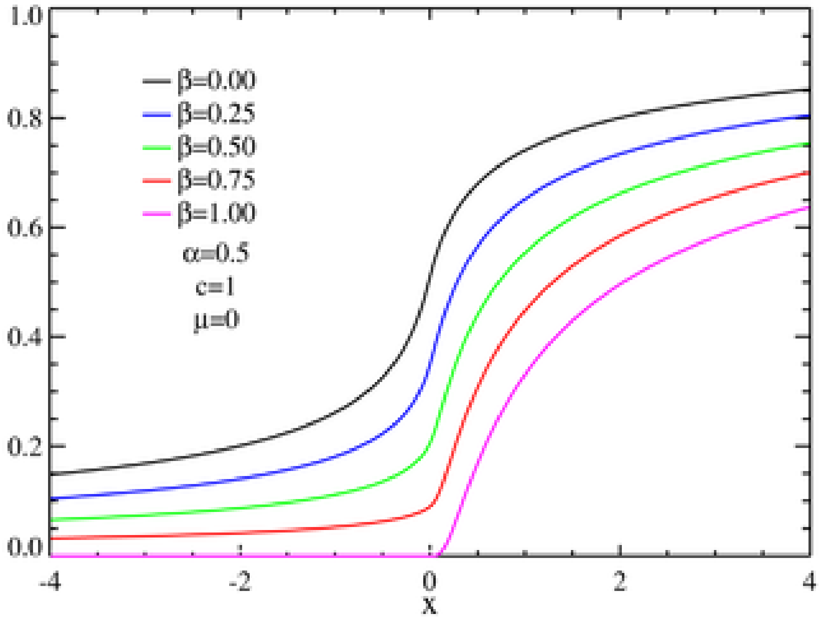
المحاضرة الأولى

السنة الرابعة –إحصاء رياضي

توزعات مستقرة



Stationary Distributions

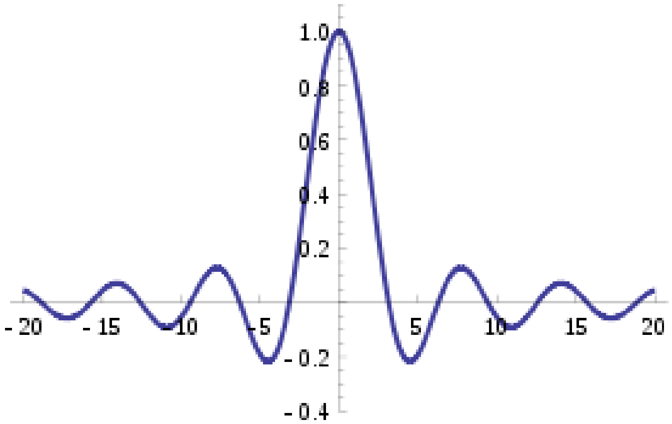
مفاهيم أساسية:

أولاً: الدوال المميزة Characteristic Function:

تعريف الدالة المميزة: بفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم، عندئذ تعرف الدالة المميزة بالعلاقة :

$$\psi_X(t) = Ee^{itX} = \begin{cases} \sum_x e^{itx}\, p(x) & ;\ x \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, f(x)dx & ;\ x \text{ مستمر} \end{cases}$$

يوضح الشكل التالي منحني الدالة المميزة:



نستنتج من التعريف الخواص التالية للدالة المميزة:

1- $\psi_X(0) = 1$

2- $|\psi_X(t)| \leq 1$ أي الدالة المميزة محدودة، الأمر الذي يؤدي بالقول إن الدالة المميزة لأي متغير عشوائي يخضع لتوزيع احتمالي معلوم موجودة.

-3

$$\acute{\psi}_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix\, e^{itx} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \acute{\psi}_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix\, f(x)dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = i\, EX$$

وبمتابعة الاشتقاق والتعويض كل t بصفر نجد أن:

$$\acute{\acute{\psi}}_X(0) = i^2 EX^2$$

....

$\psi_X^{(r)}(0) = i^r EX^r$; r صحيح موجب

$$\boxed{\Rightarrow\ EX^r = \frac{\psi_X^{(r)}(0)}{i^r}\ \ ; r = 1,2, \dots}$$

ثانياً: الدوال المميزة للتوزيعات الشهيرة:

-1 التوزيع الثنائي Binomial Distribution

إذا كان X متغير عشـــوائي وســـيطاه p و n (n عدد تكرارات تجربة برنولية و p احتمال نجاح تجربة برنولية) بقانون احتمالي:

$$P_X(x) = C_x^n\, p^x q^{n-x}$$

دالته المميزة:

$$\psi_X(t) = (q + pe^{it})^n \quad ; p + q = 1$$

استنتجت هذه العلاقة بالشكل:

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= Ee^{itX} \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{itx} C_x^n \, p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_x^n \, (pe^{it})^x q^{n-x} \\ &= (q + pe^{it})^n\end{aligned}$$

استفدنا من العلاقة:

$$\sum_{x=0}^{n} C_x^n = 2^n$$

مبرهنة:

اذا كان لدينا X متغير عشـوائي ثنائي وسـيطاه p و n_1 وكان لدينا متغير عشـوائي ثنائي آخر وسيطاه p و n_2 ومستقل عن X عندئذ:

$$\begin{aligned}\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t).\psi_Y(t) &= (q + pe^{it})^{n_1} (q + pe^{it})^{n_2} \\ &= (q + pe^{it})^{n_1+n_2}\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $X + Y$ هو من جديد متغير عشوائي ثنائي وسيطاه p و $n_1 + n_2$ أي:

$$X + Y \sim b(n_1 + n_2, p)$$

في الحالة الخاصة: إذا كانت n=1 عندئذ نحصل على الدالة المميزة لمتغير عشوائي برنولي بوسيط p وكما هو معروف التوزيع البرنولي يعطى بالعلاقة:

$$P_X(x) = p^x q^{1-x} \; ; q = 1 - p \, , x = 0,1,2, ...$$

2- التوزيع البواسوني Poisson Distribution:

بفرض X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ، قانونه الاحتمالي:

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0,1,2, ...$$

دالته المميزة:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}}}$$

تم ايجادها بالشكل:

$$\psi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

مبرهنة: ليكن Y و X متغيران عشـــوائيان مســـتقلان بواســـونيان وســـيطيهما على الترتيب λ_1 و λ_2، عندئذ مجموعهما يخضـــع للتوزيع البواســـوني بوســـيط $\lambda_1 + \lambda_2$.

البرهان:

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \,.\, \psi_Y(t) =$$

$$e^{-\lambda_1\left(1-e^{it}\right)} . \, e^{-\lambda_2(1-e^{it})} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(1-e^{it})}$$

وهي الدالة المميزة لبواسوني جديد بوسيط $\lambda_1 + \lambda_2$.

3- التوزيع الطبيعي Normal Distribution:

بفرض X متغير عشـــوائي طبيعي وســـيطاه μ و σ^2 عندئذ الدالة المميزة له تعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{\mu i t - \frac{\sigma^2}{2} t^2}}}$$

يمكن أن نحصـــل على الدالة المميزة لطبيعي معياري بتعويض كل $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$:

$$\psi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ; X \sim N(0,1)$$

في الحالة التي يكون لدينا Y و X متغيران عشوائيان مستقلان طبيعين الأول وسيطاه μ_1 و σ_1^2، والثاني وسيطاه μ_2 و σ_2^2، عندئذ مجموعهما يخضع للتوزيع الطبيعي أيضاً لأن:

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\,.\,\psi_Y(t)$$

$$= e^{\mu_1 it - \frac{\sigma_1^2}{2}t^2}\,.\,e^{\mu_2 it - \frac{\sigma_2^2}{2}t^2}$$

$$= e^{(\mu_1+\mu_2)it - \left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)t^2}$$

وهذه هي دالة مميزة لطبيعي جديد وسيطاه الأول $\mu_1 + \mu_2$ والثاني $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$

أي:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

4- توزيع غاما Gamma Distribution:

إذا كان X يخضع لتوزيع غاما بالوسيطين λ و α، دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x,\lambda,\alpha) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1}\, e^{-\alpha x}\,;\;\; x > 0$$

دالته المميزة:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}}}$$

إذا كان لدينا متغير عشــوائي آخر Y ومســتقل عن X وســيطاه μ و α عندئذ الدالة المميزة للمجموع:

$$\psi_{X+Y}(t)=\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda+\mu}$$

وهي دالة مميزة لغماوي وسيطاه الأول $\lambda+\mu$ والثاني α أي أن:

$$X+Y\sim G(\lambda+\mu,\alpha)$$

نذكر أيضاً إذا بدلنا بتوزيع غاما كل λ بـ $\frac{n}{2}$ وكل α بـ $\frac{1}{2}$، فنحصل على دالة كثافة جديدة لمتغير عشـوائي له **توزيع كاي مربع** بوسـيط أو درجة حرية n، والدالة المميزة لهــذا المــتــغــير في هــذه الحــالــة هــي:

$$\boldsymbol{\psi_X(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}}$$

إذا كان

$$\boldsymbol{X\sim G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow X\sim\chi^2(1)}$$

ملاحظة:

إذا كان لدينا X متغير توزيعه غماوي بوســيطين $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ وكان $X_1,\dots,X_n$ عينة عشوائية لــ X، عندئذ يكون توزيع مجموع متغيرات العينة كاي مربع بدرجة حرية n، يتم اثبات ذلك عن طريق الدالة المميزة لمجموع متغيرات العينة.

5- توزيع كوشي Cauchy Distribution:

دالة الكثافة لمتغير عشوائي كوشي بوسيطين b و a هي:

$$f(x,a,b)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+(x-b)^2}\quad ;\mathrm{x}\in\mathbb{R}$$

$$f(x,a,0)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}\quad ;\mathrm{x}\in\mathbb{R}$$

$$f(x,1,0)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\quad ;\mathrm{x}\in\mathbb{R}$$

دالته المميزة بوسيطين a و b=0 تأخذ الشكل:

$$\boxed{\boldsymbol{\psi_X(t)=e^{-a|t|}}\quad ;\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}}$$

كيفية إيجاد الدالة المميزة لكوشي بالوسيطين b و a:

$$\boldsymbol{\psi_X(t)}=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{a^2+(x-b)^2}\,dx$$

تكامل بالتجزئة:

$$\boldsymbol{\psi_X(t)}=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it(y+b)}}{a^2+y^2}\,dy=e^{itb}\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}}{a^2+y^2}\,dy$$

$$=\boldsymbol{e^{itb-a|t|}}$$