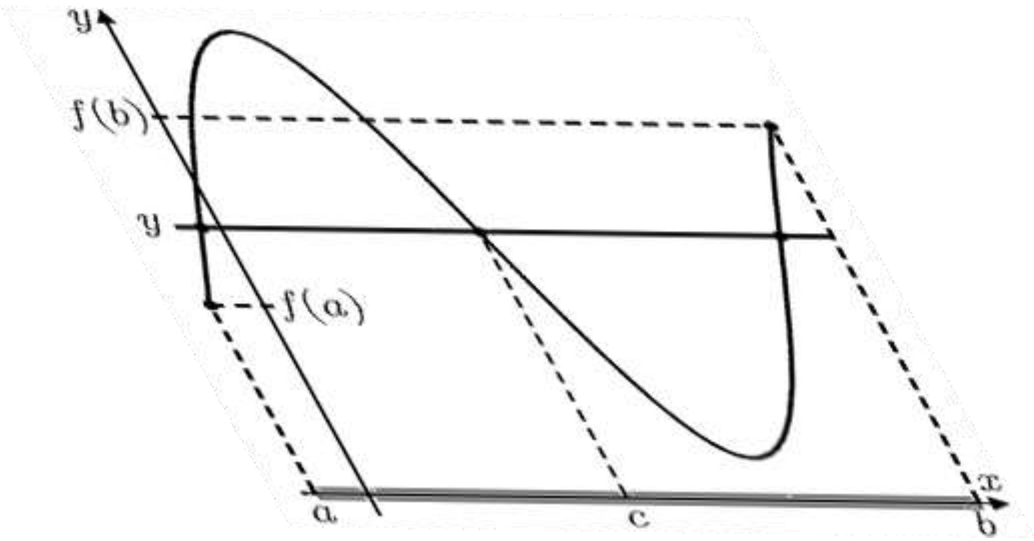
الصف الثالث الثانوي العلمي

الرياضيات

الجزء الأول – الوحدة الثانية

التوابع : النهايات والاستمرار

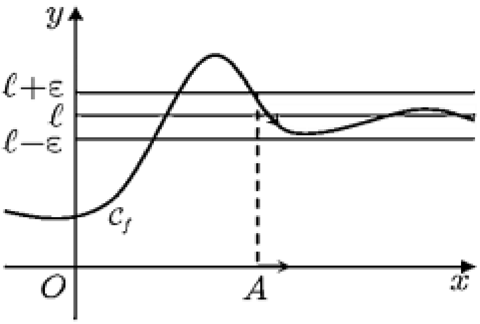
- **موجز مع حلول بعض التدريبات**
- **حلول الأنشطة**
- **حلول التمرينات والمسائل العامة**



عبد اللطيف زيّاد الحسن

الجزء الأول : الوحدة الثانية	التوابع : النهايات والاستمرار	عبد اللطيف الحسن

$\langle\langle 1 \rangle\rangle$ نهاية تابع عند اللانهاية



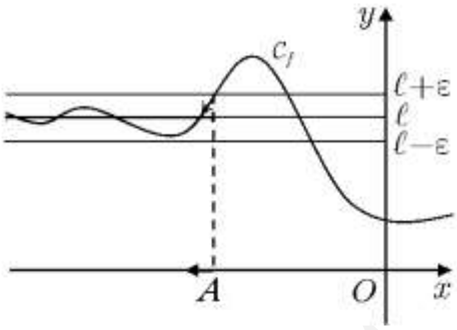
النهاية الحقيقيّة عند $+\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية الموجبة $+\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ هي ℓ إذا تجمعّت قيم $f(x)$ حول ℓ

عندما تصبح x كبيرة بما يكفي . ونكتب عندئذٍ : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

وفي هذه الحالة نقول إنّ المستقيم الذي معادلته $y = \ell$ مستقيم **مقارب أفقي** للمنحني C_f عند $+\infty$.

صياغة دقيقة : مهما اخترنا $\varepsilon > 0$ فإنّ قيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ عندما تصبح x أكبر من عدد معيّن A .



النهاية الحقيقيّة عند $-\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية السالبة $-\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $-\infty$ هي ℓ إذا تجمعّت قيم $f(x)$ حول ℓ

عندما يبتعد x نحو $-\infty$. ونكتب عندئذٍ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

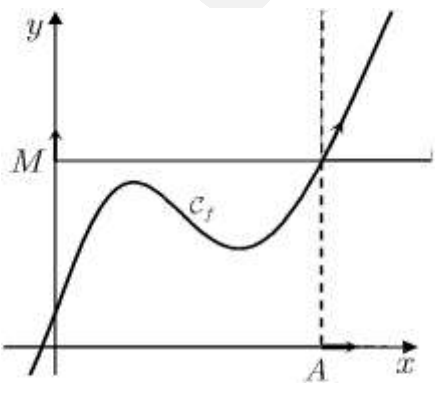
وفي هذه الحالة نقول إنّ المستقيم الذي معادلته $y = \ell$ مستقيم **مقارب أفقي** للمنحني C_f عند $-\infty$.

صياغة دقيقة : مهما اخترنا $\varepsilon > 0$ فإنّ قيم $f(x)$ ستقع داخل المجال $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ عندما تصبح x أصغر من عدد معيّن A .

تذكّر: إنّ نهاية كلّ تابع من الشكل $x \to \dfrac{1}{x^n}$ (حيث n عدد طبيعي غير معدوم) هي $\ell = 0$ عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

و نهاية التابع $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ هي $\ell = 0$ عند $+\infty$. (لاحظ أنّ التابع $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ليس معرّفاً في جوار $-\infty$)

تذكّر: بشكل عام لدراسة الوضع النسبي للخط البياني C_f ومقاربه الأفقي الذي معادلته $y = \ell$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - \ell$

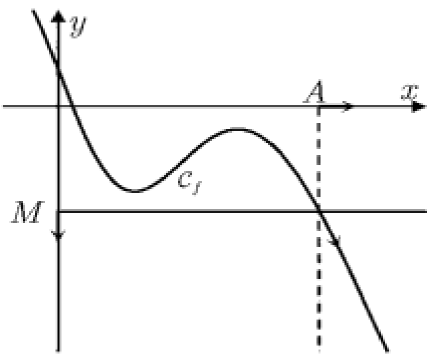


النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية الموجبة $+\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تتجاوز

أي عدد حقيقي M عندما تصبح x كبيرة بما يكفي . ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

أو : أيّاً كان M ، وُجد عدد حقيقي A يحقّق : إذا كان $x > A$ كان $f(x) > M$

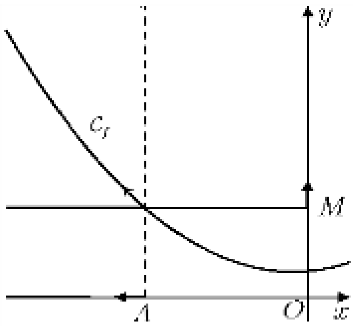


النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية الموجبة $+\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ هي $-\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح أصغر من

أي عدد حقيقي M عندما تصبح x كبيرة بما يكفي . ونكتب : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

أو : أيّاً كان M ، وُجد عدد حقيقي A يحقّق : إذا كان $x > A$ كان $f(x) < M$

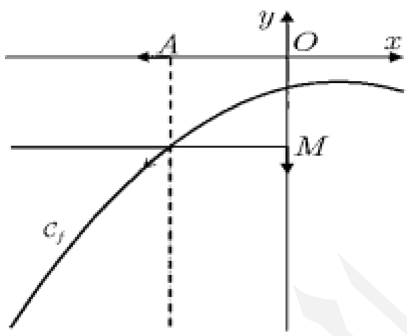


النهاية $+\infty$ عند $-\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية السالبة $-\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $-\infty$ هي $+\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تتجاوز

أي عدد حقيقي M عندما يبتعد x نحو $-\infty$. ونكتب : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

أو : أيّاً كان M ، وُجد عدد حقيقي A يحقّق : إذا كان $x < A$ كان $f(x) > M$



النهاية $-\infty$ عند $-\infty$ ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار اللانهاية السالبة $-\infty$

نقول إنّ نهاية التابع f عند $-\infty$ هي $-\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح أصغر

من أي عدد حقيقي M عندما يبتعد x نحو $-\infty$. ونكتب : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

أو : أيّاً كان M ، وُجد عدد حقيقي A يحقّق : إذا كان $x < A$ كان $f(x) < M$

تذكّر: إنّ نهاية كلّ من التابعين $x \to x^n$ و $x \to \sqrt{x}$ (حيث n عدد طبيعي غير معدوم) هي $+\infty$ عند $+\infty$.

و نهاية التابع $x \to x^n$ عند $-\infty$ هي $+\infty$ في حالة n طبيعي **زوجي** غير معدوم وهي $-\infty$ في حالة n طبيعي **فردي** .

تذكّر: عند $+\infty$ أو $-\infty$ نهاية تابع كثير الحدود تساوي نهاية حدّه المسيطر.

و نهاية تابع كسري تساوي نهاية خارج قسمة الحد المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام .

ملاحظة هامّة : ليس لتابعي الجيب $x \to \sin x$ و التجيب $x \to \cos x$ نهاية عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$

وبشكل عام : كل تابع **دوري** لا يملك نهاية عند **اللانهاية** شرطَ ألا يكون ثابتاً .

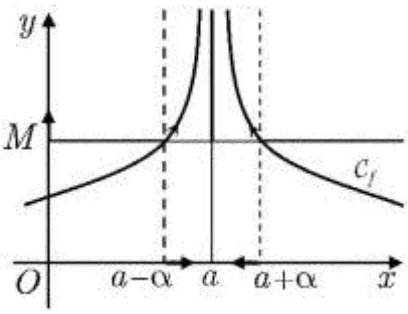
مثال : التابع $f(x) = \frac{1}{x} + \cos x$ لا يملك نهاية عند $+\infty$ (وكذلك عند $-\infty$)

لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، وبالتالي نهاية التابع f ، إن وُجدت ، فهي من نهاية $x \to \cos x$ ، ولمّا كان التابع $x \to \cos x$

دوري وغير ثابت فهو لا يملك نهاية عند $+\infty$ ، نستنتج ممّا سبق أن التابع f ليس له نهاية عند $+\infty$.

$\langle(2)\rangle$ نهاية تابع عند عدد حقيقي

في الدراسة الآتية ، النقطة a إمّا أن تنتمي إلى المنطلق D_f للتابع f أو تكون طرفاً لأحد مجالاته .



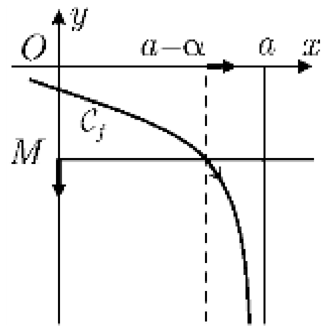
النهاية $+\infty$ عند a نقول إنّ نهاية التابع f عند a هي $+\infty$ إذا كانت

قيم $f(x)$ تتجاوز أي عدد حقيقي M حين يقترب x بما يكفي من العدد a.

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

و نقول إنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ مستقيم **مقارب شاقولي** للمنحني C_f .

أو : مهما كبُر العدد الحقيقي M فيوجد مجال مفتوح I مركزه a يحقق : (إذا كان x من $I\cap D_f$ كان $f(x)>M$)



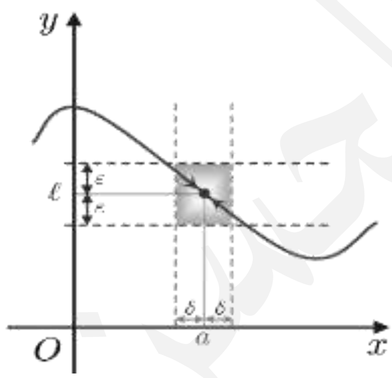
النهاية $-\infty$ عند a نقول إنّ نهاية التابع f عند a هي $-\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$

سالبة وأصغر من أي عدد حقيقي M حين يقترب x بما يكفي من العدد a.

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

و نقول إنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ مستقيم **مقارب شاقولي** للمنحني C_f .

أو : مهما صغُر العدد السالب M فيوجد مجال مفتوح I مركزه a يحقق : (إذا كان x من $I\cap D_f$ كان $f(x)<M$)



النهاية عدد حقيقي ℓ عند a نقول إنّ نهاية التابع f عند a هي ℓ

إذا تجمّعت القيم $f(x)$ قُرب ℓ حين يقترب x بما يكفي من العدد a.

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

صياغة دقيقة : مهما كان $\varepsilon>0$ فتوجد مجموعة من النمط $D_f\cap\,]a-\delta,a+\delta[$

حيث $\delta>0$ تحقق عناصرها المتراجحة $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ملاحظة : قد لا يكون لتابع نهاية عند عدد a ، في حين يقبل نهاية من اليمين عند a وعندئذٍ نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$

وبالمثل قد يقبل نهاية من اليسار ، وعندئذٍ نكتب $\lim\limits_{x\to (a)^-} f(x)=\ell$ ، ولا فرق هنا إن كانت النهاية حقيقية أو لا نهائية .

مثال : التابع $x\to\dfrac{1}{x}$ المعرّف على $R\setminus\{0\}$ ليس له نهاية عند الصفر

لكنّه يقبل نهاية من اليمين عند الصفر $\lim\limits_{x\to(0)^+} f(x)=+\infty$ و يقبل نهاية من اليسار عند الصفر $\lim\limits_{x\to(0)^-} f(x)=-\infty$

نهاية شهيرة تُستخدم بشكل مباشر أينما وردت دون إثبات : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ وكذلك $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

حلول بعض التدريبات

تدرّب الرقم 2 الصفحة 34 : احسب نهاية التابع f المُعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ، ثمّ أعطِ عدداً A

يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

الحل : إنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=5$ ، من جهة ثانية : قولنا إنّ $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$ يكافئ : $|f(x)-5|<0.1$

ومنه $\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$ وبالتالي $\frac{4}{|x-1|}<\frac{1}{10}$ ومنه $|x-1|>40$ ، ولأنّنا نهتم بالقيم الكبيرة للمتحول x

نفترض $x>1$ وعليه فإنّ $|x-1|=x-1$ ، إذاً $x-1>40$ أي $x>41$ بالتالي يمكن اختيار $A=41$

تذكّر : مركز المجال **المحدود** $I=]a,b[$: $\ell=\frac{a+b}{2}$ ونصف قطره : $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$

وانتماء مقدار U إلى I يكافئ تحقق الشرط : $|U-\ell|<\varepsilon$ أو $\ell-\varepsilon<U<\ell+\varepsilon$

النهايات وتعيين مجال

مقدّمة : الهدف تعيين مجال من النمط $]a-\alpha,a+\alpha[$ يكون x عنصراً منه (قد يكون x مختلفاً عن a مركز المجال)

بحيث يحقق التابع $f(x)$ المتراجحة : $f(x)>M$ (أو $f(x)<M$)

تدرب رقم 2 الصفحة 38 : جدْ نهاية التابع f المُعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ، ثمّ عيّن عدداً α

يحقق الشرط : إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن 1 . كان $f(x)>10^3$

الحل : لمّا كانت $\lim_{x\to 1}(5x-1)=4$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$

ولأنّ x من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ ولا تساوي 1 فإنّ : $x>1-\alpha$ و $x<1+\alpha$

المتراجحة $x>1-\alpha$ تكافئ $5x-1>4-5\alpha$ ، وفي حالة $x>1$ المتراجحة $x<1+\alpha$ تكافئ $(x-1)^2<\alpha^2$

نستنتج أنّ : $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{4-5\alpha}{\alpha^2}=4\alpha^{-2}-5\alpha^{-1}$

إذن يكفي أن نختار α بحيث يتحقق $4\alpha^{-2}-5\alpha^{-1}>10^3$ ، وباختيار $\alpha=10^{-2}=0.01$ نجد :

$4\alpha^{-2}-5\alpha^{-1}=4\times10^4-5\times10^3>10^3$ محققة ، ويكون المجال $]0.99,1.01[$ يحقق المطلوب .

توضيح : من الممكن البدء بالحل مباشرة باختيار قيمة $\alpha=10^{-2}=0.01$ ومن ثمّ التأكد من صحة اختيارنا .

والأسلوب المتّبع لضمان صحة اختيارنا للعدد α يتلخص في الشرح الآتي :

لو كان التابع المُعطى بسطه عدد ثابت ، مثلاً $f(x)=\dfrac{10}{(x-1)^2}$ ، لكان الحل سهلاً ، حيث يكون $\dfrac{10}{(x-1)^2}>10^3$

وهذا يكافئ $(x-1)^2<10\times10^{-3}=10^{-2}$ ومنه $|x-1|<\sqrt{10^{-2}}=10^{-1}$ إذن $\alpha=0.1$ تحقق المطلوب .

أمّا في حالتنا وللحصول على بسط ثابت A ، نفرض $5x-1>A$ فيكون : $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{A}{(x-1)^2}>10^3$

فنجد أنّ المتراجحة $\dfrac{A}{(x-1)^2}>10^3$ تكافئ $|x-1|<\sqrt{A\times10^{-3}}$ ، ولمّا كان $\lim\limits_{x\to1}(5x-1)=4$

عندئذٍ يمكن أن نختار قيمة A أي عدد موجب تماماً وأصغر تماماً من 4 ، ويُفضّل اختيار عدد مناسب للتعامل مع $\sqrt{A\times10^{-3}}$

مثلاً نختار $A=0.1$ فنجد : $|x-1|<\sqrt{0.1\times10^{-3}}=\sqrt{10^{-4}}=10^{-2}=0.01$ بالتالي نحصل على $\alpha=0.01$

الآن بالعودة إلى حل التمرين نختار مباشرة $\alpha=10^{-2}$ ثمّ نبيّن أنّ اختيارنا يحقق $f(x)>10^3$ لأنّ :

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{4-5\alpha}{\alpha^2}=\frac{4-5\times10^{-2}}{10^{-4}}=4\times10^4-5\times10^2>10^3$$

ويجري التعامل مع المسائل المشابهة بالطريقة ذاتها ، أي باختيار قيمة للعدد α ثمّ إثبات أن هذه القيمة تحقق شرط المسألة .

طريقة ثانية : ننطلق من المتراجحة $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$ التي تكافئ بعد الإصلاح : $10^3(x-1)^2-5(x-1)-4<0$

نضع $t=x-1$ فتؤول إلى $10^3t^2-5t-4<0$ ، $\Delta=16025$ وبالتقريب نجد $\sqrt{\Delta}\approx126$

وتكون مجموعة حلول المتراجحة : $-0.0605=\dfrac{5-126}{2\times10^3}<t=x-1<\dfrac{5+126}{2\times10^3}=0.0655$

وبالتقريب أيضاً نجد : $-0.06<x-1<0.06$ ، إذن نضع $\alpha=0.06$

هذه طريقة صحيحة ، لكن تقريب النتائج الذي أجريناه قد يؤثّر على صحّتها ناهيك عن صعوبة العمليات التي أُجريت .

$\langle(3)\rangle$ العمليات على النهايات

فيما يأتي ℓ و ℓ' أعداد حقيقية ، والنهايات مأخوذة إمّا عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند عدد حقيقي .

نهاية المجموع						
نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين

نهاية الجداء									
نهاية f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $f\cdot g$	$\ell\cdot\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

نهاية الكسر (نهاية المقام g لا تساوي الصفر)							
نهاية f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية g	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ أو $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ أو $-\infty$
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

نهاية الكسر (نهاية المقام g تساوي الصفر)					
نهاية f	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell>0$ أو $+\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	$\ell<0$ أو $-\infty$	0
نهاية g	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0 وقيم g موجبة	0 وقيم g سالبة	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين

ملاحظة : في حالات **عدم التعيين** – وهي هنا عددها أربع – لا يمكن تحديد النهاية ، لذا نحاول إزالة حالة عدم التعيين عند مصادفتها بالطرق المناسبة ، كأنْ نستخدم مفهوم المرافق أو التحليل أو إخراج الحد المسيطر خارج قوس .

حلول بعض التدريبات

تدرّب من رقم 1 **الصفحة** 42 :احسب نهاية التابع f المُعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ وعند 2 و -2

الحل : مجموعة تعريف التابع $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2x}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{x})=0$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2x}{x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{x})=0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

لمّا كانت $\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(2)^+} f(x)=+\infty$ وأنّ $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=-\infty$

ولمّا كانت $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ وأنّ $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$

تدرّب من رقم 2 **الصفحة** 42 : عيّن مجموعة تعريف التابع f المُعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

ثم ادرس نهايته عند أطراف مجموعة تعريفه ، وادرس ، عند اللزوم ، النهاية من اليمين والنهاية من اليسار .

الحل : التابع معرّف في حالة $x\ge0$ و $x\ne1$ وبالتالي $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$

و لمّا كانت $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x)=+\infty$ حيث :

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	

عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

ولإزالتها نكتب في حالة $x>0$:

$$f(x)=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}=\sqrt{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

ولمّا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\langle\langle 4 \rangle\rangle$ مبرهنات الإحاطة و المُقارنة

تنويه : بإجراء التعديل اللازم ، تبقى المبرهنات الآتية صحيحة عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي a .

مبرهنة (1) لتكن f و g و h ثلاثة توابع معرّفة على مجال من النمط $I =]b,+\infty[$

وتُحقّق : $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ، أيّاً تكن x من I

إذا كان للتابعين g و h النهاية ذاتها ℓ عند $+\infty$ عندئذٍ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

(سواءٌ كانت ℓ عدداً حقيقياً أو $+\infty$ أو $-\infty$)

مثال (من تدرب الصفحة 46) : أثبت أنّ $\dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{\cos x}{x+1} \ge \dfrac{-1}{x+1}$ أيّاً يكن $x > -1$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x+1}$

الحل : أيّاً يكن $x > -1$ فإنّ $-1 \le \cos x \le 1$ و بالقسمة على $x+1 > 0$ نجد $\dfrac{-1}{x+1} \le \dfrac{\cos x}{x+1} \le \dfrac{1}{x+1}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$ وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ استنتجنا حسب مبرهنة الإحاطة (1) أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x+1} = 0$

مبرهنة (2) ليكن f و g تابعين معرّفين على مجال من النمط $I =]b,+\infty[$ ويتحقّق $|f(x) - \ell| \le g(x)$

أيّاً تكن x من I ، إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ عندئذٍ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ حيث ℓ عدد حقيقي .

مثال (من تدرب الصفحة 46) : f تابع يحقق $|f(x) - 3| \le \dfrac{1}{x+1}$ أيّاً كان $x \ge 0$ ، ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

الحل : لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ استنتجنا حسب مبرهنة الإحاطة (2) أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

توضيح : لماذا تندرج المبرهنة (2) تحت بند **الإحاطة** ؟ لأنّ المتراجحة $|f(x) - \ell| \le g(x)$

تكافئ $-g(x) \le f(x) - \ell \le g(x)$ ومنه $\ell - g(x) \le f(x) \le g(x) + \ell$ وبذلك نعود إلى المبرهنة (1)

مبرهنة (3) ليكن f و g تابعين معرّفين على مجال من النمط $I =]b,+\infty[$ ، عند كل x من I :

1. إذا كان $f(x) \ge g(x)$ ، وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ، كان : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. إذا كان $f(x) \le g(x)$ ، وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ، كان : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

مثال (من تدرب الصفحة 46) : أثبت أنّ $x^2-5\sin x \geq x^2-5$ أياً كان العدد الحقيقي x

ثمّ استنتج نهاية $x \to x^2-5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$

الحل : أياً يكن العدد الحقيقي x فإنّ $-1\leq \sin x \leq 1$ ومنه $5\geq -5\sin x \geq -5$ وبالتالي

$x^2+5\geq x^2-5\sin x \geq x^2-5$ نستنتج إذاً أنّ $x^2-5\sin x \geq x^2-5$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5)=+\infty$ استنتجنا حسب المبرهنة (3) أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$

و لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty$ استنتجنا حسب ذات المبرهنة أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$

$\langle(5)\rangle$ نهاية تابع مركّب

مبرهنة لتكن f و g و h ثلاثة توابع بحيث $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$

إذا كان $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$ و $\lim\limits_{t\to b}g(t)=c$ فعندئذٍ : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$ (حيث رمزنا $t=h(x)$)

سواء كانت a و b و c أعداداً حقيقية أو مقاديراً لا نهائية .

(**أي** : نبحث أولاً عن b نهاية h عند a ثم نبحث عن نهاية g عند b فتكون هي النهاية المطلوبة للتابع f عند a)

مثال (من تدرب الصفحة 49) :أوجد نهاية التابع $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ المعرّف على $D=R\setminus\{-2\}$ عند $+\infty$

الحل : نضع $t=h(x)=\dfrac{\pi x+1}{x+2}$ ، عندئذٍ $f(x)=\cos(t)$

و لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\pi$ و $\lim\limits_{t\to\pi}\cos(t)=-1$ استنتجنا أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

أسلوب آخر : يُكتب f بالشكل $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$ حيث $h:x\to\dfrac{\pi x+1}{x+2}$ و $g:x\to\cos x$

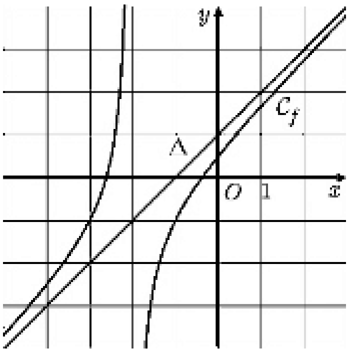
إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\pi$ و $\lim\limits_{x\to\pi}g(x)=-1$ ، نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

ملاحظة : عندما كتبنا $t=h(x)$ نكون قد غيّرنا المتحول ، **وتغيير المتحول** هو الوجه الآخر لتركيب تابعين ، يمكن استخدامه لنقل دراسة النهاية عند مقدار ما إلى دراستها عند مقدار آخر ، بُغية الاستفادة من نهايات شهيرة أو مبرهنات مفيدة .

مثال : لدراسة نهاية التابع $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ المعرّف على $R\setminus\{0\}$ عند $+\infty$ ، نضع $t=\dfrac{1}{x}$ فيكون $f(x)=\dfrac{\sin(t)}{t}$

ولمّا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(t)}{t}=1$

المقارب المائل $\langle(6)\rangle$



تعريف ليكن f تابعاً معرّفاً في جوار $+\infty$ وليكن C_f خطه البياني في معلم مُعطى

وليكن Δ المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$. نقول إنّ المستقيم Δ مقارب

للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$

(نعرّف بنفس الطريقة المقارب في جوار $-\infty$)

تذكّر : لدراسة الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$ على **مجموعة تعريف التابع**

البحث عن معادلة المقارب المائل

1• في حالة تابع كسري درجة كثير الحدود في بسطه أكبر من درجة كثير الحدود في مقامه بمقدار 1

عندئذٍ يمكن استخدام القسمة الإقليدية عند البحث عن معادلة المقارب .

2• يمكن أيضاً إيجاد معادلة المقارب في جوار $+\infty$ من خلال العلاقتين :

$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax\right)$ (وكذلك نفعل في جوار $-\infty$)

أمثلة (من تدرب الصفحة 51) : فيما يأتي بيّن فيما إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f

عند $+\infty$ أو $-\infty$ ، ثمّ ادرس الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ .

$\Delta : y = 2x + 1$ ، $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$ $D_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

الحل : نضع $g(x) = f(x) - (2x + 1) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} - (2x + 1) = \dfrac{1}{x - 4}$

إنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ،نستنتج أنّ المستقيم Δ مقارب للخط C_f عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$

في حالة : $x > 4$ فإنّ : $g(x) > 0$ ، وعندئذٍ يقع الخط C_f **فوق** مقاربه Δ .

وفي حالة : $x < 4$ فإنّ : $g(x) < 0$ ، وعندئذٍ يقع الخط C_f **تحت** مقاربه Δ .

ملاحظة : كان بالإمكان استخدام القسمة الإقليدية وكتابة : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 4}$

$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\quad ، \quad f(x)=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}\quad ، \quad \Delta: y=-x-4$$

الحل : نضع $g(x)=f(x)-(-x-4)=\dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}-(-x-4)=\dfrac{\sin x}{x}$

نعلم أنّه أيا يكن x يتحقق $-1\le \sin x\le 1$

بالتالي $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ في حالة $x>0$ و $\dfrac{-1}{x}\ge\dfrac{\sin x}{x}\ge\dfrac{1}{x}$ في حالة $x<0$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$

فإنّه ، و حسب الإحاطة ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

إذن ، المستقيم Δ مقارب للخط C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

على المجال $]0,+\infty[$: تكون $x>0$ وبالتالي إشارة $g(x)$ من إشارة المقدار $\sin x$

ونعلم أنّ $\sin x>0$ على المجالات $]0,\pi[$ و $]2\pi,3\pi[$ و $]4\pi,5\pi[$ ..... وهكذا

وعندئذ يكون $g(x)>0$ ، و بالتالي C_f يقع فوق Δ

ونعلم أنّ $\sin x<0$ على المجالات $]\pi,2\pi[$ و $]3\pi,4\pi[$ و $]5\pi,6\pi[$ ..... وهكذا

وعندئذ يكون $g(x)<0$ و بالتالي C_f يقع تحت Δ

أمّا على المجال $]-\infty,0[$: تكون $x<0$ وبالتالي إشارة $g(x)$ تخالف إشارة $\sin x$

نعلم أنّ $\sin x<0$ على المجالات $]-\pi,0[$ و $]-3\pi,-2\pi[$ و $]-5\pi,-4\pi[$ ...... وهكذا

وعندئذ يكون $g(x)>0$ ، وبالتالي C_f يقع فوق Δ

ونعلم أنّ $\sin x>0$ على المجالات $]-2\pi,-\pi[$ و $]-4\pi,-3\pi[$ و $]-6\pi,-5\pi[$ ...... وهكذا

وعندئذ يكون $g(x)<0$ ، وبالتالي C_f يقع تحت Δ

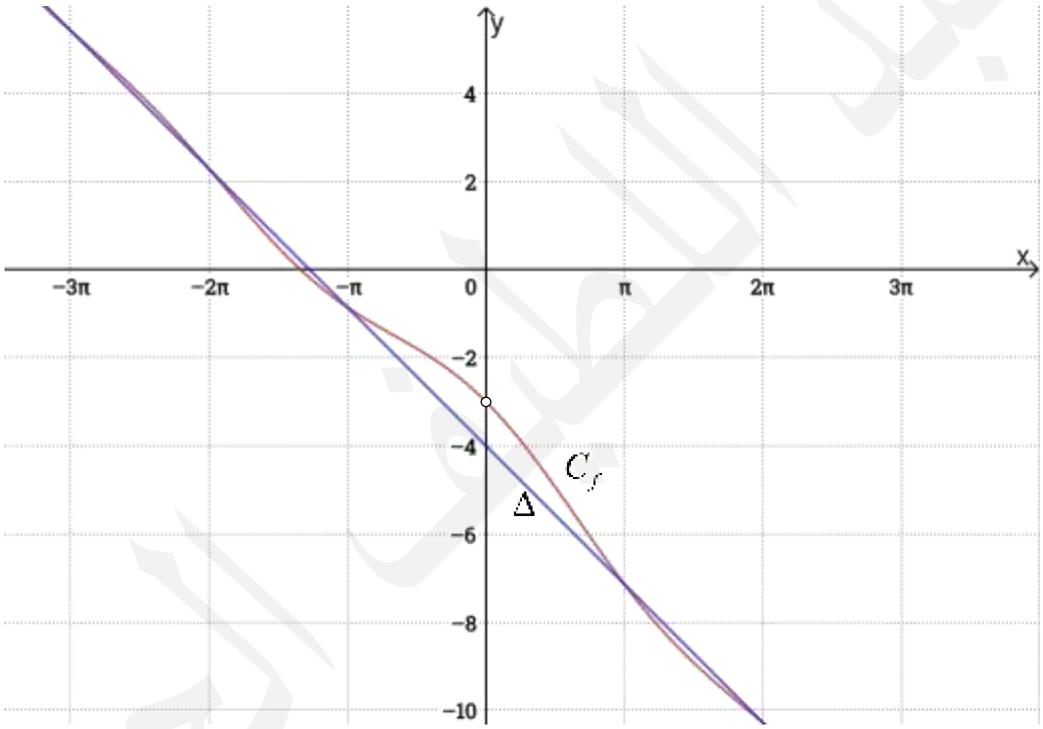
x	..... -4π	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	4π	
$g(x)$	0	− 0	+ 0	− 0	+ ‖	+ 0	− 0	+ 0	− 0	
الوضع النسبي		C_f تحت Δ	C_f فوق Δ	C_f تحت Δ	C_f فوق Δ	C_f فوق Δ	C_f تحت Δ	C_f فوق Δ	C_f تحت Δ	

أسلوب آخر لدراسة **الوضع النسبي** : كان بالإمكان القول

على المجال $]0,+\infty[$: إنّ $g(x)>0$ على كل مجال من النمط $]2\pi k,\pi+2\pi k[$ و $g(x)<0$ على كل مجال من النمط $]\pi+2\pi k,2\pi+2\pi k[$ وذلك في حالة k عدد صحيح موجب .

على المجال $]-\infty,0[$: إنّ $g(x)<0$ على كل مجال من النمط $]2\pi k,\pi+2\pi k[$ و $g(x)>0$ على كل مجال من النمط $]\pi+2\pi k,2\pi+2\pi k[$ وذلك في حالة k عدد صحيح سالب تماماً .

الشكل المرسوم هو الخط البياني ومقاربه .



$\langle(7)\rangle$ الاستمرار

تعريف ليكن f تابعاً معرّفاً على مجموعة D_f ، و لتكن a نقطة من D_f . نقول إنّ التابع f **مستمر** عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

ونقول إنّ التابع f مستمر على مجموعة D محتواة في D_f إذا وفقط إذا كان مستمراً عند كل نقطة من نقاط D

مبرهنة إذا كان تابع f اشتقاقياً في نقطة a ، كان مستمراً في a ، وإذا كان اشتقاقياً على مجال I كان مستمراً على I

(**العكس** غير صحيح بالضرورة)

نتائج وملاحظات • تابع كثير الحدود مستمر على R ، وكذلك تابع الجيب $x \to \sin x$ وتابع التجيب $x \to \cos x$ كون هذه التوابع اشتقاقية على R .

- التابع الكسري مستمر على مجموعة تعريفه كونه اشتقاقياً عليها .

- تابع الجذر التربيعي $x \to \sqrt{x}$ مستمر على المجال $I =]0,+\infty[$ كونه اشتقاقي على I

ولأنّ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$ يكون $x \to \sqrt{x}$ مستمراً على $[0,+\infty[$.

- مجموع تابعين مستمرين هو تابع مستمر على مجموعة تعريفه .

وكذلك جداء ضربهما أو خارج قسمتهما أو تركيبهما سواء كان الاستمرار عند نقطة أو على مجموعة .

- يتكون الخط البياني لتابع مستمر على مجال I من قطعة واحدة على ذلك المجال .

مثال : التابع $f(x) = \sin x + \dfrac{2}{x^2+1}$ مستمر على مجموعة تعريفه R لأنّه مجموع تابعين كلّ منهما مستمر .

تدرّب الصفحة 54 : نتأمّل التابع f المُعطى وفق : $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

1• ما مجموعة تعريف f ؟ أيكون مستمراً على مجموعة تعريفه ؟

2• بيّن أنّ التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له .

3• ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$. أثبت أنّ g اشتقاقي وارسم خطّه البياني .

4• استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$. ما مجموعة تعريف f' ؟

الحل : 1• f معرّف بشرط $1-\cos x \geq 0$ أي $\cos x \leq 1$ وهذا محقق أياً يكن x من R ، بالتالي : $D_f = R$

والتابع f مستمر على مجموعة تعريفه R لأنّه ينتج عن تركيب التابعين المستمرين $x \to 1-\cos x$ و $x \to \sqrt{x}$

2• مجموعة تعريف التابع R متناظرة ، وبالتالي أيّاً يكن x من R كان $-x$ من R ، وكذلك :

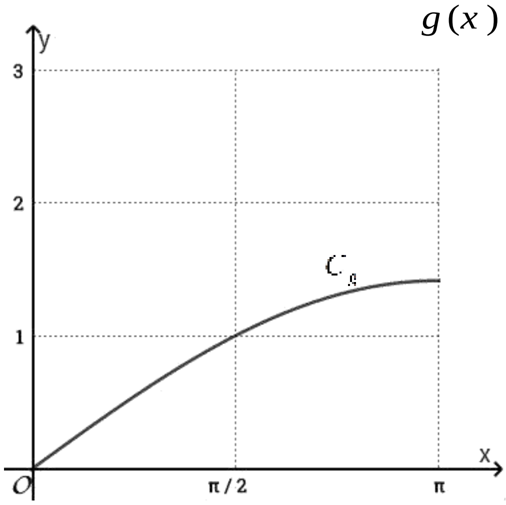
$$f(-x) = \sqrt{1-\cos(-x)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$$

نستنتج أنّ التابع f زوجي ، وبالتالي خطّه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

من جهة ثانية : أيّاً يكن x من R كان $x+2\pi$ من R ، وكذلك :

$f(x+2\pi) = \sqrt{1-\cos(x+2\pi)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$ ، نستنتج أنّ التابع f يقبل العدد 2π دوراً له .

3• على المجال $[0,\pi]$ يكون $g(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$



ولمّا كان التابع $x\rightarrow\sin\frac{x}{2}$ اشتقاقياً على R

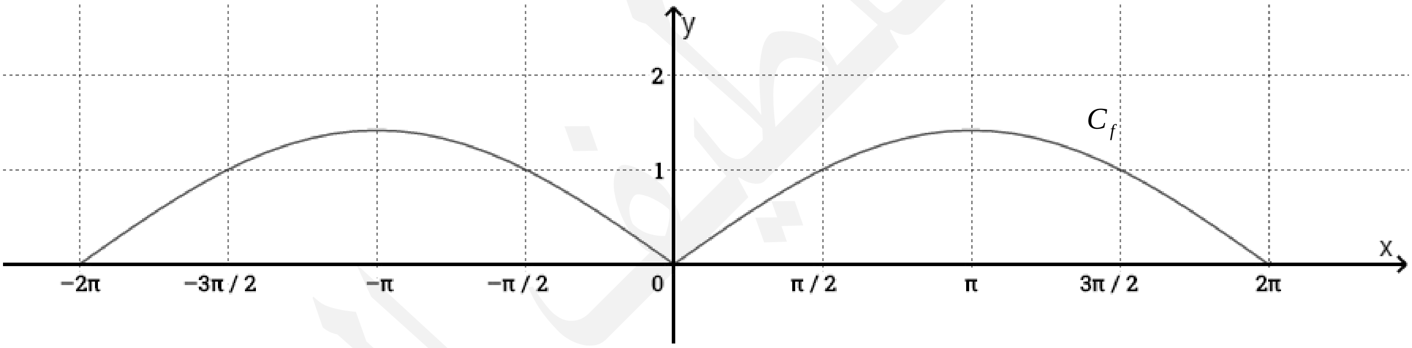
استنتجنا أنّ التابع g اشتقاقي على المجال $[0,\pi]$

و بمعرفتنا المسبقة لسلوك تابع الجيب وبالاستعانة ببعض النقاط المساعدة

$(0,0)$ و $(\frac{\pi}{2},1)$ و $(\pi,\sqrt{2})$ نحصل على الخط البياني كما هو موضّح

4• نستفيد من كون التابع f زوجي لمتابعة الرسم السابق على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم نستفيد من كون التابع f يقبل

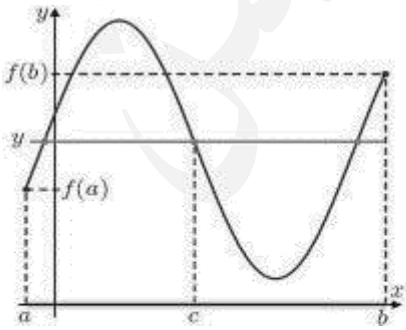
العدد 2π دوراً له لاستنتاج الرسم على المجال $[-2\pi,2\pi]$ كما في الشكل الآتي :



لدينا $f'(x)=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$ وهو معرّف بشرط $1-\cos x\neq 0$ وبالتالي $\cos x\neq 1$ ومنه $x\neq 2\pi k$

نستنتج أنّ مجموعة تعريف f' هي $R\setminus\{2\pi k\}$

$\langle(8)\rangle$ التوابع المستمرّة وحل المعادلات



مبرهنة القيمة الوُسطى (الوجود) إذا كان f تابعاً مستمرّاً على مجال $I=[a,b]$

عندئذٍ أيّاً يكن العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$

فللمعادلة $f(x)=y$ حل واحد **على الأقل** في المجال $I=[a,b]$.

أي أنّ : أي مستقيم أفقي معادلته $y=k$ حيث k عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لا بدّ وأن يقطع الخط البياني

للتابع f في نقطة واحدة منه **على الأقل** ، وهذا يضمنه استمرار التابع f على المجال $I=[a,b]$.

صورة مجال نفترض أنّ f تابع **مستمر ومطّرد تماماً** على مجال I ، ونرمز J إلى صورة المجال I وفق f أي $J=f(I)$

عندئذ لإيجاد **المجال** J نوجد الصور عند الأطراف المغلقة في I والنهايات عند الأطراف المفتوحة ، كما يوضّح الجدول الآتي :

I	f **متزايد تماماً**	f **متناقص تماماً**
$I=[a,b]$	$J=f(I)=[f(a),f(b)]$	$J=f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=]a,b]$	$J=f(I)=]\lim\limits_{x\to a}f(x),f(b)]$	$J=f(I)=[f(b),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$
$I=[a,b[$	$J=f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$	$J=f(I)=]\lim\limits_{x\to b}f(x),f(a)]$
$I=]a,b[$	$J=f(I)=]\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$	$J=f(I)=]\lim\limits_{x\to b}f(x),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$

مبرهنة (الوحدانيّة) إذا كان f تابعاً **مستمرّاً ومطّرداً تماماً** على مجال $I=[a,b]$ عندئذٍ :

أيّا كان y من $f(I)$ فللمعادلة $f(x)=y$ حل واحد **فقط** في I .

حالة خاصّة : إذا كان f تابعاً **مستمرّاً ومطّرداً تماماً** على مجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)$ و $f(b)$ من **إشارتين مختلفتين**

كان للمعادلة $f(x)=0$ حل واحد **فقط** في I .

ملاحظة : يساعد جدول التغيرات أو الرسم البياني للتابع في إيجاد صورة مجال و معرفة عدد حلول معادلة $f(x)=k$

مثال : تأمّل جدول f المعرّف والمستمر على R . ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في R ؟ برّر إجابتك .

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

الحل : نرمز $I_1=]-\infty,-3]$ و $I_2=[-3,5]$ و $I_3=]5,+\infty[$ ، التابع f مستمر ومتناقص تماماً على كل من I_1 و I_3

ومستمر ومتزايد تماماً على I_2 وبالتالي : $J_1=f(I_1)=]-1,+\infty[$ و $J_2=f(I_2)=[-1,4]$ و $J_3=f(I_3)=]1,4[$

ينتمي الصفر إلى المجال J_1 فيوجد إذاً حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في I_1

ينتمي الصفر إلى المجال J_2 فيوجد إذاً حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في I_2

لا ينتمي الصفر إلى المجال J_3 بالتالي لا يوجد للمعادلة $f(x)=0$ أية حلول في I_3

مما سبق نستنتج أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان فقط في R .

التابع العكسي ليكن f تابعاً مستمراً ومطّرداً تماماً على مجال ما I ، وليكن $J = f(I)$ ، نقول إنّ f **تَقابُل** من I إلى J

إذا تحقّق الشرطان : $1\cdot$ أيّاً يكن العدد الحقيقي x من I ، ينتمي $f(x)$ إلى J .

$2\cdot$ أيّاً يكن العدد الحقيقي y من J ، يوجد عدد **واحد فقط** ، x من I يحقق $f(x) = y$.

توضيح : إذا كان f تقابل من I إلى J عندئذٍ يمكن أن نعرّف على J تابعاً g بحيث $g(y) = x$

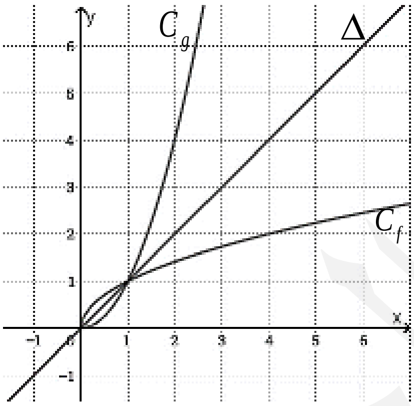
وندعوه **التابع العكسي (أو التقابل العكسي)** للتابع $f(x) = y$ المعرّف على I ، و نرمزه f^{-1}

وبالتالي : أيّاً كان x من I كان : $g(f(x)) = x$ ، وأيّاً كان y من J كان $f(g(y)) = y$

هندسيّاً : الخطّان البيانيّان C_f و C_g للتابعين f و g متناظران بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$.

مثال : التابع $f(x) = \sqrt{x}$ مستمر ومطّرد (متزايد) تماماً على المجال $I = [0,+\infty[$ ونعلم أنّ $J = f(I) = [0,+\infty[$

لأنّ $f(0) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، إنّ f تقابل من I إلى J لأنّه يحقق الشرطين :



أيّاً يكن x من $[0,+\infty[$ ، كان $f(x) = \sqrt{x}$ من $[0,+\infty[$ ، وأيّاً كان y من $[0,+\infty[$

كان للمعادلة $f(x) = y$ أي $\sqrt{x} = y$ حلاً وحيداً $x = y^2$ في $[0,+\infty[$

و التابع العكسي للتابع f هو التابع $f^{-1} = g$ المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $g(x) = x^2$

ونلاحظ هنا أنّ : $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x$ و $f(g(x)) = f(x^2) = x$

$\langle(9)\rangle$ تابع الجزء الصحيح

تعريف أيّاً يكن العدد الحقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n يحقق $n \le x < n+1$ ، يسمّى العدد n الجزء الصحيح

للعدد x ونرمزه $E(x)$ أي يتحقق : $\boxed{x - 1 < E(x) \le x \quad \text{أو} \quad E(x) \le x < E(x) + 1}$

مثلاً : في حالة $x = 2.3$ نعلم أنّ $2 \le 2.3 < 3$ أو ($1.3 < E(x) \le 2.3$) نستنتج أنّ $E(2.3) = 2$

وبنفس الطريقة نجد : $E(-2.3) = -3$ وأيضاً $E(2) = 2$ و $E(\pi) = 3$ .... وهكذا

ملاحظة : لتسهيل دراسة تابع f على مجال I مكتوب بدلالة $E(x)$

نكتب f بعبارة لا تحوي $E(x)$ عن طريق تفريق المجال I إلى أكثر من مجال طول كلّ منها 1 .

مثال : اكتب التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق : $f(x)=3x-E(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

هل f مستمر على $[0,2]$ ؟ برّر إجابتك . ارسم الخطّ البياني للتابع f .

الحل : أيّاً يكن x من $[0,1[$ كان $E(x)=0$ ، وأيّاً يكن x من $[1,2[$ كان $E(x)=1$

وفي حالة $x=2$ فإنّ $E(x)=2$ وبالتالي :

$$f(x)=\begin{cases}3x & : x\in[0,1[\\ 3x-1 & : x\in[1,2[\\ 4 & : x=2\end{cases}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(1)^-}(3x)=3$ بينما $f(1)=3\times1-1=2$

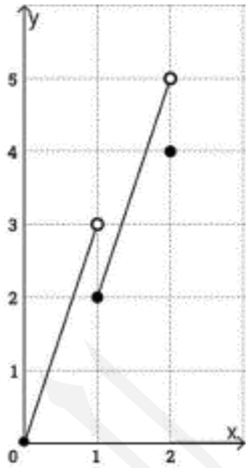
إذن : $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)\neq f(1)$ ، نستنتج أنّ التابع f غير مستمر عند 1 ، بالتالي هو غير مستمر على المجال $[0,2]$

لرسم خطّه البياني

نرسم المستقيم الذي معادلته $y=3x$ على المجال $[0,1[$

و المستقيم الذي معادلته $y=3x-1$ على المجال $[1,2[$

إضافةً إلى النقطة $(2,4)$ ، كما هو موضّح جانباً .



مثال : ادرس نهاية التابع $f(x)=\dfrac{E(x)}{x+1}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$

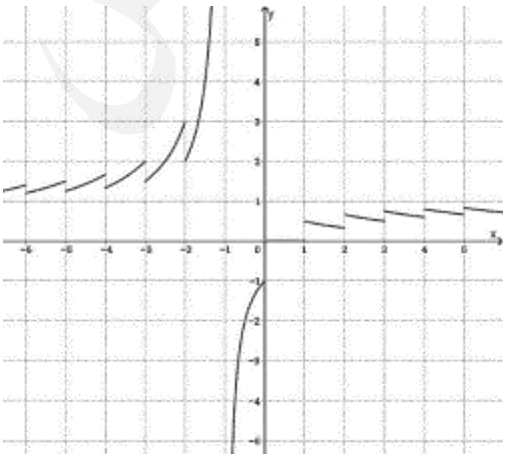
الحل : نعلم أنّ $x-1<E(x)\leq x$ ، وفي حالة $x>0$ تتحقق المتراجحة : $\dfrac{x-1}{x+1}\leq\dfrac{E(x)}{x+1}\leq\dfrac{x}{x+1}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$

استنتجنا حسب الإحاطة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

وبنفس الأسلوب نجد أيضاً أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

نجد جانباً الخط البياني لهذا التابع وهو غير مطلوب .



نشاط 1 البحث عن مقاربات مائلة

[[1]] أمثلة

1• f هو التابع المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$

1· لماذا يمكن تأكيد أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$ ؟

2· بين الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ .

الحل : 1· لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-\frac{1}{2}))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

2· أيّا يكن x من $]0,+\infty[$ كان $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{x}>0$ ، نستنتج أنّ الخط C_f يقع دوماً فوق مقاربه Δ .

2• f هو التابع المعرّف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$

بإعطاء x قيماً كبيرة ، تكون قيم $f(x)$ قريبة من $\frac{2x^2}{x}=2x$. فيمكن إذن أن يكون مستقيم معادلته من النمط $y=2x+b$ مقارباً للخط البياني C_f . سنسعى إذن إلى كتابة $f(x)$ بالصيغة : $f(x)=2x+b+\frac{c}{x+3}$

1· عيّن عددين b و c يحققان $f(x)=2x+b+\frac{c}{x+3}$ ، أيّاً كان $x\geq 0$.

2· استنتج أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ ، وبيّن وضعه بالنسبة إلى C_f .

الحل : 1· لدينا $2x+b+\frac{c}{x+3}=\frac{2x^2+6x+bx+3b+c}{x+3}=\frac{2x^2+(6+b)x+(3b+c)}{x+3}$

وبالمطابقة مع العبارة $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$ نجد : $\begin{cases}6+b=0\\3b+c=1\end{cases}$ ومنه : $b=-6$ و $c=19$

نستنتج أنّ : $f(x)=2x-6+\frac{19}{x+3}$

ملاحظة : كان يمكن استخدام القسمة الإقليدية أو إعطاء قيمتين اختياريتين للمتحول x لنحصل على معادلتين بمجهولين .

2· نضع $g(x)=f(x)-(2x-6)=\dfrac{19}{x+3}$ فنلاحظ أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

نستنتج أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ عند $+\infty$ معادلته : $y=2x-6$

من جهة ثانية : أيّاً كان $x\ge 0$ فإنّ $0<g(x)$ ، نستنتج أنّ الخط C_f يقع دوماً فوق مقاربه Δ .

⟦2⟧ الحالة العامّة

نتأمّل تابعاً f يحقق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

1· Δ مستقيم معادلته $y=ax+b$ في معلم مُعطى حيث $a\neq 0$. نفترض أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$

أثبت أنّ $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$ ، مساعدة : اكتب $f(x)=ax+b+\left(f(x)-(ax+b)\right)$

2· وبالعكس ، أثبت أنّه إذا كان $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ، (a حقيقي غير معدوم) ، و $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$ (b حقيقي)

كان المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارباً للخط C_f .

الحل : 1· نكتب في حالة $x>0$: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{ax+b+\left(f(x)-(ax+b)\right)}{x}=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}$

إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ ، ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$

نستنتج ممّا سبق أنّ : $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

ولدينا أيضاً : $f(x)-ax=ax+b+\left(f(x)-(ax+b)\right)-ax=b+\left(f(x)-(ax+b)\right)$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ استنتجنا أنّ : $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$

2· لدينا $f(x)-(ax+b)=(f(x)-ax)-b$ ولمّا كان $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$

كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب للخط C_f .

ملاحظة : يُبحث عن المقارب المائل في جوار $-\infty$ بطريقة مماثلة لما هو في جوار $+\infty$.

تطبيق ⟦3⟧

ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ أثبت أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

الحل : 1· نفترض أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y=ax+b$ في جوار $+\infty$ ، عندئذ :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right) \text{ ،}$$

في حالة $x>0$ لدينا : $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ وبالتالي : $a=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

وبالتالي : $b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ ، نستنتج أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته : $y=x$

نشاط 2 نهايات جديرة بالاهتمام

الهدف من هذا النشاط هو حساب النهايتين : $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ و $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

عموميّات ⟦1⟧

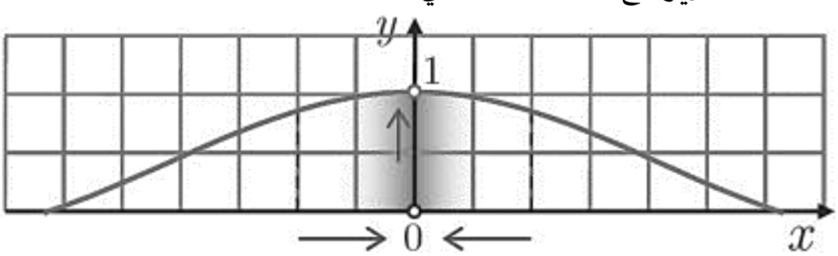
ليكن التابع f المعرّف على $R\setminus\{0\}$ بالصيغة $f(h)=\frac{\sin h}{h}$. في الجدول الآتي نجد بعض الأعداد القريبة من العدد 0 وقيم التابع f المقابلة لها .

h	$\pm2^{0}$	$\pm2^{-1}$	$\pm2^{-2}$	$\pm2^{-3}$	$\pm2^{-4}$	$\pm2^{-5}$	$\pm2^{-6}$	$\ldots\to0$
$f(h)$	0.84147	0.95885	0.98962	0.99740	0.99935	0.99948	0.99996	$\ldots\to1$

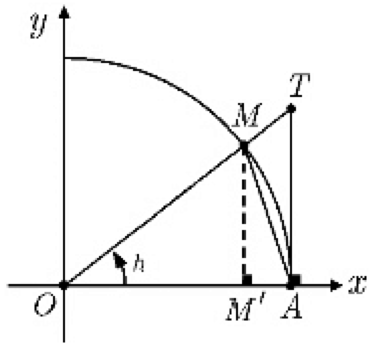
نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب قيمة h من العدد 0 تقترب قيمة $f(h)$ من العدد 1 وذلك مع كون التابع f غير معرّف عند $h=0$. ويوضّح ذلك الشكل الآتي .

إذن من الطبيعي القول إنّ التابع f يسعى إلى العدد 1 عند الصفر، أي :

$$\lim_{x\to0}f(h)=1$$



[[2]] حالة h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$



لتكن C الدائرة المثلثاتيّة التي مركزها O . ولتكن M تلك النقطة من C

بحيث يكون h التعيين الأساسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

h هو أيضاً قياس الزاوية الهندسية AOM بالراديان .

وفق هذه الشروط ومع الأخذ بدلالات الشكل المرافق

نعلم أنّ $OA=1$ و $OM'=\cos h$ و $MM'=\sin h$ وطول القوس AM يساوي h

مساحة المثلث $OAM \le$ مساحة القطاع الدائري $OAM \le$ مساحة المثلث OAT (*)

1· لماذا مساحة القطاع الدائري OAM تساوي $\frac{h}{2}$ ؟

2· لماذا مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}\sin h$ ؟

3· لماذا مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2}\times\frac{\sin h}{\cos h}$ ؟

4· استنتج من (*) أنّ $\sin h \le h \le \frac{\sin h}{\cos h}$.

5· استنتج أنّ $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$ أيّاً يكن h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

ملاحظة : تُعطى مساحة قطّاع دائري بالعلاقة $\frac{1}{2}R^2\times\theta$ حيث R نصف قطر الدائرة و θ قياس زاوية القطاع الدائري بالراديان .

الحل : 1· مساحة القطاع الدائري OAM تساوي $\frac{h}{2}$ لأن $R=1$ وزاوية القطاع OAM تساوي h

2· مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}OA\times MM'=\frac{1}{2}\sin h$

3· مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2}\times OA\times AT=\frac{1}{2}\times OA\times(OA\times\tan h)=\frac{1}{2}\times\frac{\sin h}{\cos h}$

4· بالتعويض في (*) نجد : $\frac{1}{2}\times\frac{\sin h}{\cos h}\ge\frac{h}{2}\ge\frac{1}{2}\sin h$ ومنه $\sin h\le h\le\frac{\sin h}{\cos h}$

5· لدينا $\sin h\le h\le\frac{\sin h}{\cos h}$ ومنه $\frac{1}{\sin h}\ge\frac{1}{h}\ge\frac{\cos h}{\sin h}$

وبالضرب بالمقدار $\sin h>0$ نجد $\cos h\le\frac{\sin h}{h}\le 1$

⟦3⟧ حالة h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

نضع $h'=-h$ ، فيكون $\frac{\pi}{2}>h'>0$ واستناداً إلى الدراسة السابقة $\cos h' \le \frac{\sin h'}{h'} \le 1$

1. استنتج أنّه أيّاً كان $h \neq 0$ و h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، كان $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$.
2. نهاية التابع المألوف $x \to \cos x$ عند الصفر تساوي الواحد . استنتج أنّ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$.

الحل : 1. كنّا قد أثبتنا أنّ $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$ في حالة h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

وفي حالة h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ يكون $\cos(-h) \le \frac{\sin(-h)}{-h} \le 1$ ومنه $\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$

فالمتراجحة محققة في حالة h من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$

2. لمّا كان $\lim\limits_{h\to 0}\cos h = 1$ استنتجنا حسب الإحاطة أنّ : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

⟦4⟧ النهاية الثانية المتعلّقة بتابع جيب التمام

يقودنا البحث عن نهاية $\frac{\cos h-1}{h^2}$ عند الصفر ، بحساب نهاية البسط والمقام

إلى حالة عدم تعيين ، لأنّ نهاية كلّ من البسط والمقام تساوي الصفر عند $h=0$

1. بملاحظة أنّ $\cos h = 1-2\sin^2\frac{h}{2}$ أثبت أنّ : $\frac{\cos h-1}{h^2}=-\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{4\times(\frac{h}{2})^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2$
2. استنتج أنّ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h^2}=-\frac{1}{2}$.

الحل : 1. $\frac{\cos h-1}{h^2}=\frac{1-2\sin^2\frac{h}{2}-1}{(2\times\frac{h}{2})^2}=-\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{4\times(\frac{h}{2})^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2$

2· نضع $u=\frac{h}{2}$ نجد $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)=1$

نستنتج أنّ : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$

تطبيق ⟦5⟧

لنتأمّل التابع المعرّف على $D=]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ بالصيغة $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}$

استعمل أسلوب الفقرة ⟦4⟧ ونتائج هذا النشاط لتحسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

الحل : لدينا هنا حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{0}{0}$ ولإزالتها :

نكتب $\cos(3x)=\cos(2x+x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x$ بالتالي :

$$f(x)=\frac{\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x-\cos(x)}{x\sin x}=\frac{\cos x\left(\cos(2x)-1\right)}{x\sin x}-\frac{\sin(2x)}{x}$$

$$=\frac{\cos x\times(-2\sin^2 x)}{x\sin x}-2\times\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=-2\cos x\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)-2\times\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)$$

نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

وبوضع $u=2x$ يكون $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$

نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-2\times 1\times 1-2\times 1=-4$

ملاحظة : يمكن الحل بطريقة ثانية باستخدام الدساتير

$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ و $\cos(3x)=1-2\sin^2\dfrac{3x}{2}$ و $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

الرقم (1) **الصفحة** (67) :

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه ، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1} \quad [1]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2+1\neq 0$ وهذا محقق أيّا يكن x من R ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$$f(x)=2-\frac{4}{x^2} \quad [2]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2\neq 0$ أي $x\neq 0$ ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

لدينا أيضاً $\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x^2}=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

$$f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x+3} \quad [3]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x+3\neq 0$ أي $x\neq -3$ ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+3}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+3x)=0$ و $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{1}{x+3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\frac{1}{x+3}=-\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=+\infty$

$$f(x)=x+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x+2}\quad [4]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x \neq -1$ و $x \neq -2$ ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]-1,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-2}(x+\frac{1}{1+x})=-3$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{1}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-1}(x-\frac{1}{x+2})=-2$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{1+x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{1}{1+x}=-\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

$$f(x)=(2x-3)(5-\sqrt{x})\quad [5]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x \geq 0$ ، إذن $D_f=[0,+\infty[$ ، من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-15$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-\sqrt{x})=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{x}\quad [6]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x \neq 0$ ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ و $\lim\limits_{x\to(0)^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-}\frac{1}{x}=-\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(0)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-}f(x)=-\infty$ ، من جهة أخرى لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

بالتالي نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، إنْ وُجدت ، هي من نهاية $x\to\cos x$ ، لكن تابع التجيب دوري وغير ثابت

فهو لا يملك نهاية عند $+\infty$ ولا يملكها عند $-\infty$ ، إذن f ليس له نهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\boxed{f(x)=2x+\sin x \quad [7]}$$

الحل : $D_f=]-\infty,+\infty[$ ، أيّاً يكن x فإنّ $-1\le \sin x\le 1$ ومنه $2x-1\le f(x)\le 2x+1$

نأخذ $f(x)\ge 2x-1$ ، لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

نأخذ $f(x)\le 2x+1$ ، لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$$\boxed{f(x)=x^2+2x-\frac{1}{x} \quad [8]}$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x\ne 0$ ، نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x)=0$ و $\lim\limits_{x\to(0)^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-}\frac{1}{x}=-\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(0)^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-}f(x)=+\infty$

$$\boxed{f(x)=x-2\sqrt{x}+3 \quad [9]}$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x\ge 0$ ، إذن $D_f=[0,+\infty[$ ، من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$

عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>0$:

$$f(x)=x(1-\frac{2\sqrt{x}}{x})+3=x(1-\frac{2}{\sqrt{x}})+3$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\sqrt{x}})=0$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{\sqrt{x}})=1$ ، نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+1}+x \quad [10]}$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2+1\ge 0$ وهذا محقق أيّا يكن x من R ، إذن $D_f=]-\infty,+\infty[$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ ، نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

عند $-\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x<0$:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

لمّا كانت $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ ، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

الرقم (2) **الصفحة** (67) :

أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثمّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطّه البياني وبيّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقيّة .

الحل : التابع معرّف بشرط $x\neq1$ ، إذن $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

لمّا كان $\lim_{x\to1}(2x+1)=3$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to(1)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(1)^-}f(x)=-\infty$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

نستنتج المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f عند $+\infty$

نضع $g(x)=f(x)-2=\dfrac{2x+1}{x-1}-2=\dfrac{3}{x-1}$

على المجال $]1,+\infty[$ يكون $g(x)>0$ ، بالتالي يقع الخط البياني للتابع f فوق مقاربه الأفقي .

و على المجال $]-\infty,1[$ يكون $g(x)<0$ ، بالتالي يقع الخط البياني للتابع f تحت مقاربه الأفقي .

الرقم (3) الصفحة (67) :

أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1

ثمّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطّه البياني وبيّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقيّة .

الحل : التابع معرّف بشرط $x\neq -1$ ، إذن $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to -1}(-2x)=2$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y=-2$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$ ،و المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f عند $+\infty$

نضع $g(x)=f(x)-(-2)=\dfrac{-2x}{x+1}+2=\dfrac{2}{x+1}$

على المجال $]-1,+\infty[$ يكون $g(x)>0$ ، بالتالي يقع الخط البياني للتابع f فوق مقاربه الأفقي .

و على المجال $]-\infty,-1[$ يكون $g(x)<0$ ، بالتالي يقع الخط البياني للتابع f تحت مقاربه الأفقي .

الرقم (4) الصفحة (67) :

f هو التابع المعرّف على المجال $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

أثبت أنّ $\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$ أيّاً يكن $x>1$. ثمّ استنتج نهاية f عند $+\infty$.

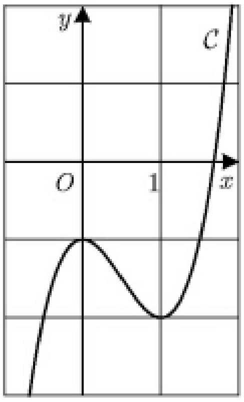
الحل : أيّاً يكن x فإنّ $-1\le\sin x\le 1$ ومنه $2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$

في حالة $x>1$ بالقسمة على المقدار $x-1>0$ نجد : $\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ ، استنتجنا حسب الإحاطة أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

الرقم (5) الصفحة (67) :

ليكن f هو التابع المعرّف وفق R وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$ وليكن C خطّه البياني المبين في الشكل المرافق .
1· ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. 2· احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ، ثمّ نظّم جدولاً بتغيرات f .
3· أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط ، إذا رمزناه α ، أثبت أنّ α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.



الحل : 1· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

2· $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ ، ينعدم $f'(x)$ عند $x=0$ ويكون $f(0)=-1$

وينعدم أيضاً عند $x=1$ ويكون $f(1)=-2$ ، و جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3· من جدول التغيّرات نجد : على المجال $]-\infty,1[$ يكون $f(x)<0$ ، بالتالي لا يوجد حلول للمعادلة $f(x)=0$

في المجال $]-\infty,1[$ ، أمّا على المجال $[1,+\infty[$ فإنّ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $f([1,+\infty[)=[-2,+\infty[$

ولمّا كان الصفر ينتمي إلى المجال $[-2,+\infty[$ استنتجنا وجود حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي للمجال $[1,+\infty[$

نستنتج مما سبق أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط α في R .

ولدينا : $\begin{cases} f(1.6)=2(1.6)^3-3(1.6)^2-1=0.512-1<0 \\ f(1.7)=2(1.7)^3-3(1.7)^2-1=1.156-1>0 \end{cases}$ نستنتج أنّ α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$

الرقم (6) الصفحة (68) :

نتأمّل التابع f المعرّف على R^* بالعلاقة $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{x}$ ، ادرس نهاية f عند الصفر.

الحل : نكتب $f(x)=3\times\left(\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)$ ونضع $u=3x$ فيكون :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=3$

الرقم (7) **الصفحة** (68) : **التابع** $x \to \sqrt{ax^2+bx+c}$

ليكن f التابع المعرّف على R وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$ ، وليكن C خطه البياني .

المطلوب هو إثبات أنّ الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ ، وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

ملاحظة : بإمكاننا حل هذا التمرين بالطريقة ذاتها التي اتبعناها في حل التطبيق الذي ورد في النشاط 1 . لكننا هنا سنتبع أسلوباً يخدم الفكرة المُراد ايصالها ، هذا الأسلوب يعتمد على تخمين أمثال x في معادلة المقارب عن طريق التركيز على الحد المسيطر في كثير الحدود تحت الجذر وإهمال بقية الحدود في جوار $+\infty$ وكذلك في جوار $-\infty$.

فهم السؤال : الحد المسيطر في كثير الحدود $2x^2+x+1$ هو $2x^2$ ،فيمكن أن نخمّن أنّه عند القيم الكبيرة للمتحول x يكون $f(x)$ من مرتبة $\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$.

1. أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. استنتج قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4})\right)$

3. أعد الدراسة في جوار $-\infty$.

الحل : 1. لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}x=+\infty$

فنحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ، ولإزالتها نكتب في حالة $0<x$:

$$\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. لدينا $f(x)-(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4})=\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4})\right)=0$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ الخط C للتابع f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته : $y=\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. في جوار $-\infty$ يكون $f(x)$ من مرتبة $\sqrt{2x^2}=-\sqrt{2}x$ ، ولنبحث عن قيمة $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2}x=-\infty$

فنحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ، ولإزالتها نكتب في حالة $x<0$:

$$\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x}=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)=\frac{1}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

من جهة أخرى لدينا $f(x)-(-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4})=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4})\right)=0$

وبذلك نكون قد أثبتنا بالمثل أنّ الخط C للتابع f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ معادلته : $y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$

الرقم (8) الصفحة (69) : كثير الحدود ذي الدرجة الفرديّة

يُعطى كثير حدود P من الدرجة n بالصيغة $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_0$ ، حيث $a_n\neq 0$
الهدف إثبات أنّه إذا كان n عدداً فردياً ، فإنّ P يقبل جذراً حقيقياً على الأقل .أي للمعادلة $P(x)=0$ حلاً على الأقل .

إنّ P معرّف ومستمر على R : في حالة $a_n>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$

وفي حالة $a_n<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=+\infty$

إذن في كلا الحالتين $P(R)=]-\infty,+\infty[$ والصفر بالطبع ينتمي للمجال $]-\infty,+\infty[$.

نستنتج أنّ للمعادلة $P(x)=0$ حلاً على الأقل في R .

الرقم (9) الصفحة (69) :

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار

$$[1] \quad f(x)=\frac{x-4}{x^2-6x+5} \qquad a=-\infty,1,5,+\infty$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2-6x+5\neq 0$ أي $(x-1)(x-5)\neq 0$

نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,1[\cup]1,5[\cup]5,+\infty[$

x	$-\infty$ 1 5 $+\infty$
x^2-6x+5	+ 0 − 0 +

$\lim_{x\to(1)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to(5)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(5)^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$$[2] \quad f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2-4} \qquad a=-\infty,-2,2,+\infty$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2-4\neq 0$

نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$ وعندئذٍ $f(x)=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-6}{x-2}$

$\lim_{x\to-2} f(x)=2$ و $\lim_{x\to(2)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to(2)^-} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

$$[3] \quad f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} \qquad a=-\infty,-2,1,+\infty$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\neq 0$

نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$ وعندئذٍ يمكن أن نكتب

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{2x^3-2x^2+x^2-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{2x^2(x-1)+(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{2x^2+x+1}{x+2}$$

$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3}$ و $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(2)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$[4] \quad f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9} \qquad a=-\infty,-3,3,+\infty$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x-3\neq 0$ و $x^2-9=(x-3)(x+3)\neq 0$

نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,-3[\cup]-3,3[\cup]3,+\infty[$ ونكتب $f(x)=\frac{x+1}{x^2-9}$

x	$-\infty$ $\quad$ -3 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
x^2-9	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to(3)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to(3)^-} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$[5] \quad f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1} \qquad a=-\infty,1,+\infty$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x^3-1\neq 0$ أي $x\neq 1$ نستنتج أنّ $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

ونكتب : $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$[6] \quad f(x)=2x+\sin^2 x \qquad a=-\infty,+\infty$$

الحل : $D_f=]-\infty,+\infty[$ وأيّاً يكن x فإنّ $0\leq\sin^2 x\leq 1$ ومنه $2x\leq f(x)\leq 2x+1$

إذن $2x\leq f(x)$ ، ولمّا كان $\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

وأيضاً $f(x)\leq 2x+1$ ، ولمّا كان $\lim_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$

استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$a=-\infty,+\infty \qquad f(x)=x^3(2+\cos x) \quad [7]$$

الحل : $D_f=]-\infty,+\infty[$ وأيّاً يكن x فإنّ $-1\le\cos x\le 1$ ومنه $1\le 2+\cos x\le 3$ نأخذ $2+\cos x\ge 1$

في حالة $x>0$ فإنّ $x^3>0$ ، إذن $x^3(2+\cos x)\ge x^3$ و لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، وفي حالة $x<0$ فإنّ $x^3<0$

إذن $x^3(2+\cos x)\le x^3$ ، ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$a=-\infty,1,+\infty \qquad f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \quad [8]$$

الحل : التابع معرّف بشرط $x-1\ge 0$ و $x\ne 1$ نستنتج أنّ $D_f=]1,+\infty[$

ونكتب : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ نجد : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الرقم (10) الصفحة (70) :

ليكن g التابع المعرّف على R وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

أثبت أنّ g محدود ، ثمّ استنتج كلاً من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

الحل : أيّاً يكن x من R فإنّ $-1\le\sin x\le 1$ ومنه $-2\le 2\sin x\le 2$ وبالتالي $1\le 3+2\sin x\le 5$

ولمّا كانت جميع الأطراف موجبة تماماً فإنّ $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+2\sin x}\le 1$ أي أنّ $\dfrac{1}{5}\le g(x)\le 1$ ، نستنتج أنّ g محدود .

في حالة $x>0$ فإنّ $x^2>0$ وبالتالي : $\dfrac{x^2}{5}\le\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\le x^2$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$ استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right)=+\infty$

أيضاً وانطلاقاً من المتراجحة $-1\le\sin x\le 1$ نجد $x-1\le x+\sin x\le x+1$

وبضربها بالمتراجحة $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+2\sin x}\le 1$ في حالة $x>1$ نجد : $\dfrac{x-1}{5}\le\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\le x+1$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{5}=+\infty$ استنتجنا حسب المقارنة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)=+\infty$

الرقم (11) الصفحة (70) :

ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

1. عيّن D_f مجموعة تعريف f .

2. أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$ أيّاً تكن x من D_f .

3. ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f .

الحل : 1. f معرّف بشرط $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\neq 0$ إذن $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,2[\cup]2,+\infty[$

2. لدينا
$$a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}=\frac{ax^2+(-a+b+c)x+(-2a-2b+c)}{x^2-x-2}$$

وبالمطابقة مع عبارة $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ نحصل على جملة المعادلات
$$\begin{cases}a=3\\-a+b+c=6\\-2a-2b+c=0\end{cases}$$

بتعويض $a=3$ في المعادلتين الثانية والثالثة نجد $\begin{cases}b+c=9\\-2b+c=6\end{cases}$ بالحل المشترك نجد $b=1$ و $c=8$

إذن : $f(x)=3+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{8}{x-2}$

طريقة ثانية (هناك طرق أخرى) : باستخدام القسمة الإقليدية ومن ثمّ التفريق المناسب للحدود نجد :
$$f(x)=3+\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=3+\frac{x-2+8x+8}{(x+1)(x-2)}=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8(x+1)}{(x+1)(x-2)}=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}$$

3. إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1}(3+\dfrac{8}{x-2})=\dfrac{1}{3}$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to(2)^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(2)^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2}(3+\dfrac{1}{x+1})=\dfrac{10}{3}$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to(2)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(2)^-}f(x)=-\infty$

الرقم (12) الصفحة (70) :

ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

1· ادرس نهاية f في جوار 1 .

2· أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ أياً تكن x من $I\setminus\{1\}$.

الحل : 1· لمّا كانت $\lim\limits_{x\to 1} x=1$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

نرمز لنصف قطر المجال I بالرمز α ، فتكون x من $]1-\alpha,1+\alpha[$ ولا تساوي 1

بالتالي : $x>1-\alpha$ و $x<1+\alpha$ ، نختار $\alpha=10^{-4}$

وفي حالة $x>1$ المتراجحة $x<1+\alpha$ تكافئ $(x-1)^2<\alpha^2$

نستنتج أنّ : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}>\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1-10^{-4}}{10^{-8}}=10^8-10^4>10^6$

بالتالي $\alpha=10^{-4}$ تحقق المطلوب ، وعندئذ يكون $I=]1-10^{-4},1+10^{-4}[$ أو $I=]0.9999,1.0001[$

الرقم (13) الصفحة (70) :

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a .

[1] $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ $\qquad a=+\infty$

الحل : $D_f=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}=+\infty$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>0$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)=2$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$$\boxed{a=-\infty \qquad f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x \quad [2]}$$

الحل : $D_f=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right]\cup[0,+\infty[$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ و لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^2+x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}=+\infty$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x<-\frac{1}{4}$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{4x^2+x}+2x)(\sqrt{4x^2+x}-2x)}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{x}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)}=\frac{1}{-\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)}$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)=4$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$

$$\boxed{a=3 \qquad f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad [3]}$$

الحل : $D_f=[-1,3[\cup]3,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to3}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>-1$ و $x\neq3$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\frac{1}{4}$

$$\boxed{a=0 \qquad f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} \quad [4]}$$

الحل : $D_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}(2x)=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>-1$ و $x\neq0$:

$$f(x)=\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=2(\sqrt{x+1}+1)$$

نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=4$

$$a=1,+\infty \qquad f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \qquad [5]$$

الحل : $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to1}\left(-x+\sqrt{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>0$ و $x\neq1$:

$f(x)=\frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)}$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-\frac{1}{2}$

عند $+\infty$ لدينا في البسط حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>1$:

$f(x)=\frac{-x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1-\frac{1}{x})}=-\frac{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1-\frac{1}{x})}$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

$$a=-1,+\infty \qquad f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad [6]$$

الحل : $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{x^2-1}=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x<-1$:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)}$$

نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$

عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{+\infty}{+\infty}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>1$:

$$f(x)=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ، نستنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

الرقم (14) الصفحة (70) :

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a .

$[1]\quad f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad a=0,+\infty$

الحل : $D_f=]0,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>0$:

$f(x)=\sqrt{x}\times\dfrac{\sin x}{x}$ ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

عند $+\infty$ ، في حالة $x>0$ فإنّ $-1\le \sin x\le 1$ ومنه $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ ، استنتجنا حسب الإحاطة أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$[2]\quad f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x} \qquad a=0$

الحل : $D_f=R\setminus\{\pi k\}$ حيث k عدد صحيح ، لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\dfrac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x\ne\pi k$:

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

طريقة ثانية لإزالة عدم التعيين : $f(x)=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$ ، ونستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$[3]\quad f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad a=0$

الحل : $D_f=R\setminus\{2\pi k\}$ حيث k عدد صحيح ، لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x \neq 2\pi k$:

$$f(x)=\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

طريقة ثانية لإزالة عدم التعيين : $f(x)=\dfrac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2\times\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}=1$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

$[4]$ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $a=2$

الحل : $D_f=\left[\frac{2}{3},2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$ لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(2-\sqrt{3x-2})=0$ و $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x+5}-3)=0$

بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ولإزالتها نكتب في حالة $x>\frac{2}{3}$:

$$f(x)=\frac{(2-\sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(2+\sqrt{3x-2})}=\frac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}=\frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(2+\sqrt{3x-2})}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x+5}+3)=6$ و $\lim\limits_{x\to 2}(2+\sqrt{3x-2})=4$ استنتجنا أنّ : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\frac{9}{4}$

الرقم (15) **الصفحة** (70) :

ليكن g التابع المعرّف على المجال $\left]3,+\infty\right[$ وفق $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$.

1· احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right)$.

2· أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right)$ بعد كتابة $g\left(g(x)\right)$ بدلالة x .

الحل : 1· لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$ ، نضع $g(x) = t$ ويكون :

$t = g(x) = \frac{3x-1}{x-3} = \frac{3x-3+2}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3} > 3$ ، أيّا تكن x من المجال $]3,+\infty[$

إذن وحسب مبرهنة نهاية مركب تابعين يكون : $\lim_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right) = \lim_{t\to(3)^+} g(t) = +\infty$

2· لدينا

$$g\left(g(x)\right) = g\left(\frac{3x-1}{x-3}\right) = \frac{3\times\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-1}{\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-3} = \frac{\frac{8x}{x-3}}{\frac{8}{x-3}} = x$$

نستنتج مجدّداً أنّ : $\lim_{x\to+\infty} g\left(g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

الرقم (16) **الصفحة** (71) :

> ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$.
>
> جِدْ الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أنّ الخواص الآتية محققة :
>
> - المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط C .
> - المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
> - تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C .

الحل : • الخاصّة الأولى تكافئ أن تكون نهاية f عند 3 موجودة و لا تساوي عدداً حقيقيّاً ، ولمّا كانت

$\lim_{x\to3}(ax+b)$ حقيقية لأنّ كلاً من a و b عدد حقيقي ، استنتجنا أنّ نهاية الكسر $\frac{c}{x-d}$ عند 3

يجب أن تكون $+\infty$ أو $-\infty$ ، وهذا يتحقق فقط في حالة $\lim_{x\to3}(x-d) = 0$ ، نستنتج إذن أنّ : $d = 3$

• الخاصّة الثانية تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x-5)\right) = 0$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left(ax + b + \frac{c}{x-3} - (2x-5)\right) = 0$

لكن $\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x-3} = 0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(ax + b - (2x-5)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left((a-2)x + (b+5)\right) = 0$

وهذا محقق عندما : $a = 2$ و $b = -5$

• الخاصّة الثالثة تكافئ $f(1) = 2$ ومنه $2\times1 - 5 + \frac{c}{1-3} = 2$ بالتالي $c = -10$

الرقم (17) الصفحة (71) :

فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f . بيّن ، في كل حالة ، إن كان ثمّة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C .

[1] $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ ، $D_f=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

الحل : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to(3)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(3)^-} f(x)=-\infty$ ، نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب شاقولي للخط C .

[2] $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x^2+1}$ ، $D_f=]-\infty,+\infty[$

الحل : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(-x+3)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-x+3)\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=-x+3$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

[3] $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}$ ، $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

الحل : $\lim\limits_{x\to(0)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-} f(x)=+\infty$ ، إذن محور التراتيب معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1+\dfrac{x}{2})\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{2}{x})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(1+\dfrac{x}{2})\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2}{x})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=1+\dfrac{x}{2}$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

[4] $f(x)=1-x+\dfrac{3x}{x^2+2}$ ، $D_f=]-\infty,+\infty[$

الحل : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(1-x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x}{x^2+2})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(1-x)\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{3x}{x^2+2})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=1-x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\quad ، \quad f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x} \quad [5]$$

الحل : $\lim\limits_{x\to(0)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-} f(x)=+\infty$

إذن محور التراتيب معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

من جهة ثانية نكتب : $f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}=2x+5-\frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+5)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{4}{x})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x+5)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{4}{x})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=2x+5$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\quad ، \quad f(x)=\frac{x^2+2+\sin x}{x} \quad [6]$$

الحل : $\lim\limits_{x\to(0)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(0)^-} f(x)=-\infty$

إذن محور التراتيب معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

من جهة ثانية نكتب : $f(x)=\frac{x^2+2+\sin x}{x}=x+\frac{2+\sin x}{x}$

أيّاً تكن x فإنّ $-1\le\sin x\le 1$ ومنه $1\le 2+\sin x\le 3$

في حالة $x>0$ يكون : $\frac{1}{x}\le\frac{2+\sin x}{x}\le\frac{3}{x}$

لمّا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ استنتجنا حسب الإحاطة أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\sin x}{x}=0$

وفي حالة $x<0$ يكون : $\frac{3}{x}\le\frac{2+\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$

لمّا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ استنتجنا حسب الإحاطة أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\sin x}{x}=0$

وعليه يكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$$[7] \quad f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1} \quad ، \quad D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

الحل : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ ، نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط C .

$\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=-\infty$ ، نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط C .

$$[8] \quad f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1} \quad ، \quad D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

$\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=+\infty$ ، نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط C .

من جهة ثانية نكتب : $f(x)=\frac{x^2-x-2x+2-1}{x-1}=\frac{x(x-1)-2(x-1)-1}{x-1}=x-2-\frac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x-1})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{1}{x-1})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$$[9] \quad f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2} \quad ، \quad D_f=]-\infty,+\infty[$$

نكتب : $f(x)=\frac{x^3+2x-2x+1}{x^2+2}=\frac{x(x^2+2)-2x+1}{x^2+2}=x-\frac{2x+1}{x^2+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{2x+1}{x^2+2})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{2x+1}{x^2+2})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

$$[10] \quad f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1} \quad ، \quad D_f=]-\infty,+\infty[$$

نكتب : $f(x)=\frac{3x^3+3x-x-1}{x^2+1}=\frac{3x(x^2+1)-x-1}{x^2+1}=3x-\frac{x+1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x+1}{x^2+1})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{x+1}{x^2+1})=0$

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $y=3x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$.

ملاحظة : في $[8]$ و $[9]$ و $[10]$ استخدمنا طريقة مهاريّة في تفريق عبارة $f(x)$ كما هو واضح .

لكنّنا نشير هنا إلى إمكانيّة استخدام القسمة الإقليدية للوصول إلى هذا التفريق ، وهي طريقة سهلة و معروفة .

الرقم (18) **الصفحة** (71) :

ليكن التابع f المعرّف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

$1\circ$ a · احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$.

b · استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$. ثمّ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

$2\circ$ a · احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b · أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ وأنّ نهاية $x\to f(x)-ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b .

c · استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

الحل : $1\circ$ a · لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x+4)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نضع $g(x)=f(x)-(x+1)$ ونكتب :

$$g(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

b · ممّا سبق نستنتج أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

من جهة ثانية فإنّ $g(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+3}-(x+1)>0$

لأنّ $\sqrt{(x+1)^2+3}>(x+1)$ أيّاً كانت x من R ، نستنتج أنّ الخط C يقع دوماً فوق مقاربه Δ .

ملاحظة : كان بالإمكان إثبات أنّ $g(x)>0$ أيضاً ، بالقول إنّ g مستمر و لا ينعدم على R ، ومن ثمّ فهو يحافظ على إشارة واحدة أيّاً كانت x من R ، يمكن معرفتها بحساب (مثلاً) $g(0)=1>0$.

$2\circ$ a · لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+4)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b · نكتب في حالة $x<0$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}}{x}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1=a$

ونكتب أيضاً في حالة $x<0$:

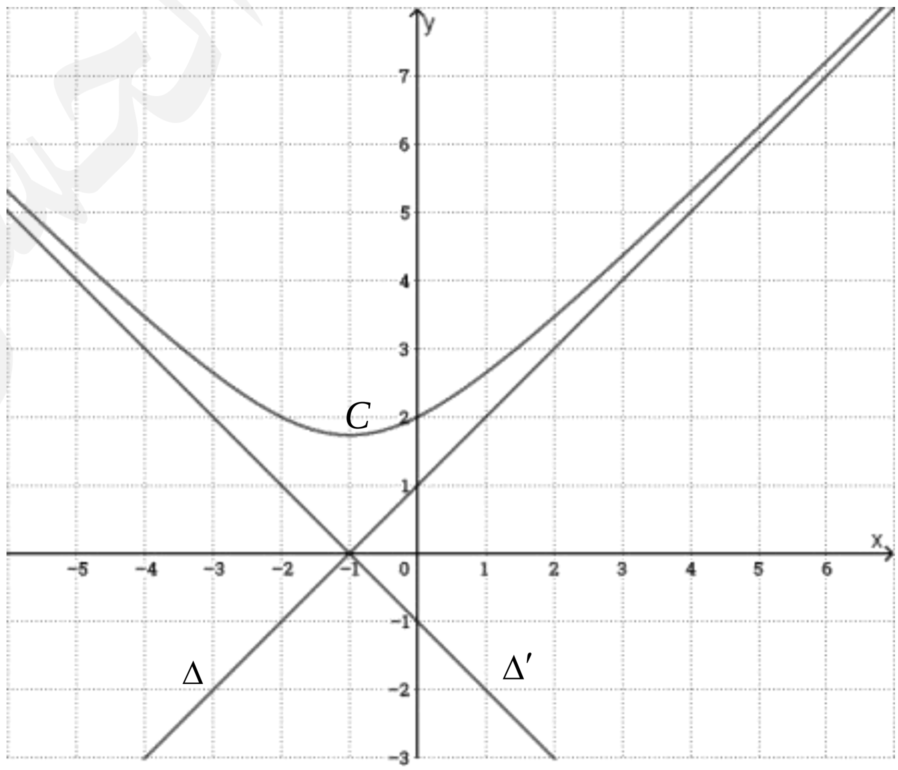
$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x=\frac{(\sqrt{x^2+2x+4}+x)(\sqrt{x^2+2x+4}-x)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{x(2+\frac{4}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$

نستنتج أنّ $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=-1\in R$

c · ممّا سبق نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-1)\right)=0$

بالتالي فإنّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.



الرقم (19) الصفحة (71) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1• احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2• a · اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية ، (متمّماً إلى مربع كامل) .

b · استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

الحل : 1• لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2• a · لدينا $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$

b · اعتماداً على ماسبق نكتب $f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$ وفي جوار $+\infty$ يكون المقدار $(x+2)^2$ كبيراً

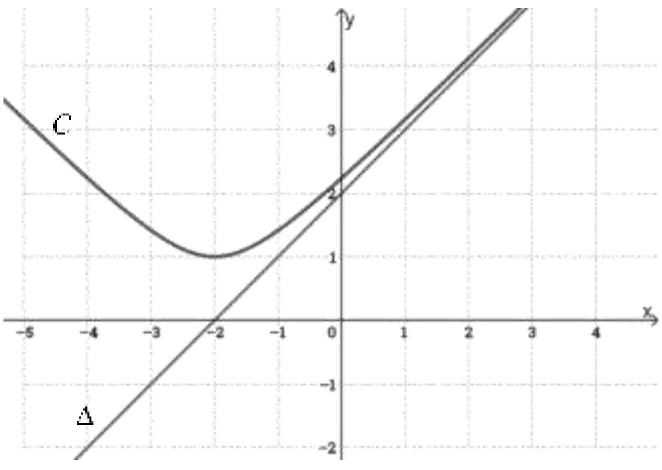
بحيث يمكن إهمال العدد 1 ، ويكون أيضاً $x+2>0$ ، بالتالي نخمّن أنّ $f(x)$ من مرتبة : $\sqrt{(x+2)^2}=x+2$

وعليه نرجّح أن يكون المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ هو المقارب المنشود ، ولنبرهن صحّة هذا التخمين :

$$\begin{aligned} f(x)-(x+2) &= \sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2) \\ &= \frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)} \end{aligned}$$

لمّا كانت $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)=+\infty$ استنتجنا أنّ : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=0$

إذن ، المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.



الرقم (20) **الصفحة** (72) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1● ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة .

2● أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

3● ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

الحل : 1● لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

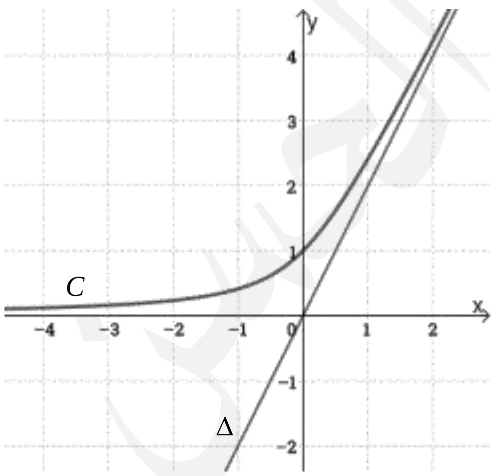
بالتالي نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $-\infty+\infty$ ، ولإزالتها نكتب في حالة $x<0$:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+1})=-\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

هندسياً ، يكون المستقيم الذي معادلته $y=0$ (محور الفواصل) مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$.

2● في حالة $x>0$ نكتب : $f(x)-2x=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$



ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)=0$

وعليه يكون المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$

مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

3● نضع $g(x)=f(x)-2x=\sqrt{x^2+1}-x$

فيكون $g(x)>0$ على R لأنّ $\sqrt{x^2+1}>x$ ، نستنتج أنّ الخط C يقع دوماً فوق مقاربه Δ .

ملاحظة : كانت قد وردت طريقة ثانية في التمرين [18] تُفيد في دراسة الوضع النسبي، وهنا نورد شرحاً يوضّح لماذا $\sqrt{x^2+1}>x$. نعلم أنّه أيا تكن x فإنّ $\sqrt{x^2+1}>0$ وبالتالي في حالة $x<0$ فإنّ المتراجحة محقّقة ، أمّا في حالة $x\geq 0$ فإنّ $x^2+1>x^2$ وهذا يقتضي $\sqrt{x^2+1}>x$.

الرقم (21) الصفحة (72) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$

●1 ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

●2 a . احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$. b . احسب $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$.

●3 a . استنتج أنّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب كتابة معادلتيهما .

b . ادرس الوضع النسبي للخط C وكلّ من المقاربين Δ_1 و Δ_2 .

الحل : ●1 إنّ $|4x^2-1|=4x^2-1$ في كلا الحالتين $x>\frac{1}{2}$ و $x<-\frac{1}{2}$ وعندئذٍ : $f(x)=x+\sqrt{4x^2-1}$

ولمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(4x^2-1)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-1}=+\infty$ ، نستنتج أنّ : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

عند $-\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ولإزالتها نكتب في حالة $x<-\frac{1}{2}$:

$$f(x)=x+\sqrt{4x^2-1}=x+\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}=x-x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

ولمّا كان $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

●2 a . في حالة $x>\frac{1}{2}$ نكتب :

$$f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\frac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=-\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$

ولمّا كانت $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-1}+2x)=+\infty$ استنتجنا أنّ : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=0$

b . في حالة $x<-\frac{1}{2}$ نكتب : $f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=-\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$

ولمّا كانت $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-1}-2x)=+\infty$ استنتجنا أنّ : $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=0$

●3 a . ممّا سبق نستنتج أنّ المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=3x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

وأنّ المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

b · نضع $g(x)=f(x)-3x$ فيكون $g(x)=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$

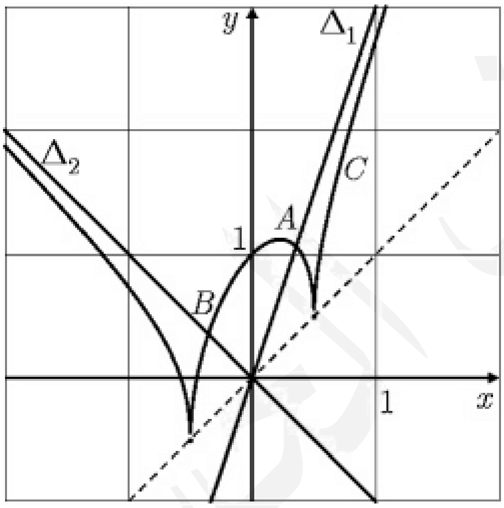
المعادلة $g(x)=0$ تكافئ $\sqrt{|4x^2-1|}=2x>0$ ومنه $|4x^2-1|=4x^2$ وبالتالي $4x^2-1=-4x^2$

ومنه $x^2=\frac{1}{8}$ وبما أنّ $x>0$ نستنتج أنّ $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، إذن C يقطع Δ_1 في النقطة $A(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4})$ ويكون :

x	$-\infty$ $\sqrt{2}/4$ $+\infty$	
$g(x)$	$+$ 0 $-$	
الوضع النسبي	C فوق Δ_1	C تحت Δ_1

نضع $h(x)=f(x)+x$ فيكون $h(x)=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$

المعادلة $h(x)=0$ تكافئ $\sqrt{|4x^2-1|}=-2x>0$ ومنه $|4x^2-1|=4x^2$ وبالتالي $4x^2-1=-4x^2$



ومنه $x^2=\frac{1}{8}$ وبما أنّ $x<0$ نستنتج أنّ $x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

إذن C يقطع Δ_2 في النقطة $B(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$ ويكون :

x	$-\infty$ $-\sqrt{2}/4$ $+\infty$	
$h(x)$	$-$ 0 $+$	
الوضع النسبي	C تحت Δ_2	C فوق Δ_2

الرقم (22) الصفحة (72) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1● ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2● a · اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني .

b · ادرس نهاية التابع h المعرّف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

c · استنتج أنّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما .

3● أثبت أنّ الخط C يقع فوق كلّ من هذين المقاربين .

الحل : 1● لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وأيضاً $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2● a · لدينا $4x^2-4x+3=4x^2-4x+1+2=(2x-1)^2+2$

b · لدينا : $h(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{(2x-1)^2}=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$

في جوار $+\infty$ نحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ، وكذلك في جوار $-\infty$ ، ولإزالتها نكتب :

$$h(x)=\frac{\left(\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}\right)}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$$

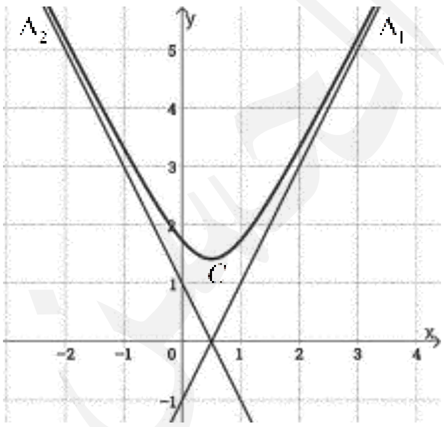
لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}\right)=+\infty$

نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ وأيضاً $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

c · لمّا كان $\sqrt{(2x-1)^2}=2x-1$ في حالة $x>\frac{1}{2}$ و $\sqrt{(2x-1)^2}=-2x+1$ في حالة $x<\frac{1}{2}$

استنتجنا أنّ المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

وأنّ المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=-2x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.



3● أيّا تكن x كان $(2x-1)^2+2>(2x-1)^2$

ومنه $\sqrt{(2x-1)^2+2}>\sqrt{(2x-1)^2}$

وبالتالي $h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}>0$

نستنتج أنّ الخط C يقع دوماً فوق مقاربيه Δ_1 و Δ_2 .

الرقم (23) **الصفحة** (72) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

1● a · أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

b · ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

2● أصحيح أنّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ ؟ برّر إجابتك .

الحل : 1● a · في حالة $x>0$ نضع : $g(x)=f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}-1$

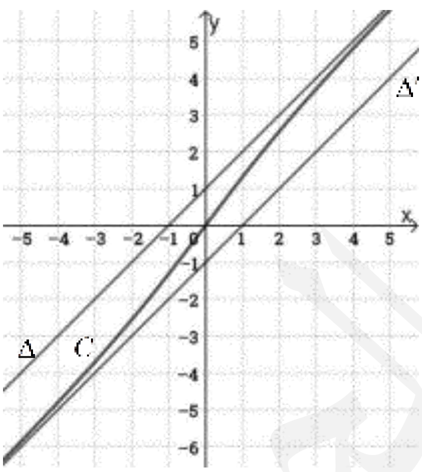
ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+9}=1$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}=1$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

نستنتج أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

b · أياً يكن x كان $x^2<x^2+9$ ومنه $\dfrac{x^2}{x^2+9}<1$ وبالتالي $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}<1$

إذن $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}-1<0$ ، نستنتج أنّ الخط C يقع دوماً تحت مقاربه Δ .

2● في حالة $x<0$ نضع : $h(x)=f(x)-(x-1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1=\dfrac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}}+1=-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}+1$



وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ ، نستنتج أنّ المستقيم Δ'

الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

وقد وجدنا أنّ $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}<1$ أيّاً تكن x

وبالتالي $h(x)>0$ ، إذن C يقع دوماً فوق مقاربه Δ' . **(غير مطلوب)**

الرقم (24) الصفحة (72) :

> ليكن f التابع المعرّف على R وفق $f(x)=x^3+x+1$ ، احسب $f(-1)$ و $f(0)$
>
> ثمّ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقق $f(c)=0$.

الحل : لدينا $f(-1)=(-1)^3+(-1)+1=-1$ و $f(0)=(0)^3+(0)+1=1$

التابع f مستمر واشتقاقي على R و $f'(x)=3x^2+1>0$ ، إذن f متزايد تماماً على R

ينتج من استمرار وتزايد التابع أنّ حل المعادلة $f(c)=0$ ، إنْ وُجد ، فهو وحيد .

ولمّا كان $f(0)\times f(-1)<0$ استنتجنا وجود عدد c من المجال $]-1,0[$ يحقق $f(c)=0$.

الرقم (25) الصفحة (72) :

ليكن f التابع المعرّف على $R\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$

●1 أثبت أنّ f متزايد تماماً على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$. ثمّ نظّم جدولاً بتغيرات f على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

●2 أوجد $f\left(\left[-\frac{3}{2},-1\right[\right)$ وأثبت أنّ للمعادلة $f(x)=10$ حلاً وحيداً في المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

الحل : ●1 التابع f مستمر واشتقاقي على $R\setminus\{-1\}$ و $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x+3)}{(x-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة المقدار $(2x+3)$ وهذا المقدار موجب تماماً على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$

باستثناء القيمة $x=-\frac{3}{2}$ التي ينعدم عندها $f'(x)$ ، نستنتج أنّ f متزايد تماماً على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

من جهة ثانية لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=\dfrac{27}{4}$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ ، وعليه يكون جدول التغيّرات المطلوب :

x	$-3/2$			-1
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$ ‖
$f(x)$	$27/4$	↗		$+\infty$ ‖

●2 من جدول التغيرات نجد أنّ

$$f\left(\left[-\frac{3}{2},-1\right[\right)=\left[\frac{27}{4},+\infty\right[$$

ولأنّ العدد 10 من المجال $\left[\frac{27}{4},+\infty\right[$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=10$ حلاً وحيداً في المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

الرقم (26) الصفحة (73) :

ليكن f التابع المعرّف على $I=[0,3]$ وفق $f(x)=x^2-2x-3$

●1 ادرس تغيرات f و نظّم جدولاً بها . ●2 استنتج قيم x التي تحقق $f(x)=0$. ●3 عيّن $f([0,3[)$.

الحل : ●1 لدينا : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-3$ و $\lim\limits_{x\to3} f(x)=0$ ، من جهة ثانية إنّ f مستمر واشتقاقي على I

ولدينا $f'(x)=2(x-1)$ ، ينعدم f' على I عند $x=1$ ويكون $f(1)=-4$ ، وجدول تغيرات f :

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	0

2• من جدول التغيرات نجد : f متناقص تماماً على المجال $[0,1[$ ، و $f\left([0,1[\right)=]-4,-3]$

ولمّا كان الصفر لا ينتمي للمجال $]-4,-3]$ استنتجنا أنّه لا توجد حلول للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[0,1[$

f متزايد تماماً على المجال $[1,3]$ ، و $f\left([1,3]\right)=[-4,0]$

ولأنّ الصفر من المجال $[-4,0]$ استنتجنا وجود حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[1,3]$ هو $x=3$

3• $f\left([0,3[\right)=f\left([0,1[\right)\cup f\left([1,3[\right)=]-4,-3]\cup[-4,0[=[-4,0[$

الرقم (27) **الصفحة** (73) :

ليكن f التابع المعرّف على R وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$ ، أثبت أنّ f مستمر على R وعيّن $f(R)$

الحل : إنّ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ وهو تابع كسري (بسطه ومقامه كثيري حدود) فهو مستمر على مجموعة تعريفه R .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ ، من جهة ثانية إنّ f مستمر واشتقاقي على I وتابعه المشتق :

$f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ ينعدم عند $x=0$ ويكون $f(0)=0$ وجدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

نستنتج من الجدول أنّ :

$$f(R)=f\left(]-\infty,0[\right)\cup f\left([0,+\infty[\right)$$
$$=]0,1[\cup[0,1[=[0,1[$$

الرقم (28) **الصفحة** (73) :

ليكن f التابع المعرّف على R وفق : $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \quad x\neq 0\\ 0 & : \quad x=0\end{cases}$
1• احسب نهاية f عند الصفر 2• هل f مستمر عند الصفر ؟ هل هو مستمر على R ؟ علل إجابتك .

الحل : 1• في حالة $x\neq 0$: نعلم أنّ $-1\le\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 1$ ومنه $-x^2\le f(x)\le x^2$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to0}(-x^2)=0$ ، استنتجنا حسب الإحاطة أنّ : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

2• التابع f مستمر عند الصفر لأنّ : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

في حالة $x \neq 0$ التابع $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ يكون مستمراً كونه تركيب تابعين مستمرين هما $x \to \frac{1}{x}$ و $x \to \cos x$

والتابع $x \to x^2$ يكون مستمرّا أيضاً ، بالتالي $x \to x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر في هذه الحالة كونه جداء ضرب تابعين مستمرين

ورأينا أنّ f مستمر عند الصفر، نستنتج إذن أنّ f مستمرّ على مجموعة تعريفه R .

الرقم (29) **الصفحة** (73) :

> ليكن f التابع المعرّف على R وفق :
> $$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : \quad x \neq 0 \\ m & : \quad x = 0 \end{cases}$$
> ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R ؟

الحل : 1• $x \to x^2+1$ مستمر على R و $x^2+1>0$

بالتالي $x \to \sqrt{x^2+1}$ مستمر على R كونه تركيب تابعين مستمرين . و $x \to \frac{1}{x}$ مستمر على $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[$

نستنتج أنّ التابع f مستمر على $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[$ ، وحتى يكون مستمرّاً على كامل R يجب أن يكون مستمراً

عند الصفر ، وهذا يكافئ تحقق الشرط $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = m$ أي أنّ m تساوي نهاية f عند الصفر.

ولدينا هنا حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ، ولإزالتها نكتب في حالة $x \neq 0$:

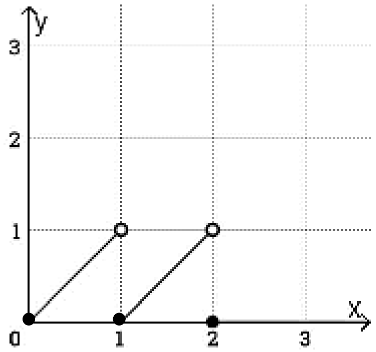
$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = -\frac{x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = -\frac{x}{(1+\sqrt{x^2+1})}$$

بالتالي : $m = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

الرقم (30) **الصفحة** (73) :

> يُرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,2]$ وفق :
> $$f(x) = x - E(x)$$
> 1· ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$. 2· هل f مستمر على المجال $[0,2]$.

الحل : 1· نعلم أنّ :
$$E(x)=\begin{cases}0 & : x\in[0,1[\\ 1 & : x\in[1,2[\\ 2 & : x=2\end{cases}$$



وبالتالي :
$$f(x)=\begin{cases}x & : x\in[0,1[\\ x-1 & : x\in[1,2[\\ 0 & : x=2\end{cases}$$

2· بملاحظة أنّ $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=1\neq f(2)=0$ ، نستنتج أنّ f غير مستمر عند 2 ، بالتالي غير مستمر على $[0,2]$.

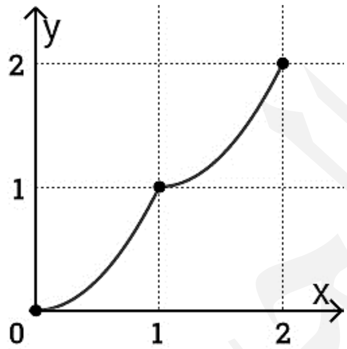
الرقم (31) الصفحة (73) :

يُرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,2]$ وفق :

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

1· اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$. 2· أثبت أنّ f مستمر على المجال $[0,2]$.

الحل : 1· نعلم أنّ :
$$E(x)=\begin{cases}0 & : x\in[0,1[\\ 1 & : x\in[1,2[\\ 2 & : x=2\end{cases}$$



وبالتالي :
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & : x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & : x\in[1,2[\\ 2 & : x=2\end{cases}$$

2· إنّ f مستمر على كلّ من المجالين $[0,1[$ و $]1,2[$ كونه كثير حدود .

وكي يكون مستمرّاً على $[0,2]$ يجب أن يكون مستمراً عند 1 وعند 2

لمّا كان : $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1} x^2=1$ و $f(1)=1+(1-1)^2=1$ ، استنتجنا أنّ f مستمر عند 1

ولمّا كان : $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(1+(x-1)^2\right)=2$ و $f(2)=2$ ، استنتجنا أنّ f مستمر عند 2

ممّا سبق نستنتج أنّ f مستمر على المجال $[0,2]$.

الرقم (32) الصفحة (74) :

في معلم متجانس ، C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,\pi[$ وفق $f(x)=\sin x$

و d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$. و g هو التابع المعرّف على $[0,\pi]$ وفق $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$.

●1 a · ارسم كلاً من C و d .

b · يبدو أنّ للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi[$ ، من الرسم ، أوجد مجالاً صغيراً ينتمي إليه α.

●2 a · احسب $g'(x)$ وأثبت أنّ $g'(x)$ ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$.

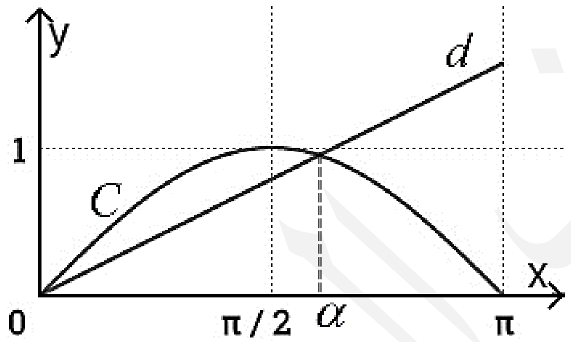
b · نظّم جدولاً بتغيرات g .

●3 استنتج مما سبق أنّ المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi[$.

الحل : ●1 a · إنّ f تابع مرجعي وخطّه البياني C معروف .

و d هو المستقيم المارّ بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,1)$

فيكون الرسم المطلوب كما في الشكل جانباً :



b · يمكن اختيار المجال $\left]\frac{\pi}{2},2\right[$

●2 a · إنّ g مستمر واشتقاقي على المجال $[0,\pi]$ ولدينا $g'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$ ويتحقق $g'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

b · $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to\pi} g(x)=0-\frac{1}{2}\pi=-\frac{\pi}{2}$

$g(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}>0$

x	0		$\pi/3$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\pi/3)$	$\searrow$	$-\pi/2$

●3 المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تكافئ $\sin x-\frac{1}{2}x=0$ أي $g(x)=0$ ، ومن جدول تغيرات g نجد :

التابع g متزايد تماماً على المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$ وَ $g\left(\left]0,\frac{\pi}{3}\right]\right)=\left]0,g(\frac{\pi}{3})\right]$

لكن الصفر لا ينتمي إلى المجال $\left]0,g(\frac{\pi}{3})\right]$ ، بالتالي ليس للمعادلة $g(x)=0$ حلول في المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$.

التابع g متناقص تماماً على المجال $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$ وَ $g\left(\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]\right)=\left[-\frac{\pi}{2},g(\frac{\pi}{3})\right[$

و الصفر ينتمي إلى المجال $\left[-\frac{\pi}{2},g(\frac{\pi}{3})\right[$ ، بالتالي للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد ينتمي للمجال $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$

مما سبق نستنتج أنّ المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,\pi[$.

الرقم (33) الصفحة (74) :

ليكن f تابعاً مستمراً ومعرّفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق : $f(x)\in I$ ، أياً يكن x من I .

نرمز بالرمز k إلى التابع المعرّف على I وفق $k(x)=f(x)-x$.

بتطبيق مبرهنة القيمة الوُسطى على التابع k ، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

قبل الحل : المعادلة $f(a)=a$ تكافئ $f(a)-a=0$ أي $k(a)=0$ ، بالتالي يكون المطلوب إثبات وجود حل للمعادلة $k(a)=0$ في I ، وهذا يتحقق إذا كان k مستمرّاً على I و يغير إشارته في $k(I)$ ، أي $k(0)$ و $k(1)$ من إشارتين مختلفتين

الحل : إنّ $k(0)=f(0)-0=f(0)$ ، ولمّا كان $f(0)\in[0,1]$ ، استنتجنا أنّ : $k(0)=f(0)\geq 0$

وإنّ $k(1)=f(1)-1$ ، ولمّا كان $f(1)\in[0,1]$ فإنّ $(f(1)-1)\in[-1,0]$ ، نستنتج أنّ : $k(1)=f(1)\leq 0$

التابع k مستمر على I كونه مجموع تابعين مستمرين على I ، و الصفر محصور بين $k(0)$ و $k(1)$، عندئذٍ وحسب مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد - على الأقل - عدد حقيقي a من I يحقق $k(a)=0$ أي يحقق $f(a)=a$.

الرقم (34) الصفحة (74) : مجموعة توابع مستمرّة

ليكن m عدداً حقيقياً ، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرّف على R وفق : $f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$

1• a · أثبت أنّ الخطّين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B . أوجد إحداثيات هاتين النقطتين .

b · استنتج أنّ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B .

2• أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3• استنتج مما سبق أنّ للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول متمايزة في R ، أياً يكن العدد m .

الحل : 1• a · الخط C_0 يمثل التابع $f_0(x)=x^3-8x$ ، و الخط C_1 يمثل التابع $f_1(x)=x^3+x^2-8x-1$

وتقاطع C_0 و C_1 في نقطة (x_0,y_0) ، يكافئ $f_0(x_0)=f_1(x_0)$ وهذا يكافئ $x_0^3-8x_0=x_0^3+x_0^2-8x_0-1$

وبالتالي $x_0^2=1$ ومنه $x_0=1$ ، $x_0=-1$ ويكون $f_0(1)=-7$ و $f_0(-1)=7$ ، إذن $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$

b · لدينا $f_m(1)=1^3+m(1)^2-8(1)-m=-7$ و $f_m(-1)=(-1)^3+m(-1)^2-8(-1)-m=7$

نستنتج إذن أنّ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B .

•2 إنّ $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

•3 التابع f_m مستمر على R كونه كثير حدود ، فهو مستمر على كلّ من المجالات $]-\infty,-1[$ و $[-1,1]$ و $]1,+\infty[$

على المجال $]-\infty,-1[$ يغير التابع $f_m(x)$ إشارته لأنّ $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$ و $f_m(-1)=7$

نستنتج أنّ للمعادلة $f_m(x)=0$ حل واحد على الأقل ينتمي للمجال $]-\infty,-1[$

على المجال $[-1,1]$ يغير التابع $f_m(x)$ إشارته لأنّ $f_m(1)=-7$ و $f_m(-1)=7$

نستنتج أنّ للمعادلة $f_m(x)=0$ حل واحد على الأقل ينتمي للمجال $[-1,1]$

على المجال $]1,+\infty[$ يغير التابع $f_m(x)$ إشارته لأنّ $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$ و $f_m(1)=-7$

نستنتج أنّ للمعادلة $f_m(x)=0$ حل واحد على الأقل ينتمي للمجال $]1,+\infty[$

المعادلة $f_m(x)=0$ تكافئ $x^3+mx^2-8x-m=0$ ، وهذه معادلة من الدرجة الثالثة ، بالتالي تقبل ثلاثة حلول **على الأكثر** . نستنتج مما سبق أنّ للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول متمايزة في R ، أياً يكن العدد m .

الرقم (35) الصفحة (74) :

ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقيّاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق الشرطين :

• أياً كان x من I كان $f(x)$ من I . • أياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x)<1$.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=x$ حلاً وحيداً في I .

قبل الحل : المعادلة $f(x)=x$ تكافئ $f(x)-x=0$ ، لو وضعنا $g(x)=f(x)-x$ لكان المطلوب إثبات أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً في I ، ولذلك يكفي أن نبرهن أن g مستمر ومطرد على I وأنّ $g(0)$ و $g(1)$ من إشارتين مختلفتين .

الحل : نضع $g(x)=f(x)-x$ فيكون g مستمر واشتقاقي على I كونه مجموع تابعين مستمرين واشتقاقيين على I

ولأنّ $f'(x)<1$ فإنّ $g'(x)=f'(x)-1<0$ ، إذن g متناقص تماماً على $I=[0,1]$

ولأنّ $f(x)$ من I فإنّ $g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$ و $g(1)=f(1)-1\leq 0$

نستنتج ممّا سبق أنّ للمعادلة $g(x)=0$ التي تكافئ $f(x)=x$ حلاً وحيداً في I .

توضيح : لأنّ g مستمر على $I=[0,1]$ ومتناقص تماماً على $]0,1[$ نستنتج أنّه متناقص تماماً على $I=[0,1]$.

الرقم (36) الصفحة (75) :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

●1 أثبت أنّ للخط C محور تناظر.

●2 ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

●3 أثبت أنّ $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ، أيّاً يكن x من R. استنتج أنّ C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عيّن الوضع النسبي للخط C ومقاربه d .

●4 ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x)=-f(x)$ ، وليكن $\mathcal{H}=C\cup C'$. أثبت أنّ معادلة $\mathcal{H}$ هي $y^2-x^2=1$.

●5 نعتمد معلماً جديداً $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$. لتكن M نقطة إحداثياتها (x,y) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ وإحداثياتها (X,Y) في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.أوجد x و y بدلالة X و Y. ارسم $\mathcal{H}$ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

الحل : ●1 بملاحظة أنّ $f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$ وأنّ التابع معرّف على R وهي متناظرة .

نستنتج أنّ التابع f زوجي ، وعليه يكون محور التراتيب معادلته $x=0$ محور تناظر لخطّه البياني C .

●2 لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2)=+\infty$ استنتجنا أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

●3 أيّاً يكن x فإنّ :
$$f(x)-x=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

و لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0$

نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

ولمّا كان $\sqrt{1+x^2}>x$ استنتجنا أنّ $f(x)-x>0$ ، بالتالي C يقع دوماً فوق مقاربه d .

●4 بفرض $N(x,y)\in\mathcal{H}=C\cup C'$ عندئذٍ انتماء النقطة N إلى $\mathcal{H}$ يكافئ وقوعها على C أو C'

أي تحقق $y=\sqrt{1+x^2}$ أو $y=-\sqrt{1+x^2}$ وفي كلا الحالتين وبالتربيع نجد : $y^2=1+x^2$ ومنه $y^2-x^2=1$

5• إذا كانت $M\,(x\,,y\,)$ في المعلم $(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ فإنّ $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

و إذا كانت $M\,(X\,,Y\,)$ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v}\,)$ فإنّ $\overrightarrow{OM}=X\,\vec{u}+Y\,\vec{v}$ ومنه :

$$x\,\vec{i}+y\,\vec{j}=X\,\vec{u}+Y\,\vec{v}=X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}\,)\right)+Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j}\,)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}X\,\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}X\,\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}Y\,\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\,\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y\,)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y\,)\vec{j}$$

نستنتج إذن أنّ : $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y\,)$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y\,)$

وقد وجدنا أنّ معادلة $\mathcal{H}$ في المعلم $(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ هي $y^2-x^2=1$ ، وبتعويض العلاقتين السابقتين نجد :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y\,)\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y\,)\right)^2=1 \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2)-\frac{1}{2}(X^2-2XY+Y^2)=1$$

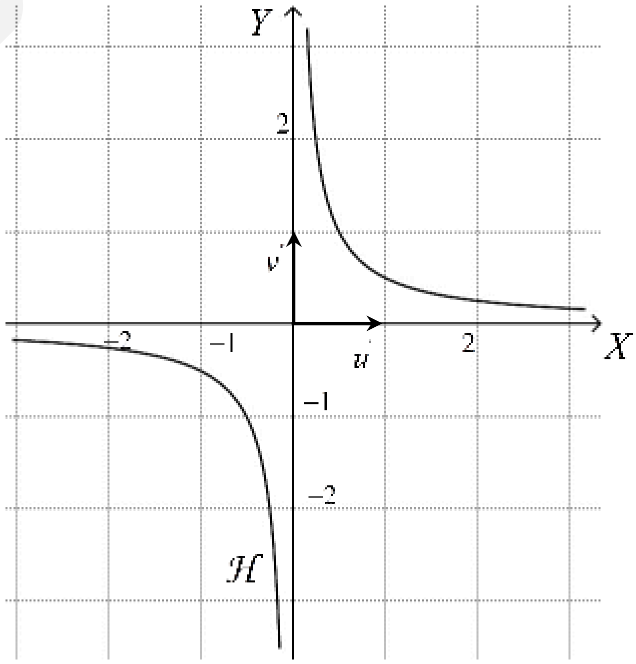
وبالتالي $2XY=1$ أي أنّ $Y=\dfrac{1}{2X}$ ، وهذه الأخيرة تمثل معادلة $\mathcal{H}$ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v}\,)$

بالتالي الخط $\mathcal{H}$ هو الخط البياني للتابع $X\to\dfrac{1}{2X}$ وهو قطع زائد مرّ معنا في صفوف سابقة .

معرّف على $R\setminus\{0\}$ ومتناقص تماماً على كلّ من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ ، وخطّه متناظر بالنسبة إلى المبدأ

كما أنّ خطه البياني له مستقيمين مقاربين ، مقارب أفقي هو محور الفواصل عند $+\infty$ وعند $-\infty$

ومقارب شاقولي هو محور التراتيب .



الرقم (37) الصفحة (75) : تابع القيمة المطلقة : تغيرات . حل معادلة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = R \setminus \{-1,1\}$ وفق : $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

1● a · اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة .

b · ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f . ثمّ أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على كلّ من مجالات D_f .

2● ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

3● a · تحقق من أنّ المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x+1$ و $y = -x-1$ هما ، بالترتيب ، مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين .

b · أوجد معادلةً للماس T للخط البياني C في النقطة A منهُ ، علماً أنّ فاصلة A تساوي الصفر .

c · ارسم T ومقاربي C ثم ارسم C .

4● أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ وأوجد مجالاً طوله 0.25 تنتمي إليه α .

الحل : 1● a · نعلم أنّ $|x+1| = x+1$ في حالة $x > -1$ و $|x+1| = -(x+1)$ في حالة $x < -1$

وعليه يكون :

$$f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : \quad x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[\\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : \quad x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

b · $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x) = +\infty$

ويكون المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب شاقولي للخط C ، وكذلك المستقيم الذي معادلته $x = 1$.

من جهة ثانية ، f اشتقاقي على D_f كونه مجموع تابعين كلّ منهما اشتقاقي على D_f ويُعطى تابعه المشتق :

$$f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : \quad x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[\\ -1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : \quad x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

على المجال $x \in]-\infty,-1[$ نلاحظ أنّ $f'(x) = -1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$

أمّا في حالة $x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[$ نكتب :

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

المقدار $\dfrac{x^2}{(x^2-1)^2}$ موجب ، بالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة المقدار (x^2-3) الذي ينعدم عند $x=\sqrt{3}$

و يكون عندئذٍ $f'(x)<0$ في حالة $x \in]-1,1[\cup]1,\sqrt{3}[$ ، باستثناء $x=0$ التي ينعدم عندها .

و يكون $f'(x)>0$ في حالة $x \in]\sqrt{3},+\infty[$

2• وجدنا أنّ $f'(x)$ ينعدم عند $x=0$ ويكون $f(0)=1$ وينعدم عند $x=\sqrt{3}$ ويكون $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}$

واعتماداً على ما تمّ دراسته نجد جدول تغيّرات f على الشكل الآتي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3• a · في جوار $+\infty$: نضع $g(x) = f(x)-(x+1) = x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1) = \dfrac{x}{x^2-1}$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ ، استنتجنا أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

في حالة $x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[$: يكون $g(x)>0$ على كلّ من المجالين $]-1,0[$ و $]1,+\infty[$ وعندئذٍ يقع C فوق Δ

ويكون $g(x)<0$ على المجال $]0,1[$ وعندئذٍ يقع C تحت Δ ، ويتقاطع C مع Δ في النقطة $(0,1)$.

وفي جوار $-\infty$: نضع $h(x) = f(x)-(-x-1) = -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1) = \dfrac{x}{x^2-1}$

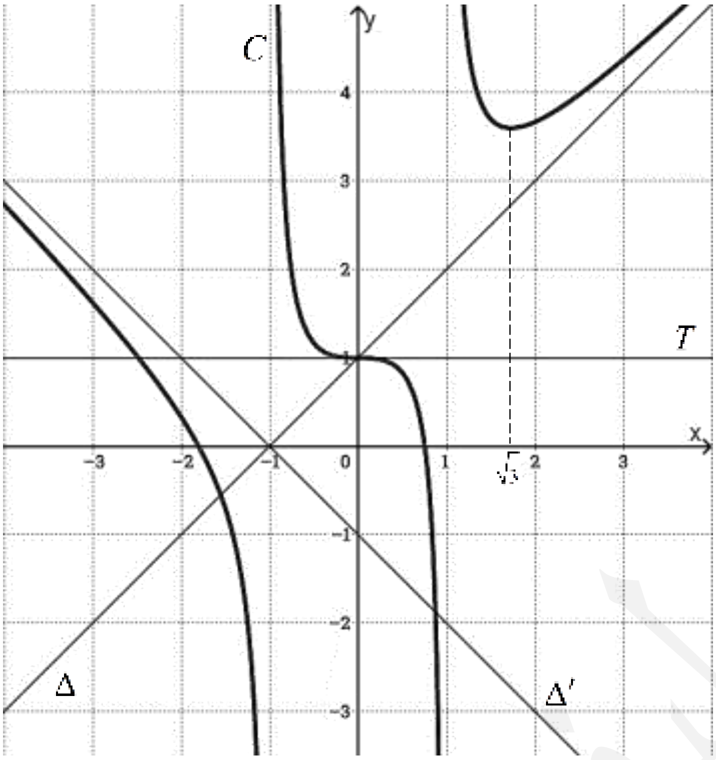
لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ ، استنتجنا أنّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

في حالة $x \in]-\infty,-1[$: يكون $h(x)<0$ ، وعندئذٍ يقع C تحت Δ' .

ملاحظة : نعلم أنّ الوضع النسبي لخط بياني لتابع f ومقاربه يُدرس على كامل مجموعة تعريف f ، لكنّنا اكتفينا هنا بدراسة الوضع النسبي في جوار $+\infty$ في حالة المستقيم Δ وفي جوار $-\infty$ في حالة المستقيم Δ' ، وذلك لصعوبة الدراسة على كامل D_f .

b . تُعطى معادلة المماس T بالعلاقة : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ولدينا $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ ، نستنتج أنّ المماس T معادلته $y = 1$



c . الرسم المجاور

4• بملاحظة أنّ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$

وأنّ $f\left(]-1,1[\right) =]-\infty, +\infty[$

والصفر بالطبع من المجال $]-\infty, +\infty[$

استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x) = 0$

حلاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$

ثمّ نلاحظ أنّ : $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{6} > 0$ ، إذن $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

ثم إنّ : $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{28} > 0$ ، إذن $\alpha \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$

الرقم (38) الصفحة (76) :

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$.

نقرن بالنقطة M النقطة M' ، نرمز إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$ ، و نعرّفها كم يلي :

• يقطع المستقيم (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m .

• يقطع المستقيم (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M' .

1. بدون حساب ، خمّن نهاية f عند $+\infty$.

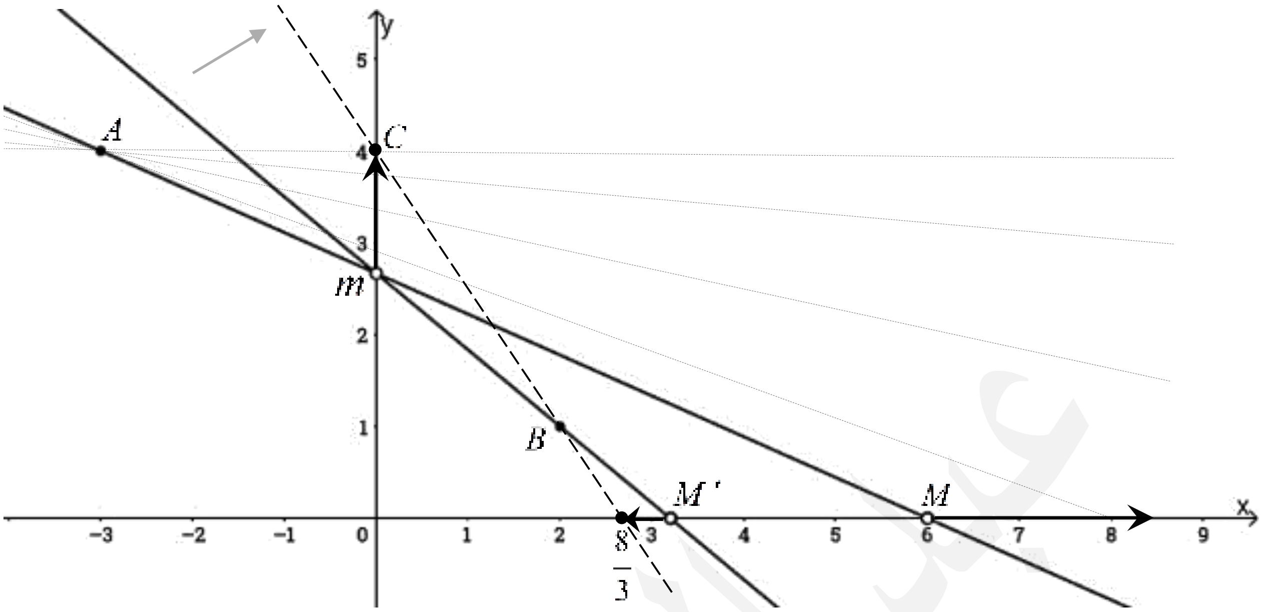
2. أثبت أنّ $f(x) = \dfrac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ، ثمّ استنتج نهاية f عند $+\infty$.

3. a • ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة ؟

b • ادرس نهاية f عند $x = 1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة ؟

4. عندما $x = -3$ ، يكون المستقيم (AM) موازياً $(O;\vec{j})$ وتكون m << في اللانهاية >> . يمكن أن نقول في هذه الحالة أنّ (Bm) يوازي $(O;\vec{j})$ وأنّ M' تقع في $(2,0)$. نعرّف عندئذٍ التابع g وفق $g(x) = f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ، وَ $g(-3) = 2$. لماذا يكون g مستمراً عند -3 ؟

ملاحظة : نقول في هذه الحالة إننا مدّدنا استمرار g ليشمل $x = -3$.



1. لدينا $M'(f(x),0)$ والمطلوب تخمين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

عندما تسعى x إلى $+\infty$ تنطبق النقطة m على النقطة $C(4,0)$

حيث يصبح المستقيم (AM) موازياً محور الفواصل

و من ثمّ تنطبق M' على نقطة تقاطع المستقيم (BC) مع محور الفواصل

إذن نخمّن أنّ النهاية المطلوبة تساوي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (BC) مع محور الفواصل .

إنّ ميل المستقيم (BC) : $\frac{0-2}{4-1}=-\frac{2}{3}$ ، وتُعطى معادلته : $y-4=-\frac{2}{3}(x-0)$

ومنه $y=-\frac{2}{3}x+4$ ، وبوضع $y=0$ نجد $x=\frac{8}{3}$ ، إذن نخمّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{8}{3}$

2. لتكن $m(0,k)$ ، النقاط A و m و M على استقامة واحدة ، وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\-4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{Am}\begin{pmatrix}3\\k-4\end{pmatrix}$

مرتبطان خطياً ، ومنه : $(x+3)(k-4)-(3)\times(-4)=0$ ، بالتالي : $k=\frac{4x}{x+3}$

أيضاً النقاط B و m و M' على استقامة واحدة ، فالشعاعان $\overrightarrow{BM'}\begin{pmatrix} f(x)-2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{Bm}\begin{pmatrix} -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$

مرتبطان خطياً ، ومنه : $\left(f(x)-2\right)(k-1)-(-2)\times(-1)=0$ ، وبالتالي $f(x)=\dfrac{2k}{k-1}$

وبوضع $k=\dfrac{4x}{x+3}$ نجد : $f(x)=\dfrac{2\times\dfrac{4x}{x+3}}{\dfrac{4x}{x+3}-1}$

و نحصل على : $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$ ، ويكون : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{8}{3}$

3. a • لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{8}{3}$: و التأويل الهندسي أنّه في هذه الحالة أيضاً تنطبق M' على النقطة $(\dfrac{8}{3},0)$

حيث سيعود المستقيم (AM) ليوازي محور الفواصل .

b • لدينا $\lim\limits_{x\to(1)^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=-\infty$

و التأويل الهندسي أنّه في هذه الحالة يوازي المستقيم (Bm) محور الفواصل .

4. $\lim\limits_{x\to-3} g(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{8x}{3x-3}=2$ ، ومن جهة ثانية : $g(-3)=2$

إذن $\lim\limits_{x\to-3} g(x)=g(-3)$ ، نستنتج أنّ التابع g مستمر عند -3 .