1-4-9-10-8-16-18

/ /

الاحتمالات

- قوانين احتمالية
- مسائل السحب
- مسائل الشجرة الاحتمالية
- مسائل جدولي
- مسائل الاستقلال الاحتمالي

قوانين احتمالية

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(A) + P(A') = 1$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
4) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
   تقاطع المتمم = شمس − شمس ∩ شمس
5) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
   احتمال A علماً أن B وقعت — التقاطع — المعلوم
6) $P(A' \cap B') = P(A \cup B') \leq 1 - P(A \cup B)$
7) $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

مسألة (1):

نرمي حجر نرد مرة واحدة

A: حدث ظهور رقم زوجي

B: حدث ظهور رقم أكبر من (4)

احسب $P(A \cap B)$ ، $P(B)$ ، $P(A)$

$P(A|B)$ ، $P(A' \cap B)$ ، $P(A \cup B)$

$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{5, 6\}$
$A \cap B = \{6\}$ المشتركة

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$

مسألة (2):

A, B حدثان جزئيان

$P(A) = \frac{7}{10}$ $P(A|B) = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B') = \frac{3}{10}$

1- احسب $P(B)$ ، $P(A \cap B)$

2- احسب $P(A' \cap B)$ $P(A|B')$

1- $P(A \cap B') = \frac{3}{10}$

$P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10}$

Farah Notebook

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة:

معهد لتعليم اللغات

60% من أعضائه يدرسون اللغة الروسية.

30% من أعضائه يدرسون اللغة الإسبانية.

10% يدرسون اللغتين معاً.

نختار شخصاً عشوائياً من المعهد

① ما احتمال أن يكون من دارسي إحدى اللغتين

② ما احتمال أن يكون من دارسي اللغة الروسية فقط

③ ما احتمال أن لا يدرس أي من اللغتين

④ إذا لوحظ أن الشخص من دارسي الروسية ما احتمال أن يكون من دارسي الإسبانية.

$P(R)=\frac{60}{100}$ $P(A)=\frac{30}{100}$ $P(A\cap R)=\frac{10}{100}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(R)-P(A\cap R)$

$=\frac{30}{100}+\frac{60}{100}-\frac{10}{100}=\frac{80}{100}$

$\frac{7}{10}-P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

$P(A\cap B)=\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$

$P(A|B)=\frac{2}{3}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}$

$\frac{\frac{4}{10}}{P(B)}=\frac{2}{3}$

$2P(B)=\frac{12}{10}$

$P(B)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$

$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)$

$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

$=1-\left[\frac{3}{10}+\frac{6}{10}-\frac{4}{10}\right]$

$=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}$

$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{3}{10}$

$P(B)=\frac{6}{10}$

$P(B')=\frac{4}{10}$

Farah Notebook

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$P(R \cap A') = P(R) - P(R \cap A)$

$= \frac{60}{100} - \frac{10}{100} = \frac{50}{100}$

2- $P(R' \cap A') = 1 - P(A \cup R)$

$= 1 - \frac{80}{100} = \frac{20}{100}$

3- $P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$

$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

3- X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء الظاهرة بين الكرات المسحوبة

4- عين قيم X ، وجدول قانونه الاحتمالي ، وتوقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري

A: سحب الكرتين من اللون ذاته

A: (RR) (WW)

$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3+6}{28}$

$= \frac{9}{28}$

B: (RW) (RB) (WB)

$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{2}}$

$= \frac{12+3+4}{28} = \frac{19}{28}$

$X = \{0, 1, 2\}$ — 3

2 ← سحب كرتين حمراء

1 ← كرة حمراء وكرة غير حمراء

0 ← سحب كرتين غير حمراء

(X=0) : (WW) (WB)

$P(X=0) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$

• مسائل الحيل:

1) الحيل هي:

1- نستخدم التوافيق

2- لا نضرب بمبدأ القوسين

3- في القوسين نضرب ⊗ والآخر ⊕

4- نجمع الحروف المتشابهة

مسألة:

نسحب كرتين معاً والمطلوب:

1- ما احتمال ظهور كرتين من اللون ذاته

2- ما احتمال ظهور كرتين مختلفتين

Farah Notebook

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

$(X=2) : (RR)$

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

التوقع الرياضي $E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

$E(X) = 0\left(\frac{10}{28}\right) + 1\left(\frac{15}{28}\right) + 2\left(\frac{3}{28}\right)$

$= \frac{0+15+6}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

التباين $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \sum x_i^2 P(X=x_i)$

$= \frac{0+15+(2)^2(3)}{28} = \frac{27}{28}$

$V(X) = \frac{27}{28} - \frac{9}{16}$

$(4) \quad (7)$

$= \frac{108-63}{112} = \frac{45}{112}$

الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

$= \sqrt{\frac{45}{112}}$

2 اكتب على التتالي دون إعادة

1- باستخدام التباديل

2- نضرب بتباديل الفوكس

3- في الفوكس هنه ⊗ والآخر ⊕

هنا لدينا $\{0,0,1,1,2,3\}$

سحب من الصندوق الذي بطاقة على التتالي دون إعادة X حيث عشوائي يدل على الرقم الأكبر الظاهر بين البطاقات المسحوبة عين قيم X وجدول قانون الاحتمالي

$X = \{1,2,3\}$

$(X=1) : (0,0,1) \times 3 \; (0,1,1) \times 3$

$P(X=1) = \frac{P_2^2 \cdot P_2^1 \times 3 + P_2^1 \cdot P_2^2 \times 3}{P_6^3}$

$= \frac{12+12}{120} = \frac{24}{120}$

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$(X=2) : (2,2$ الحرمن $, 2$ الحرمن $) \times 3$ (البحرمن)

$P(X=2) = \frac{P_1^1 \cdot P_4^2 \times 3}{P_6^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

$(X=3) = (3, \xi, \xi) \times 3$

$P(X=3) = \frac{P_1^1 P_5^2 \times 3}{P_6^3} = \frac{60}{120} = \frac{5}{10}$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$

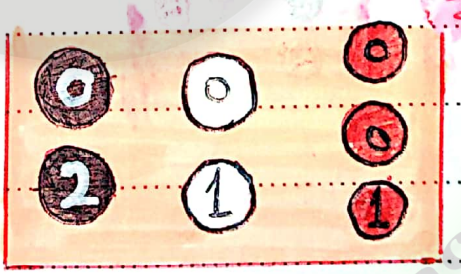
3) السحب على التتالي مع الإعادة:

1- نستخدم المبدأ الأساسي في العد (n)

2- نضرب بين بدائل العمليات

3- في العمليات نضع (×) و الآخر (+)

مسألة:



سحب كرتين على التتالي مع الإعادة من الصندوق.

1- A هدث الكرتين من اللون نفسه.

B هدث مجموع رقمي الكرتين 2

اثبت $P(A \cap B), P(B), P(A)$ هل هي مستقلان.

2- X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين عين قيم X وجدول قانونه

A: (RR) (WW) (BB)

$P(A) = \frac{3\times3 + 2\times2 + 2\times1}{7\times7} = \frac{17}{49}$

B: (0,2) (1,1)

$P(B) = \frac{4\times1\times2 + 2\times1}{7\times7} = \frac{12}{49}$

$A \cap B$: (B_2, B_2) (W,W) (R,R)

من اللون نفسه $P(A \cap B) = \frac{1\times1\times2 + 1\times1 + 1\times1}{7\times7} = \frac{4}{49}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ شرط الاستقلال

$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$\frac{4}{49} \neq \frac{17}{49} \times \frac{12}{49}$

$A \cap B$ غير مستقلان

كرتين على التتالي مع الإعادة: 0,0,0,0,1,1,2 -2

$X = \{0,1,2,3,4\}$

$(X=0) : (0,0)$

$P(X=0) = \frac{4\times4}{7\times7} = \frac{16}{49}$

$(X=1) : (0,1)$

$P(X=1) = \frac{4\times2\times2}{7\times7} = \frac{16}{49}$

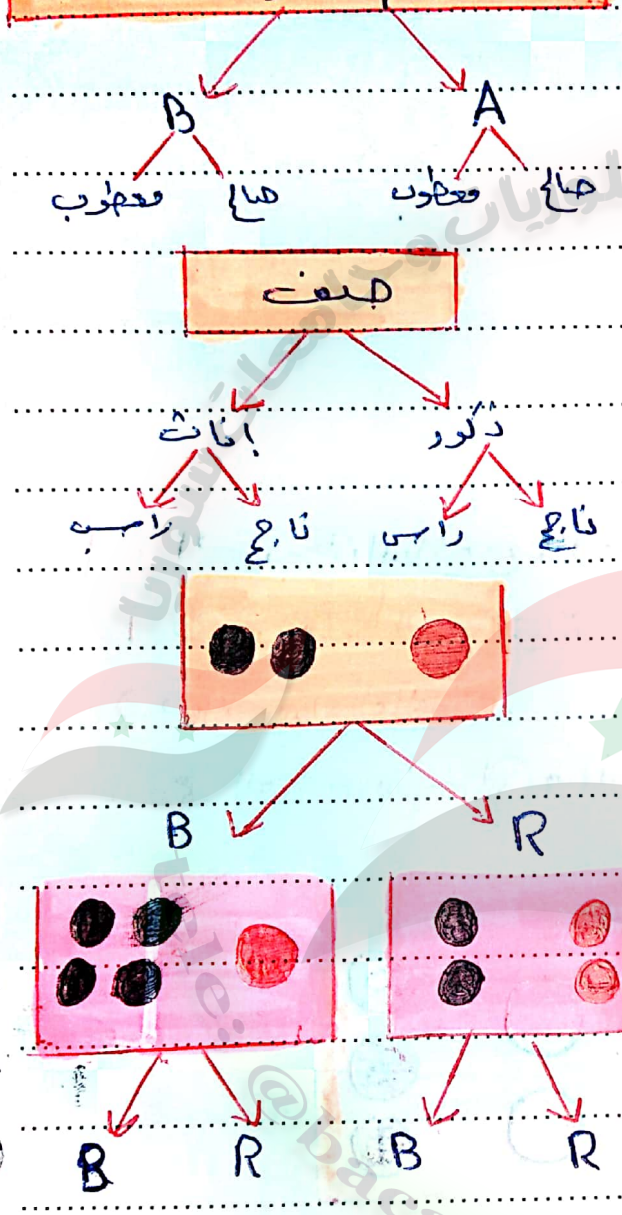
$(X=2) = (0,2)(1,1)$

$P(X=2) = \frac{4\times1\times2 + 2\times2}{7\times7} = \frac{12}{49}$

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

التجربة الاحتمالية

التي ينتج عنها بضائع منها صالح ومنها معطوب



أسحب كرة من صندوق وعاينة الكرات من لونها ثم سحب كرة

$(X=3):(1,2)$

$P(X=3)=\frac{2\times1\times2}{7\times7}=\frac{4}{49}$

$(X=4):(2,2)$

$P(X=4)=\frac{1\times1}{7\times7}=\frac{1}{49}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{49}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$

$E(X)=0\left(\frac{16}{49}\right)+1\left(\frac{16}{49}\right)+2\left(\frac{12}{49}\right)+3\left(\frac{4}{49}\right)+4\left(\frac{1}{49}\right)$

$=\frac{16}{49}+\frac{24}{49}+\frac{12}{49}+\frac{4}{49}=\frac{56}{49}$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$E(X^2)=\frac{0+16+(2)^2(12)+(3)^2(4)+(4)^2}{49}$

$=\frac{116}{49}$

$V(X)=\frac{116}{49}-\frac{3136}{2401}$

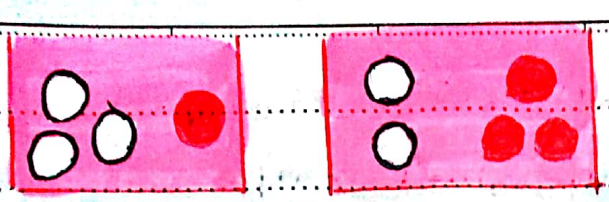
(49)

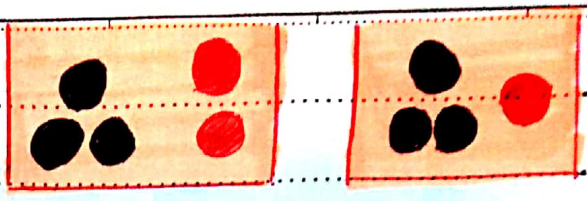
$=\frac{5684}{2401}-\frac{3136}{2401}=\frac{2548}{2401}$

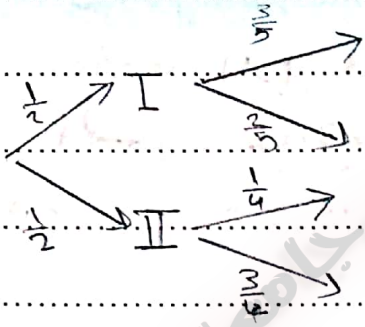
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2548}{2401}}=\frac{14\sqrt{13}}{49}$

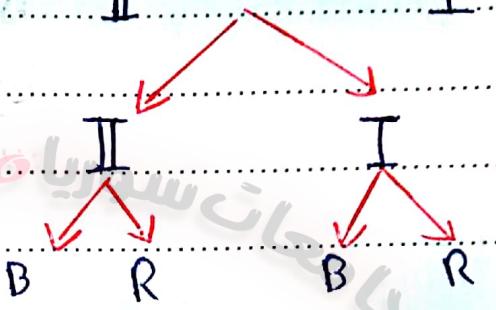
Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner









اختيار أحد الصندوقين وسحب منه كرة

$P(II \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ①

$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ ②

$= \frac{3}{10} + \frac{1}{8} = \frac{12+5}{40} = \frac{17}{40}$

$P(II|R) = \frac{P(II \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{40}} = \frac{5}{17}$ ③

ملاحظة: نقول عن مسألة أنها شرطية احتمالية إذا استهدفنا أن نجلها على مرحلتين والثانية معتمدة على الأولى.

مسألة ①:

صندوقان حتواها الأول على
(3 كرات حمراء و4 بيضاء) والثاني على
(واحدة حمراء و3 بيضاء) نختار أحد الصندوقين
ونسحب منه كرة واحدة.

1- ما احتمال أن تكون حمراء من الصندوق الثاني؟

2- ما احتمال أن تكون حمراء؟

3- إذا علمت أنها حمراء ما احتمال أن تكون
من الصندوق الثاني؟

مسألة ②:

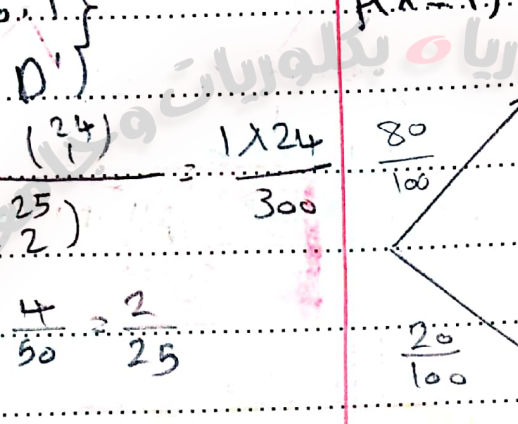
معمل فيه آلتان A، B تنتج A 80% من إنتاج المعمل 5% من إنتاجها معطوب و الآلة B تنتج 20% من إنتاج المعمل 4% من إنتاجها معطوب.

1- نسحب قطعة عشوائياً من إنتاج المعمل
ما احتمال أن تكون معطوبة؟

2- إذا كانت القطعة معطوبة ما احتمال
أن تكون من الآلة B؟

Farah Notebook

3- يوجد في العلبة (125) قطعة، نسحب قطعتين معاً من إنتاج الآلة B ونقوم بفحصها. X متغير عشوائي يدل على عدد القطع المعطوبة بين القطعتين المسحوبتين. عين قيم X واحسب $P(X=1)$



$P(D) = \frac{80}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{4}{100}$

$= \frac{400}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{48}{1000}$

$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$ ②

$= \frac{\frac{20}{100} \times \frac{4}{100}}{\frac{48}{1000}} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$

عدد قطع B $= \frac{20}{100} \times 125 = \frac{250}{10} = 25$ قطعة

③ عدد القطع المعطوبة من B $= \frac{4}{100} \times 25 = \frac{100}{100} = 1$

عدد القطع السليمة من B $= 24$

1	24
D	D'

$X = \{0, 1\}$

$(X=1) : (D, D')$

$P(X=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{24}{1}}{\binom{25}{2}} = \frac{1 \times 24}{300}$

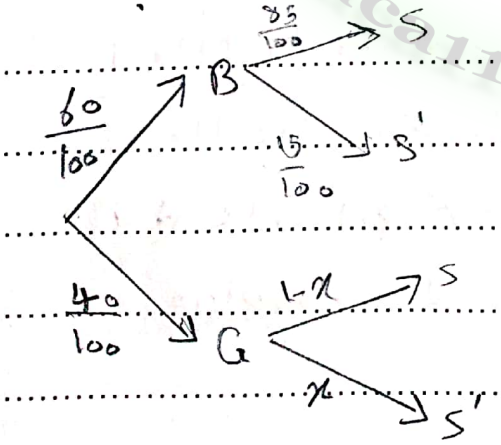
$= \frac{24}{300} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

مسألة:

صنف 20% من إصابات لاعبي الرياضة 60% من إصاباتهم ذكور، 15% منهم لاعبو الرياضة فتاة. نختار عشوائياً شخصاً من الصنف.

① ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الرياضة

② إذا علمت أن الشخص لاعب الرياضة ما احتمال أن يكون ذكر؟



Farah Notebook

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

$P(S') = \frac{20}{100}$

$\frac{60}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{40}{100} \times = \frac{20}{100}$

$\frac{900}{10000} + \frac{40}{100} \times = \frac{20}{100}$

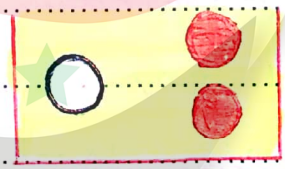
$9 + 40 \times = 20 \Rightarrow \times = \frac{11}{40}$

$P(G \cap S') = \frac{40}{100} \times \frac{11}{40} = \frac{11}{100}$

$P(B|S') = \frac{P(B \cap S')}{P(S')}$

$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{9}{20}$

مسألة 1



سحب كرة من الصندوق وتعيد ثم

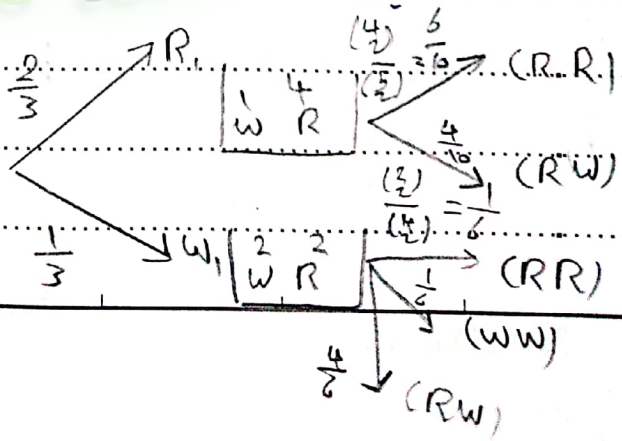
نضاعف عدد الكرات من نوعها وسحب

كرتين معاً. والمطلوب X متحول عشوائي يدل

على عدد الكرات الحمراء الظاهرة في السحبة

الثاني عين قيم X وجدول قانونه

الاحتمالي وتوقعه



$X = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} = \frac{5}{90}$

$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$

$= \frac{8}{30} + \frac{4}{18} = \frac{44}{90}$

(3) (5)

$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{12}{30} + \frac{1}{18} = \frac{41}{90}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{90}$	$\frac{44}{90}$	$\frac{41}{90}$

$E(X) = 0\left(\frac{5}{90}\right) + 1\left(\frac{44}{90}\right) + 2\left(\frac{41}{90}\right)$

$= \frac{44}{90} + \frac{82}{90} = \frac{126}{90}$

مسألة 2 دورة

تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات

تلعبها، احتمال فوزها في إدخال الحلقة

الأولى يساوي احتمال خسارتها.

إذا فازت سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال

فوزها من إدخال الحلقة اللاحقة هو $\frac{8}{10}$

وإذا خسرت سعاد في إدخال حلقة يصبح

احتمال فوزها في إدخال الحلقة $\frac{6}{10}$.

A_n: حدث فوز سعاد في إدخال الحلقة n.

B_n: خسارة سعاد في إدخال الحلقة n

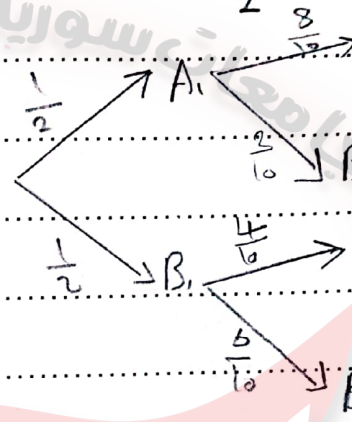
CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

$P_n = P(A_n)$

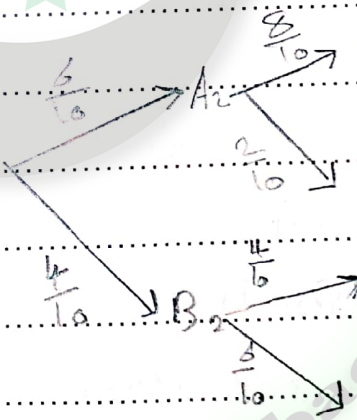
1- احسب $P_3 + P_2 + P_1$

2- أثبت أن $P_{n+1} = \frac{4}{10} P_n + \frac{4}{10}$

1- $P_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$



$P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$



$P(A_3) = \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{64}{100}$

2- $P(A_{n+1}) = \frac{8}{10} P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n)$

$= \frac{8}{10} P_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{10} P_n$

$P_{n+1} = \frac{4}{10} P_n + \frac{4}{10}$

طلب 3 إ.م ثانوي

نعرف متتالية $U_n = P_n - \frac{2}{3}$

أثبت أن U_n هندسية عين أساسها

واكتب U_n بدلالة n.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

$\frac{P_{n+1} - \frac{2}{3}}{P_n - \frac{2}{3}} = q$

$\frac{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{3}}{P_n - \frac{2}{3}} = q$

$\frac{\frac{4}{10} P_n - \frac{8}{30}}{P_n - \frac{2}{3}} = q$

Farah Notebook

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لحساب $P(X=r)$ نستخدم قانون برنولي التالي:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}(p)^{r}(q)^{n-r}$$

(r: نجاح، n-r: الفشل)

ولحساب التوقع عند برنولي:

$$E(X)=P.n$$

والتباين:

$$V(X)=n.P.q$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X=\sqrt{n.P.q}$$

مثال (1): ص 17 أولى:

قطعة نقود متوازنة احتمال ظهور الصورة فيها $\left(\frac{1}{3}\right)$، ألقيت القطعة (4) مرات.

نعرف متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الصورة، أكتب جدول قانونه الاحتمالي وتوقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

$n=4$

$P=P(H)=\frac{1}{3} \Rightarrow q=\frac{2}{3}$

$X=\{0,1,2,3,4\}$

$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{16}{81}$

$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{32}{81}$

$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{24}{81}$

$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\frac{8}{81}$

$P(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{1}{81}$

التجربة البرنولية:

نقول عن تجربة إنها برنولية إذا أتاحت خيارين X فقط، وتكون كررة n مرة وبنفس الشروط.

في أحد الخيارين نجاح التجربة وهو الذي اهتمت به المسألة ورمزه p.

في الخيار الثاني فشل التجربة احتماله q

$$P+q=1$$

X: يدل على عدد مرات نجاح التجربة.

$X=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$

X: هي إحدى قيم X يعينها طالب المسألة

$\frac{4}{10}\left[P_n-\frac{2}{3}\right]=q$

$P_n=\frac{2}{3}$

$q=\frac{4}{10}$

$q=\frac{4}{10}$ أي P هندسية U_n

$U_1=P_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$

$U_n=U_m.q^{n-m}$

$U_n=U_1.q^{n-1}$

$U_n=\frac{1}{6}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1}$

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة

نلعب لعبة حجر على التتالي مع الإعادة ثلاث مرات

1- ما احتمال الفوز بالرقم (1) مرتين فقط

2- ما احتمال الفوز بالرقم (1) مرة على الأكثر

3- X متحول عشوائي يدل على عدد مرات الفوز بالرقم (1) عين قيم X ثم جدول قانونه ثم قفصه وتباينه

الحد على التتالي مع الإعادة يحول إلى برنولي إذا قبل قيمتين فقط

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{36}{125}$

$P(X=3) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125}$

برنولي حيث

$n = 3$

$p = P(1) = \frac{2}{5}$

$q = P(0) = \frac{3}{5}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$ (1)

$P(X=0) + P(X=1)$ (2)

$\binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{27}{125} + \frac{54}{125} = \frac{81}{125}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$E(X) = n.p = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$

$V(X) = n.p.q = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

$\sigma_X = \sqrt{n.p.q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

مسألة

من الجدول حاول إكمال تجربة برنولية

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$				$\frac{8}{27}$

1) احسب $n.p.q$

2) أكمل الجدول

3) احسب $E(X)$ و $V(X)$

$n = 3$

حساب p

$P(X=3) = \frac{8}{27}$

$\binom{3}{3}(p)^3(q)^0 = \frac{8}{27}$

$p^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow p = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ -2

$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$

$E(X) = p.n = \frac{1}{3} \times 3 = 1$ -3

$V(X) = n.p.q = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Farah Notebook

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$E(X) = p.n \Rightarrow \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$

$V(X) = n.p.q = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$

حالة:

يتواجه لاعبين A و B في لعبة كرة الطاولة مكونة من ثلاثة أدوار. احتمال فوز A بالدور الواحد هو $(0,6)$ ويعتبر اللاعب الفائز بالمباراة هو اللاعب الذي يفوز بأكبر عدد من الأدوار. ما احتمال ربح B بالمباراة؟

نرمز ليجاح فيها

$n=3$

$p = P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$q = P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

عدد الأدوار التي يربحها B

$P(\bar{B}) = P(X=2) + P(X=3)$

$= \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0$

$= \frac{30}{125} + \frac{8}{125} = \frac{44}{125}$

حالة:

في كيس نلون وجهين بالأحمر والأربعة الباقية بالأسود، ونقوم بسحب 4 مرات X يدل على عدد مرات ظهور الوجه الأحمر عين قيم X و جدول قانون الاحتمال

نرمز ليجاح فيها

$n=4$

$p = P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$q = P(\bar{R}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$

$P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$

$P(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$

$P(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$

Farah Notebook

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

الاستقلال الاحتمالي

- استقلال حدثين
- التجارب المتعاقبة
- المتغيرين المستقلين

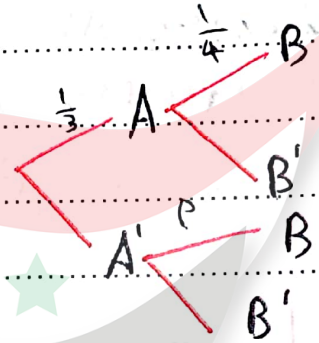
1- استقلال حدثين:

نقول عن حدثين إنهما مستقلان إذا تحقق

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

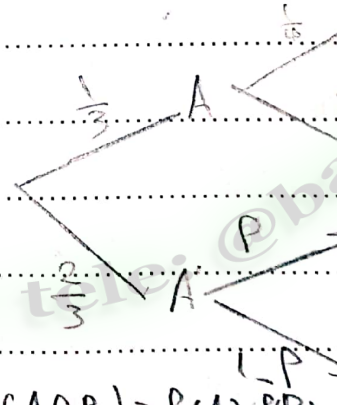
شرط الاستقلال

تمرين



لتكن الخطوط الشجرية لهذه الشجرة

إذا علمت أن A و B مستقلان



$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} P)$

$\frac{1}{12} = \frac{1}{36} + \frac{2}{9} P$ ... (×36)

$3 = 1 + 8P$

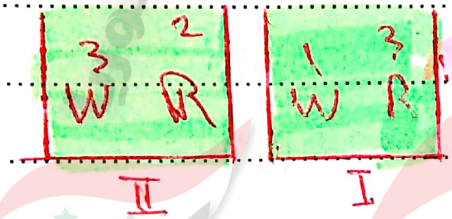
$P = \frac{1}{4}$

2- التجارب المتعاقبة:

هي تجارب لا علاقة لنتيجة إحداها بالأخرى، وهنا نكتب احتمال كل تجربة لوحدها ونضرب النتائج.

ويمكن تمثيلها بشجرة الاحتمالية أو جدول احتمالي

مثال:



نسحب من I كرة ومن II كرتين معاً.

X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء الظاهرة بين الكرات الثلاث المسحوبة

عين قيم X وجدول قانونه

II \ I	$P(R) = \frac{3}{4}$	$P(W) = \frac{1}{4}$
$P(RR) = \frac{1}{10}$	$R(RR)$	$W(RR)$
توافق باختيار	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$ ×23	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$ $x=2$
$P(WW) = \frac{3}{10}$	$R(WW)$	$W(WW)$
	$x=1$ $\frac{9}{40}$	$x=0$ $\frac{3}{40}$
$P(RW) = \frac{6}{10}$	$R(RW)$	$W(RW)$
	$x=2$ $\frac{18}{40}$	$x=1$ $\frac{6}{40}$

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{3}{40}$

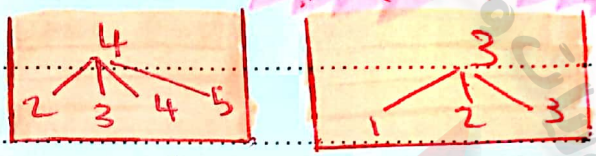
$P(X=1) = \frac{9}{40} + \frac{6}{40} = \frac{15}{40}$

$P(X=2) = \frac{18}{40} + \frac{1}{40} = \frac{19}{40}$

$P(X=3) = \frac{3}{40}$

مثال:

الكيس 4 / 3 / 2 كرات



نسحب كرة من الأول وكرة من الثاني

والمطلوب:

1) احسب احتمالات:

A: (3) الحدث الكرتين تحملان الرقم

B: (5) المجموع أكبر تماماً من

2) هل A, B مستقلان

3) X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين الحمراوين على قيم X وجدول قانونه الاحتمالي

1)

II \ I	1	2	3
2	(1,2)	(2,2)	(3,2) A
3	(1,3) A	(2,3) A	(3,3) BA
4	(1,4)	(2,4) B	(3,4) BA
5	(1,5) B	(2,5) B	(3,5) BA

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ محققة

إذاً A, B مستقلان

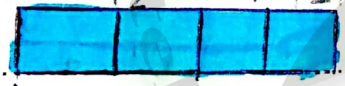
3) $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$P(X=3) = \frac{1}{12}$ $P(X=5) = \frac{3}{12}$

$P(X=4) = \frac{2}{12}$ $P(X=6) = \frac{3}{12}$

$P(X=7) = \frac{2}{12}$ $P(X=8) = \frac{1}{12}$

x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$



مثال:

علماً كانات الأربعة بأعداد الأرقام 1, 2, 3, 4

1- ما احتمال A: مجموع الكانات الأربعة يساوي (5)

2- ما احتمال ظهور الرقم (5) في كانة واحدة فقط

3- X متحول عشوائي يدل على عدد الكانات المحتملة بالرقم (5) عين قيم X وجدول قانونه الاحتمالي وتوقعه وتباينه

Farah Notebook

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(14) نتبع القانون الاحتمالي للمتحول X واليك توزعه

المجموع $X = \{0, 1, 2, 3\}$ 1

اليمين $Y = \{0, 1, 2\}$

$(X=2) : (0,2) \times 2 \quad (1,1)$ 2

$P(X=2) = \frac{P_2' \times P_1' \times 2 + P_2^2}{P_5^2} = \frac{6}{20}$

$(Y=1) : (0,1)(1,1)$

$P(Y=1) = \frac{P_2' P_1' \times 2 + P_2^2}{P_5^2} = \frac{10}{20}$

$(X=2 \cap Y=1) : (1,1)$ (المجموع 2، اليمين 1)

$P(X=2 \cap Y=1) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20}$

المجموع X \ اليمين Y	0	1	2	x_i
0	$\frac{2}{20}$	0	0	$\frac{2}{20}$
1	0	$\frac{8}{20}$ (0,1)	0	$\frac{8}{20}$
2	0	$\frac{2}{20}$ (1,1)	$\frac{4}{20}$ (0,2)	$\frac{6}{20}$
3	0	0	$\frac{4}{20}$ (1,2)	$\frac{4}{20}$
y_j	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

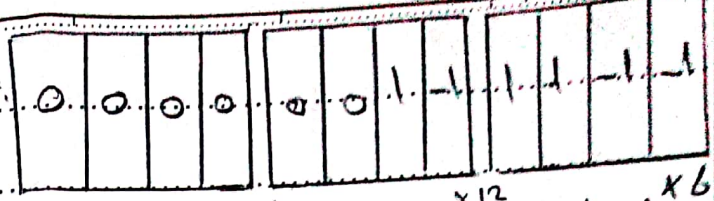
$P(X=1 \cap Y=2) = 0$

$P(X=1) \cdot P(Y=2) = \frac{8}{20} \times \frac{6}{20} \neq 0$

قانون احتمالي لكل من المتحولين X, Y

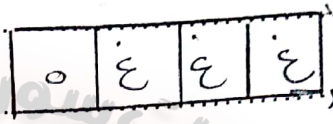
x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$

$E(X) = \frac{0 + 8 + 12 + 12}{20} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$

A: 

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^4 \times 12 + (\frac{1}{3})^4 \times 6$

$= \frac{1}{81} + \frac{12}{81} + \frac{6}{81} = \frac{19}{81}$

B: 

$\frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^3 \times 4 = \frac{32}{81}$

إضافي: ما احتمال ظهور الرقم (0) في الكرة الثالثة

$P(0) = \frac{1}{3}$

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 3

$n = 4$ عدد مرات تنفيذ التجربة

$p = P(0) = \frac{1}{3}$ $\quad q = P(-1,1) = \frac{2}{3}$

• المتحولين المستقلين:

حل المثال: $\{0, 0, 1, 1, 2\}$

نسحب كرتين على التتالي دون إعادة

X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين

Y متحول عشوائي يدل على الرقم الأكبر دائماً

① عين قيم X, Y

② احسب $P(Y=1)$ $P(X=2)$

$P(X=2 \cap Y=1)$

③ احسب القانون الاحتمالي للزوج (X, Y)

وهل هما مستقلان

Farah Notebook

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ