الاسم :
الدرجة : 300
المدّة : ساعتان

اختبار لطلاب الثالث الثانوي العلمي 2022 – 2023
رياضيات (بحث النهايات -4-)

السؤال الأوّل : جد نهاية كل من التوابع التالية عند a المُعطاة :

2) $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x.\sin(x)}\ ;\ a=0$

1) $f(x)=\frac{2\pi x.\tan(x)}{x^2+\sin^2(x)}\ ;\ a=0$

3) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}\ ;\ a=-2\,,-\infty$

السؤال الثاني :

i) ليكن f التابع المُعرَّف على $]-\infty\,,-2[$ وفق : $f(x)=\frac{-x^2-2x+\sin(x)-2}{x+2}$.
أثبت أنَّ المستقيم المنصّف للربع الثاني مقارب مائل للتابع ، وادرس الوضع النسبي بينهما .

ii) أثبت أنَّ للمعادلة $2x-\cos(x)=0$ حلّاً وحيداً α في R ثمَّ بيّن أنَّ $\alpha\in\left]0\,,\frac{\pi}{6}\right[$.

السؤال الثالث : يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f تابعاً مُعرَّفاً وفق: $f(x)=\frac{2x-E(x)}{3x}$. **المطلوب :**

1) اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلّة عن $E(x)$ على $I=[1\,,3]$.
2) هل f مستمر على $I=[1\,,3]$ ؟ علّل .
3) احسب $f(-1.1)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

السؤال الرابع : C هو الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. **المطلوب :**

1) اكتب x^2-4x+5 بالصيغة القانونية .
2) استنتج Δ معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$.
3) ادرس الوضع النسبي بين الخط C ومقاربه Δ .

X-Math πac

السؤال الخامس :

i) f وَ g تابعان مُعرَّفان وفق : $f(x)=\frac{1}{4-3\sin(2x)}$ وَ $g(x)=\frac{x+2\cos(x)}{4-3\sin(2x)}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنَّ f محدود .
2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ii) ليكن f التابع المُعرَّف على R_+ وفق : $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{2+x}$. **المطلوب :**

1) تحقّق أنَّ $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}}$.
2) استنتج أنَّ $\frac{-1}{\sqrt{2+x}}\le f(x)\le\frac{-1}{\sqrt{x}}$ ، ثمَّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

السؤال السادس : C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=|x-1|+\frac{x}{x-1}$. **المطلوب :**

1) احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة المقارب الشاقولي للخط C .
2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ، وفسّر النتيجة هندسيّاً .
3) ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها .
4) أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يُحقّق $0<\alpha<\frac{1}{2}$.
5) في معلم متجانس ارسم C مع مقارباته ، واستنتج رسم الخط C_h حيث : $h(x)=|f(x)|$.
6) ناقش بحسب قيم العدد الحقيقي λ عدد حلول المعادلة $f(x)=\lambda$.

-------- انتهت الأسئلة --------

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276

السؤال الأول:

1) $f(x)=\frac{2\pi x.\tan x}{x^2+\sin^2 x}$; $a=0$

$f(x)=\frac{2\pi x.\tan x}{x^2\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)}$

$=2\pi.\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)}$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ «مبرهنة»

$=\frac{2\pi}{\cos x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{2\pi}{1}\times1\times\frac{1}{1+(1)^2}$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=\frac{2\pi}{2}=\pi}$$

2) $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x.\sin(x)}$; $a=0$

$f(x)=\frac{4\cos^3(x)-3\cos(x)-\cos(x)}{x.\sin x}$

$=\frac{4\cos^3(x)-4\cos(x)}{x.\sin x}$

$=\frac{4\cos x[\cos^2 x-1]}{x.\sin x}$

$=\frac{4\cos x(-\sin^2 x)}{x.\sin x}$

$=-4.\cos x.\frac{\sin x}{x}$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=-4}$$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ «مبرهنة»

$\cos(3x)=4\cos^3x-3\cos x$ «دستور»

3) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$; $a=-2,-\infty$

$f(x)=\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}=\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-2)}$

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to-2} f(x)=\frac{0}{-4}=0}$$

$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2}.\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{-x.\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$

$f(x)=\frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$; $x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1}$$

السؤال الثاني:

i) $f(x) = \dfrac{-x^2-2x+\sin x-2}{x+2}$

$D_f =]-\infty, -2[$:

$y = -x$

$f(x) = \dfrac{-x(x+2)}{x+2} + \dfrac{\sin x - 2}{x+2}$

$= -x + \dfrac{\sin x - 2}{x+2}$

$f(x) - y = -x + \dfrac{\sin x - 2}{x+2} + x$

$f(x) - y = \dfrac{\sin x - 2}{x+2}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\Rightarrow -3 \le \sin x - 2 \le -1$

نقسم على $x+2<0 \Leftarrow$

$\dfrac{-3}{x+2} \ge \dfrac{\sin x - 2}{x+2} \ge \dfrac{-1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3}{x+2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x+2}\right) = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة تكون: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] = 0$

$\Leftarrow y=-x$ مقارب مائل للتابع في جوار $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y = \dfrac{\sin x - 2}{x+2}$

لدينا: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftarrow$

$-3 \le \sin x - 2 \le -1 < 0$

$\Rightarrow \sin x - 2 < 0$

أي أنّ البسط سالب

x	$-\infty$	-2
بسط	$-$ $-$	
مقام	$-$ $-$	0
$f(x)-y$	$+$ $+$	$\|\|$
وضع نسبي	فوق المقارب C دوماً	

ii) نعرض التابع: $f(x) = 2x - \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

f معرّف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$-1 \le \cos(x) \le 1$

$\Rightarrow 1 \ge -\cos(x) \ge -1$

$2x+1 \ge 2x - \cos(x) \ge 2x - 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2 + \sin x$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\Rightarrow 0 < 1 \le 2+\sin x \le 3$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$

f متزايد تماماً

لدينا f مستمر ومتزايد تماماً

على $\mathbb{R}$ و: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

⇐ $0 \in \mathbb{R}$ ⇐ المعادلة $f(x) = 0$

لها حل وحيد في $\mathbb{R}$

$\alpha \in]0, \frac{\pi}{6}[$

$f(0) = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} > 0$

⇐ حسب مبرهنة القيمة الوسطى

تكون المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α

يحقق $\alpha \in]0, \frac{\pi}{6}[$

السؤال الثالث:

$f(x) = \frac{2x - E(x)}{3x}$

1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{3x} & ; x \in [1, 2[\\ \frac{2x-2}{3x} & ; x \in [2, 3[\\ \frac{6-3}{9} = \frac{1}{3} & ; x = 3 \end{cases}$$

2) ندرس الاستمرار عند $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) \ne f(2) \Rightarrow$

f غير مستمر عند $x = 2$ ⇐

f غير مستمر على I

3) تذكر: $E(-1,1) = -2$

$f(-1,1) = \frac{-2,2+2}{-3,3} = \frac{-0,2}{-3,3} = \frac{2}{33}$

$\Rightarrow \boxed{f(-1,1) = \frac{2}{33}}$

$x - 1 < E(x) \le x$

⇐ $-x+1 > -E(x) \ge -x$

⇐ $x+1 > 2x - E(x) \ge x$

نقسم على $3x > 0$ (لأن $x \to +\infty$)

$\frac{x+1}{3x} > \frac{2x - E(x)}{3x} \ge \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{x+1}{3x}) = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

حسب مبرهنة الإحاطة تكون: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

X-Math πac

السؤال الرابع:

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) $x^2-4x+5=x^2-4x+4-4+5$

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

2) $f(x)=(x-2)^2+1$

مقارب مائل $\Delta : y=-x+2$

لـ C في جوار $-\infty$ ؛ لأنّ:

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x-2)^2+1}-(-x+2)$

$=\dfrac{(x-2)^2+1-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2+1}+(-x+2)}$

$f(x)-y_\Delta=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}-x+2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=\frac{1}{\infty}=0$

3) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x-2)^2+1}-(-x+2)$

$f(x)-y_\Delta=0\Rightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+1}-(-x+2)=0\Rightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+1}=(-x+2)$; $x\le 2$

$(x-2)^2+1=(x-2)^2\Rightarrow$

$1=0$ مستحيلة الحل

⇐ الفرق من إشارة وحيدة بالتجريب

$x=0\Rightarrow f(x)-y_\Delta=\sqrt{5}-2>0\Rightarrow$

C فوقه Δ دوما"

السؤال الخامس:

i) $f(x)=\dfrac{1}{4-3\sin x}$; $g(x)=\dfrac{x+2\cos x}{4-3\sin x}$

1) $-1\le \sin x\le 1$

$\Rightarrow 3\ge -3\sin x\ge -3$

$\Rightarrow 7\ge 4-3\sin x\ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{7}\le \dfrac{1}{4-3\sin x}\le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{7}\le f(x)\le 1$

2) نضرب: $x+2\cos x>0$ ⇐

$\dfrac{x+2\cos x}{7}\le g(x)\le x+2\cos x$

⇐ $-1\le \cos x\le 1$

⇐ $-2\le 2\cos x\le 2$

⇐ $x-2\le x+2\cos x\le x+2$

$\dfrac{x-2}{7}\le \dfrac{x+2\cos x}{7}\le \dfrac{x+2}{7}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{7}\right)=+\infty\Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\cos x}{7}=+\infty$

⇐ حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

(ii $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{2+x}\ ;\ D_f=\mathbb{R}$

1) نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{x}+\sqrt{2+x})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\frac{x-2-x}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}}}$$

2) $\sqrt{x}+\sqrt{2+x} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}} \geq \frac{-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) \geq \frac{-1}{\sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{2+x} \leq \sqrt{2+x}+\sqrt{2+x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2+x}} \leq \frac{-1}{\sqrt{2+x}}$$

$$\boxed{f(x) \leq \frac{-1}{\sqrt{2+x}}} \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{-1}{\sqrt{2+x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{2+x}}\right)=0$$

⇐ حسب مبرهنة الإحاطة تكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

السؤال السادس:

$f(x)=|x-1|+\frac{x}{x-1}\ ;\ [0,+\infty[\setminus\{1\}$

1) $f(0)=1$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي

2) $|x-1|=x-1\ ;\ x\to+\infty$

$$f(x)-x=x-1+\frac{x}{x+1}-x$$

$$=-1+\frac{x}{x+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-1+1=0 \Rightarrow$$

$y=x$ مقارب مائل لـ C

في جوار $+\infty$

(3

$$f(x)=\begin{cases} -x+1+\dfrac{x}{x-1} & x\in[0,1[\\ x-1+\dfrac{x}{x-1} & x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

f مشتقاً على $[0,1[\ ,\ ]1,+\infty[$

$\left(\dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$$f'(x)=\begin{cases} -1-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0 & x\in[0,1[\\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2} & x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

$1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow$

مرفوض $x-1=-1 \Rightarrow x=0$ لأنها

أو $x-1=+1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=3$

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

(4 f معرّف ومستمر ومتناقص تماماً

على المجال: $x\in[0,1[$ ⇐

$f([0,1[)=]-\infty,1] \Rightarrow$

$0\in]-\infty,1] \Rightarrow$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على

المجال: $x\in[0,1[$

f معرّف ومستمر ومتناقص تماماً

على المجال: $x\in]1,2[$

$f(]1,2[)=]3,+\infty[\Rightarrow$

$0\notin]3,+\infty[\Rightarrow$

ليس للمعادلة $f(x)=0$ أي حل

ضمن المجال: $x\in]1,2[$

f معرّف ومستمر ومتزايد على

المجال: $x\in[2,+\infty[$

$f([2,+\infty[)=[3,+\infty[\Rightarrow$

$0\notin[3,+\infty[\Rightarrow$

ليس للمعادلة $f(x)=0$ أي حل

ضمن المجال: $x\in[2,+\infty[$

⇐ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

على D_f $\quad \alpha\in]0,\tfrac{1}{2}[$

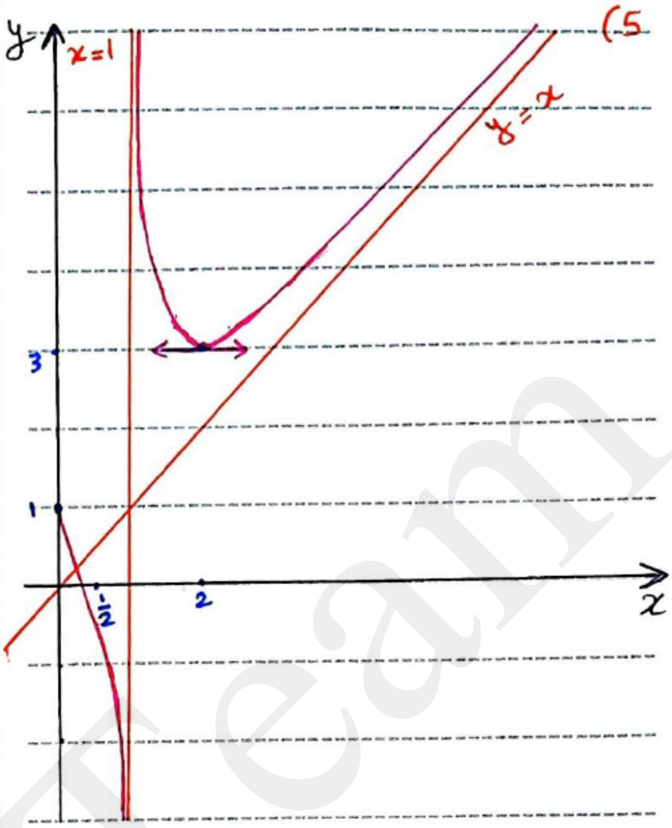
$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f(0)&=1 \\ f(\tfrac{1}{2})&=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} f(0)\cdot f(\tfrac{1}{2})=-\tfrac{1}{2}<0$$

⇐ حسب مبرهنة القيمة الوسطى

فإنّ المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

في D_f ويحقق: $\alpha\in]0,\tfrac{1}{2}[$

(5



$h(x) = |f(x)|$

C_h ينطبق على C_f عندما

$x \in [0,\alpha] \cup]1,+\infty[$

C_h نظير C_f بالنسبة لمحور

الفواصل عندما : $x \in]\alpha, 1[$

(أي أنّ القيم السالب

لـ C_f تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

وأصبح موجب)

(6

عندما $\lambda \in]-\infty, 1]$ للمعادلة حل وحيد

عندما $\lambda \in]1, 3[$ ليس للمعادلة أي حل

عندما $\lambda = 3$ للمعادلة حل وحيد

عندما $\lambda \in]3, +\infty[$ للمعادلة حلّان

حسن محمود المحمود

X Math Bac

#MeEnMathTeam

تدقيق : إيناس دللي

X-Math πac