,0)$

$x = x_J + at = 2+t$

$y = y_J + bt = 1+t \quad t\in\mathbb{R}$

$z = z_J + ct = \frac{1}{2}$

b) لإيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي

$2+t+1+t-1=0$

$2t=-2 \Rightarrow \boxed{t=-1}$

$x=2-1=1$

$y=1-1=0$

$z=\frac{1}{2}$

$J'(1,0,\frac{1}{2})$

١٨٦

(4)

$V_{HDIJ} = \frac{1}{3} S_{DIJ} \cdot h$

$S_{DIJ} = \frac{DI \cdot IJ}{2}$

$= \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$h = dist(H-DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

واحدة مكعبة

5) a) بما أن المستقيم يعامد المستوي فإنه يعامد شعاعي توجيه مستقيمين متقاطعين في المستوي.

لذلك لنوجد معادلة المستوي HDI

$\vec{DI}(1,-1,0)$

$\vec{IH}(-1,1,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{DI}=0 \Rightarrow a-b=0$ (1)

$\vec{n}\cdot\vec{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$ (2)

نفرض $a=1 \xrightarrow{(1)} b=1$

$\xrightarrow{(2)} c=0$

١٨٧

$\vec{n}(1,1,0)$

$HDI: x + y + d = 0$

نعوض I

$1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

$HDI: x + y - 1 = 0$

$\vec{v} = \vec{n}(1,1,0)$

$x = x_J + at = 2 + t$

$y = y_J + bt = 1 + t \quad t \in \mathbb{R}$

$z = z_J + ct = \frac{1}{2}$

b) لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوى

$2 + t + 1 + t - 1 = 0$

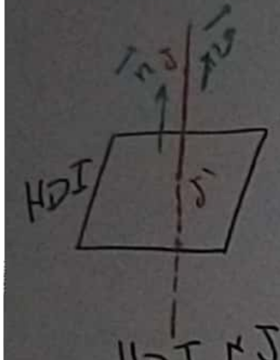
$2t = -2 \Rightarrow \boxed{t = -1}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{array}\right\} J'\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

١٨٨

$dist(J, HDI) = \dfrac{|2(1) + 1(1) + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$



بعد J عن المستوى HDI يساوي المسافة بين J, J' حيث J' هي نقطة التقاطع J مع HDI

$JJ' = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$

١٨٩

HDI

$\overrightarrow{DI}(1,-1,0$

$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DI}=0 \Rightarrow$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IH}=0 \Rightarrow$

بنفرض $a=1$

١٨٧

$\vec{n}(1,1,0)$

$HDI: x+y+d=0$

نعوض I

$1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$HDI: x+y-1=0$

$\vec{v}=\vec{n}(1,1,0)$

$x=x_J+at=2+t$

$y=y_J+bt=1+t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_J=\frac{1}{2}$

b) لايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوى

$2+t+1+t-1=0$

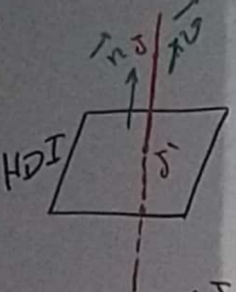
$2t=-2 \Rightarrow \boxed{t=-1}$

$$\left.\begin{aligned} x&=2-1=1\\ y&=1-1=0\\ z&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

١٨٨

c) $dist(J,HDI)=\dfrac{|2(1)+1(1)+0-1|}{\sqrt{1+1+0}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



لبعد J عن المستوى HDI نوجد المسافة بين J, J'

لان J' هي المسقط العمودي لـ J على HDI

$JJ'=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

١٨٩

تم

① $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$

G مركز ثقل المثلث ABC

a) احسب احداثيات G وتحقق أن $\vec{OG}$ ناظمي ABC

b) $A'(2,0,0)$ $B'(0,2,0)$ $C'(0,0,3)$

a) معادلة $A'B'C'$

b) اوجد احداثيات K نقطة تقاطع المستقيم (AC) مع المستوي $A'B'C'$

c) a) احسب احداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (BC) مع $A'B'C'$

b) اثبت توازي (AB) مع $(A'B')$ مع (KL)

d) عين تقاطع المستويين (ABC) مع $(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرفة سابقاً

$A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

$G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\vec{OG}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(-1,1,0)\\ \vec{AC}(-1,0,1)\end{array}\right\}$ غير مرتبطان خطياً

190

$\vec{OG} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

$\vec{OG} \perp \vec{AB}$ --- ①

$\vec{OG} \cdot \vec{AC} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

$\vec{OG} \perp \vec{AC}$ --- ②

من ① و② نجد أن

$\vec{OG} \perp ABC$

b)

$\left.\begin{array}{l}\vec{A'B'}(-2,2,0)\\ \vec{A'C'}(-2,0,3)\end{array}\right\}$ غير مرتبطين خطياً

$\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{A'B'} = 0 \Rightarrow$

$-2a+2b=0$ --- ①

$\vec{n} \cdot \vec{A'C'} = 0 \Rightarrow -2a+3c=0$ ②

بفرض $a=1 \xrightarrow{①} b=1$, $\xrightarrow{②} c=\frac{2}{3}$

$\vec{n}\left(1,1,\frac{2}{3}\right) = (3,3,2)$

$A'B'C': 3x+3y+2z+d=0$

نعوض A'

191

$x = x_B + a\lambda = 0$

$y = y_B + b\lambda = 1 - \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$z = z_B + c\lambda = \lambda$

نعوض في معادلة المستوي

$0 + 3 - 3\lambda + 2\lambda - 6 = 0$

$\boxed{\lambda = -3}$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}\right\} L(0,4,-3)$

b) $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

$\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)$

$\overrightarrow{KL}(-4,4,0)$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A'B' \parallel AB \\ \overrightarrow{KL} = 4\overrightarrow{AB} \Rightarrow KL \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow$

$AB \parallel A'B' \parallel KL$

193

$6 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -6$

$A'B'C' : 3x + 3y + 2z - 6 = 0$

b) لنوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AC)

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

$x = x_A + at = 1 - t$

$y = y_A + bt = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$

$z = z_A + ct = t$

نعوض في معادلة المستوي

$3(1-t) + 3(0) + 2(t) - 6 = 0$

$3 - 3t + 2t - 6 = 0$

$\boxed{t = -3}$

$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -3 \end{array}\right\} K(4,0,-3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

ج)

192

$x = x_0 + a\lambda = 0$

$y = y_B + b\lambda = 1 - \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$z = z_B + c\lambda = \lambda$

نعوض في معادلة المستوي

$0 + 3 - 3\lambda + 2\lambda - 6 = 0$

$\boxed{\lambda = -3}$

$x = 0$
$y = 4$
$z = -3$
$(0, 4, -3)$

(b

$\overrightarrow{AB}(-1, 1, 0)$

$\overrightarrow{A'B'}(-2, 2, 0)$

$\overrightarrow{KL}(-4, 4, 0)$

$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A'B' \parallel AB$

$\overrightarrow{KL} = 4\overrightarrow{AB} \Rightarrow KL \parallel AB$ $\Rightarrow$

$AB \parallel A'B' \parallel KL$

١٩٣

(٤

$\Leftarrow \begin{cases} ABC \ni K \Leftarrow BC \ni K \\ A'B'C' \ni K \end{cases}$

K نقطة من الفصل المشترك

$\Leftarrow \begin{cases} ABC \ni L \Leftarrow BC \ni L \\ A'B'C' \ni L \end{cases}$

L نقطة من الفصل المشترك

ومنه (KL) هو الفصل المشترك للمستويين

$A'B'C'$, ABC

١٩٤