PROOF: مبرهنة :

ليكن z عدداً عقديّاً طويلته أصغر تماماً من الواحد ($|z| < 1$) عندئذٍ تكون نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_n = z^n$ تساوي الصفر ، أي : $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$

الإثبات :

إذا كانت θ هي زاوية العدد العقدي z ، و r هي طويلته ، عندئذٍ يُكتَب z بالشكل الأسي وفق :

$$z = re^{i\theta}$$

و بالتالي :

$$z^n = r^n e^{ni\theta}$$

نأخذ طويلة الطرفين :

$$|z^n| = \left|r^n e^{ni\theta}\right| = r^n$$

$$|u_n - 0| \leq r^n$$

بما أنّ $0 < r < 1$ نستنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$

عملاً بمبرهنة الإحاطة نجد أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ أي إنّ $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.

مثال تطبيقي :

ليكن العدد العقدي $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

١- اكتب z بالشكل الأسّي .

٢- أوجد نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $v_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ بالشكلين الجبري و الأسّي .

الحل :

١-

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \rightarrow z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

٢-

v_n تمثّل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسيّة أساسها $q = z$ و حدّها الأول $a = 1$ و عدد الحدود n :

$$v_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

و بما أنّ $|z| = \frac{1}{2} < 1$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$ و منه :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i} = \frac{4}{3-\sqrt{3}i}$$

بالضرب بالمرافق :

$$l = \frac{4(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)} = \frac{4(3+\sqrt{3}i)}{(3)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{4(3+\sqrt{3}i)}{12} = \frac{3+\sqrt{3}i}{3} \rightarrow \boxed{l = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i}$$

$$l = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \rightarrow \boxed{l = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$