saade/awael
Bac files

For more useful BAC files tap the link !

BY

التّابــع الأســـيّ

للاستاذ إياد ادريس

مشرف مادّة الرّياضيّات في ثانويّة السّعادة

التابع الأسي

تمهيد:

التابع التقابل: نقول عن التابع f أنه تقابل إذا وفقط إذا تحقق:
أياً يكن المتغير $y \in$ فالمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد في المنطلق.

ملاحظة:

① يمكن الاستفادة من دراسة تغيرات التابع في اثبات أن التابع f تقابل.

② إذا كان للتابع f تقابل فله تقابل عكسي f^{-1}

مثال: ليكن التابع $f : [\frac{2}{3},+\infty[\to [0,+\infty[\; ; \; f(x)=\sqrt{3x-2}$ $\boxed{\text{تابع الجذر}}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن f تقابل ثم أوجد تقابله العكسي f^{-1}

① f معرف ومستمر على $[\frac{2}{3},+\infty[$

$f(\frac{2}{3})=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f اشتقاقي على $]\frac{2}{3},+\infty[$

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}>0$$

x	$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

② من جدول التغيرات نجد:

f مستمر ومتزايد تماماً على $[\frac{2}{3},+\infty[$

$$f([\frac{2}{3},+\infty[)=[0,+\infty[$$

ومنه أياً يكن $y \in [0,+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد في المنطلق $[\frac{2}{3},+\infty[$

إذاً f تقابل فله تقابل عكسي f^{-1}

إيجاد التقابل العكسي:

$$f(x)=y \Rightarrow \sqrt{3x-2}=y$$

نربع بشرط $y \geq 0$:

$$3x-2=y^2$$

$\ln x = y$, $x \in \left]0,+\infty\right[$, $y \in R$

$e^x = y$, $x \in R$, $y \in \left]0,+\infty\right[$

$3x = 2+y^2 \Rightarrow x = \frac{2+y^2}{3}$

التقابل العكسي: $f^{-1}: \left[0,+\infty\right[\to \left[\frac{2}{3},+\infty\right[\; ; \; f^{-1}(y) = x$

ال x يصير y و ال المغلق يصير مستقر

$f^{-1}(y) = \frac{2+y^2}{3}$

أو

$f^{-1}: \left[0,+\infty\right[\to \left[\frac{2}{3},+\infty\right[\; ; \; f^{-1}(x) = \frac{2+x^2}{3}$

مثال: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\left]0,+\infty\right[$ وفق: $f(x) = \ln x$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
2. أثبت f تقابل ثم أوجد تقابله العكسي f^{-1}
3. ارسم الخطين البيانيين C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المستوي.

1) f معرف واشتقاقي ومستمر على $\left]0,+\infty\right[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) من جدول التغيرات نجد:

f مستمر ومتزايد تماماً على $\left]0,+\infty\right[$

$f(\left]0,+\infty\right[) = \left]-\infty,+\infty\right[$

ومنه أياً يكن $x \in$: $y \in \left]-\infty,+\infty\right[$ فالمعادلة $f(x) = y$ لها حل وحيد في المجال $\left]0,+\infty\right[$

إذاً f تقابل فله تقابل عكسي f^{-1}

إيجاد التقابل العكسي:

$f(x) = y \Rightarrow \ln x = y \overset{\text{ومنه}}{\Rightarrow} \underline{x = e^y}$

التقابل العكسي: $f^{-1}: \left]-\infty,+\infty\right[\to \left]0,+\infty\right[\; ; \; f^{-1}(y) = x$

((R))

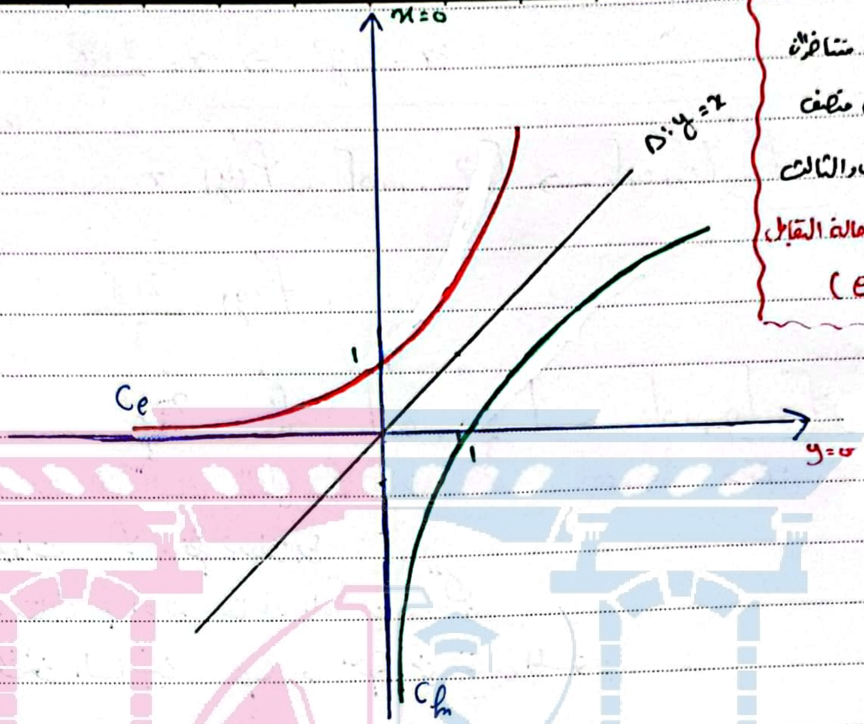
$f^{-1}(y) = e^y$

أو

$f^{-1}: R \to \left]0,+\infty\right[\; ; \; f^{-1}(x) = e^x$.

$\ln e^5 = 5$, $e^{\ln 5} = 5$

240



نرسم C_e بتحيل
إرسالات $\ln$ دايات e
دوريات $\ln$ إرسالات e

$C_{\ln}$ و C_e متناظران بالنسبة إلى منصف الربعين الأول والثالث (نفهم الحالة في حالة التقابل بين $\ln$ و e)

تعريف

التابع الأسي النيبري الذي رمزه $\exp$ هو التقابل العكسي للتابع اللوغارتمي النيبري $\ln$ أي:

$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[: \exp(x) = e^x$

نتائج:

1. أياً يكن $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $\ln e^x = x$
   أياً يكن $x \in]0,+\infty[$ $e^{\ln x} = x$
2. التابع الأسي النيبري $\exp$ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$
3. الخط البياني للتابع الأسي النيبري $\exp$ هو نظير الخط البياني للتابع اللوغارتمي النيبري بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث
4. أياً يكن العددان الحقيقيان a , b فإنّ

1) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2) $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
3) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

مجموعة تعريف التابع $f(x) = e^{u(x)}$

مجموعة تعريف التابع $x \to e^{u(x)}$ هي مجموعة تعريف التابع $x \to u(x)$

مثال: عيّن مجموعة تعريف كل من التوابع

1) $f(x) = e^{x^2-2x}$: $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$: $D_f = \mathbb{R} / \{4\}$

3) $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$: $D_f = [2,+\infty[$

نأخذ e للطرفين $e^{\ln x} = e^m$; $x = m$ | نأخذ ln للطرفين $\ln e^x = \ln m$; $x = m$

1/186) اكتب بأبسط ما يمكن كلا من الأعداد الآتية:

1] $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$

$A = 2 + 3 = 5$

2] $B = e^{\ln 4 + \ln 16} + e^{\ln 3}$

$B = e^{\ln 4} + e^{\ln 3} = 4 + 3 = 7$

3] $C = \ln e^{-3} + \ln e^{5}$

$C = -3 + 5 = 2$

4] $D = e^{-\ln \frac{3}{2}} + e^{-\ln \frac{1}{3}}$

$D = e^{\ln \frac{2}{3}} + e^{\ln \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2/186) اكتب بأبسط ما يمكن كلا من العبارات الآتية مبينا المجموعة التي تكون معرفة عليها

1) $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

$x \in]0, +\infty[$

$A = x - (\ln 2 + \ln e^x) = x - (\ln 2 + x) = -\ln 2$

2) $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$

$x \in]1, +\infty[$

$B = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x-1+1}{x} \Rightarrow B = 1$

3) $C = \ln (e)^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$

$x \in]0, +\infty[$

$C = \frac{1}{x} + e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

3/186) حل المعادلات أو المتراجحات

1) $e^{3-x} = 1$

مجموعة تعريف المعادلة $D = \mathbb{R}$

إما نأخذ لوغارتم الطرفين

$\ln e^{3-x} = \ln 1 \Rightarrow 3 - x = 0$

ومنه $x = 3$ مقبول

$S = \{3\}$

2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

مجموعة تعريف المعادلة $D = \mathbb{R}$

أو المعادلة تكافئ (حسب الخواص)

$2x^2 + 3 = 7x$

$\boxed{2x^2 - 7x + 3 = 0}$

$\Delta = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3$; $x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

$S = \{3, \frac{1}{2}\}$

$\ln(e^x) \Leftarrow$ مجموعة التعريف هي مجموعة الأس ② اشرط اللوغ

3) $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$

مجموعة تعريف المعادلة $D=\mathbb{R} \setminus \{\ln\frac{1}{2}\}$ (نجد القيم التي تعدم المقام $\Leftarrow$ ينعدم المقام ونحذف القيمة)

المعادلة تكافئ $e^x = 5-10e^x$

ومنه $11e^x = 5 \Rightarrow e^x = \frac{5}{11}$

$\Rightarrow x = \ln(\frac{5}{11})$

$S=\{\ln\frac{5}{11}\}$

4) $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$

مجموعة تعريف المعادلة $D=\mathbb{R}$ المقام لا ينعدم ($e^x=-2$ مستحيلة) $]0,+\infty[$

المعادلة تكافئ $2e^{-x}e^x + 4e^{-x} = 1$

$2+4e^{-x}=1 \Rightarrow 4e^{-x}=-1$

$e^{-x} = -\frac{1}{4}$ مستحيلة

$S=\emptyset$

5) $\ln(e^x-2)=3$

$\ln(e^x-2)$ معرف عندما $e^x-2>0 \Rightarrow e^x>2 \overset{\text{ومنه}}{\Rightarrow} x>\ln 2$

مجموعة تعريف المعادلة $D=]\ln 2,+\infty[$

المعادلة تكافئ: $e^x-2=e^3$

ومنه $e^x=e^3+2$ ومنه $x=\ln(2+e^3)$

$\Leftarrow$ $S=\{\ln(2+e^3)\}$

6) $\ln(2-e^x)\geq 3$

مجموعة تعريف المتراجحة $D=]-\infty,\ln 2[$

المتراجحة تكافئ: $2-e^x\geq e^3$

ومنه $e^x \leq \underbrace{2-e^3}_{\text{سالب}}$ مستحيلة (لا يمكن أخذ ln للطرفين)

$S=\emptyset$

7) $e^{x^2-2}\leq e^{4x}$

مجموعة تعريف المتراجحة $D=\mathbb{R}$

المتراجحة تكافئ $x^2-2\leq 4x$

ومنه $\boxed{x^2+x-6\leq 0}$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \to x=2$

$x=-3$

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
x^2+x-6	$+$	0	$-$	0	$+$
المتراجحة			مقبول		

$\Rightarrow x \in [-3,2]$

وما ينتمي منها لـ D هي

مجموعة حلول المتراجحة المعطاة $S=[-3,2]$

8) $(e^x-1)(e^x-4)<0$

مجموعة تعريف المتراجحة $D=\mathbb{R}$

$(e^x-1)(e^x-4)=0$

إما $e^x=1 \Rightarrow x=0$ أو $e^x=4 \Rightarrow x=\ln 4$

x	$-\infty$	0		$\ln 4$	$+\infty$
$(e^x-1)(e^x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
المتراجحة			مقبول		

$e^x=t$, t^2

$\Rightarrow x \in]0,\ln 4[$

وما ينتمي منها لـ D هي

مجموعة حلول المتراجحة المعطاة: $S=]0,\ln 4[$

9) $e^{2x^2-1} \geq 3$

مجموعة تعريف المتراجحة: $D=\mathbb{R}$

المتراجحة تكافئ: $2x^2-1 \geq \ln 3$

ومنه: $\boxed{2x^2-1-\ln 3 \geq 0}$

$2x^2-1-\ln 3=0 \Leftrightarrow 2x^2=1+\ln 3 \Rightarrow x^2=\frac{1+\ln 3}{2}$

إما $\Rightarrow x=-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$ ، أو $x=\sqrt{\frac{1+\ln 3}{3}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$		$\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$	$+\infty$
$2x^2-1-\ln 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
المتراجحة	مقبول				مقبول

$\Rightarrow x \in \left]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}},+\infty\right[$

وما ينتمي منها لـ D هي:

$S=\left]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}},+\infty\right[$

التابع الثابت:

الدوال التي قاعدتها ربطه عدد ثابت ، ومنحنيه البياني مستقيم يوازي محور الفواصل

مثل $f(x)=4$ ، $c=4$ ، $y=4$

244

خواص التابع الأسي:

أياً يكن العددان الحقيقيان a و b فإنّ:

1) $e^a \times e^b = e^{a+b}$

2) $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

3) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

4) $(e^a)^f = e^{f.a}$

$\frac{1}{190}$) أثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين على $\mathbb{R}$

1) $\ln(e^x+1) - \ln(e^{-x}+1) = x$

$$L_1 = \ln(e^x+1) - \ln(e^{-x}+1) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$\Rightarrow L_1 = \ln\left(\frac{e^x+1}{\frac{1}{e^x}+1}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{e^x+1}}{\frac{\cancel{1+e^x}}{e^x}}\right) = \ln(e^x) = x = L_2$$

2) $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$L_1 = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{e^{-x}+1} = L_2$$

(يمكن أن نبدأ من الطرف الثاني ونحول $e^{-x} \leftarrow \frac{1}{e^x}$ ثم توحيد مقامات

$\frac{3}{190}$) أثبت أنّ التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2$ تابع ثابت

الحل:

$f(x) = e^{2x}+2+e^{-2x} - (e^{2x}-2+e^{-2x})$

$f(x) = e^{2x}+2+e^{-2x} - e^{2x}+2-e^{-2x}$

$f(x) = 4$ ثابت

$\frac{4}{190}$) حل المعادلات الآتية:

1) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \Rightarrow$ (تشبه معادلة درجة ثانية)

مجموعة تعريف المعادلة $D = \mathbb{R}$

نفرض $e^x = t > 0$ ((لأنّ عدد e مهما أجلناه فلا يعطي قيمة سالبة أرفض))

تصبح المعادلة بالشكل: $t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0 \Rightarrow t=1$ ، $t=4$

$t=1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$t=4 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

$S = \{0, \ln 4\}$

$e > 0$

2) $4e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$

$D = \mathbb{R}$

نفرض $e^{x} = t > 0$

تصبح المعادلة بالشكل : $4t^2 - t + 2 = 0$

$\Delta < 0$ المعادلة مستحيلة

$S = \phi$

3) $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$D = \mathbb{R}$

نفرض $e^{-x} = t > 0$

تصبح المعادلة بالشكل: $t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-6)(t-1) = 0$

إما $t = \Rightarrow e^{-x} =$

$\Rightarrow -x = \ln 6$

$\Rightarrow x = -\ln 6$

أو $t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1$

$\Rightarrow -x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$S = \{-\ln 6, 0\}$

$\frac{5}{190}$) حل المتراجحات الآتية

1) $e^{x} - 4e^{-x} \le 0$

$D = \mathbb{R}$

نضرب طرفي المتراجحة $e^{x} > 0$

$e^{x} - 4e^{-x} \le 0 \Rightarrow e^{2x} - 4 \le 0 \Rightarrow e^{2x} \le 4$

ومنه $2x \le \ln 4$

$2x \le 2\ln 2 \Rightarrow x \le \ln 2$

$x \in]-\infty, \ln 2]$

وما ينتمي منها إلى D هي $S =]-\infty, \ln 2]$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

2) $(e^{x} - 2)e^{x} > 2(e^{x} - 2)$

$D = \mathbb{R}$

$(e^{x} - 2)e^{x} - 2(e^{x} - 2) > 0$ موجبة دوماً ولكن تستبعد $\ln 2$ التي تجعله يساوي الصفر لأنه أكبر تماماً من 0 وليست $(\ge)$

نخرج عامل مشترك $\Rightarrow (e^{x} - 2)(e^{x} - 2) > 0 \Rightarrow (e^{x} - 2)^{2} > 0$

لو كانت $\oplus$ كان $x \in \mathbb{R}$ (لا الأمثلة عدمه)

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

ومنه $S = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

3) $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^x}$

$D=\mathbb{R}$ لأنه المقام لا يمكن أن ينعدم

المتراجحة تكافئ: $e^{2x+2} \geq 3 \Rightarrow 2x+2 \geq \ln 3$

$\Rightarrow 2x \geq -2+\ln 3 \Rightarrow x \geq -1+\frac{\ln 3}{2}$

ومنه $x \in [-1+\frac{\ln 3}{2}, +\infty[$

4) $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

$D=\mathbb{R}$

نضرب طرفي المتراجحة بـ e^x :

$e^{3x}-2-3e^x<0$

$e^{3x}-3e^x-2<0$

نفرض $e^x=t$ ، $t>0$: تصبح المتراجحة بالشكل: $\boxed{t^3-3t-2<0}$

$t^3-3t-2=0$

بالتجريب: $t=-1$ حل للمعادلة ، ولكن لم نقبله وإنما افترضناه بالتجريب لإيجاد العامل الصفري $(t+1)$

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -t^3-t^2 & t^2-t-2 \\ -t^2-3t-2 & \\ +t^2+t & \\ -2t-2 & \\ +2t+2 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (t+1)(t^2-t-2)=0$

إما $t=-1$ مرفوض

أو $t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

إما $t=2$ مقبول أو $t=-1$ مرفوض

$e^x=t$	0		2		$+\infty$
t^3-3t-2		$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول		//////	

$\Rightarrow t \in]0,2[\Rightarrow e^x \in]0,2[$

$\ln \downarrow$

$x \in]-\infty, \ln 2[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة:

$S=]-\infty; \ln 2[$

5) $e^{x+\ln 4} > \frac{2}{3}$

$D=\mathbb{R}$

المتراجحة تكافئ ، $x+\ln 4 > \ln\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x > \ln\frac{2}{3}-\ln 4 \Rightarrow x > \ln\frac{1}{6}$

$\Rightarrow x \in]-\ln 6, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة $S =]-\ln 6, +\infty[$

6) $e^x + 4e^{-x} \leq 5$

$D = \mathbb{R}$

نضرب طرفي المتراجحة بـ e^x

$e^{2x} + 4 \leq 5e^x \Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$

نفرض $e^x = t > 0$

تصبح المتراجحة بالشكل $\boxed{t^2 - 5t + 4 \leq 0}$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0 \rightarrow t = 1$, $t = 4$

t	0		1		4		$+\infty$
t^2-5t+4		+	0	−	0	+	
المتراجحة				مقبول			

$\Rightarrow t \in [1,4]$

$e^x \in [1,4]$

$x \in [0, \ln 4]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة $S = [0, \ln 4]$

مشتق التابع الأسي:

إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على مجال I فإنّ التابع $f: x \rightarrow e^{u(x)}$ اشتقاقي على I

وعند كل x من I لدينا $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$ (مشتق الأس بنفسو)

$\left(\frac{1}{209}\right.$ احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ $\quad I = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على I

$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x) \Rightarrow f'(x) = (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x \Rightarrow f'(x) = (x^2 - 2)e^x$

2) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$ $\quad I =]0, +\infty[$

f اشتقاقي على I

$f'(x) = -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x} \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)e^{-x}$

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$ $\quad I = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على I

$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{-x}) + e^{-x}(e^x - 1)}{(1+e^{-x})^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 + 1 \cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x + 2 \cdot e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

4) $f(x) = e^{x \ln x}$ $\qquad I =]0, +\infty[$

f اشتقاقي على I

$f'(x) = (x \cdot \ln x)' \cdot e^{x \ln x} \Rightarrow f'(x) = (\ln x + 1) \cdot e^{x \ln x}$

5) $f(x) = (\sin x + \cos x) e^x$ $\qquad I = \mathbb{R}$

f اشتقاقي على I

$f'(x) = (\cos x - \sin x) e^x + (\sin x + \cos x) e^x \Rightarrow f'(x) = (2\cos x) e^x$

1] $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2] $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3] $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; $n \in \mathbb{N}$

4] $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^x) = 0$ $\begin{cases} n \text{ زوجي} \to 0^+ \\ n \text{ فردي} \to 0^- \end{cases}$

5] $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = 1$

نهايات التابع الأسي:

$e^0 = 1$

$e^1 = e$

$e^{-1} = \frac{1}{e}$

$e^{+\infty} = +\infty$ (نظرية)

$e^{-\infty} = 0$ (نظرية)

$\frac{3}{199}$) جد نهاية كل من التوابع الآتية عند a

1) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ $\qquad a = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين . عندما $x \to 0$ نكتب:

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

علماً $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

2) $f(x) = 2x e^{-x}$ $\qquad a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $0 \cdot \infty$ عدم تعيين . عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = 2 \cdot \frac{x}{e^x}$

علماً $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$ $\quad a = -\infty, +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4) $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$ $\quad a = -\infty, +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 + 3 = 3$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = e^x\left(e^x - 1 + \frac{3}{e^x}\right) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5) $f(x) = \ln(e^x + 2)$ $\quad a = -\infty, +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

6) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad a = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ من الشكل $-\infty + \infty$ عدم تعيين ، عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$f(x) = e^{-x}\left(2xe^x - e^x + 1\right)$

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,(0 - 0 + 1) = +\infty$

7) $f(x) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)$ $\quad a = 0, +\infty$

عندما $x \to 0$ نكتب:

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

250

8) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad a: +\infty, 0, -\infty$ $\quad D_f:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

9) $f(x) = \ln x - e^x$ $\quad a = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = x \left[\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x} \right]$

علماً أن: $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$ فإن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0 - \infty) = -\infty$

إزالة عدم تعيين من الشكل 1^∞

نهاية مميزة:

اثبت أن: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

الإثبات:

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

علماً أن: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

فإن: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$

ملاحظة:

لإزالة عدم التعيين من الشكل 1^∞ نتبع الخطوات الآتية:

1. نفرض المقدار المضاف للواحد u
2. نوجد x بدلالة u
3. عندما $x \to a$ يجب أن تسعى u إلى الصفر.
4. نعوض بالتابع ونستفيد من النهاية المرجعية $\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$

$u \to 0 \Leftarrow x \to ?$

x.

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل 1^{∞} عدم تعيين، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

بفرض $\frac{1}{x}=u(x)$ فيكون $x=\frac{1}{u}$

عندما $x\to+\infty$ فإن $u\to 0$

نعوض:

$$f(x)=(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

بما أن $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=e$

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ عند 1

$\lim_{x\to 1} f(x)$ من الشكل 1^{∞} عدم تعيين، عندما $x\to 1$ نكتب:

(يجب أن نظهر الواحد إجباري مثال $x=1-1+x$)

$$f(x)=(1+1-x)$$

بفرض $1-x=u(x)$ فيكون $x=1-u$

عندما $x\to 1$ فإن $u\to 0$

نعوض:

$$f(x)=(1+u)^{\frac{1}{-u}}=\left[1+u\right]^{\frac{-1}{u}}=\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-1}$$

للتأكد من الحل: يجب
* $u\to 0$
* $e^{\boxed{1}}$

بما أن

$$\lim (1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

فإن $\lim_{x\to 1} f(x)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل 1^{∞} عدم تعيين، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$\begin{array}{r|l} x-2 & x+1 \\ \underline{-x-1} & 1 \\ -3 & \end{array}$$

$$f(x)=\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

بفرض $\frac{-3}{x+1}=u(x)$

ومنه $\frac{x+1}{3}=-\frac{1}{u}$

عندما $x \to +\infty$ فإن $u \to 0$ ،

نعوض:

$$f(x) = (1+u)^{-\frac{1}{u}} = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-1}$$

لدينا: $\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

تمرين:

أدرس نهاية التابع: $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $1^{+\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x-1 \\ \hline -x+1 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

نفرض $\frac{4}{x-1} = u(x)$ ومنه

$$ux - u = 4 \Rightarrow ux = u + 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{u+4}{u}$$

عندما $x \to +\infty$ فإن $u \to 0$

نعوض:

$$f(x) = (1+u)^{\frac{u+4}{2u}} = (1+u)^{\frac{1}{2}+\frac{2}{u}}$$

$$\Rightarrow f(x) = (1+u)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+u)^{\frac{2}{u}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{u+1} \cdot \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^2$$

بما أن

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e \\ \lim_{u \to 0} \sqrt{u+1} = 1 \end{array}\right.$$

وأن فإن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (1)(e)^2 = e^2$$

للتدريب:

1) $f(x) = (4-x)^{\frac{1}{x-3}}$ عند (3)

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل 1^{∞} عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = (3+1-x)^{\frac{1}{3-x}} \Rightarrow f(x) = (1+3-x)^{\frac{1}{x-3}} \Rightarrow$$

نفرض $3-x = u(x)$ ومنه $x = 3-u$

عندما $x \to 3$ فإن $u \to 0$

نعوض: $f(x) = (1+u)^{-\frac{1}{u}} \Rightarrow$

$$f(x) = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-1}$$

لدينا: $\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ فإن $\lim_{x \to 3} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2) $f(x)=\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{\frac{x}{2}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل 1^{∞} عدم تعيين ، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$x+5 = (x-2)\cdot 1 + 7$ $\Rightarrow$ $f(x)=\left(1+\frac{7}{x-2}\right)$

نفرض $\frac{7}{x-2}=u(x)$ $\Leftarrow$

$ux-2u=7$

$ux=7+2u \Rightarrow x=\frac{7+2u}{u}$

عندما $x\to+\infty$ فإن $u\to 0$

نعوض:

$f(x)=(1+u)^{\frac{7+2u}{2u}}$

$f(x)=(1+u)^{\frac{7}{2u}+1}$

$f(x)=(1+u)(1+u)^{\frac{7}{2u}}=(1+u)\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{7}{2}} \Rightarrow$

نعلم أن: $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

وأن: $\lim_{u\to 0}(1+u)=1$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=(1)\cdot e^{\frac{7}{2}}=e^{\frac{7}{2}}$

---

2) 199: ليكن (C) الخط البياني للتابع f ، المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(3-x)e^{x}$

① ادرس تغيرات f

② اكتب معادلة d مماس الخط (C) في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$

③ ارسم في معلم واحد المماس d ثم ارسم الخط (C)

① f معرف واشتقاقي ومستمر على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

عندما $x\to-\infty$ نكتب:

$f(x)=3e^{x}-xe^{x}$

بما أن $\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{x})=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

254

/ /

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$, $f(2)=e^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

②

f' اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f''(x) = -e^x + (2-x)e^x = (-1+2-x)e^x = (1-x)e^x$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=1$

, $f(1)=2e$

نقطة التماس $N(1,2e)$ (نقطة الانعطاف: تفصل الخط البياني إلى جزئين كل منهما له عكس أي هما لعلوي والآخر لتحت)

على الأسهم بالأعلى

على الأسهم بالأسفل

$f'(1)=e$ ميل المماس $\Leftarrow$ ومنه معادلة المماس d في النقطة N

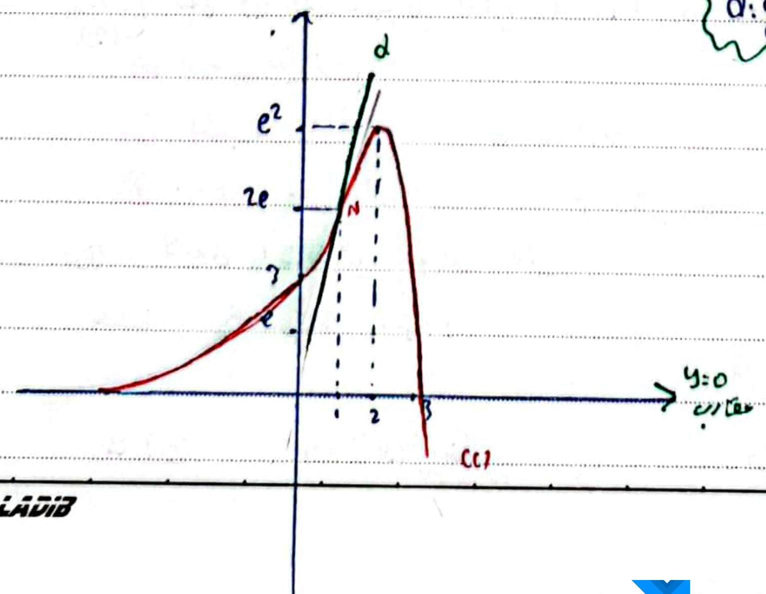
$d: y-2e = e(x-1) \Rightarrow$

$d: y = ex + e$

③

$x=0 \Rightarrow y=3$

$y=0 \Rightarrow x=3$



$\frac{8}{220}$) ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=(x-1)e^{x}$

ادرس نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم (C).

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$f(x)=xe^{x}-e^{x}$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}(xe^{x})=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

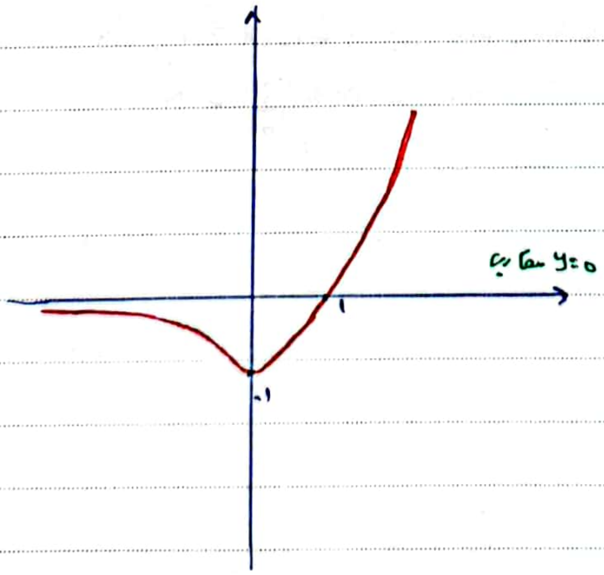
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



$y=0 \Rightarrow x=1$

دراسة توابع من الشكل $x \to a^x$ $(a>0)$

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً تماماً كان

$$a^x \overset{\ln}{\Longrightarrow} \ln a^x \overset{e}{\Longrightarrow} e^{\ln a^x}$$

$$\boxed{a^x = e^{x\ln a}} = e^{\text{الأس} \times \ln(\text{الأساس})}$$

س: أعد كتابة كل من العددين: $\frac{1}{203}$

$A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ $\qquad$ $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

$A = e^{-\frac{1}{\ln 3}\cdot \ln 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$B = e^{\frac{1}{\ln 4}\cdot \ln 2} = e^{\frac{1}{2\ln 2}\cdot \ln 2}$

$B = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

حل كلاً من المعادلات والمتراجحات: $\frac{2}{203}$

1) $7^{x-1} = 3^x$ $\qquad D = \mathbb{R}$

نأخذ لوغ الطرفين:

$(x-1)\ln 7 = x\ln 3$

$x\ln 7 - \ln 7 = x\ln 3 \Rightarrow x\ln 7 - x\ln 3 = \ln 7$

$x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7 \Rightarrow x\ln\frac{7}{3} = \ln 7$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln\frac{7}{3}} \Rightarrow S = \left\{\frac{\ln 7}{\ln\frac{7}{3}}\right\}$

2) $3^x = 4^{2x+1}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

المعادلة تكافئ:

$x\ln 3 = (2x+1)\ln 4$

$x\ln 3 = 2x\ln 4 + \ln 4 \Rightarrow x\ln 3 - 2x\ln 4 = \ln 4$

$\Rightarrow x(\ln 3 - \ln 16) = \ln 4 \Rightarrow x\ln\left(\frac{3}{16}\right) = \ln 4$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}} \Rightarrow S = \left\{\frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}}\right\}$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$ $\qquad D = \mathbb{R}$

نأخذ لوغ الطرفين

سالب الإجراء قلب الجهة

$x\ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 4 \Rightarrow -x\ln 3 > \ln 4$

$x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

$x \in \left]-\infty, -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة $S = \left]-\infty, -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$

4) $3^x > 4$ $D=\mathbb{R}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين :
$x\ln 3 > \ln 4$

$x > \frac{\ln 4}{\ln 3} \Rightarrow x \in \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة :

$S = \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$

5) $5^{-x} < 5^{2x}$ $D=\mathbb{R}$

المتراجحة تكافئ
$-x < 2x$

ومنه
$-3x < 0 \Rightarrow x > 0$

$x \in]0, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة ،
$S =]0, +\infty[$

6) $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$ $D=\mathbb{R}$

المتراجحة تكافئ :

$3.2^x < 2^x + 1$

ومنه
$3.2^x - 2^x < 1 \Rightarrow (3-1)2^x < 1 \Rightarrow 2.2^x < 1$

$2^x < \frac{1}{2} \Rightarrow x\ln 2 < -\ln 2 \Rightarrow x < -1$

$x \in]-\infty, -1[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة
$S =]-\infty, -1[$

3) حل كل من المعادلات أو المتراجحات
$\begin{pmatrix}3\\ 203\end{pmatrix}$

1) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ $D=\mathbb{R}$

المعادلة تكافئ
$2^{2x} + 2^1.2^x - 3 = 0$

نفرض
$2^x = t > 0$

تصبح المعادلة بالشكل
$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-1) = 0$

إما
$t = -3$ مرفوض أو $t = 1$ مقبول

$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

2) $3^{x+1}+2\times 3^{-x}\geq 7$ $D=\mathbb{R}$

نضرب طرفي المتراجحة ب 3^x

$3^{x+1}+2\geq 7.3^x$ $\Rightarrow$

$3^1.3^x-7.3^x+2\geq 0$ $\Rightarrow$ $3^x=t>0$

تصبح المتراجحة بالشكل

$$\boxed{3t^2-7t+2\geq 0}$$

$3t^2-7t+2=0$, $\Delta=25$

$t=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3}$ $t=\frac{7+5}{6}=2$

t	0		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3t^2-7t+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول				مقبول	

$3^x=t\in]0,\frac{1}{3}]\cup[2,+\infty[$

$x\ln 3\in]-\infty,-\ln 3]\cup[\ln 2,+\infty[$

$\Rightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[\frac{\ln 2}{\ln 3},+\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$S=]-\infty,-1]\cup[\frac{\ln 2}{\ln 3},+\infty[$

3) $9^x-3^{x+1}+2=0$ $D=\mathbb{R}$

$3^{2x}-3.3^x+2=0$ المعادلة تكافئ

نفرض $3^x=t>0$ $\Leftarrow$

$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

إما $t=2$ مقبول أو $t=1$ مقبول

$t=2 \Rightarrow 3^x=2 \Rightarrow x\ln 3=\ln 2 \Rightarrow x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$

$t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x\ln 3=0 \Rightarrow x=0$

$S=\{0,\frac{\ln 2}{\ln 3}\}$

4) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ $\qquad D = R$

المعادلة تكافئ: $4^x + 2^x \cdot 2 - 3 \leq 0$

$\Rightarrow 2^{2x} + 2^x \cdot 2 - 3 \leq 0$

نفرض $2^x = t > 0$ فتصبح المتراجحة من الشكل:

$t^2 + 2t - 3 \leq 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow (t-1)(t+3) = 0$

إما $t = -3$ مرفوض أو $t = 1$ مقبول

t	0		1		$+\infty$
t^2+2t-3		$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول			

$2^x = t \in]0, 1]$

$\Rightarrow x \ln 2 \in]-\infty, 0]$

$x \in]-\infty, 0]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

$S =]-\infty, 0]$

$\frac{6}{203}$) حل في R جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$x \in R \quad , \quad y \in R$

إما:

$3^x = \sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$3^y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

عددين: ضربهما 9 وجمعهما $4\sqrt{3}$ ما هي؟

أو:

$3^x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$3^y = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$

(4/202

$f(x) = 2^{x^2-2x}$, $D = R$

$f(x) = e^{(x^2-2x).\ln 2}$ نحوله إلى تابع أسي نيبيري

① ادرس تغيرات f .

f معرف ومستمر واشتقاقي على: $D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = ((x^2-2x)\ln 2)' . e^{(x^2-2x)\ln 2} \Rightarrow f'(x) = (2x-2)\ln 2 . e^{(x^2-2x)\ln 2}$

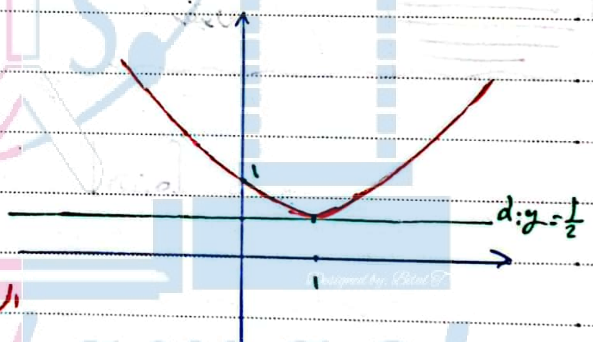
$f'(x) = 0 \iff (2x-2)\ln 2 = 0 \iff 2x-2 = 0 \iff x = 1$

$f(1) = \frac{1}{2}$ ونعوض التعويض في التابع الأساسي (أصلي)

$f(1) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

③ ارسم في معلم المماس (d) و (C)



التقاطع مع yy' :

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

② اكتب معادلة المماس d للخط (C) في النقطة التي فاصلتها تعدم المشتق الأول $f(x)$

$N(1, \frac{1}{2})$ معادلة المماس في النقطة N :

$d: y = \frac{1}{2}$ أفقي

(2/203 ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = x.2^{-x}$

$f(x) = x.e^{-x.\ln 2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $D = R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\infty.0$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \frac{x}{e^{x\ln 2}} \Rightarrow f(x) = \frac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}} . \frac{1}{\ln 2}$

ولدينا $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0\right)$ ومنه $\Leftarrow$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

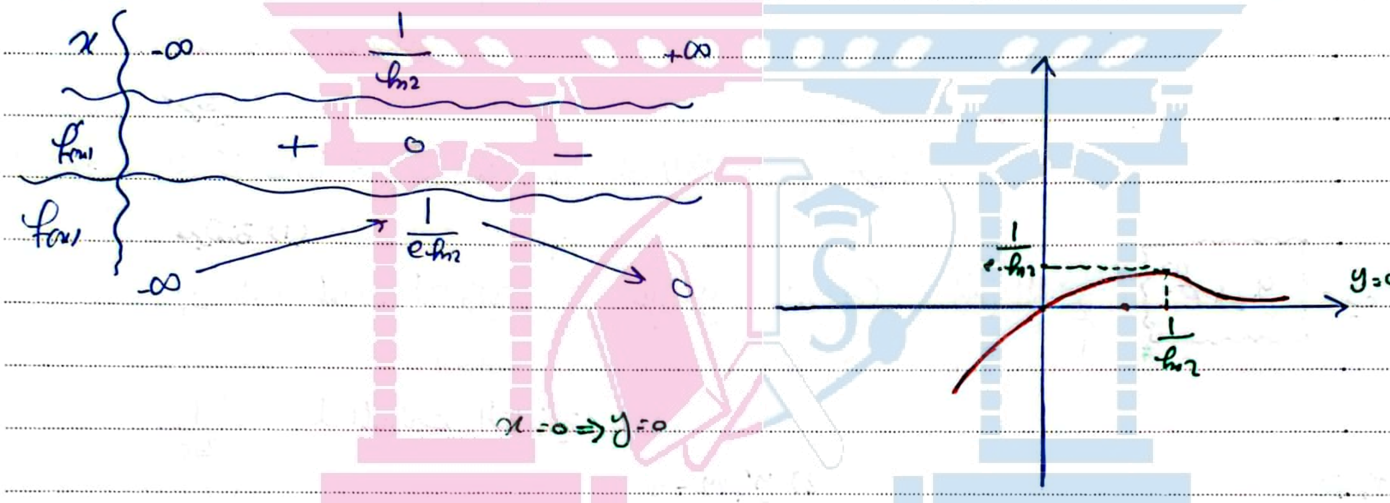
$\frac{1}{e\ln 2} \approx 0.5$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = e^{-x\ln 2} - \ln 2\, e^{-x\ln 2} \cdot x = e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2)$

$f'(x) = 0 \iff 1 - x\ln 2 = 0 \iff x\ln 2 = 1$

$\iff x = \frac{1}{\ln 2}$, $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{e\ln 2}$



$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$D = \mathbb{R}$ $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$ $\frac{9}{203}$ *

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

$f(x) = 2^{2x} - 2^x \cdot 2^2 = 2^x(2^x - 4)$

التحويل إلى نيبري $\Rightarrow f(x) = e^{x\ln 2}(e^{x\ln 2} - 4)$

$D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ f معرفة، اشتقاقية ومستمرة عليه

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = e^{2x\ln 2} - 4e^{x\ln 2}$

$f'(x) = 2\ln 2\, e^{2x\ln 2} + \ln 2\, e^{x\ln 2}(-4) \Rightarrow f'(x) = 2\ln 2\, e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\, e^{x\ln 2}$

$f'(x) = 2\ln 2\, e^{x\ln 2}(e^{x\ln 2} - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x\ln 2} - 2 = 0 \Rightarrow e^{x\ln 2} = 2 \overset{\ln}{\Rightarrow} x\ln 2 = \ln 2 \Rightarrow x = 1$

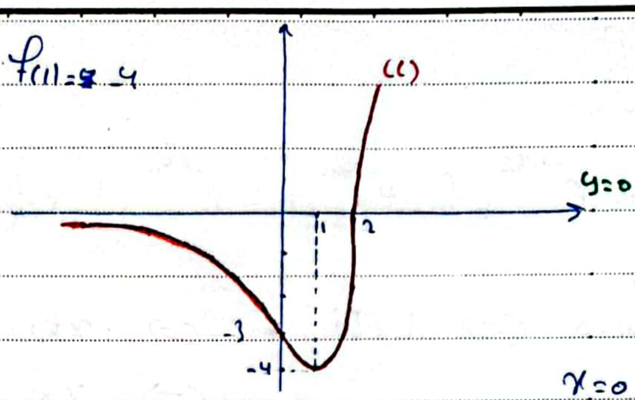
$$y' = ay \Rightarrow \frac{y'}{y} = a \Rightarrow \ln y = ax + C$$

$\boxed{262}$

$$y = e^{ax+c} \Rightarrow y = e^{c} \cdot e^{ax} \Rightarrow y = ke^{ax}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = -4$



$x = 0 \Rightarrow y = -3$

$y = 0 \Rightarrow x = 2$

المعادلات التفاضلية

تعريف

هي كل معادلة تحوي مشتقاً واحداً على الأقل للتابع المجهول y

ملاحظة (1)

إن حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ $(a \neq 0)$ هي التوابع $\boxed{y = ke^{ax}}$ حيث $k \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{205}$ حل المعادلات التفاضلية

1) $y' = 3y$

$a = 3$

الحل العام: $\boxed{y = ke^{3x}}$: $k \in \mathbb{R}$

2) $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$, $a = -2$

الحل العام: $\boxed{y = ke^{-2x}}$, $k \in \mathbb{R}$

3) $3y' = 5y$

$y' = \frac{5}{3}y$, $a = \frac{5}{3}$

الحل العام $\boxed{y = ke^{\frac{5}{3}x}}$: $k \in \mathbb{R}$

4) $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, $a = -\frac{3}{2}$

الحل العام $\boxed{y = ke^{-\frac{3}{2}x}}$

ملاحظة (2):

إن حلول المعادلة التفاضلية $y' = ax + b$ $(a \neq 0, b \in \mathbb{R})$ هي التوابع:

$$\boxed{y = ke^{ax} - \frac{b}{a}} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

بس هو يقلي حل المعادلة التفاضلية ويعطيني شرط

يعني بدو قيمة K

3) حل المعادلات التفاضلية: 205

1) $y' = 2y + 1$

$a = 2$, $b = 1$

الحل العام: $\boxed{y = ke^{2x} - \frac{1}{2}}$; $K \in \mathbb{R}$

2) $2y' = y - 1$

$y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

الحل العام $\boxed{y = ke^{\frac{1}{2}} + 1}$; $K \in \mathbb{R}$

3) $y + 3y' = 2$

$3y' = -y + 2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$a = -\frac{1}{3}$ $b = \frac{2}{3}$

الحل العام: $\boxed{y = ke^{-\frac{1}{3}} + 2}$; $K \in \mathbb{R}$

4) $2y + 3y' - 1 = 0$

$3y' = -2y + 1 \Rightarrow y' = \frac{-2}{3}y + \frac{1}{3}$

$a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

الحل العام: $\boxed{y = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}}$; $K \in \mathbb{R}$

2) في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى 205

① $y' = 2y$ والحل φ - يحقق الشرط $\varphi(0) = 1$

$a = 2$

الحل العام: $f(x) = y = ke^{2x}$; $K \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1 \Rightarrow ke^{0} = 1 \Rightarrow K = 1$

الحل الخاص: $\boxed{y = e^{2x}}$ - يحقق الشرط

② $y' + 5y = 0$ والخط البياني (C) للحل يمر بالنقطة $A(2,1)$

$y' = -5y$

$a = -5$

الحل العام $f(x) = y = ke^{-5x}$; $K \in \mathbb{R}$

264

$f(2)=1 \Rightarrow Ke^{10}=1 \Rightarrow K=e^{-10}$

ومنه الحل الخاص

$y=e^{-10}\cdot e^{-5x} \Rightarrow$ يحقق الشرط $\boxed{y=e^{-5x-10}}$

③ $y'+2y=0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها (-2) من الخط البياني للحل يساوي $(\frac{1}{2})$

$y'=-2y$

الحل العام: $\boxed{y=Ke^{-2x}}$: $K\in\mathbb{R}$

$f'(x)=-2Ke^{-2x}$ ⇒ $f'(-2)=\frac{1}{2} \Rightarrow -2Ke^{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow K=\frac{1}{-4e^{4}}$

$K=-\frac{1}{4}e^{-4}$

ومنه الحل الخاص $y=-\frac{1}{4}e^{-4}\cdot e^{-2x}$

يحقق الشرط $\boxed{y=-\frac{1}{4}e^{-2x-4}}$

للتدريب:

السؤال الثاني من الاختبار (2)

حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ثم عين حلا f الذي يحقق $f(-1)=2$

$2y'=-y+1 \Rightarrow y'=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$

الحل العام: $\boxed{f(x)=y=Ke^{-\frac{1}{2}x}+1}$; $K\in\mathbb{R}$

$f(-1)=2 \Rightarrow Ke^{\frac{1}{2}}+1=2 \Rightarrow Ke^{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow K=e^{-\frac{1}{2}}$

الحل الخاص: $y=e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+1 \Rightarrow \boxed{y=e^{-\frac{1}{2}(x+1)}+1}$

تدريب

مثال ص 201 : ادرس تغيرات f المعرفة على R وفق $f(x)=x.2^x$ دالة (1)

f معرف واشتقاقي ومستمر على $R=]-\infty,+\infty[$

$f(x)=x.e^{x\ln 2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

عندما $x\to-\infty$ نكتب :

$f(x)=\ln 2\, x . e^{x\ln 2} \times \frac{1}{\ln 2}$

علما أن $\lim_{x\to-\infty}(x\ln 2\, e^{x\ln 2})=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

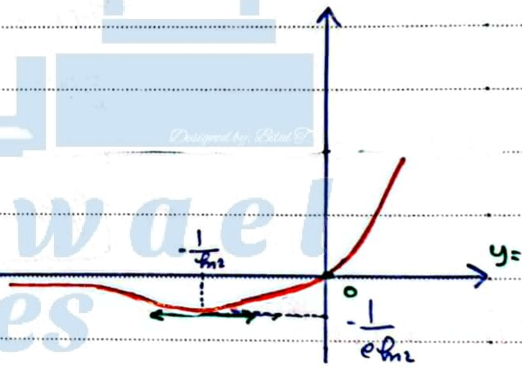
ومنه $y=0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$f'(x)=e^{x\ln 2}+\ln 2\, e^{x\ln 2}.x = e^{x\ln 2}(1+x\ln 2)$

$f'(x)=0 \iff 1+x\ln 2=0 \iff x\ln 2=-1 \iff x=\frac{-1}{\ln 2}$

$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{e\ln 2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e\ln 2}$	↗	$+\infty$



$f(x)=0 \Rightarrow x.2^x=0 \ ,\ 2^x\neq 0$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$

$\frac{26}{215}$ نتأمل المعادلة التفاضلية $E: y'+3y=2e^{-x}$

① عين العدد a ليكون التابع $x\to ae^{-x}$ حلا للمعادلة التفاضلية E

$y=ae^{-x}$

$y'=-ae^{-x}$

E حل للمعادلة $y=ae^{-x}$ $\iff -ae^{-x}+3ae^{-x}=2e^{-x}$

$\overset{\div e^{-x}}{\iff} -a+3a=2$

$\iff 2a=2$

$\iff a=1$

266

② ليكن a العدد الذي وجدناه في ① وليكن g تابعاً اشتقاقياً على R

نعرف التابع $h: x \to g(x) - ae^{-x}$

اثبت أن التابع g حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية

$F: y' + 3y = 0$

المعادلة التفاضلية يكون حلها أي تابع $y = g(x)$ حلا للتابع E، $y = h(x)$ حلا لـ F

h حل للمعادلة $F \iff h'(x) + 3h(x) = 0$

$\iff g'(x) + 3g(x) - 3ae^{-x} = 0$ ($+ae^{-x}$)

$a=1$

$\iff g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$

$E: y' + 3y = 2e^{-x}$ نلاحظ: $y = g(x)$ ومنه g حل لـ E

لأن $\iff g$ حل للمعادلة E

③ حل المعادلة التفاضلية (F) واستنتج حلول (E)

$F: y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y$

الحل العام:

$$\boxed{h(x) = y = ke^{-3x}}, \ k \in R$$

لدينا باعتبار $a = 1$

$h(x) = g(x) - e^{-x}$

$g(x) = h(x) + e^{-x}$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = ke^{-3x} + e^{-x}} ; k \in R$$

$\left(\frac{5}{209}\right.$

1) $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

$D = R$

لنبرهن أن $d: y = x - 1$ مقارب مائل

$f(x) - y_d = e^{-2x}$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_d] = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_d] = 0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وضع (C) مع d:

$e^{-2x} = f(x) - y_d > 0$

ومنه (C) فوق d

2) $f(x) = x+2+xe^{x}$

$D=\mathbb{R}$

لنبرهن أن $d: y=x+2$ مقارب مائل لـ (C)

$f(x)-y_d = xe^{x}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d]=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d]=0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

$\boxed{\text{وضع } (C) \text{ مع } d:}$

$f(x)-y_d = xe^{x}$

$f(x)-y_d=0 \Rightarrow x=0$ $\qquad$ $f(0)=2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_d$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		d تحت (C)		d فوق (C)	

نقطة مشتركة بين (C) و d $\quad (0,2)$

$f(x)=\ln(3+e^{x})$ $\qquad$ $D=\mathbb{R}$ $\qquad$ $\left(\frac{6}{210}\right.$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 3$

ومنه $\Delta: y=\ln 3$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

البحث عن المقارب المائل:

$f(x)=\ln\left[e^{x}\left(\frac{3}{e^{x}}+1\right)\right] = \ln e^{x}+\ln\left(\frac{3}{e^{x}}+1\right) = x+\ln\left(\frac{3}{e^{x}}+1\right)$

نعمم هذه القاعدة في جميع الحالات المشابهة لإيجاد معادلة المقارب

لنبرهن أن $d: y=x$ مقارب مائل لـ (C)

$f(x)-y_d=\ln\left(\frac{3}{e^{x}}+1\right)=\ln(3e^{-x}+1)$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d]=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d]=0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

$\boxed{263}$

وضع (C) مع $D: y=\ln 3$

$f(x)-y_D = \ln(3+e^x)-\ln 3 > 0$

لأنه: $3+\text{عدد}>3$

$3+e^x > 3$

$\ln(3+e^x) > \ln 3$

$\ln(3+e^x)-\ln(3) > 0$

ومنه (C) فوق D

وضع (C) و $d: y=x$

$f(x)-y_d = \ln(\frac{3}{e^x}+1) > 0$

لأنه: $\text{عدد}+1>1$

$\frac{3}{e^x}+1 > 1$

$\ln(\frac{3}{e^x}+1) > 0$

ومنه (C) فوق d

$\left(\frac{9}{210}\right.$

$f(x)=e^x-x$ $\qquad D=\mathbb{R}$

(1)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)= x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$

علماً أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ بأن

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2) $d: y=-x$

$f(x)-y_d = e^x$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_d]=0$

ومنه d مقارب مائل بجوار $-\infty$

ونلاحظ أنه $f(x)-y_d=e^x>0$ ومنه (C) فوق d

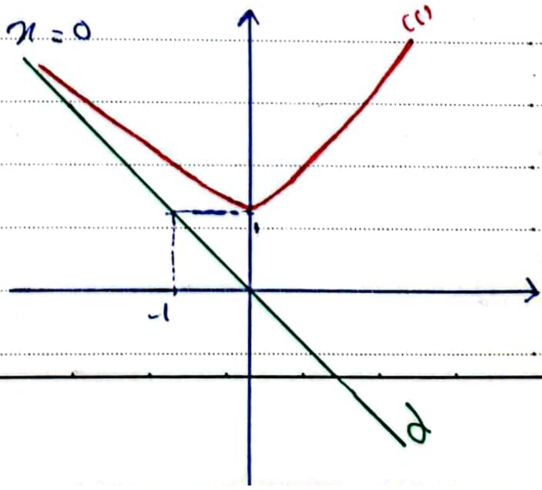
(3) f معرف و اشتقاق و مستمر على $\mathbb{R}\,]-\infty,+\infty[$

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff e^x=1 \overset{\ln}{\iff} x=0$

$f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	



رسم $d: y=-x$ $\Leftarrow$

x	0	-1
y	0	1

(10/210

$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$, $D = \mathbb{R}$

1) حد نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) أثبت أنه $d: y = x - 1$ مقارب مائل لـ (c) بجوار $+\infty$ ثم ادرس وضع (c) مع d

$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_d] = 0$

ومنه d مقارب مائل لـ (c) بجوار $+\infty$

وضع (c) مع d:

$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1} > 0$

ومنه (c) فوق d

3) أثبت أنه $d': y = x + 3$ مقارب مائل لـ (c) بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضع (c) مع d'

$f(x) - y_{d'} = \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1}$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_{d'}] = 0$

ومنه d' مقارب مائل لـ (c) بجوار $-\infty$

وضع (c) مع d':

$f(x) - y_{d'} = \frac{-4e^x}{e^x + 1} < 0$

ومنه (c) تحت d'

4) ادرس تغيرات f ونظم جدول تغيراتها

f معرف واشتقاقي ومستمر على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$

ينعدم لكنه موجب

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$

لا ينعدم

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5) اكتب معادلة المماس T لـ (C) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

عند التقاطع مع المحور yy' نجعل $x=0$ فنجد $y=1$

نقطة التماس $N(0,1)$

الميل $f'(0)=0$

معادلة المماس T لـ (C) في النقطة N

$T: y=1$

6) ادرس وضع (C) مع T ثم ارسم d و d' و T و (C)

وضع (C) مع T (نستنتجه من جدول التغيرات) لأن T عبارة عن (أفقي) $\Leftarrow$ نزيد عليه سطر رابع

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ أصغر	1	أكبر $\nearrow$	$+\infty$
وضع (C) مع T		(C) تحت T		(C) فوق T	

نزيد سطر رابع

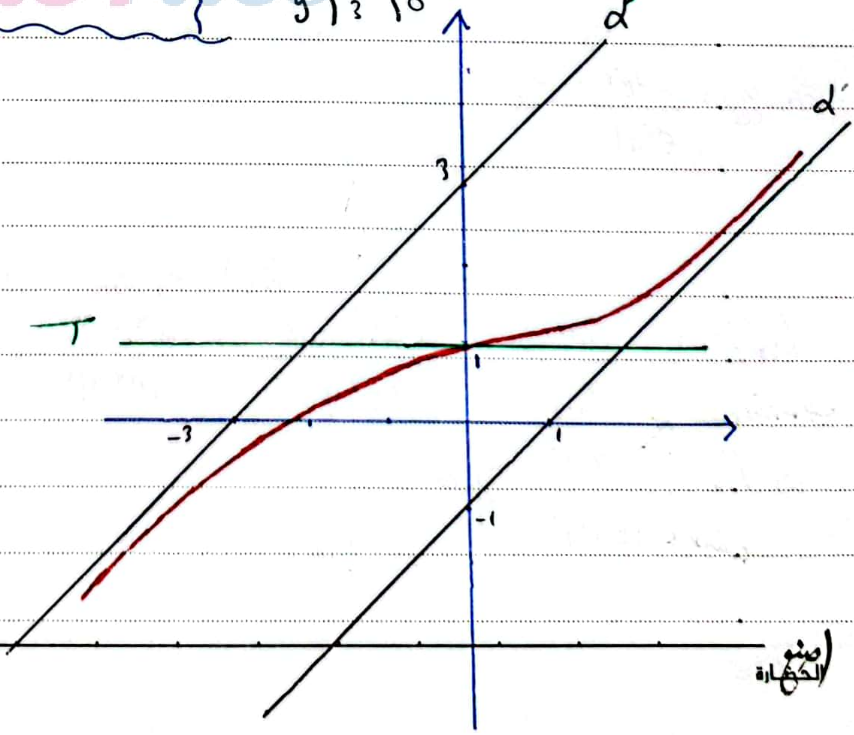
$(0,1)$ نقطة مشتركة بين (C) و (T)

رسم d $\Leftarrow$ $d: y=x-1$

x	0	1
y	-1	0

رسم d' $\Leftarrow$ $d': y=x+3$

x	0	-3
y	3	0



ملاحظة تصحيحية: لدراسة الوضع ... مع تابع أسي أو لوغرتمي

ندرس إطراد الفرق على مجموعة تعريف التابع.

/ /

(7
210

$f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$, $D = R$

1) لماذا المستقيمان $d_1: y = 2$ و $d_2: y = -3$ مقاربان لـ (c)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$d_2: y = -3$ مقارب أفقي لـ (c) بجوار $-\infty$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \dfrac{e^x\left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$d_1: y = 2$ مقارب أفقي لـ (c) بجوار $+\infty$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f معرف واشتقاقي ومستمر على $R =]-\infty, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

3) اكتب معادلة المماس T للخط (c) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب:

عند التقاطع مع محور التراتيب نجعل $x = 0$ فنجد $y = -\frac{1}{2}$

نقطة التماس $N(0, -\frac{1}{2})$

$f'(0) = \frac{5}{4}$ ميل المماس

ومنه معادلة المماس T في النقطة N

$T: y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x - 0)$

$$\boxed{T: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}}$$

4) ادرس وضع (C) مع T ثم ارسم d ، d_2 ، T ، (C)

وضع (C) مع T :

$$g(x) = f(x) - y_T$$

$$\boxed{g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}}$$

ندرس اطراد التابع g على $\mathbb{R}$:

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4} = \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5(e^{2x} - 2e^x + 1)}{4(e^x+1)^2}$$

ملاحظة: غالباً ما يكون هناك طابقة تربيعية في مشتق تابع الفرق

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-5(e^x - 1)^2}{4(e^x+1)^2} \leq 0$$

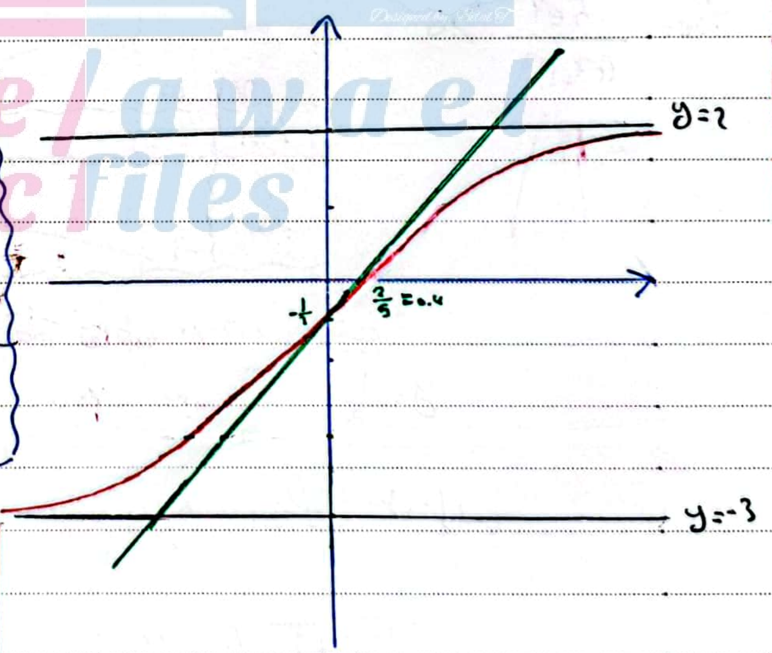
$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \boxed{0} \quad , \quad g(0) = \boxed{0}$$

x	$-\infty$		$\boxed{0}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x) = f(x) - y_T$	$+$	↘	$\boxed{0}$	↘	$-$
الوضع النسبي		T فوق (C)		T تحت (C)	

T و (C) نقطة مشتركة بين $(\boxed{0}, -\frac{1}{2})$
نقطة التماس

$d: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$ نرسم

x	0	$\frac{2}{5}$
y	$-\frac{1}{2}$	0



يظهر هذا (0) مباشرة (في المنهاج) لأنه إن لم يظهر فيجب إظهاره (طريقة غير مطلوبة) فهو يبين انعدام الفرق أي نقطة نقطة التماس (النقطة المشتركة) التي لا بد من وجودها في الجدول

$\left(\frac{20}{214}\right.$ ادرس تغيرات التابع f المعرف على $R/\{1\}$ بالصيغة

$f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

وارسم خطه البياني.

$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$

معرف ومستمر واشتقاقي على $R/\{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{e}$

$y = \frac{1}{e}$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty$

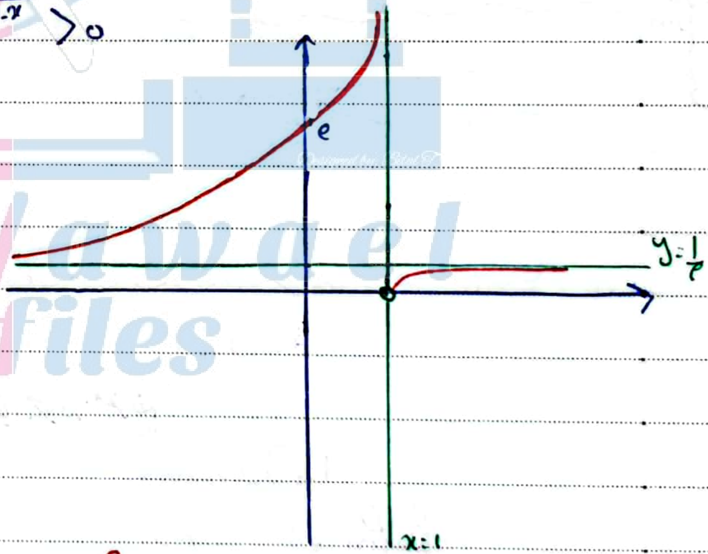
$x=1$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = 0$

$(1,0)$ نقطة مقاربة

$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$	‖	0 ↗	$\frac{1}{e}$



$\left(\frac{21}{214}\right.$ $f(x) = \ln(e^{-x}+1)$, $D = R$

(1) ⓐ صورة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل (C) مقاربات غير مائلة؟

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

ⓑ اثبت أنه $f(x) = -x + \ln(e^x+1)$

$f(x) = \ln\left[e^{-x}(1+e^x)\right] = \ln e^{-x} + \ln(1+e^x) \Rightarrow f(x) = -x + \ln(1+e^x)$

ALADIB

③ استنتج أنّ (C) يقبل مقارباً مائلاً وليكن d بجوار $-\infty$

لنبرهن أنّ $d: y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

$f(x) - y_d = \ln(1+e^x)$

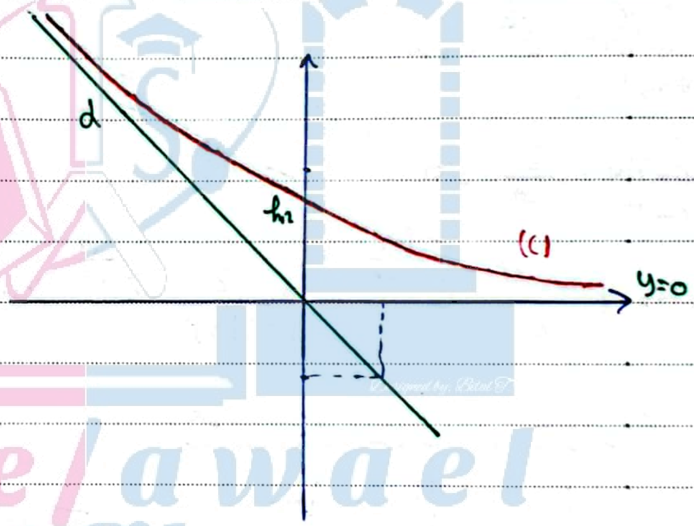
$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_d] = 0 \Rightarrow$ ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

④ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم d و (C)

f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $R =]-\infty, +\infty[$

$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0



④/log

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ $D = R$

1) ما نهايات f عند كل من طرفي مجموعة تعريفها

$D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ $y=1$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

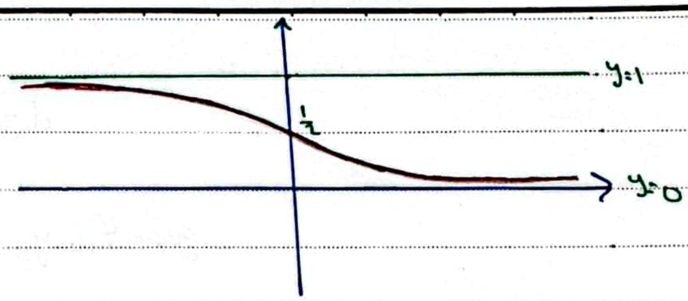
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

2) ادرس تغيرات f وارسم (C)

f معرف، مستمر وقابل للاشتقاق على R

$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0

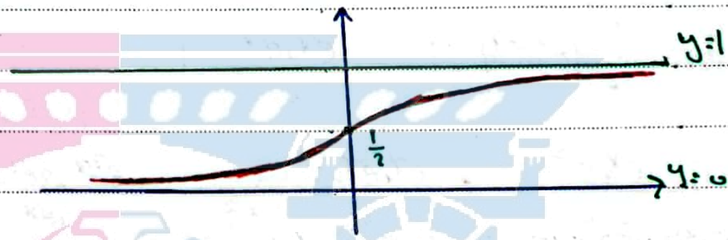


③ استنتج رسم الخط البياني g التابع $g(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$

$g(x) = f(-x)$

$\Downarrow$

C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $y'y$



① $\frac{16}{213}$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ $D=\mathbb{R}$

ⓐ بين أنّ f فردي وادرس تغيرات f

أياً يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ تحقق (1

(2 $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$
$= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$
$= -f(x)$

من (1) و (2) نجد أنّ f تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

f معرف واشتقاقي ومستمر على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ⓑ اكتب معادلة المماس d لـ (C) في المبدأ وادرس الوضع النسبي لـ (C) و d وارسم d والخط (C).

نقطة التماس $O(0,0)$

$f'(0) = 1$ ميل المماس

276

/ /

ومنه معادلة المحايد الميل:

$d: y = x$

وضعية (C) و d:

$g(x) = f(x) - y_d$

$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$

ندرس اطراد التابع g على R:

g اشتقاقي على R

$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$

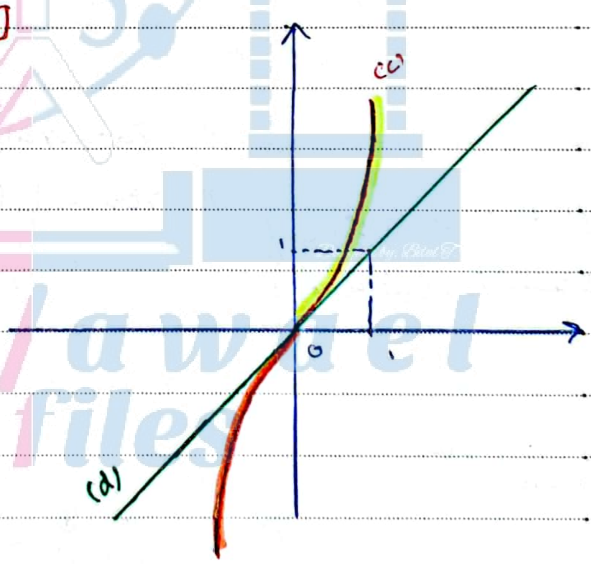
$g'(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x}$

من أجل تحويل السبب الطابعية / غالباً تكون الطابعية موجودة

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

$g(x) = \boxed{0} \Leftrightarrow x = \boxed{0}$, $g(0) = \boxed{0}$

x	$-\infty$		$\boxed{0}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	
الوضع النسبي		d تحت (C)		d فوق (C)	



$(0,0)$ (نقطة التماس) نقطة مشتركة بين (C) و d

2) a) ليكن m عدداً حقيقياً أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R لـ كأنو عم يقلي أثبت انو التابع تقابل) وليكن α هذا الحل

من جدول التغيرات نجد:

f مستمر ومتزايد تماماً على R

$f(R) = R$

ومنه أياً يكن $m \in R$ فالمعادلة

$f(x) = m$ لها حل وحيد α في R

المطلق

(b) اثبت أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ ثم استنتج $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^2+1})$

$$f(x)=m \iff \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=m$$
$$\overset{\times 2}{\iff} e^{x}-e^{-x}=2m$$
$$\overset{\times e^{x}}{\iff} e^{2x}-1=2me^{x}$$
$$\iff e^{2x}-2me^{x}-1=0$$

بفرض $e^{x}=t>0$

تصبح المعادلة $t^2-2mt-1=0$

$$\Delta=4m^2-4(1)(-1)=4m^2+4$$
$$\Delta=4(m^2+1)$$

مقبول $t=\dfrac{2m+2\sqrt{m^2+1}}{2}=m+\sqrt{m^2+1}$ $t=m-\sqrt{m^2+1}<0$ مرفوض

$$t=m+\sqrt{m^2+1} \iff e^{x}=m+\sqrt{m^2+1}$$

$x=\ln(m+\sqrt{m^2+1})=\alpha$ (x حل المعادلة $f(x)=m$ هو نفسه α)

$\left(\frac{15}{213}\right.$ جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$① \begin{cases} e^{x}-\frac{1}{e}e^{y}=1 \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$$

$x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$

الجملة تكافئ:

$$2e^{x}-\frac{2}{e}e^{y}=2 \quad (\mathrm{I})$$

$$2e^{x}+e^{y}=4+e \quad (\mathrm{II})$$

بالطرح:

$$\left(-\frac{2}{e}-1\right)e^{y}=-2-e \Rightarrow \left(\frac{-2-e}{e}\right)e^{y}=-2-e$$

$$\frac{e^{y}}{e}=1 \Rightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$

نعوض في (1) نجد

$$e^{x}-1=1 \Rightarrow e^{x}=2 \Rightarrow x=\ln 2$$

$$S=\{(\ln 2,1)\}$$

$= \ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

$\boxed{278}$

② $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ 3e^{x}-e^{y+3}-2e^{2}=0 & (2) \end{cases}$

$x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ من من (1) نجد $\boxed{y=1-x}$

نعوض في (2) نجد: $3e^{x}-e^{4-x}-2e^{2}=0$

نضرب بـ e^{x}: $3e^{2x}-e^{4}-2e^{2}e^{x}=0$

بعرض $e^{x}=t>0$ ⟸ تصبح المعادلة ⟸ $3t^{2}-2e^{2}t-e^{4}=0$

$\Delta=4e^{4}-4(3)(-e^{4})=4e^{4}+12e^{4}=16e^{4}$

$t=\dfrac{2e^{2}+4e^{2}}{6}=e^{2}$ مقبول

$t=\dfrac{2e^{2}-4e^{2}}{6}=\dfrac{-2e^{2}}{6}$ مرفوض

$t=e^{2} \Rightarrow e^{x}=e^{2} \Rightarrow x=2$

ومنه $y=-1$

$S=\{(2,-1)\}$

$f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$ $\left(\dfrac{18}{213}\right)$

① تحقق من كل من المعقولات

ⓐ f معرف على $\mathbb{R}$

f معرف عندما $e^{2x}-e^{x}+1>0$

بعرض $e^{x}=t>0$: تصبح المتراجحة بالشكل: $t^{2}-t+1>0$

$t^{2}-t+1=0$

$\Delta=1-4(1)(1)=-3<0$ مستحيلة

علماً أن المعادلة مستحيلة يأخذ إشارة واحدة إشارة أ(t^{2}

t	0		$+\infty$
$t^{2}-t+1$		$+$	
المتراجحة		مقبول	

$\Rightarrow t\in]0,+\infty[$

$e^{x}\in]0,+\infty[$

$x\in]-\infty,+\infty[$

إذاً f معرف على $\mathbb{R}$

ⓑ يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

$f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1) \Rightarrow f(x)=\ln\left(e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})\right)$

$f(x)=\ln e^{2x}+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x}) \Rightarrow f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

نحب الإبرام ⟸ لإيجاد المقابل المثال

ⓒ المستقيم $d : y=2x$ مقارب مائل لـ (C)

$f(x)-y_d = \ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = \ln(1)=0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

عندما $x \to -\infty$ نكتب

$f(x)-y_d = \ln\left[e^{-x}(e^{x}-1+e^{-x})\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = +\infty$

ⓓ دراسة الوضع النسبي

$f(x)-y_d = \ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

$f(x)-y_d = 0 \Rightarrow 1-e^{-x}+e^{-2x}=1$

$\Rightarrow -e^{-x}+e^{-2x}=0 \Rightarrow e^{-2x}=e^{-x} \Rightarrow -2x=-x \Rightarrow x=0$

$f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_d$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		d فوق (C)		d تحت (C)	

d و(C) نقطة مشتركة بين $(0,0)$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولا لها:

f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1)=0$

ومنه $y=0$ مقارب افقي لـ (C) بجوار $-\infty$

عندما $x\to+\infty$ نكتب $f(x)=\ln\left[e^{x}\left(e^{x}-1+\frac{1}{e^{x}}\right)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{2x}-e^{x}=0 \xRightarrow{\div e^{x}} 2e^{x}-1=0$

$\Rightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(\ln\frac{1}{2}) = \ln\left(e^{2\ln\frac{1}{2}}-e^{\ln\frac{1}{2}}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)$

$\Rightarrow f(\ln\frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\ominus$

$\left(\frac{17}{213}\right.$

$f(x)=e^x+\ln|x|$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x)=xe^x+1$ معرف على $\mathbb{R}$

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ (لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$, $g'(x)=0 \Rightarrow 1+x=0$

$\Rightarrow x=-1$

$g(-1)=-\frac{1}{e}+1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات: $\Rightarrow g(x)\geq -\frac{1}{e}+1>0$

ومنه إشارة $\frac{g(x)}{x}$ من إشارة x

عندما $x\in]-\infty,0[$ يكون $x<0$ ومنه $\boxed{\frac{g(x)}{x}<0}$

و $x\in]0,+\infty[$ $x>0$ ومنه $\boxed{\frac{g(x)}{x}>0}$

② ادرس تغيرات f وشكل جدولا لتغيراتها (1)

$$f(x)=\begin{cases} e^x+\ln x & ; x>0 \\ e^x+\ln(x) & ; x<0 \end{cases}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

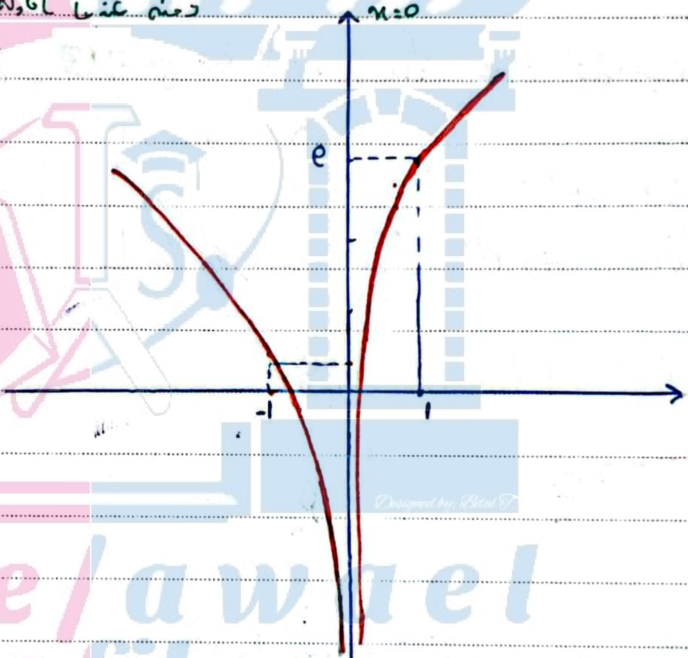
$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & ; x>0 \\ e^x + \frac{-1}{-x} & ; x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ أي $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ على $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{xe^x+1}{x} = \frac{g(x)}{x}$

ومنه عندما $x \in]-\infty,0[$ $\boxed{f'(x)<0}$ وعندما $x \in]0,+\infty[$ $\boxed{f'(x)>0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



للتحقق أن الخط البياني متناظر أم لا

نأخذ نقاط على محور x (السالبة والموجبة)

$x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{e}$

$x=1 \Rightarrow y=e$

③ أثبت أن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$

من جدول التغيرات نجد: f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$

$f(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$

ومنه أياً كانت $m\in\mathbb{R}$ فالمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد $\alpha\in]-\infty,0[$

وأيضاً f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

$f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$

ومنه أياً يكن $m\in\mathbb{R}$ فالمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد $\beta\in]0,+\infty[$

ومنه المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين في $\mathbb{R}$

للتدريب 19 ص214

14 ص212

23 ص215

282

11 / 210

$D: \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2e^x - x - 2$

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

$D:]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = x\left(\frac{2e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right)$$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها + ③ استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = 2e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2 - 2 = -1 + \ln 2$$

سيكون صفرا

x	$-\infty$	α	$-\ln 2$	β	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ موجب		$-1+\ln 2$ سالب	↗ موجب	$+\infty$

من جدول التغيرات:

f مستمر ومتناقص تماما على المجال $]-\infty, -\ln 2[$

$0 \in f(]-\infty, -\ln 2[) =]-1+\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد $\alpha \in]-\infty, -\ln 2[$

f مستمر ومتزايد تماما على المجال $]-\ln 2, +\infty[$

$0 \in f(]-\ln 2, +\infty[) =]-1+\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد $\beta \in]-\ln 2, +\infty[$

مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x)=0$ جذران

نلاحظ أن $\beta = 0$ لأن $f(0) = 0$

⑤ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$

④ نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة $f(x)=0$ بالرمز α أثبت أن $-2 < \alpha < -1$

$$f(-2) = \frac{2}{e^2} > 0 \quad , \quad f(-1) = \frac{2}{e} - 1 < 0$$

$f(-2) \times f(-1) < 0 \Rightarrow$ إذاً $-2 < \alpha < -1$

له عددين متتاليين

ALADIB

حل كل من المعادلات والمتراجحات

① $e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$

شرط الحل $I = \mathbb{R}$

نقسم الطرفين على $e^x \neq 0$

$e^{2x} - (e^2-1)e^x - e^2 = 0$

تحليل عبارة

$(e^x - e^2)(e^x+1) = 0$

إما $e^x = e^2 \Rightarrow x = 2$

أو $e^x = -1$ مستحيل الحل

$S = \{2\}$

② $e^x + \frac{e}{e^x} = 1+e$

شرط الحل: $I = \mathbb{R}$

نضرب الطرفين بـ $e^x \neq 0$

$e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$

تحليل عبارة

$(e^x - e)(e^x - 1) = 0$

إما $e^x = e \Rightarrow x = 1$

أو $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$S = \{1, 0\}$

③ $\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$

شرط الحل: $e^x - 1 \neq 0$ أي $x \neq 0 \Rightarrow I = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\frac{-e^{-x}(e^x-1)}{(e^x-1)} = -2$

عندئذ $e^x \neq 1$ إذاً

$-e^{-x} = -2$

$e^{-x} = 2 \Rightarrow -x = \ln 2$

$x = -\ln 2$

$S = \{-\ln 2\}$

④ $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

شرط الحل: $I = \mathbb{R}$

نقسم على $e^{x+1} \neq 0$

$e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$

$(e^x+5)(e^x-1) = 0$

إما $e^x = -5$ مرفوض أو $e^x = 1$

$x = 0$

$S = \{0\}$

⑤ $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^x-2}{e^x+2}$

شرط الحل $I = \mathbb{R}$ الطرفين بالوسطين

نضرب الطرفين بالمقام المشترك الموجب تماماً

$(e^{2x}+1)(e^x+2)$

نحصل على $(e^x-1)(e^x+2) < (e^x-2)(e^{2x}+1)$

$e^{2x} + e^x - 2 < e^{3x} - 2e^{2x} + e^x - 2$

$0 < e^{3x} - 3e^{2x}$

$0 < e^{2x}(e^x-3)$

تكافئ $0 < e^x - 3 \Rightarrow 3 < e^x$

$\ln 3 < x$

$S =]\ln 3, +\infty[$

تمرين 19 ص 214

① ادرس تغيرات $g(x)=e^x f'(x)$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = -e^{-x}(3+\ln x)+\frac{1}{x}e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}\left[-3-\ln x+\frac{1}{x}\right]$

و

$g(x)=e^x f'(x) = e^x \cdot e^{-x}\left(-3-\ln x+\frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{g(x) = -3-\ln x+\frac{1}{x}}$$

g معرفة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty+\infty = +\infty$

ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2}$

$g'(x)=0 \Rightarrow -x-1=0 \Rightarrow x=-1$ مرفوض

$g'(x) = -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} < 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب ② غير مهم أبداً

23 ص 215

1) $U_n = \frac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{3}$

2) $U_n = \frac{e^{n}}{(1+n)^2}$

عند $n\to+\infty$ نكتب

$U_n = \frac{e^{2n}}{n^2+2n+1} = \frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1\right)}$

$U_n = \left(\frac{e^{n}}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \cdot \frac{1}{1} = +\infty$

3) $U_n = \ln(2+e^{-n})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$

4) $U_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e$

5) $U_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$0\cdot\infty$ عدم تعيين

عند $n\to+\infty$ نكتب

$U_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = 1$

6) $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$U_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^2$