
الدرس
5

# المعادلات الوسيطية

# IDENTIFYING CONIC SECTIONS AND ROTATIONS


Welcome

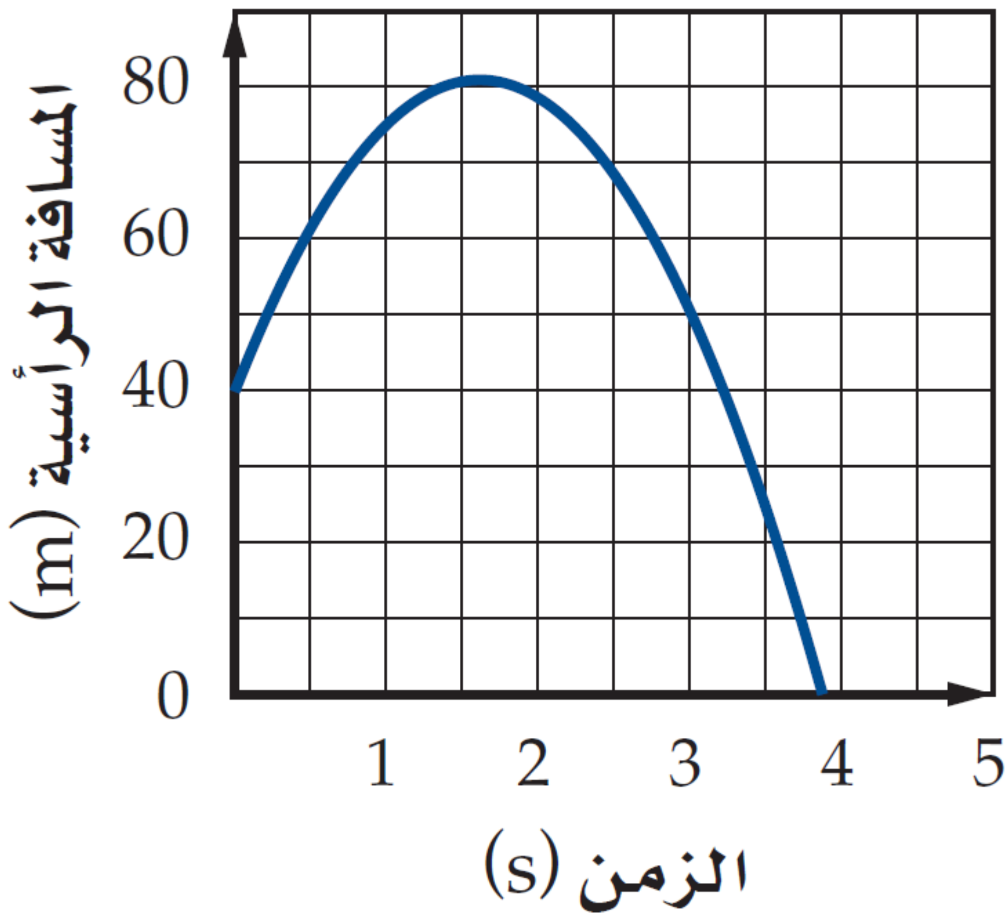

## لماذا ؟

لقد استعملت الدوال التربيعية لتمثيل مسارات المقذوفات مثل كرة السلة، ويمكنك استعمال المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات وتحديد مداها وحساب قيمها.

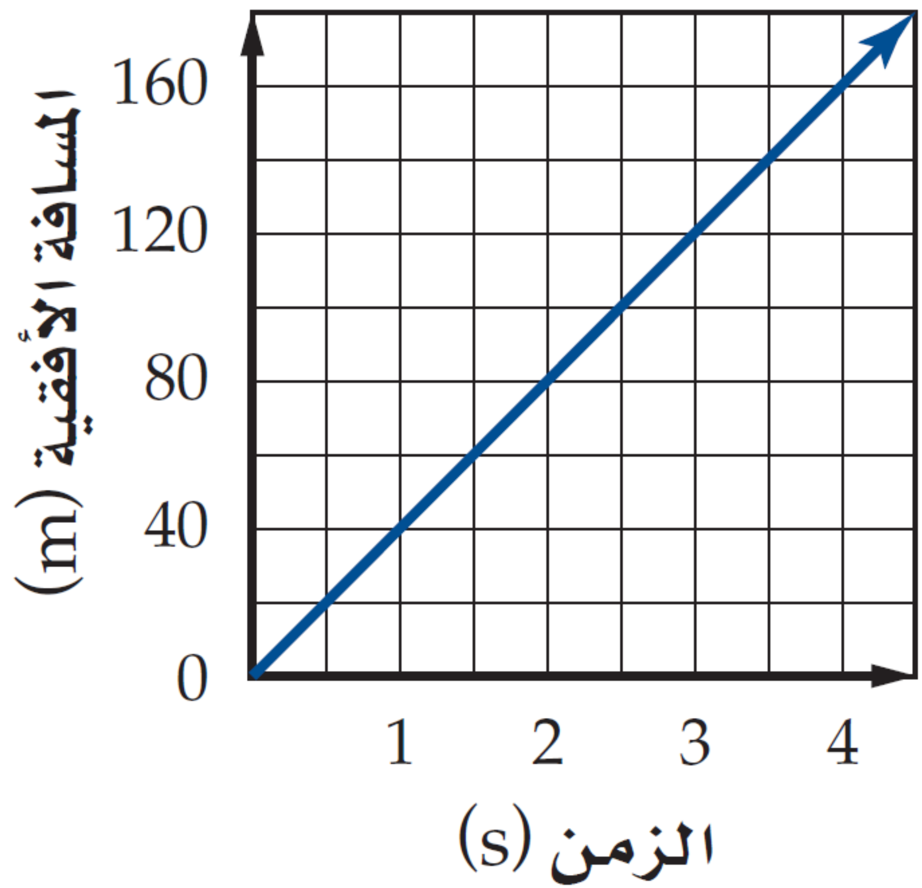
### التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية :

لقد مثلث في هذا الكتاب منحنيات في المستوى xy مستعملاً معادلة ذات متغيرين x , y. أما في هذا الدرس فإنك ستمثّل بعض هذه المنحنيات باستعمال معادلتين في متغير ثالث. لاحظ المنحنيات الثلاثة أدناه، يمثل كل منها ناحية مختلفة مما يحدث عندما يُقذف جسم في الهواء.

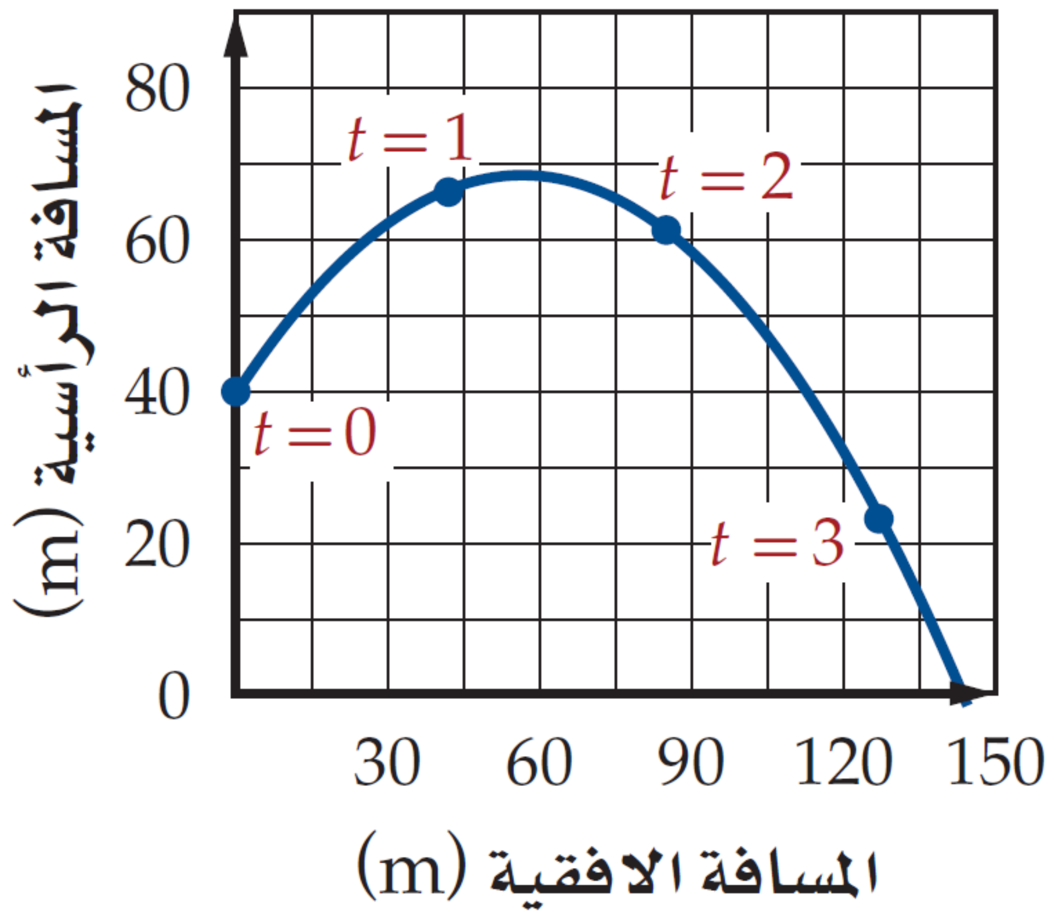
يظهر الشكل 4.5.1 المسافة الرأسية كدالة في الزمن .




يظهر الشكل 4.5.2 المسافة الأفقية علي صورة دالة في الزمن ،




بينما يظهر الشكل 4.5.3 المسافة الرأسية علي صورة دالة للمسافة الأفقية .



تصف التمثيلات البيانية أعلاه ومعادلاتها جزءًا مما يحدث عند إطلاق قذيفة، ويمكننا استعمال المعادلات الوسيطية للتعبير عن موقع الجسم رأسيًّا وأفقيًّا. تمثّل المعادلات الآتية المنحنى المبين في الشكل 4.5.3:

**معادلة ديكارتية**

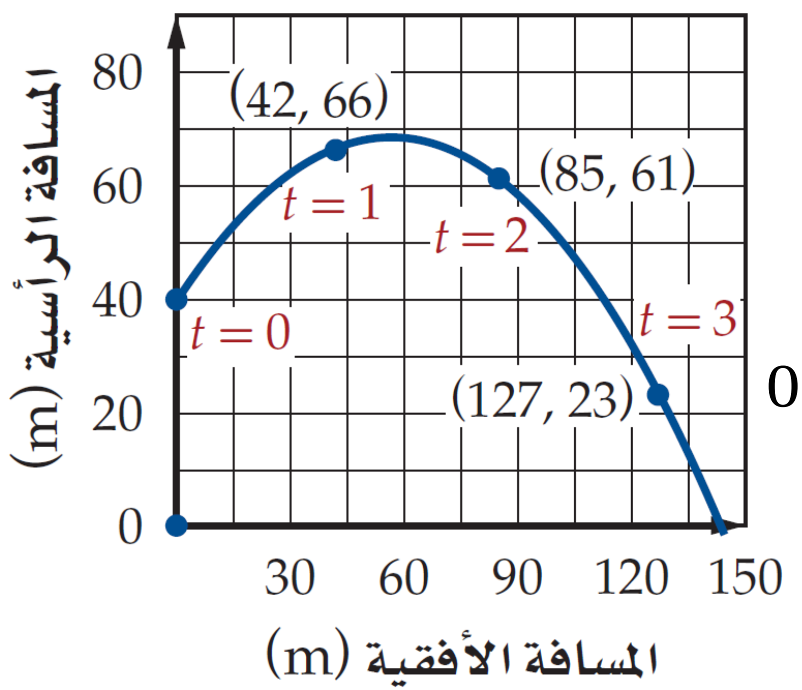
$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

**معادلة وسيطية**

المركبة الأفقية $x = 30\sqrt{2}t$

المركبة الرأسية $y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$

يمكن تحديد موقع الجسم عند زمن معين باستعمال المعادلات الوسيطية بحساب المركبتين الأفقية والرأسية للزمن t. ومثال ذلك عندما كان الزمن t = 0 فإن موقع الجسم يكون عند (0, 40). يسمى t المتغير الوسيط.




يوضح الشكل تمثيل المنحني على الفترة الزمنية $0 \le t \le 4$

يُسمّى تمثيل النقاط مع ترتيب زيادة قيم t ورسم مسار المنحنى في اتجاه معين اتجاه المنحنى ، ويُشار إليه بأسهم على المنحنى.

مفهوم أساسي

## المعادلات الوسيطية

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I، فإن مجموعة الأزواج المرتبة (f(t), g(t)) تمثل منحنى وسيطيًّا. المعادلتان:

$$x = f(t), y = g(t)$$

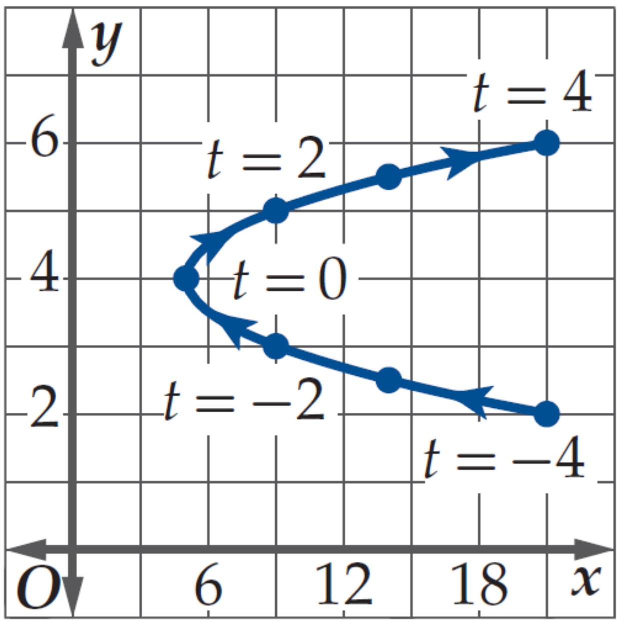
هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط، وI الفترة الوسيطية

## مثال 1

مثّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي :

(a $x = t^2 + 5; y = \frac{t}{2} + 4, -4 \le t \le 4$ .

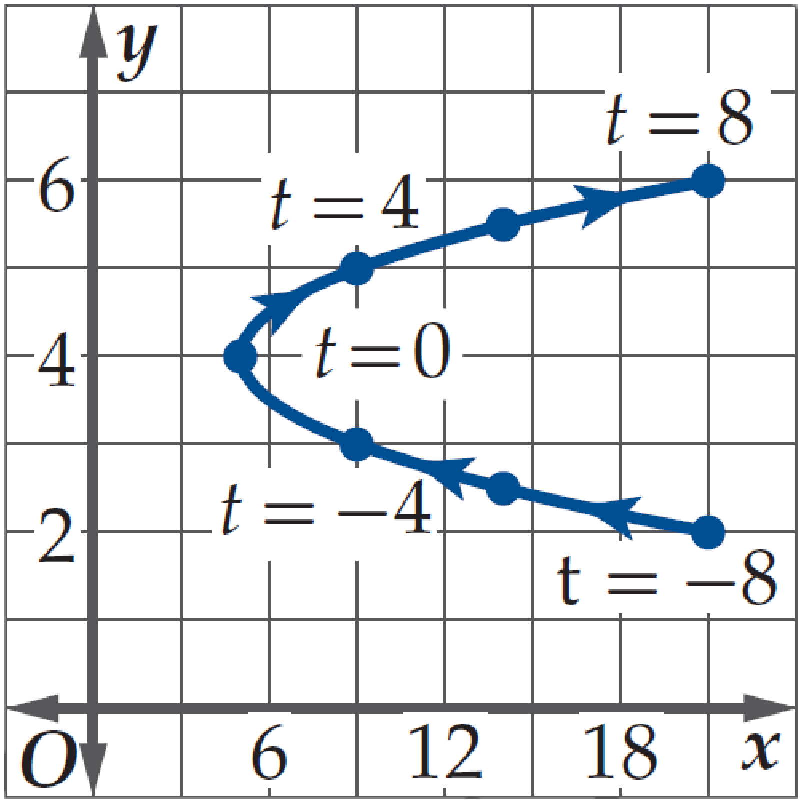
كون جدولاً من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$ ثم مثل بيانياً إحداثيات $(x , y)$ الناتجة عن تعويض قيم t في المعادلتين الوسيطتين ،. ثم صل بين النقاط بمنحني ،




| $t$ | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 21 | 14 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 14 | 21 |
| $y$ | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 |

تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من 4- إلى 4.

b) $x = \frac{t^2}{4} + 5, y = \frac{t}{4} + 4; -8 \le t \le 8$.

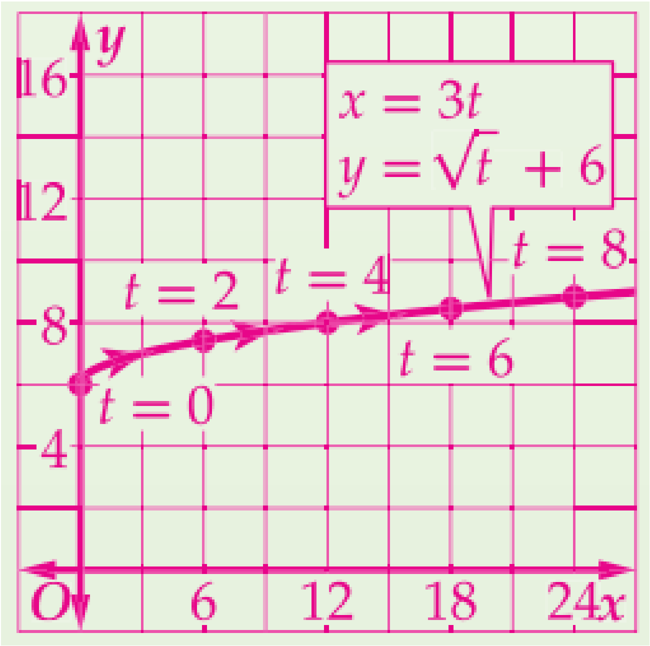



| t | x | y |
|---|---|---|
| −8 | 21 | 2 |
| −6 | 14 | 2.5 |
| −4 | 9 | 3 |
| −2 | 6 | 3.5 |
| 0 | 5 | 4 |
| 2 | 6 | 4.5 |
| 4 | 9 | 5 |
| 6 | 14 | 5.5 |
| 8 | 21 | 6 |

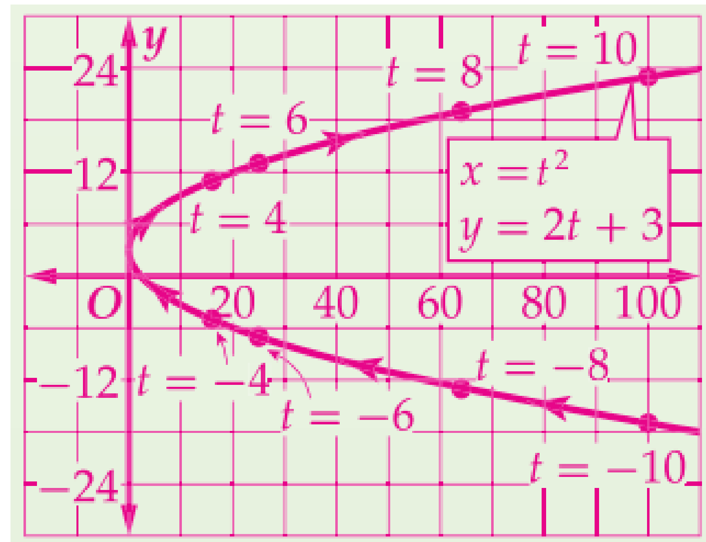
تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من 8- إلى 8.

## تحقق من نفسك

**(1A** $x = 3t\,,\; y = \sqrt{t} + 6\,,\; 0 \le t \le 8$



**1B)** $x = t^2, y = 2t + 3, -10 \le t \le 10$




**يمكنك تمثيل المنحنى نفسه بمعادلتين وسيطيتين مختلفتين، كما في مثال 1، ويكون الاختلاف الوحيد بين المنحنيين في سرعتيهما؛ إذ يسير الجسم على المنحنى في الجزء a بشكل أسرع من الجسم في الجسم b، وعوضًا عن تعيين النقاط لتحديد المنحنى، يمكنك تحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية بحذف المتغير الوسيط بطريقة التعويض.**

## مثال 2

# كتابة المعادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطتين $y = t^2 + 2 , x = 3t - 1$ بالصورة الديكارتية .

معادلة x الوسيطية $\qquad x = 3t - 1$

الحل بالنسبة لـ t $\qquad \frac{x+1}{3} = t$

بتعويض $t = \frac{x+1}{3}$ في معادلة y الوسيطية $\qquad y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$

بتربيع $\frac{x+1}{3}$ $\qquad y = \frac{x^2 + 2x + 1}{9} + 2$

بالتبسيط $\qquad y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$

فتكون المعادلة الديكارتية $\qquad y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$

# تحقق من نفسك

2) اكتب المعادلتين الوسيطتين $x = t^2 - 5 \, , \, y = 4t$ بالصورة الديكارتية .

$$x = \frac{y^2}{16} - 5$$

يجب أحياناً وضع قيود علي المجال بعد التحويل من الصورة الوسيطية إلي الصورة الديكارتية .

مثال 3

# مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

اكتب المعادلتين الوسيطتين $x = \frac{1}{\sqrt{t}}, y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية . ثم مثل المنحني بيانياً ، و حدد المجال .

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}$$ معادلة x الوسيطية

$$\sqrt{t} = \frac{1}{x}$$ الحل بالنسبة لـ t

$$t = \frac{1}{x^2}$$ بتربيع الطرفين

عوض $\frac{1}{x^2}$ بدلاً من t في المعادلة الثانية .

المعادلة الثانية

$$y=\frac{t+1}{t}$$

بتعويض $t=\frac{1}{x^2}$

$$=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$$

بالتبسيط

$$=\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

بالتبسيط

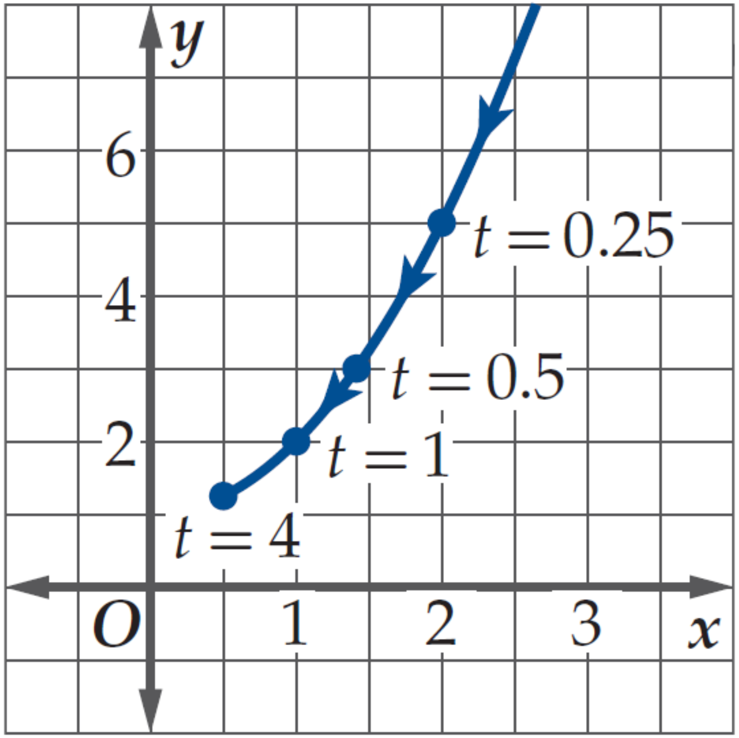
$$=x^2+1$$

علي الرغم من أن الصورة الديكارتية هي $y = x^2 + 1$

فإن المنحني معرف فقط عند $t > 0$ و ذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$

معرفة فقط عندما $t > 0$ ، و كما يظهر في الشكل ،

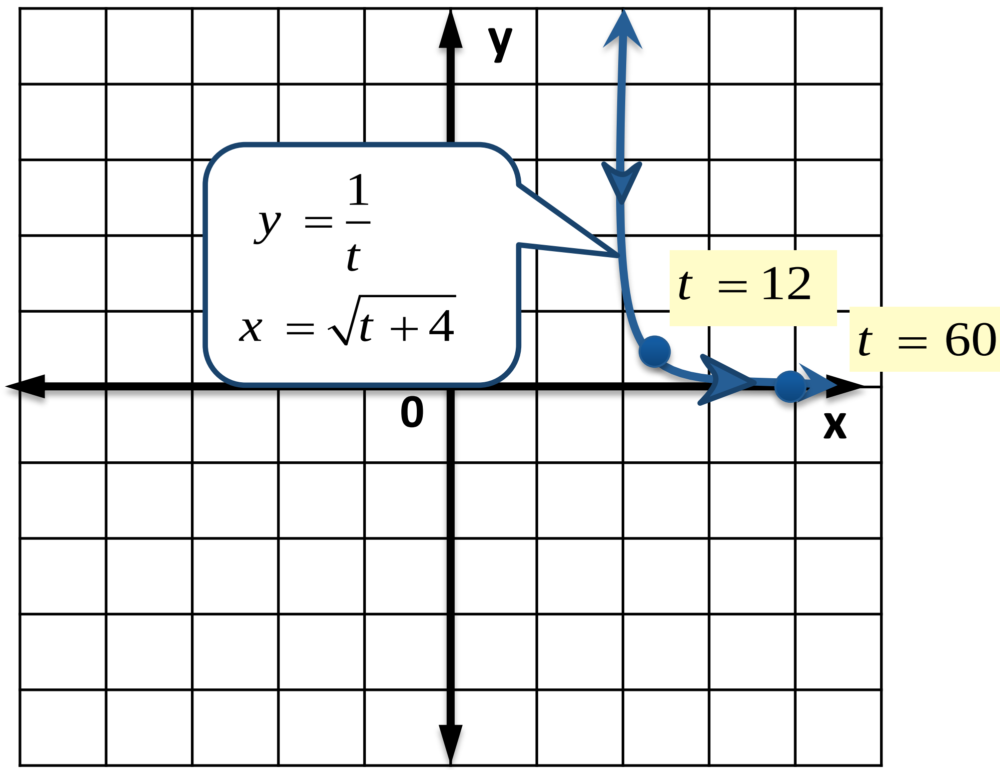
فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون هو $\{x \mid x > 0\}$




# تحقق من نفسك

**2)** اكتب $y=\frac{1}{t}, x=\sqrt{t+4}$ بالصورة الديكارتية ، ثم مثل المنحني بيانياً ، وحدد المجال .

$$y=\frac{1}{x^2-4}, x\geq 0, x\neq 2$$




يمكن أن يكون المتغير الوسيط في المعادلة الوسيطية زاوية مثل .

**مثال 4**

# الصورة الديكارتية عندما يكون المتغير الوسيط زاوية $\theta$

اكتب المعادلتين الوسيطتين $y = 4\sin\theta , x = 2\cos\theta$ بالصورة الديكارتية . ثم مثل المنحني بيانياً

حل المعادلتين بالنسبة لـ $\sin\theta , \cos\theta$ ثم استعمل متطابقة مثلثية .

$y = 4\sin\theta$ المعادلتان الوسيطتان $x = 2\cos\theta$

$\dfrac{y}{4} = \sin\theta$ الحل بالضبط لـ $\sin\theta , \cos$ $\dfrac{x}{2} = \cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

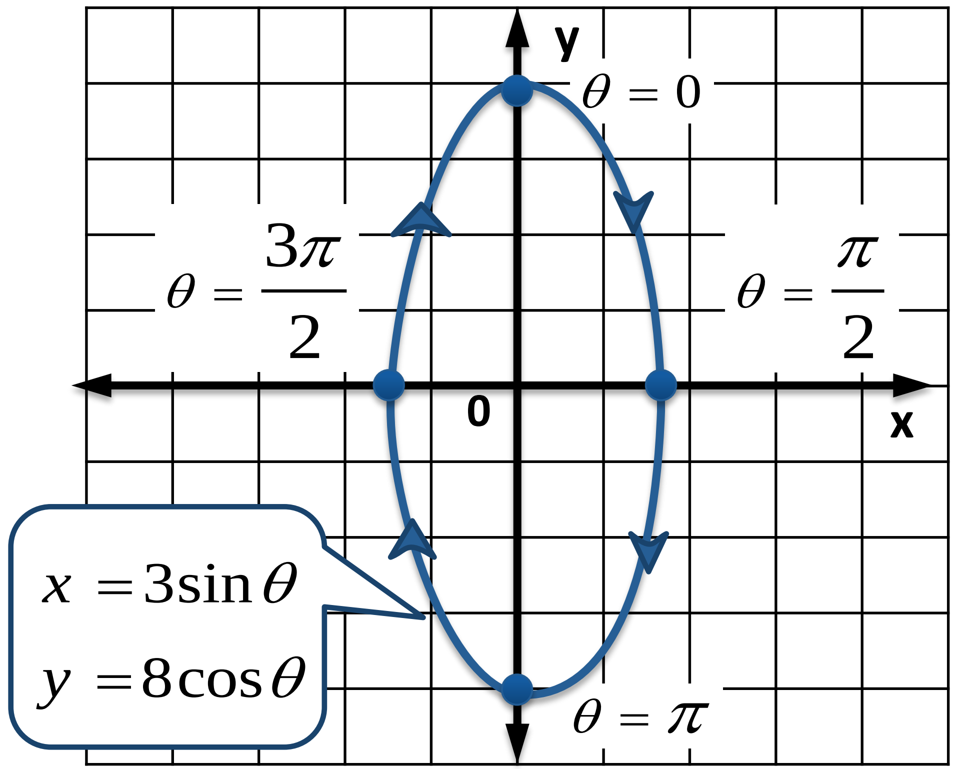
$\left(\dfrac{y}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1$ $\sin\theta = \dfrac{y}{4} , \cos\theta = \dfrac{x}{2}$

$\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{x^2}{4} = 1$ بالتبسيط

تُمثّل المعادلتان الوسيطتان قطعًا ناقصًا تمثيله البياني في الشكل المجاور .

# تحقق من نفسك

**4)** اكتب $x = \sin\theta , y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية ، ثم مثل المنحني بيانياً .

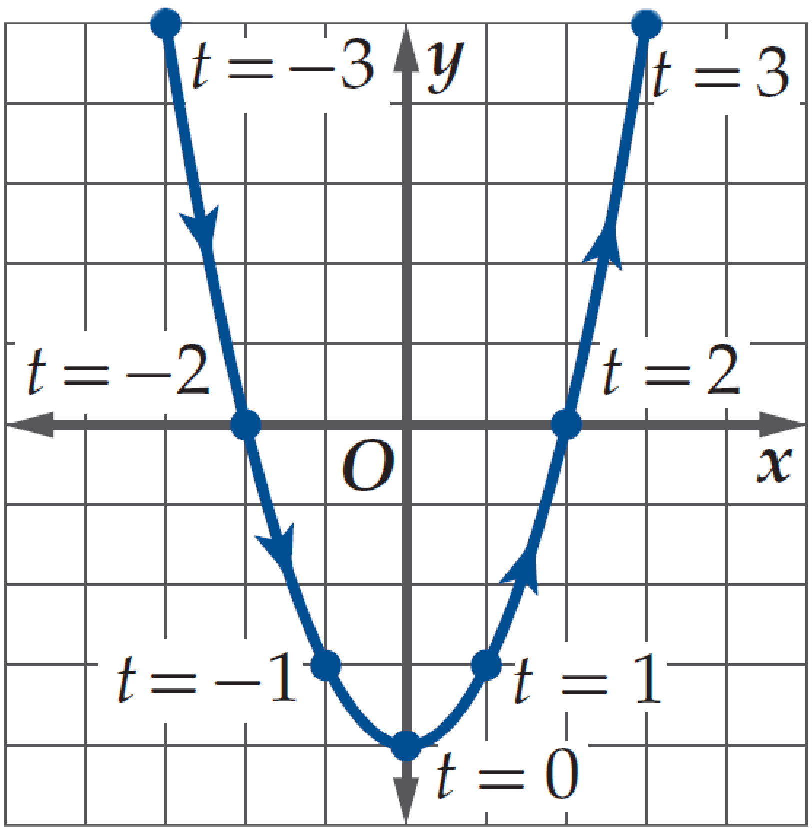



**يمكن وصف المنحنى نفسه باستعمال زوجين مختلفين أو أكثر من المعادلات الوسيطية. إذا كان الفرق فقط في السرعة أو الاتجاه أو كليهما. ويظهر الفرق في السرعة من خلال قيم المتغير الوسيط، ويُشار إلى الاتجاه بأسهم على المنحنى.**

مثال 5

# كتابة معادلات وسيطية من خلال التمثيل البياني

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 - 4$ ثم مثّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه .



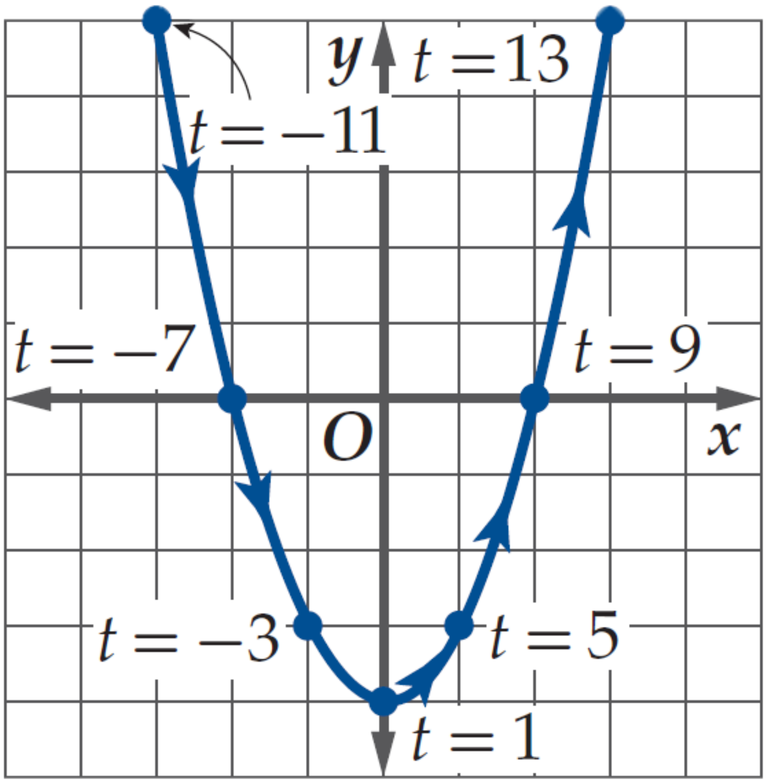

a) $t = x$

$y = x^2 - 4$ المعادلة الأصلية

$= t^2 - 4$ بتعويض x في المعادلة الأصلية

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = t , y = t^2 - 4$

و تبين قيم t علي التمثيل البياني المجاور السرعة ،
كما تبين الأسهم اتجاهات المنحنى .




**(b** $t = 4x + 1$

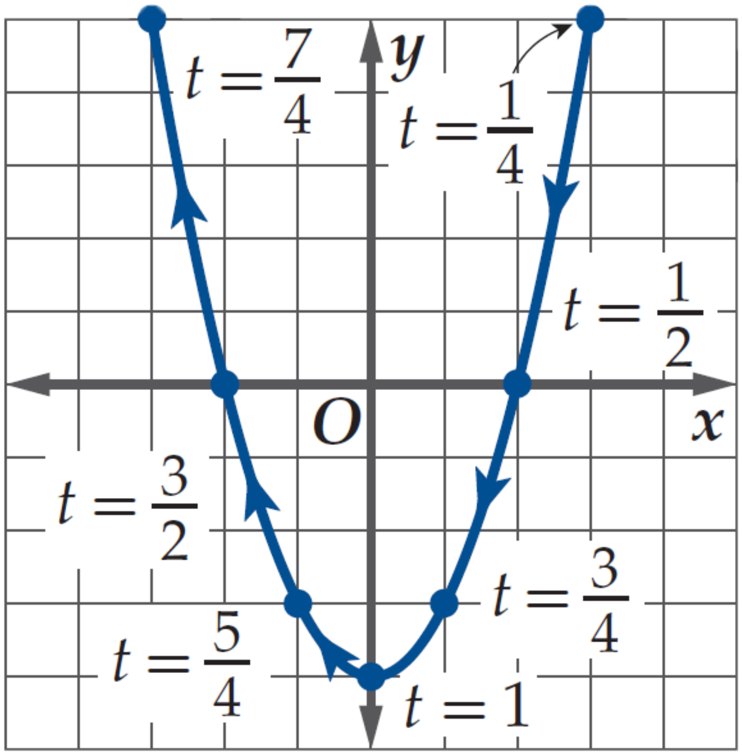
الحل بالنسبة لـ x $x = \dfrac{t-1}{4}$

بتعويض x في المعادلة الأصلية $y = \left(\dfrac{t-1}{4}\right)^2 - 4$

بالتبسيط $y = \dfrac{t^2}{16} - \dfrac{t}{8} - \dfrac{63}{16}$

فتكون المعادلتان الوسيطيتان

$$x = \frac{t-1}{4}, y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$$




(b $t = 1 - \frac{x}{4}$

الحل بالنسبة لـ x $4 - 4t = x$

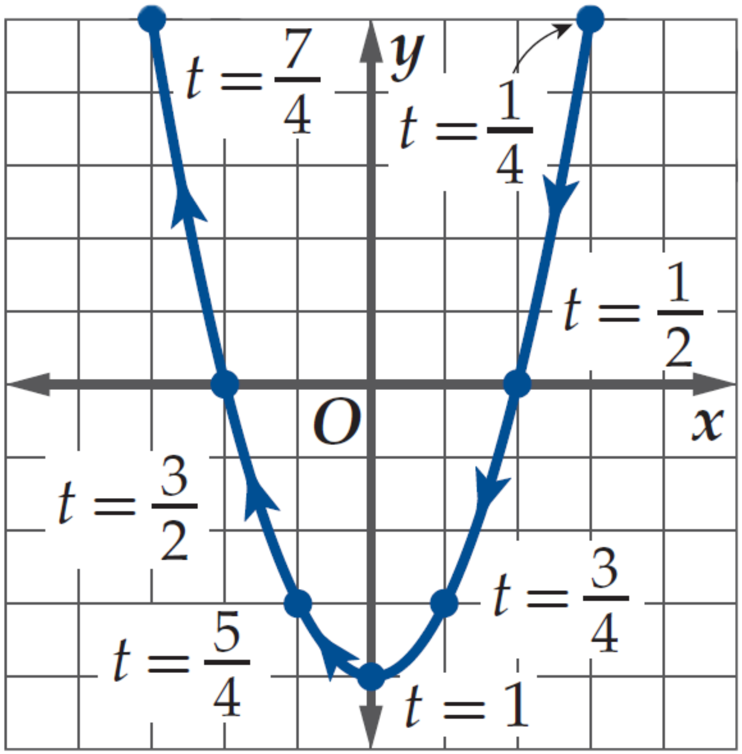
بتعويض x في المعادلة الأصلية $y = (4 - 4t)^2 - 4$

بالتبسيط $= 16t^2 - 32t + 12$

فتكون المعادلتان الوسيطيتان

$$x = 4 - 4t \,, y = 16t^2 - 32t + 12$$

لاحظ أن السرعة هنا أكبر بكثير منها في a، أمّا الاتجاه، فكما هو مشار إليه بالأسهم.




(b $t = 1 - \frac{x}{4}$

الحل بالنسبة لـ x $\quad 4 - 4t = x$

بتعويض x في المعادلة الأصلية $\quad y = (4-4t)^2 - 4$

بالتبسيط $\quad = 16t^2 - 32t + 12$

فتكون المعادلتان الوسيطيتان

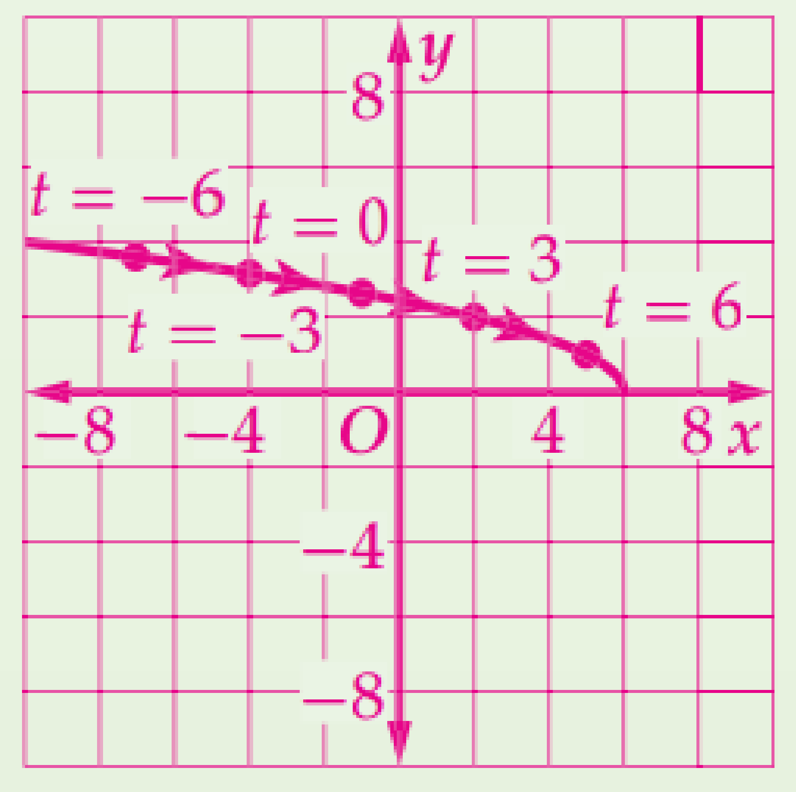
$$x = 4 - 4t \, , y = 16t^2 - 32t + 12$$

لاحظ أن السرعة هنا أكبر بكثير منها في a، أمّا الاتجاه، فكما هو مشار إليه بالأسهم.

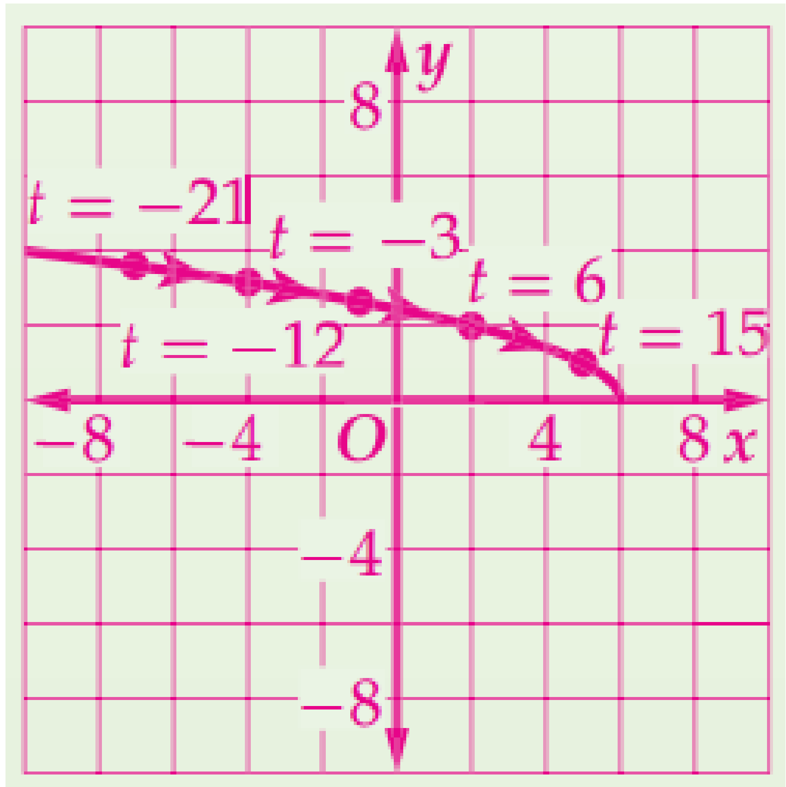
## تحقق من نفسك

**5)** استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثّلان المعادلة الديكارتية $x = 6 - y^2$ ثم مثّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه .

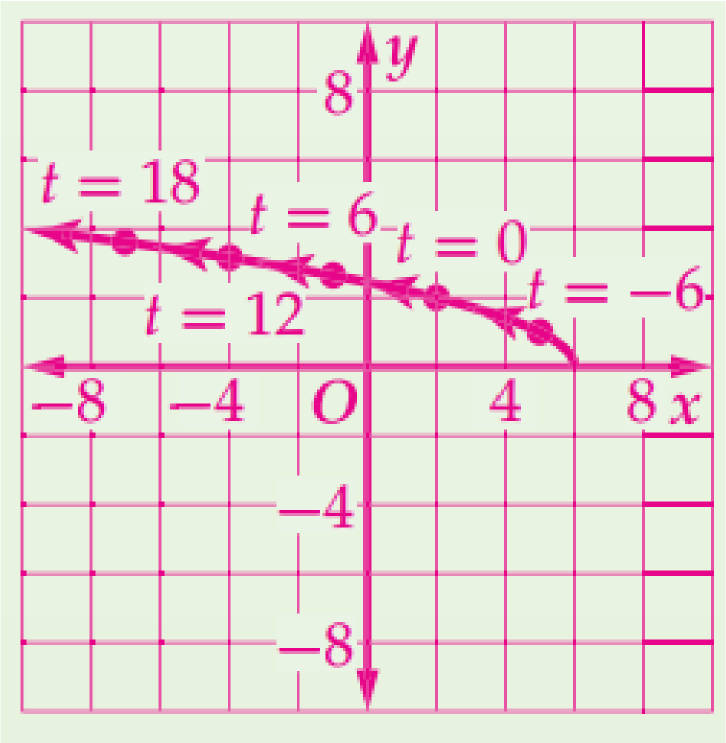
**5A)** $t = x + 1$




$t = 3x$ (5B




$t = 4 - 2x$ (5C



## حركة المقذوفات :

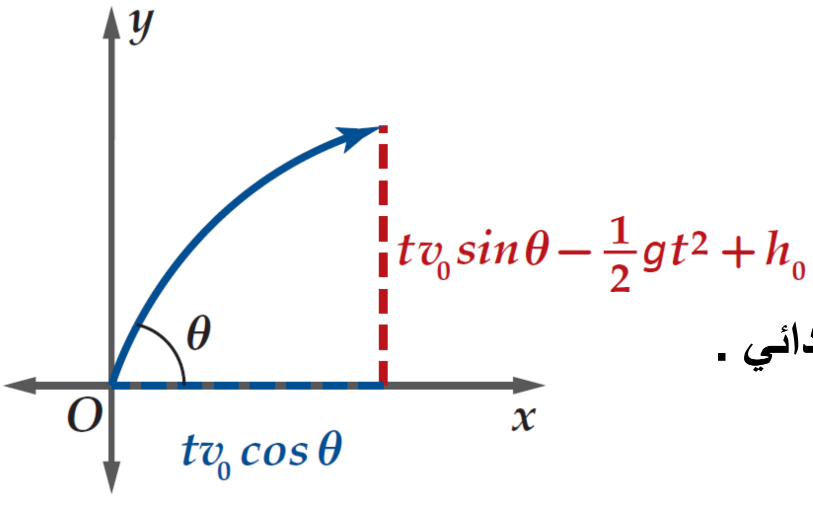
تستعمل المعادلات الوسيطية عادةً في محركات حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف يصنع زاوية غير قائمة مع الأفق بالمعادلتين الوسيطيتين الآتيتين:

**مفهوم أساسي** **حركة المقذوفات**

إذا قذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية $\upsilon_0$ بحيث يصنع زاوية غير قائمة $\theta$ مع الأفق ، فإن :

المسافة الأفقية : $x = t\upsilon_0 \cos\theta$

المسافة الرأسية : $y = t\upsilon_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$



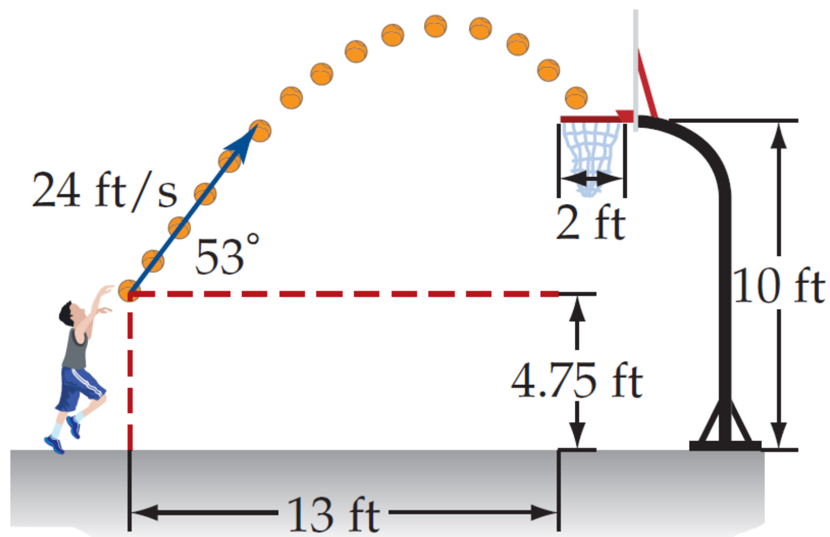

حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، $h_0$ الارتفاع الابتدائي .

## مثال 6

# حركة المقذوفات

**فيزياء : يتدرب نوّاف على الرميات الحرة في كرة السلة، فقذف الكرة بسرعة ابتدائية مقدارها 24ft/s، وبزاوية تمثيل 53 على الأفق، وكانت المسافة الأفقية بين يده والحافة الأمامية لحلقة السلة هي 13ft، وارتفاع حلقة السلة عن الأرض 10ft، وقطر الحلقة 2ft. إذا كان ارتفاع يده عن الأرض 4.75ft، فهل سيحرز نوّاف نقاطًا من هذه الرمية؟**

**ارسم شكلاً يوضّح الموقف.**



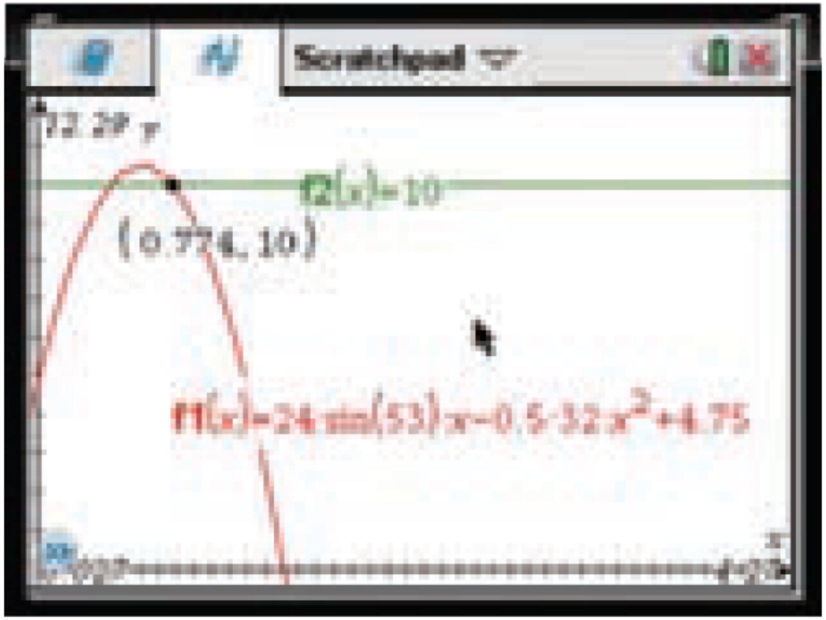

لتحديد ما إذا كانت الرمية قد حقّقت نقاطًا أم لا، لابد من حساب المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة عندما كان ارتفاعها **10ft**. اكتب أولاً معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$$y = t\upsilon_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

$$\upsilon_0 = 24, \theta = 53°, g = 32, h_0 = 4.75$$

$$y = t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$$




مثّل منحنى معادلة موقع الكرة الرأسي و المستقيم y = 10 على نفس الشاشة سيقطع المستقيم المنحنى في نقطتين و تمثل نقطة التقاطع الثانية الكرة و هي ساقطة باتجاه السلة ، استعمل خاصية intersection من قائمة Analyze Graph في الحاسبة البيانية – Ti nspire لإيجاد نقطة التقاطع الثانية مع المستقيم y = 10 ، و هي القيمة 0.77 ثانية تقريباً .

**حدد موقع الكرة الأفقي عند الزمن 0.77 ثانية .**

$$x = t\upsilon_0 \cos\theta$$

**المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الأفقي**

$$= 0.77(24)\cos 53$$

$$\upsilon_0 = 24, \theta = 53°, t \approx 0.77$$

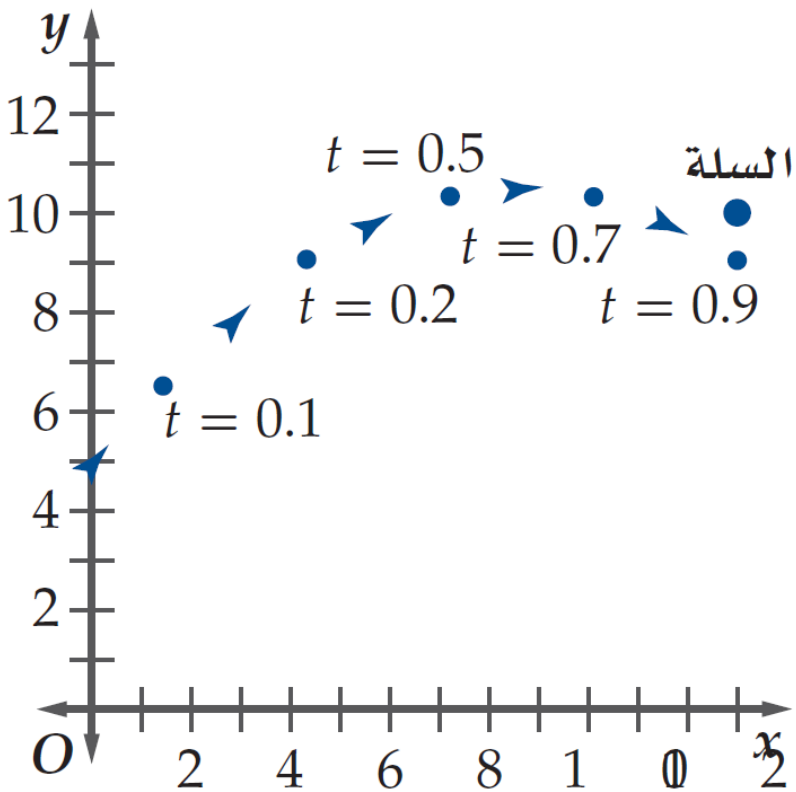
$$\approx 11.1$$

**باستعمال الحاسبة**

**بما أن الموقع الأفقي للكرة أقل من 13ft، عندما تصل الكرة إلى ارتفاع 10ft وهي ساقطة، فإن الكرة لن تصل إلى السلة؛ لذا فإن نوَّافًا لم يحرز نقاطًا من هذه الرمية.**

## التحقق :

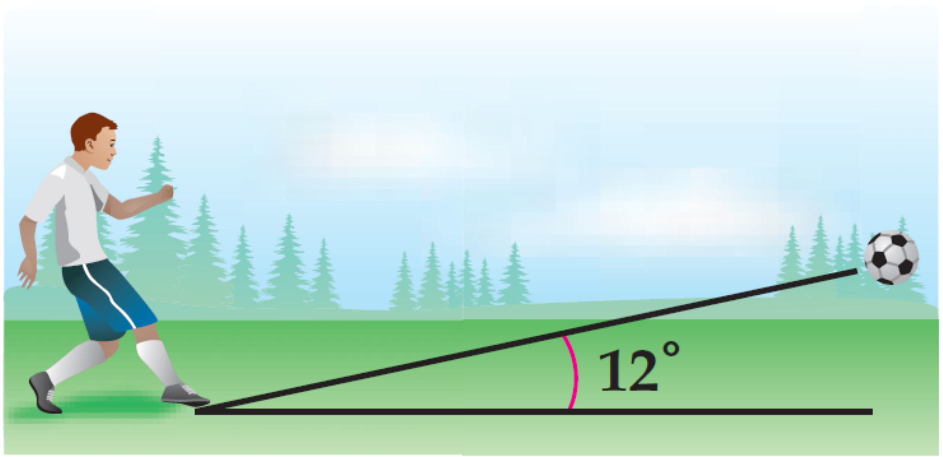
يمكنك تأكيد نتائج الحسابات بتمثيل منحنيي المعادلتين الوسيطيتين، وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.




| $t$ | $x$ | $y$ | $t$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4.75 | 0.5 | 7.22 | 10.33 |
| 0.1 | 1.44 | 6.51 | 0.6 | 8.67 | 10.49 |
| 0.2 | 2.89 | 7.94 | 0.7 | 10.11 | 10.32 |
| 0.3 | 4.33 | 9.06 | 0.8 | 11.55 | 9.84 |
| 0.4 | 5.78 | 9.86 | 0.9 | 13.00 | 9.04 |

# تحقق من نفسك

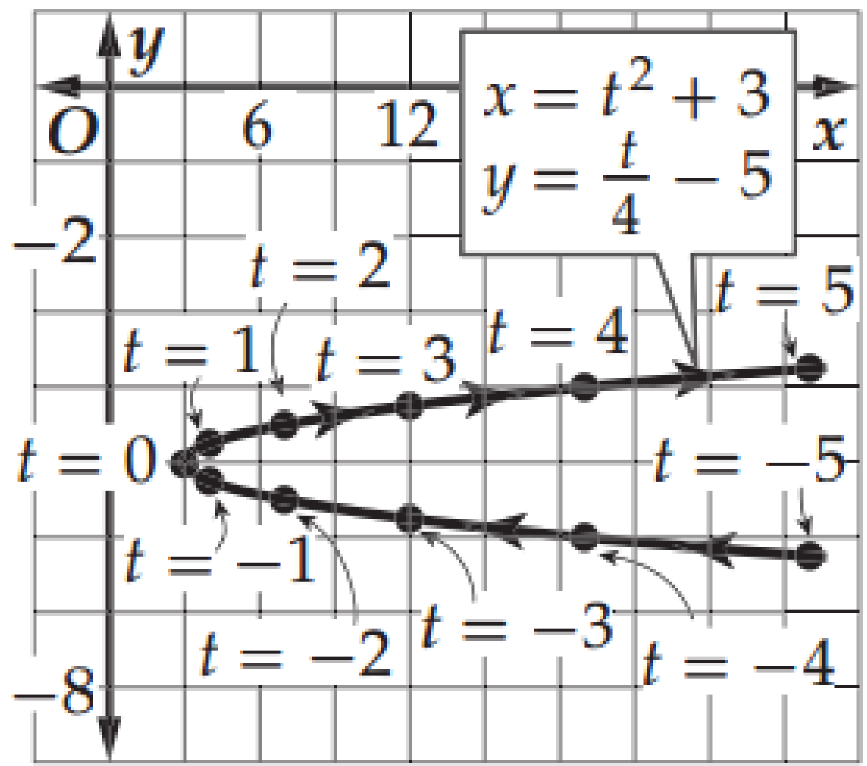
6) كرة القدم : ركل أحمد كرةً بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 56 m / s وبزاوية مقدارها 12o مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟



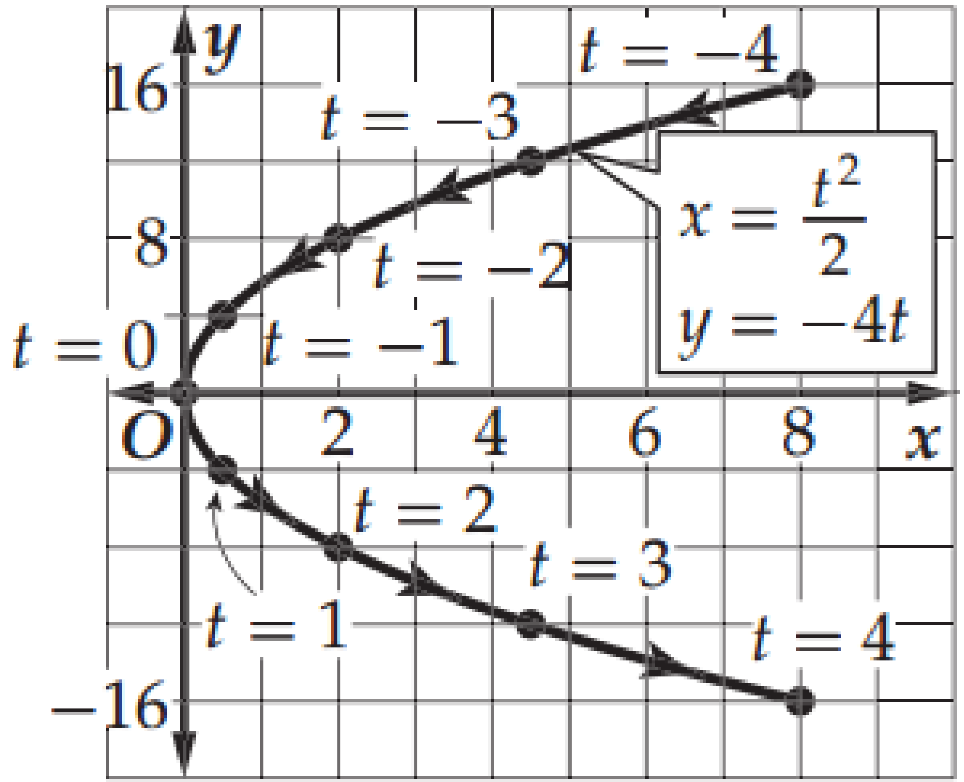

$130\ m$

مثّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1)

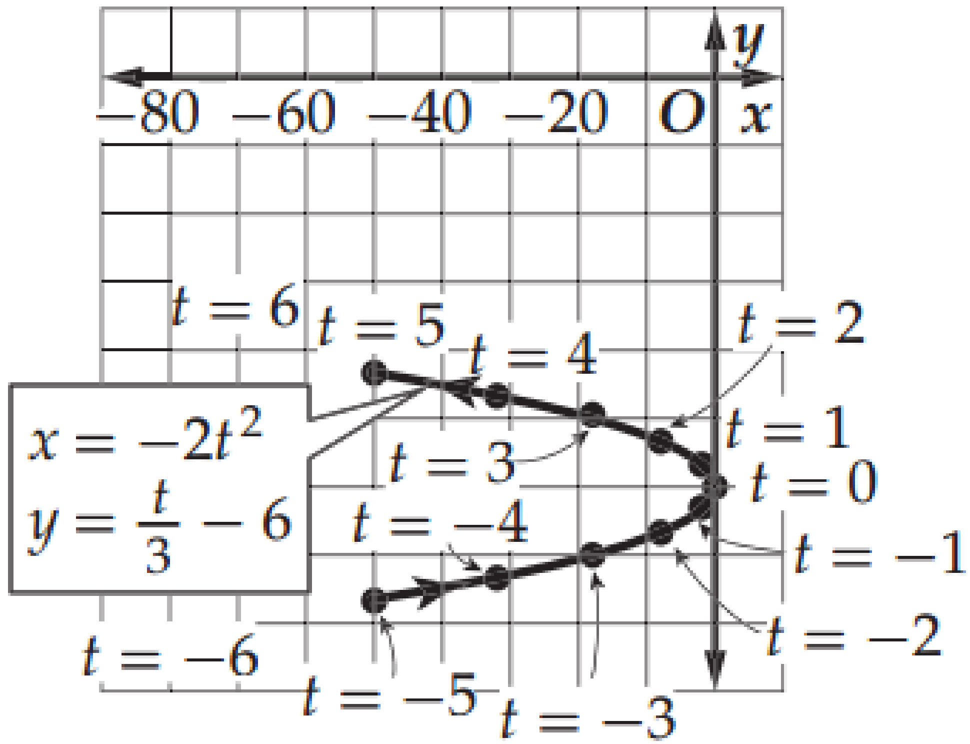
**1)** $x = t^2 + 3,\ y = \frac{t}{4} - 5;\ -5 \le t \le 5$



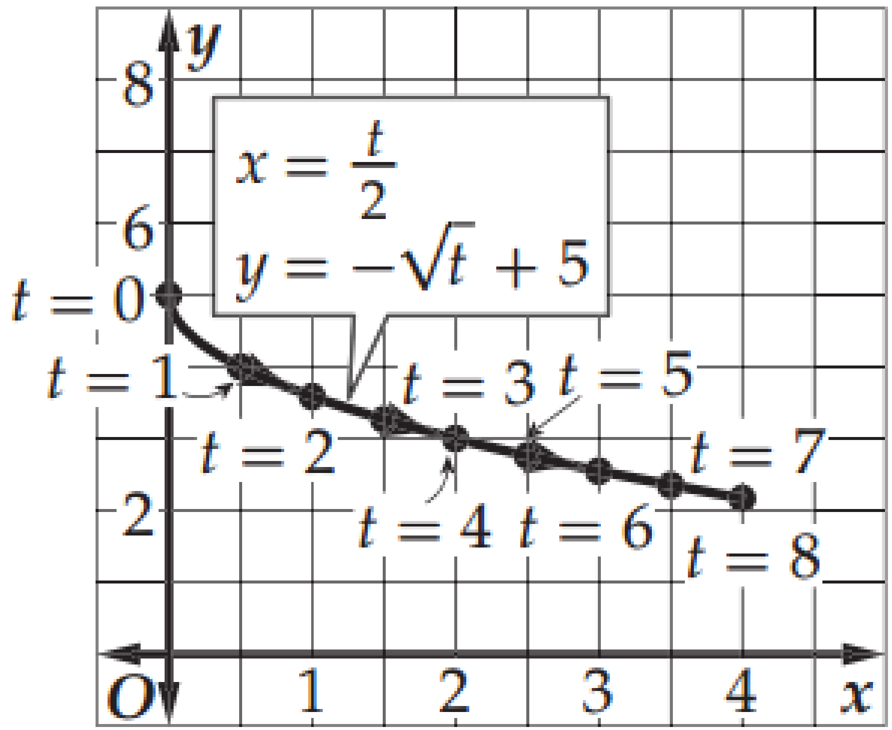

$$x = \frac{t^2}{2}, y = -4t\,; -4 \le t \le 4 \quad \textbf{(2}$$



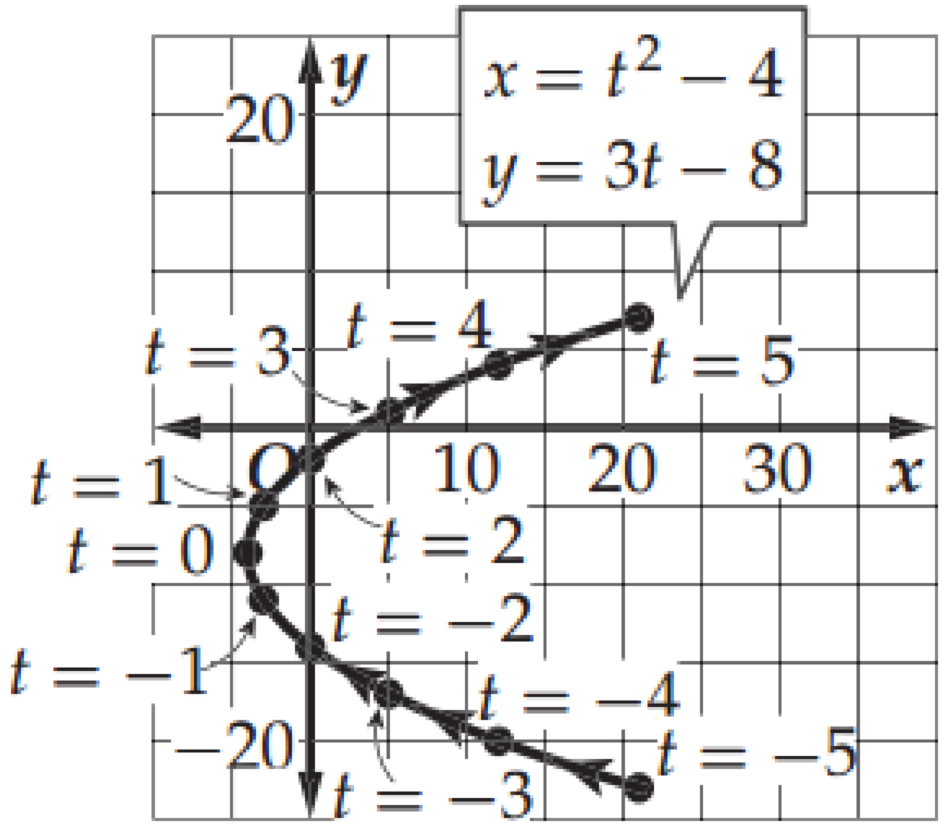

$x = -2t^2, y = \frac{t}{3} - 6; -5 \le t \le 5$ **(3**



$$x = \frac{t}{2}, y = -\sqrt{t} + 5; 0 \le t \le 8$$ **(4**

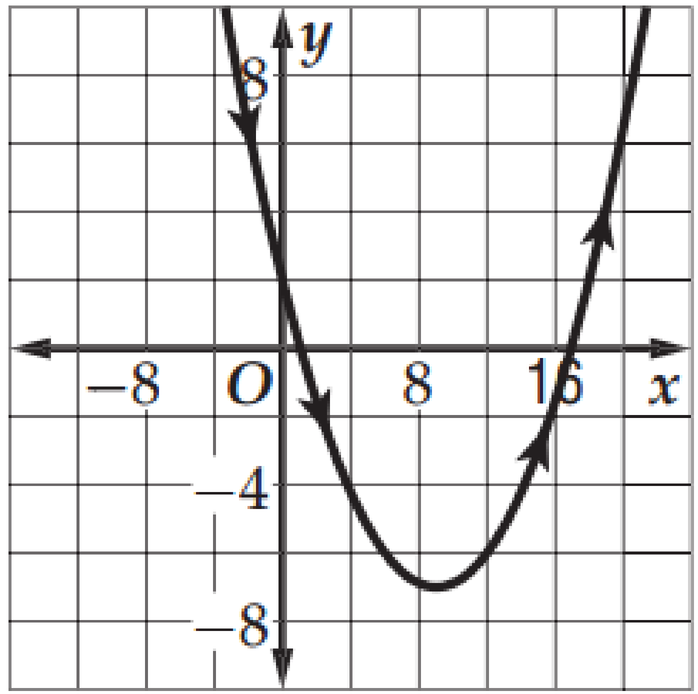



$x = t^2 - 4, y = 3t - 8; -5 \le t \le 5$ **(5**



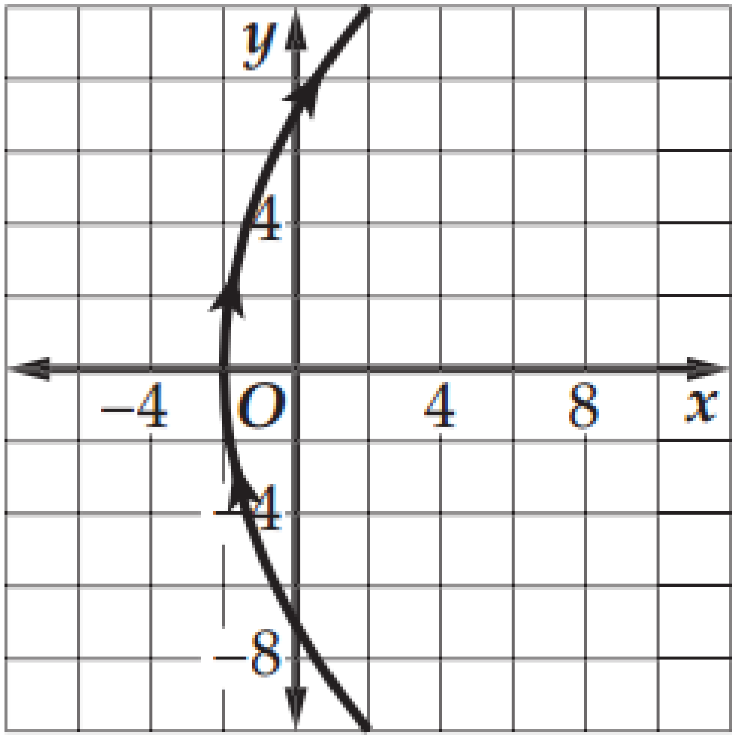

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال: (المثالان 2, 3)

**6)** $y = t^2 - 7, x = 3t + 9$



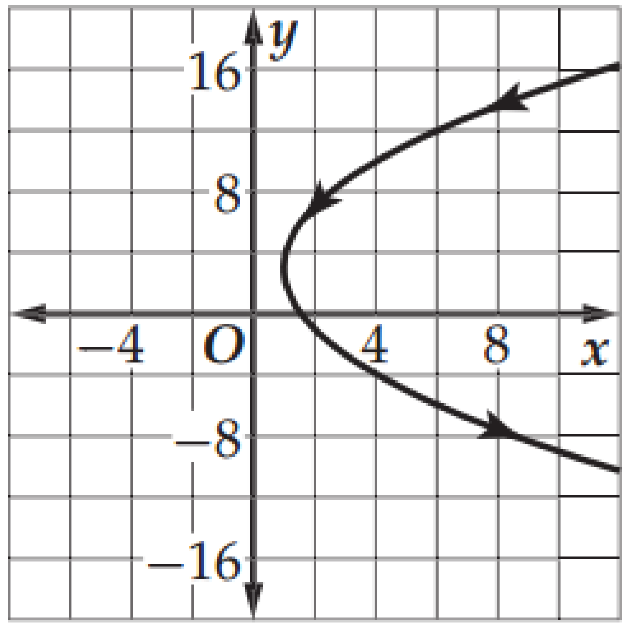

$$D = \{x \mid x \in R\}$$

$y = 5t, x = t^2 - 2$ **(7**



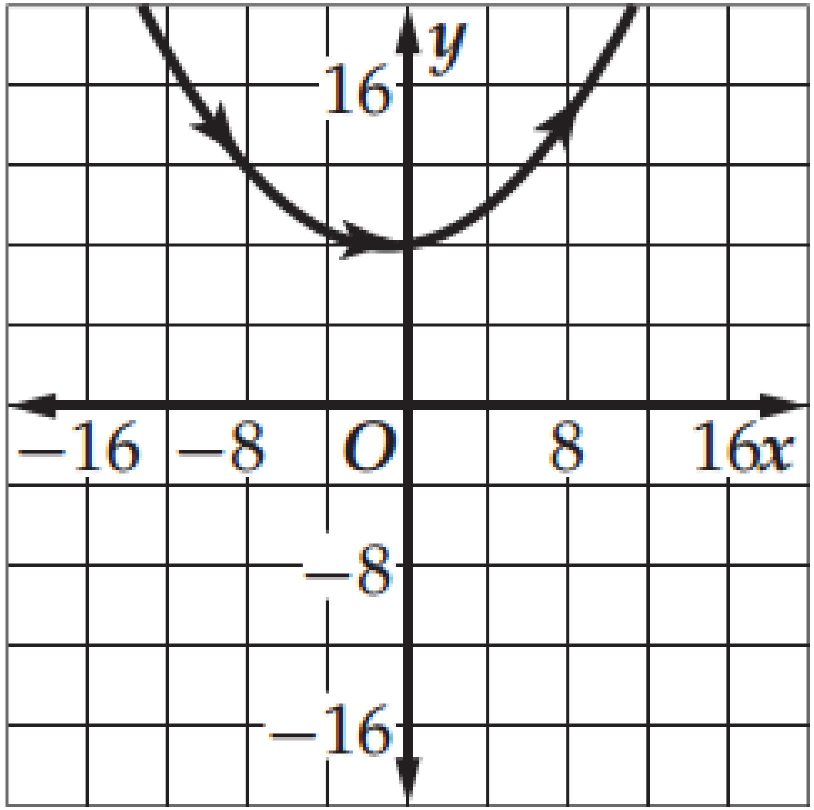

$$D = \{x \mid x \geq -2, x \in R\}$$

$y = -4t + 3, x = t^2 + 1$ **(8**



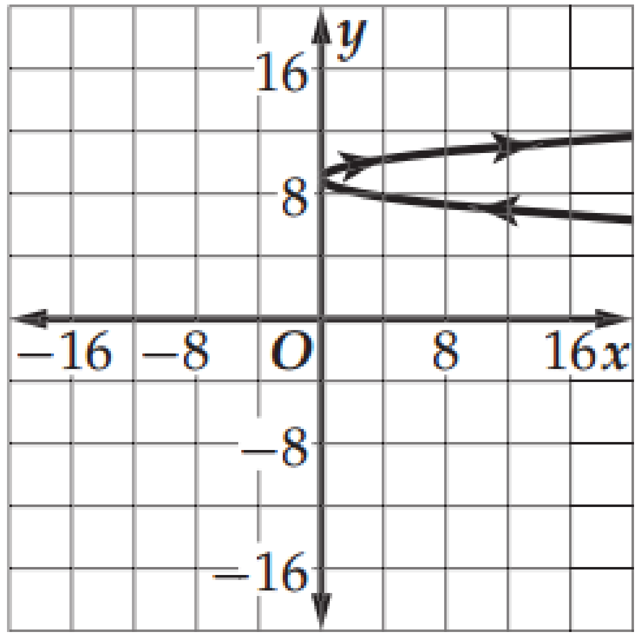

$$D = \{x \mid x \geq 1, x \in R\}$$

$y = 2t^2 + 8, x = 5t - 1$ (9



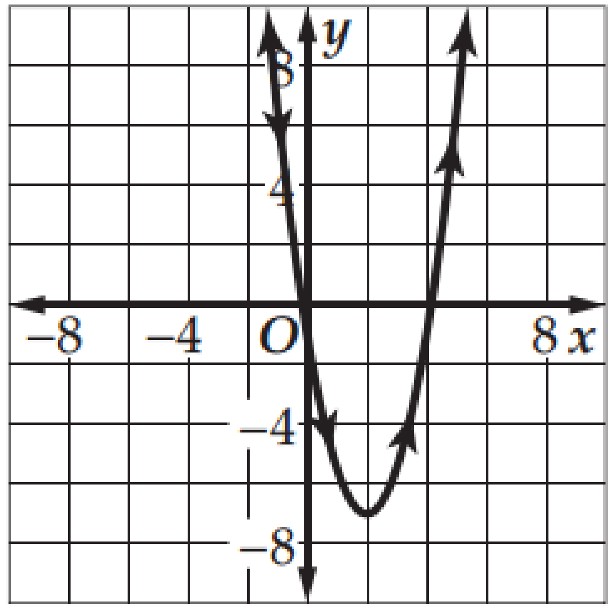

$$D = \{x \mid x \in R\}$$

$$y = \frac{6t}{5} + 9,\ x = 4t^2 \quad \textbf{(10}$$




$$D = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathrm{R}\}$$

$$y = \frac{t^2}{6} - 7,\ x = \frac{t}{3} + 2 \quad \textbf{(11}$$




$$D = \{x \mid x \in R\}$$

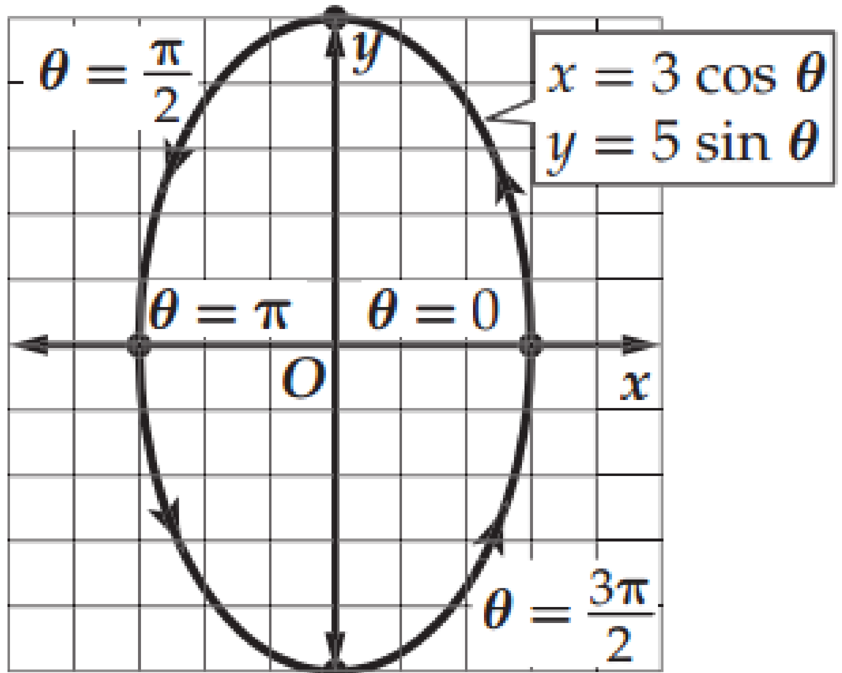
**12) ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد $t$ ثانية ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$ ، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد $t$ ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$ ، حيث $y$ , $x$ مقيسة بالأقدام. اكتب معادلة ديكارتية تمثل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 \leq t \leq 5$ . (مثال 3)

$$y = 45 - 3x^2, x > 0$$

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثل المنحنى بيانيًّا: (مثال 4)

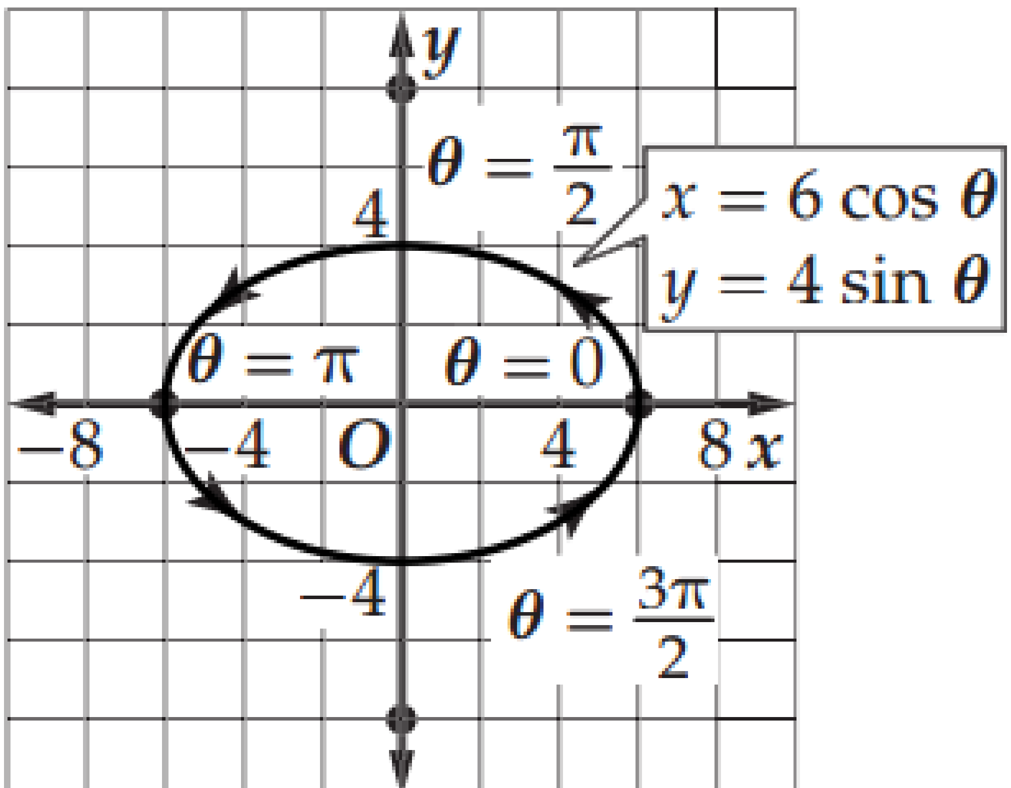
(13 $y = 5\sin\theta, x = 3\cos\theta$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$



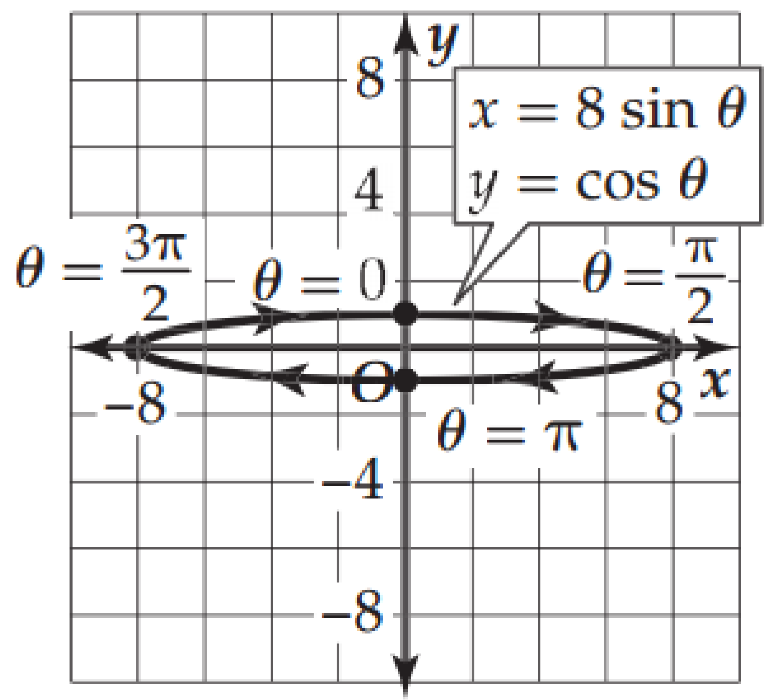

$y = 4 \sin \theta, x = 6 \cos \theta$ **(14**

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{36} = 1$$



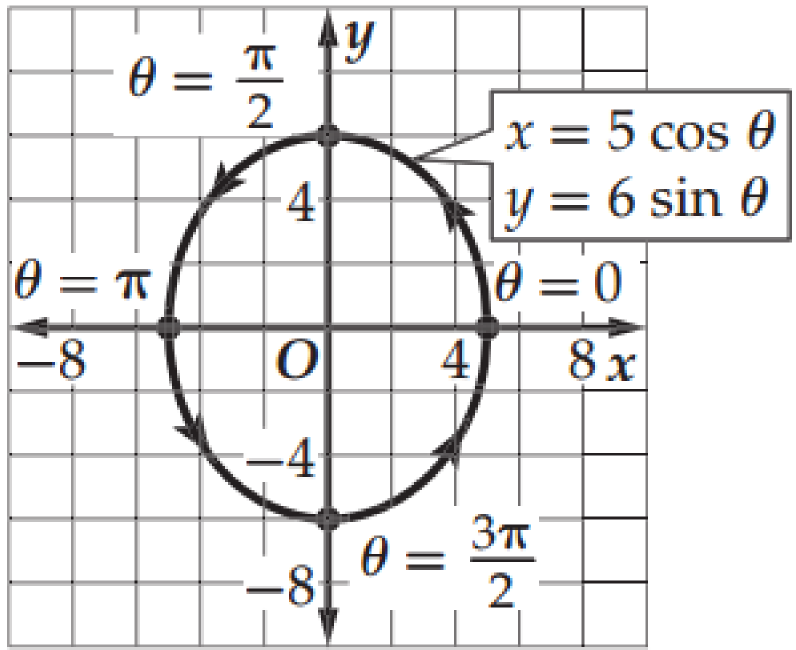

$y = \cos\theta, x = 8\sin\theta$ **(15**

$$y^2 + \frac{x^2}{64} = 1$$



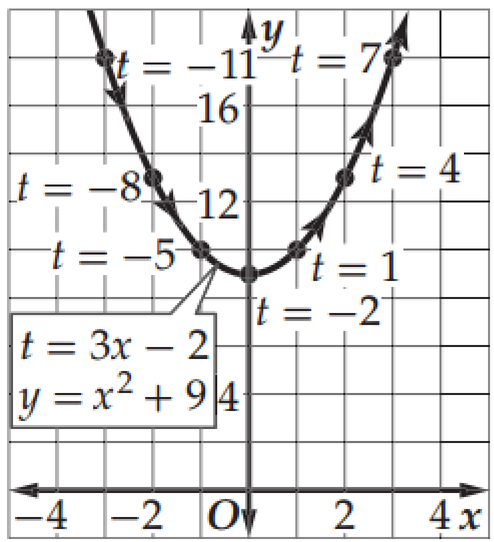

$y = 6 \sin \theta, x = 5 \cos \theta$ **(16**

$$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$$




استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة المعطاة، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5)

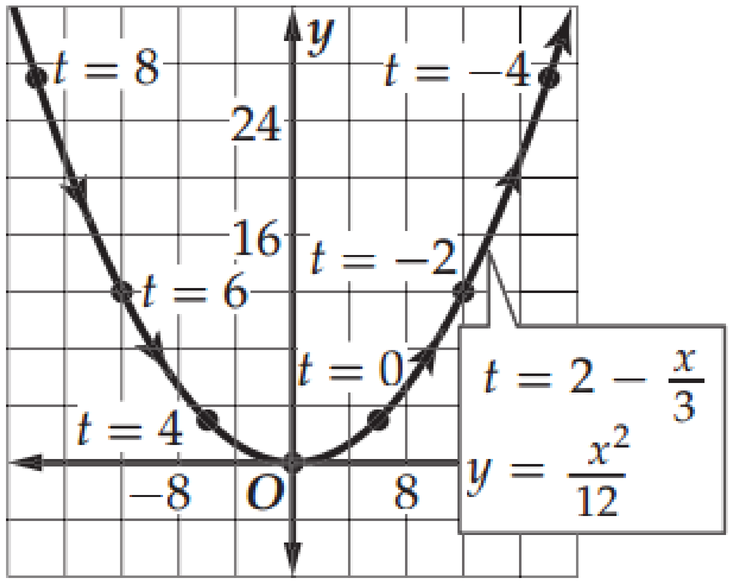
17) $t = 3x - 2, y = x^2 + 9$




$$x = \frac{t+2}{3},$$

$$y = \frac{t^2}{9} + \frac{4t}{9} + \frac{85}{9}$$

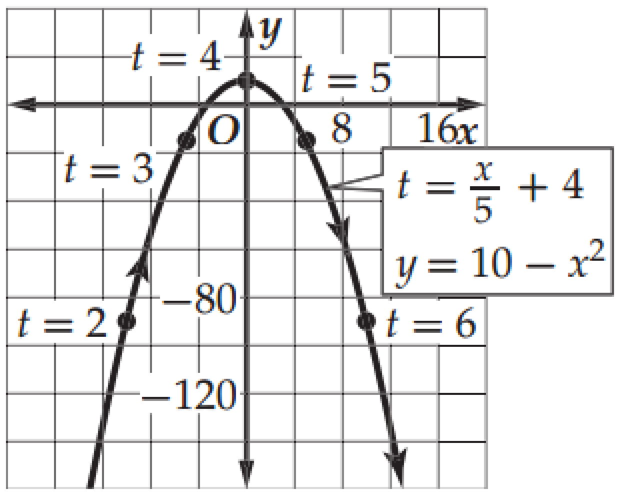
$t = 2 - \frac{x}{3}, y = \frac{x^2}{12}$ **(18**




$x = 6 - 3t$ ,

$y = \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3$

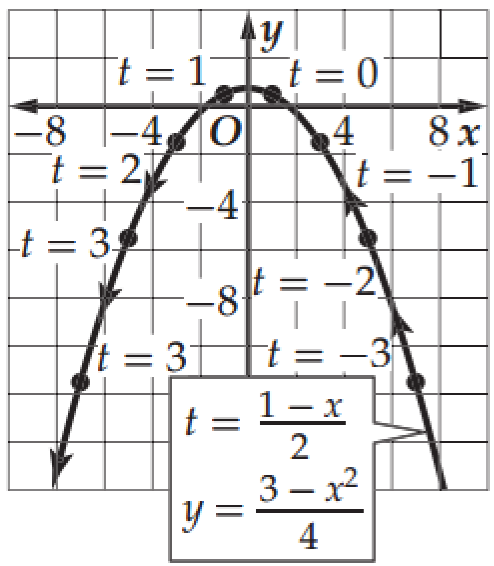
$t = \frac{x}{5} + 4, y = 10 - x^2$ **(19**




$x = 5t - 20$ ,

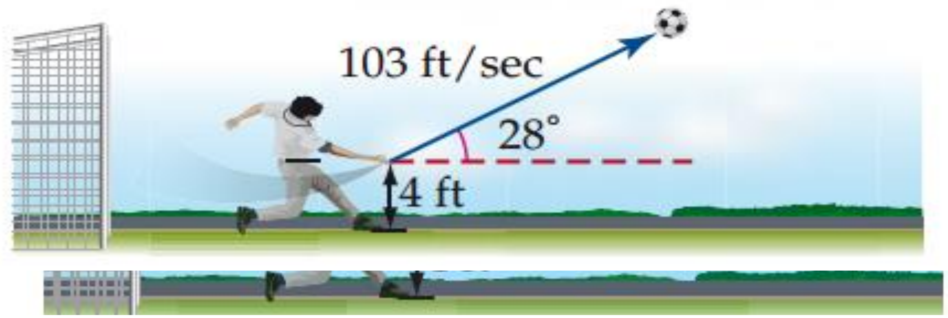
$y = -25t^2 + 200t - 390$

$$t = \frac{1 - x}{2}, y = \frac{3 - x^2}{4} \quad \textbf{(20}$$




$$x = 1 - 2t\ ,$$
$$y = -t^2 + t + \frac{1}{2}$$

**21)** **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كما في الشكل أدناه كرة بسرعة ابتدائية مقدارها $103\,ft/s$ لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها $28°$.
ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟ **(مثال 6)**




**282 ft**

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال:

(22 $x = \sqrt{t} + 4$

$y = 4t + 3$

$4x^2 - 32x + 67, x \geq 4$

(23 $x = \log t$

$y = t + 3$

$y = 10^x + 3$

(24 $x = \sqrt{t - 7}$

$y = -3t - 8$

$y = -3x^2 - 29, x \geq 0$

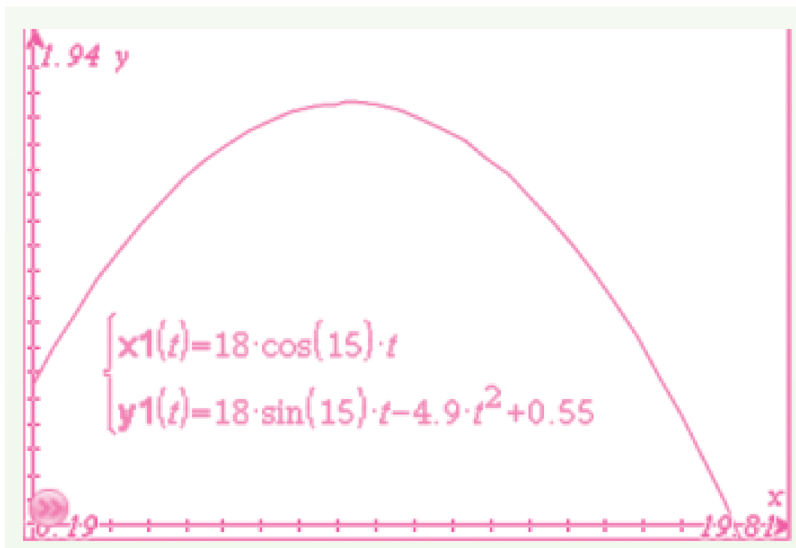
(25 $x = \log (t - 4)$

$y = t$

$y = 10^x + 4$ $y = t$

**26)** **كرة التنس:** ضرب جمال كرة تنس من على ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s ، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها $15°$.

**a)** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية.



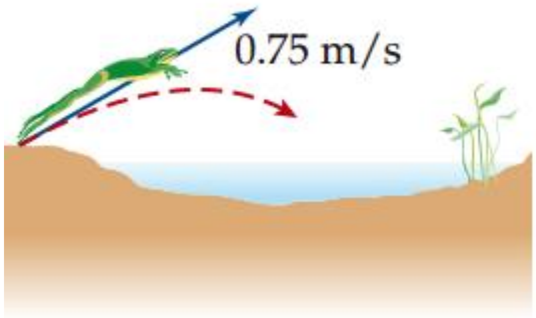

**b)** ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟

1.05 s تقريبًا

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟

نعم: تصل الكرة إلى الشبكة بعد 0.575 ثانية. وعند هذا الزمن يكون ارتفاع الكرة 1.6 m ، وبذلك تكون قد اجتازت الشبكة.

27) **أحياء:** يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية $0.75\,m/s$، ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها $45°$. وينخفض سطح الجدول $0.3\,m$ عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن $g$ تساوي $9.8\,m/s^2$.




a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن $t$ مفترضًا أن سطح الماء يُمثّل بالمستقيم $y = 0$

$x = t \cdot 0.75 \cos 45°$

$, y = t \cdot 0.75 \sin 45° - 4.9t^2 + 0.3$

b) إذا كان عرض الجدول $0.5\,m$، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟

**لا؛ 0.34 m**

**28)** **سباق:** اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله 100 m ، وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة 8.0 m/s من النقطة (0, 2) وبتأخير 0.1 s ، بينما ركض سعيد بسرعة 8.1 m/s من النقطة (0, 5) وبتأخير 0.3 s .

**a)** اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور $y$ كخط بداية ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور $x$ .

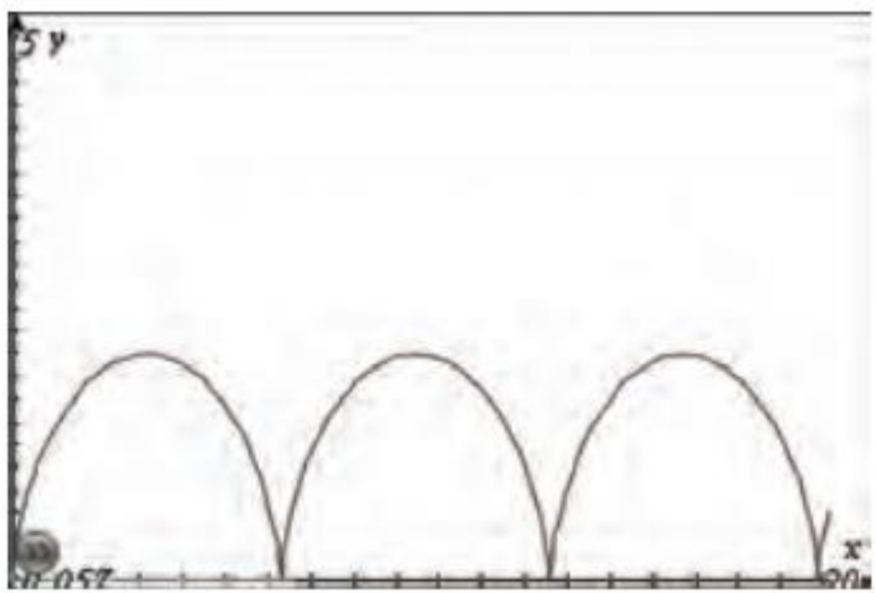
حسن: $x = 8(t - 0.1), y = 2$ ؛
سعيد: $x = 8.1(t - 0.3), y = 5$

**b)** من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق 200 m بدلًا من 100 m فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

يفوز حسن بسباق 100 متر بزمن 12.6 ثانية، في حين يكون زمن سعيد 12.65 ثانية. أمّا في سباق 200 متر، فيفوز سعيد.

**29)** **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج عن مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور $x$ .

**a)** **بيانيًّا:** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطتين $x = t - \sin t$ , $y = 1 - \cos t$ ، حيث $t$ مقيسة بالراديان.




**b)** **تحليليًّا:** ما المسافة بين مقاطع $x$؟ صف ما تُمثِّله هذه المقاطع $x$ وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين.

$2\pi$؛ إجابة ممكنة: تمثِّل مقاطع $x$ الحالات التي تمس فيها نقطة على الدائرة المحور $x$ عند تدحرجها. وبما أنّ جميع نقاط محيط الدائرة تمسّ المحور $x$ عند تدحرجها، فإن المسافات بين مقاطع $x$ تساوي محيط الدائرة $2\pi$.

**c)** **تحليليًّا:** ما أكبر قيمة لِـ $y$؟ صف ما تمثله هذه القيمة وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

إجابة ممكنة: تمثّل هذه القيمة أعلى ارتفاع تصله النقطة عند تدحرج الدائرة على المحور $x$، والذي يساوي قطر الدائرة. أكبر قيمة لِـ $y$ تساوي $2r$ لدائرة نصف قطرها $r$.