أ. عواطف الصيرفي

5.2 Exponential Functions

الدوال الأسية

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Properties of Exponents

خصائص الأسس .

① a^x is unique real number عدد حقيقي وحيد .

② $a^b = a^c \iff b = c$ قانون مهم جداً .

③ If $a > 1$, $m < n \implies a^m < a^n$

توضيح: $a=2$, $m=2$, $n=3 \implies 2^2 < 2^3 \implies 4 < 8$ ✓

④ If $0 < a < 1$, $m < n \implies a^m > a^n$

توضيح: $a = \frac{1}{2}$, $m=2$, $n=3 \implies \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \implies \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

كل ما زاد المقام فإن قيمة الكسر تقل .

Scanned by CamScanner

Example 1 p. (151)

If $f(x) = 2^x$. Find

(a) $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b) $f(3) = 2^3 = 8$

(c) $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2^{\frac{5}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{16(2)}$
$= 4\sqrt{2}$

(d) $f(4.92) = 2^{4.92}$.

Exponential Function الدالة الأسية

If $a > 0$, $a \neq 1$.

الصورة العامة للدالة الأسية

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

* دائماً الدالة الأسية موجبة

$f(x) = 2^x > 0$ +ve

$x \to -\infty$ يعني $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$f(x) \to 0$

معناها $2^x \to 0$

الدالة $f(x) = 2^x$ تقترب من الصفر عندما x تؤول إلى $-\infty$

Scanned by CamScanner

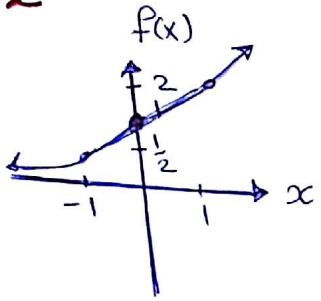
Exponential function

$$f(x) = a^x$$

$a > 1$

$f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2



Domain $(-\infty, \infty)$ مجالها

Range $(0, \infty)$ مداها

increasing تزايدية

x-axis horizontal

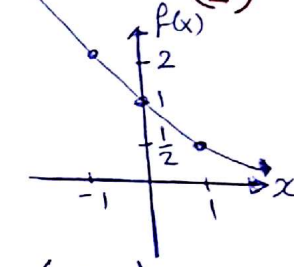
asymptote as $x \to -\infty$ (مقاربا)

الدالة تقترب من محور x عندما $x \to -\infty$

$0 < a < 1$

x	$f(x)$
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(0, \infty)$

decreasing تناقصية

x-axis horizontal

asymptote as $x \to \infty$

الدالة تقترب من محور x عندما $x \to \infty$

ملاحظات :

① لرسم منحنى أي دالة يكفي أن نوجد ٣ نقاط . $(-1, \frac{1}{a}), (0,1), (1,a)$

② الدالة الأسية على الصورة $f(x) = a^x$ ⟸ مجالها Domain $(-\infty, \infty)$ أما في حالة $f(x) = -a^x$ أو $f(x) = a^x + 1$ ، مداها Range $(0, \infty)$ ، فإن المدى يتغير كما في المثال التالي .

③ إذا كان $a > 1$ ⟸ الدالة تزايدية "increasing" ، و $0 < a < 1$ ⟸ الدالة تناقصية . "decreasing"

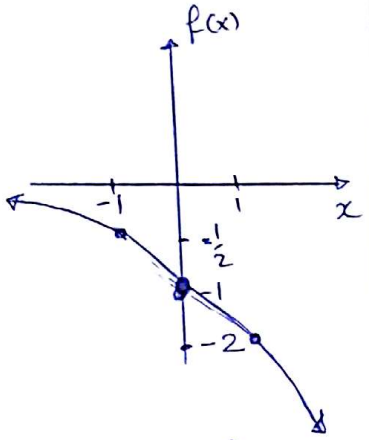
Scanned by CamScanner

Example 2 p.(153)

Graph each function. Give the domain and range.

ⓐ $f(x) = -2^x$

x	f(x)
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
1	-2



Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(-\infty, 0)$

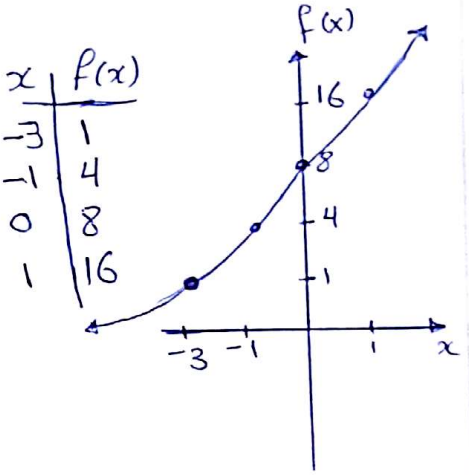
decreasing

هذه الدالة انعكاس للدالة $f(x)=2^x$ على الصورة $f(x) = -a^x$

مداها: $(-\infty, 0)$ — مجالها: $(-\infty, \infty)$

ⓑ $f(x)=2^{x+3}$

x	f(x)
-3	1
-1	4
0	8
1	16



Domain $(-\infty, \infty)$

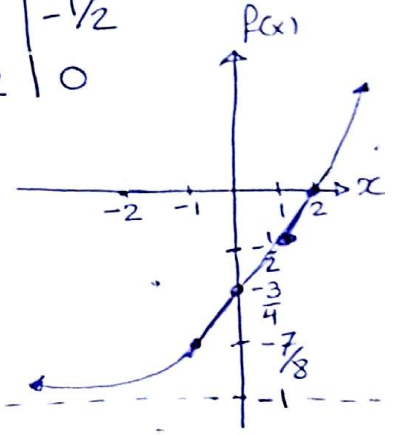
Range $(0, \infty)$

increasing

هذه الدالة $f(x)=2^{x+3}$ هي نفس الدالة $f(x)=2^x$ لكن انتقلت ٣ وحدات باتجاه اليسار

ⓒ $f(x)=2^{x-2}-1$

x	f(x)
-1	-7/8
0	-3/4
1	-1/2
2	0



Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(-1, \infty)$

increasing

نفس حركة 2^x لكن انتقلت وحدتين إلى اليمين ونزل وحدة واحدة تحت.

مجال الدالة الأسية دائماً $(-\infty, \infty)$

مداها على حسب شكلها

$f(x) = a^x$ — Range $(0, \infty)$

$f(x) = -a^x$ — Range $(-\infty, 0)$

$f(x) = a^x + b$ — Range (b, ∞)

Scanned by CamScanner

HW2 :- Solve

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

$$\left(3^{-1}\right)^x = 81 \Longrightarrow 3^{-x} = 81$$

$$3^{-x} = 3^4 \Longrightarrow -x = 4 \Longrightarrow \boxed{x = -4}$$

نفس الاساس
=> الاسس متساوية

Example 3 p.(154) : Solve:

$$2^{x+4} = 8^{x-6}$$

$$2^{x+4} = \left(2^3\right)^{x-6} \Longrightarrow 2^{x+4} = 2^{3(x-6)}$$

نفس الاساس
=> الاسس متساوية

$$2^{x+4} = 2^{3x-18}$$

$$x + 4 = 3x - 18$$

$$x - 3x = -18 - 4$$

$$-2x = -22 \Longrightarrow x = \frac{-22}{-2} = 11$$

HW3 : Solve $x^{4/3} = 81$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = 81 \longrightarrow$$

باخذ الجذر الرابع للطرفين

$$\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4} = \sqrt[4]{81}$$

$$\sqrt[3]{x} = 3 \longrightarrow$$

تكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 3^3$$

$$x = 27$$

Scanned by CamScanner

Exercises 5.2

$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Find:

(6) $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3$

$= \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Solve :-

(31) $4^x = 2$

$(2^2)^x = 2$

$2^{2x} = 2 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$

(35) $27^{4x} = 9^{x+1}$

$(3^3)^{4x} = (3^2)^{x+1}$

$3^{12x} = 3^{2(x+1)} \implies 3^{12x} = 3^{2x+2}$

$12x = 2x + 2 \implies 12x - 2x = 2$

$10x = 2 \implies x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

(42) $x^{-6} = \frac{1}{64} \implies \frac{1}{x^6} = \frac{1}{64}$

$x^6 = 64 \implies \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64}$

$x = 2$

Scanned by CamScanner