منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

أسس التحليل التابعي 2

الدكتور

شحادة الأسدي

أستاذ في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات

١٤٣٥هـ _ ٢٠١٤ م

منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

أسس التحليل التابعي 2

الدكتور

شحادة الأسدي

أستاذ في قسم الرياضيات

السنة الرابعة

شعبة التحليل الرياضي

الفهرس

الفصل الأول

المؤثر المرافق – الداليات الخطية مرة و نصف المرة

الفصل الثاني

المؤثرات الخطّية المحدودة في فضاء هيلبرت

الفصل الثالث

مفاهيم عامّة في نظرية المؤثّرات الخطّية وتطبيقها

الفصل الرابع

النشر الطيفي للمؤثّرات المحدودة

مفردات مقرر التحليل التابعي (٢)

مفاهيم عامة و تطبيقات لنظرية المؤثرات في فضاء هيلبرت

- الداليات الخطية مرة و نصف المرة.
- المؤثر المرافق لمؤثر خطي محدود في فضاء هيلبرت.
- المؤثر المترافق ذاتياً.

مؤثرات الإسقاط العمودية و المؤثرات الوحدية و المؤثرات الموجبة

- مؤثرات الإسقاط العمودي و خواصها.
- المؤثرات الوحدية و المؤثرات الايزومترية.
- الجذر التربيعي لمؤثر موجب.

مفاهيم طيفية

- الفضاءات الجزئية اللامتغيرة و الفضاءات الجزئية المرجعة.
- الطيف و المجموعة الحالة.
- الطيف التقريبي.

المؤثرات تامة الاستمرار و المؤثرات الناظمية

- المؤثرات تامة الاستمرار – البعد المنتهي.
- خواص إضافية للمؤثرات تامة الاستمرار.
- المؤثرات الناظمية.
- نتائج طيفية للمؤثرات التامة الاستمرار.

النظرية الطيفية للمؤثرات المترافقة ذاتياً

- طيف المؤثر المترافق ذاتياً.
- النشر الطيفي للمؤثرات الخطية المحدودة و المترافقة ذاتياً.

المقدّمة

كنت قد أشرت في كتاب التحليل التابعي (١) إلى أهمّية التحليل التابعي، هذا الفرع من الرياضيّات، الذي بات مستخدماً في جميع العلوم الرياضيّة، و في مختلف المسائل التطبيقية.

إنّ كتاب التحليل التابعي (٢) يمثّل عرضاً تصنيفياً لنظرية المؤثّرات الخطّية في فضاء هيلبرت و هو مخصّص لطلبة السنة الرابعة، شعبة التحليل، في قسم الرياضيّات و يمكن أن يكون مفيداً للعاملين في حقل الرياضيّات الفيزيائية.

تناولنا في هذا الكتاب، الذي يغطّي مفردات التحليل التابعي (٢)، المبادئ الأساسية لنظرية المؤثّرات الخطّية في فضاء هيلبرت. ففي الفصل الأول درسنا المؤثّر المرافق و المؤثّر المترافق ذاتياً ذا الصلة الوثيقة بالصيغة التربيعية، و الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة، كما درسنا التقارب الضعيف لمتتاليات الداليّات الخطّية و متتاليات العناصر في بعض الفضاءات التابعية.

و في الفصل الثاني درسنا المؤثّرات التامّة الاستمرار و مؤثّرات الإسقاط العامودي و العمليّات عليها، كما استعرضنا المؤثّرات الوحدية و المؤثّرات الإيزومترية، و تناولنا في هذا الفصل المؤثّرات الموجبة و فصل جذر تربيعي منها.

كُرّس الفصل الثالث في الكتاب للمفاهيم العامّة الطيفية للمؤثّرات الخطّية كمفهوم الأشعة الخاصّة و الفضاءات الجزئية اللامتغيرة و عرفنا في هذا الفصل الطيوف المختلفة للمؤثّرات و أتبعنا ذلك بدراسة تفصيلية لبعض صفوف المؤثّرات: المؤثّرات المترافقة ذاتياً – و المؤثّرات الناظمية و المؤثّرات التامّة الاستمرار.

عرضنا في الفصل الرابع النظرية الطيفية للمؤثّرات الناظمية و المنتهية البعد ثمّ عرضنا النظرية الطيفية للمؤثّرات المترافقة ذاتياً.

كما ذكرنا في مقدمة كتاب أسس التحليل التابعي (١)، فإنّها تعتبر واحدة من الوسائل الأكثر عملية في ترسيخ الأفكار النظرية و توضيحها، و كذلك المعرفة المعمّقة

للتحليل التابعي، هي حل المسائل حيث تستخدم المعلومات النظرية المدروسة، و لتحقيق هذا الهدف أوردنا في نهاية كل فصل مجموعة من المسائل و التمارين المختلفة في درجة صعوبتها كما قمنا في نهاية الكتاب بحل المسائل ذات الأرقام الزوجية بغية إعطاء الطالب أسس حل مسائل التحليل التابعي.

إنّ مواضع الكتاب منسجمة كلّياً مع منهاج التحليل التابعي (٢) الذي يدّرس في الفصل الثاني لطلاب السنة الرابعة (شعبة التحليل) في كلّية العلوم، و يمكن لطلاب الرياضيّات التطبيقية و للفيزيائيين الاستفادة من الجوانب التطبيقية للمواضيع المدروسة.

أخيراً أرجو أن يحقق هذا الكتاب الغاية المرجوة منه، و الله ولي التوفيق.

حلب ١ / ١١ / ٢٠٠٨

المؤلّف

الفصل الأول

المؤثر المرافق – الداليات الخطية مرة ونصف المرة

Adjoint Operator – Sesquilinear functionals

إنّ ما استعرضناه من مفاهيم في الفقرة الثالثة من الفصل الرابع في كتاب أسس التحليل التابعي (١) و كذلك في بند : الجداء السلّمي – العناصر المتعامدة – الجمل ثنائية التعامد من الفقرة الرابعة من الفصل نفسه يمكن نقلها إلى الفضاءات الخطيّة المركّبة E (الفضاءات الخطيّة فوق حقل الأعداد المركّبة).

نسمّي مجموعة جميع الداليات الخطيّة المركّبة و المعرّفة على E بالفضاء المرافق للفضاء E و نرمز لتلك المجموعة بـ E^*.

إنّ الجداء الداخلي (x,f) حيث $x \in E$ و $f \in E^*$ هو كما سبق العدد المركّب $f(x)$، و بغية الحفاظ على الخواص التي يتمتع بها الجداء الداخلي في فضاء هيلبرت علينا اعتبار أنّ (x,f) دالّياً خطيّاً بالنسبة للمتغير x و نصف خطّي بالنسبة للمتغير f، أي إنّ

$$(x,\lambda f)=\bar{\lambda}\,(x,f) \qquad (١)$$

و بنفس الطريقة تعرّف عملية الضرب بالعدد المركّب λ في E^* إذ إنّ λf يكون دالّياً خطيّاً φ معرّفاً على E بحيث إنّ

$$\varphi(x)=\bar{\lambda}\, f(x) \qquad (٢)$$

كما أنّ مفهوم المؤثّر المرافق A^* للمؤثّر A ($A:E\to E$) يُنقل أيضاً إلى الفضاءات المركّبة و يُعرّف المؤثّر A^* ($A^*:E^*\to E^*$) على أنّه المؤثّر الذي يحقق العلاقة

$$(Ax\,,f)=(x\,,A^*f) \qquad (٣)$$

أيّاً كان العنصر $x\in E$ و أيّاً كان الدالّي f من E^*.

إنّ جميع خواص المؤثّرات المرافقة تنتقل بشكل مباشر إلى الفضاءات المركّبة مع تغيير واحد و هو أنّ المبرهنة المتعلقة بتعامد العناصر الخاصّة x_0 و f_0 للمؤثّرين A و A^* حيث إنّ

$$A x_0 = \lambda_0 x_0 \quad , \quad A^* f_0 = \mu_0 f_0$$

تتحقق إذا كان $\lambda_0 \neq \overline{\mu}_0$.

إنّ الخاصّة الانعكاسية لفضاء هيلبرت و وجود الجداء الداخلي لعناصر هذا الفضاء يمكّننا من فصل صف من المؤثّرات الخطّية المتمتعة بخاصّة متميزة و هي خاصّة التناظر، و من ناحية ثانية يمكننا دراسة مؤثّرات هذا الصف بشكل أعمق من دراسة المؤثّرات الخطّية المعرّفة في فضاء باناخ. إنّ مثل هذه المؤثّرات تلعب دوراً هاماً في التحليل و كذلك في الفيزياء النظرية، و قد كُرّست لنظرية هذه المؤثّرات مؤلّفات واسعة و عديدة .

نأتي الآن إلى دراسة المؤثّرات المرافقة في فضاءات الجداء الداخلي.

§ ١. المؤثّر المرافق

Adjoint operator

ليكن X و Y فضاءي جداء داخلي، وليكن A مؤثّراً ما (ليس بالضرورة بمكان أن يكون A خطّياً أو مستمراً) معرّفاً على $D(A) \subset X$ و يأخذ قيمه في Y:

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow Y \qquad (١.١.١)$$

و لنفرض أنّ

$$\overline{D(A)} = X \qquad (١.١.٢)$$

ليكن y عنصراً ما من Y و لنفرض أنّه من أجل هذا العنصر يوجد عنصر $z \in X$ بحيث تتحقق العلاقة

$$(Ax, y) = (x, z) \qquad (١.١.٣)$$

أيـاً كـان العنـصر x مـن $D(A)$. لنرمـز بـ D^* لمجموعـة جميـع العناصـر y مـن Y و التـي مـن أجل كـل منهـا يوجـد عنـصر z فـي X بحيث تتحقق العلاقـة (١.١.٣) أي إنّ

$$D^* = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{يوجد عنصر} \quad z \in X & \text{حيث إن} \\ (Ax, y) = (x, z) & \forall x \in D(A) \end{array} \right\} \qquad (١.١.٤)$$

هكذا يتعرف لدينا مؤثر A^* : $y \xrightarrow{A^*} z$:

$$A^* : D\left(A^*\right) = D^* \subset Y \to X \qquad (١.١.٥)$$

و الذي يسمّى بالمؤثّر المرافق للمؤثّر A. باختصار، إذا وجد عنصر $z \in X$ من أجل $y \in Y$ و بحيث يكون

$$(Ax, y) = (x, z) \qquad (١.١.٦)$$

من أجل جميع العناصر $x \in D(A)$ فإننا نقول إنّ

$$y \in D(A^*) \quad , \quad A^* y = z \qquad (١.١.٧)$$

ستبيّن الآن أنّ المـؤثّر A^* معـرّف بـشكل جيد و فـي هـذا المـسعى سنبيّن اسـتخدام الفرض $\overline{D(A)} = X$.

لنفـرض أنّ العنـصرين y و z همـا كمـا فـي العلاقـة (١.١.٦) و لنفرض أيضاً أنّ

$$(Ax, y) = (x, w) \quad ; \quad \forall x \in D(A)$$

إنّ ذلك يعني أنّ

$$(x, z) = (x, w) \quad ; \quad \forall x \in D(A)$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ

$$(x, z - w) = 0 \quad ; \quad \forall x \in D(A)$$

و هذا يكافئ أنّ

$$z-w \perp D(A)$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ

$$z-w \perp \overline{D(A)}=X$$

و بالتالي نستنتج أنّ $z-w$ معامد لنفسه. أي إنّ $z-w=0$ و بالتالي فإنّ A^* معرف جيداً.

لنلاحظ أنّنا لم نضع شروطاً خاصّة على المؤثّر A، و قد كان A مؤثّراً كيفياً من $D(A)$ إلى Y. على الرغم من هذه الافتراضات الضعيفة على المؤثّر A سنبين أنّ المؤثّر A^* خطّي. للبرهان على ذلك علينا أن نثبت إنّ $D(A^*)$ متنوّعة خطّية و أنّ A^* يحافظ على التراكيب الخطّية. لنفرض أنّ

$$y_1 \in D(A^*) \quad , \quad y_2 \in D(A^*)$$

و أنّ

$$A^* y_1 = z_1 \quad , \quad A^* y_2 = z_2$$

من أجل المقدارين السلميين α و β يكون لدينا

$$(Ax, \alpha y_1) = \bar{\alpha}(Ax, y_1) = \bar{\alpha}(x, A^* y_1) = (x, \alpha z_1)$$
$$(Ax, \beta y_2) = \bar{\beta}(Ax, y_2) = \bar{\beta}(x, A^* y_2) = (x, \beta z_2)$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ

$$(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = (x, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

من أجل جميع العناصر x المنتمية لـ$D(A)$. و بالتالي فإنّ

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in D(A^*)$$

و

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2$$

و هو ما يثبت خطيّة المؤثّر A^*.

لنبرهن الآن على أنّ المؤثّر A^* مغلق. لتكن $\{y_n\}$ متتالية من $D(A^*)$ و بحيث إنّ

$$z_n = A^* y_n \to z \quad , \quad y_n \to y$$

بذلك يكون علينا أن نبرهن على أنّ $y \in D(A^*)$ و أنّ $A^* y = z$.

من أجل كل عدد n لدينا

$$(A x , y_n) = (x , A^* y_n) = (x , z_n)$$

و بالتالي فإنّ

$$\lim_{n \to \infty} (A x , y_n) = \lim_{n \to \infty} (x , z_n)$$

و باستخدام استمرارية الجداء الداخلي نجد أنّ

$$(A x , y) = (x , z)$$

من أجل جميع النقاط x من $D(A)$ و بالتالي فإنّ

$$A^* y = z \quad , \quad y \in D(A^*)$$

الأمر الذي يثبت أنّ المؤثّر A^* مغلق. هكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

مبرهنـــــة (١) : إذا كـــان X و Y فـضاءي جـداء داخلـــي و كـــان A مـؤثّراً مــا $A : D(A) \subset X \to Y$ و كانـت سـاحة تعريفـه $D(A)$ كثيفـة فـي X فإنّ المؤثّر المرافق A^* يكون مؤثراً خطّياً و مغلقاً.

لنذكر هنا بعض الخصائص التي تتمتع بها المؤثّرات المرافقة. ليكن A و B مؤثّرين معرّفين في X و ساحة تعريف كل منهما كثيفة في X و أنّ ساحة قيمهما متوضـعة فـي Y. إنّ الـصعوبة الوحيـدة فـي إثبـات أيّـة خاصّـة مـن الخـصائص التـي سنذكرها هنا تنحصر في إثبات تساوي ساحات تعريف المؤثّرات المرافقة.

١) أياً كان المقدار السلمي α من £ فإنّ $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

٢) إذا كان $A < B$ (أي إنّ B تمديد للمؤثر A و هذا يعني أنّ $D(A) \subset D(B)$ و أنّ $B|_{D(A)} = A$) فإنّ $B^* < A^*$.

٣) $A^* + B^* < (A+B)^*$ (هذا يستدعي $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$).

٤) $B^* A^* < (AB)^*$.

٥) أياً كان المقدار السلّمي α من £ فإنّ $(A + \alpha I)^* = A^* + \overline{\alpha} I$.

بغية توضيح طريقة إثبات هذه العلاقات سنستعرض برهان الخاصة ٣) .

البرهان: لنفرض أنّ $x \in D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ و أنّ $y \in D(A^*+B^*) = D(A^*) \cap D(B^*)$.

لنستعرض الآن

$$\begin{aligned}((A+B)x,y) &= (Ax,y)+(Bx,y)\\ &= (x,A^*y)+(x,B^*y)\\ &= \left(x,(A^*+B^*)y\right)\end{aligned}$$

و هكذا فإنّ $y \in D(A^*+B^*)$

و إنّ $(A+B)^*y = (A^*+B^*)y$

و هذا ما يثبت الخاصة ٣).

نأتي الآن لإيجاد المؤثّر المرافق لمؤثّر خطّي و محدود في فضاء هيلبرت، ليكن H فضاء هيلبرت (المركّب) و ليكن A مؤثّراً خطّياً و محدوداً في H. ليكن y عنصراً مثبّتاً ما من H و لنعرّف دالّياً f_y على H بالعلاقة

$$f_y : H \to £$$
$$x \to (Ax,y)\ ;\ f_y(x) = (Ax,y)$$

من الواضح أنّ f_y دالّي خطّي و أمّا كونه محدوداً فإنّه ينتج من متراجحة كوشي – شفارتز، بتطبيق هذه المتراجحة نجد

$$\|f_y\| \le \|A\|\|y\| \qquad (١.١.٨)$$

و استناداً إلى تمثيل ريس للدالّي الخطّي في فضاء هيلبرت يمكننا التأكيد على وجود عنصر وحيد مثل $z \in H$ و بحيث إنّ

$$f_y(x) = (x,z)\ ;\ \forall x \in H \qquad (١.١.٩)$$

$$\|f_y\| = \|z\| \qquad (١.١.١٠)$$

هكذا يمكننا كتابة العلاقة (١.١.٩) على الشكل

$$(Ax, y) = (x, z) \qquad (١.١.١١)$$

بذلك نكون قد قابلنا كل عنصر y من H بعنصر z من H أيضاً. أي إنّه يتعرّف لدينا مؤثّر متعلق بالمؤثّر A نرمز له بـ A^* $(A^* : H \to H)$ بحيث إنّ $y \xrightarrow{A^*} z$ أي إنّ

$$A^* y = z$$

و بالتالي فإنّ العلاقة (١.١.١١) تكتب على الشكل

$$(Ax, y) = \left(x, A^* y\right) \qquad (١.١.١٢)$$

و هذه العلاقة محققة من أجل جميع xو y من H و هي العلاقة المعرّفة للمؤثّر المرافق A^*. لنبرهن الآن على أنّ A^* وحيد و محدود و خطّي. لنفرض أنّ A_1^* يتمتع بجميع الخواص المذكورة أعلاه. أي إنّ

$$(Ax, y) = \left(x, A^* y\right) = \left(x, A_1^* y\right) \quad ; \forall x, y \in H$$

عندئـذ يكـون لـدينا $A^* y = A_1^* y$ مـن أجـل جميـع العناصـر $y \in H$ و هـذا يعني أنّ $A^* = A_1^*$.

ليكن $A^* y_1 = z_1$ و $A^* y_2 = z_2$ حيث A مؤثّر خطّي في H. عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left(x, A^*\left(y_1 + y_2\right)\right) &= \left(Ax, y_1 + y_2\right) = \left(Ax, y_1\right) + \left(Ax, y_2\right) \\ &= \left(x, A^* y_1\right) + \left(x, A^* y_2\right) = \left(x, A^* y_1 + A^* y_2\right)\end{aligned}$$

و بما أنّ هذه العلاقة محققة من أجل أي عنصر $x \in H$ فإنّ

$$A^*\left(y_1 + y_2\right) = A^* y_1 + A^* y_2$$

و بنفس الأسلوب نبرهن على أنّ

$$A^*(\alpha x) = \alpha A^* x$$

بما أنّ

$$\mathrm{P}A^* y\ \mathrm{P} = \mathrm{P}z\ \mathrm{P} = \mathrm{P}f_y\ \mathrm{P} \le \mathrm{P}A\ \mathrm{P}\mathrm{P}y\ \mathrm{P}$$

فإنّ

$$\mathrm{P}A^*\ \mathrm{P} \le \mathrm{P}A\ \mathrm{P} \qquad (١.١.١٣)$$

من ناحية ثانية، و من أجل أي عنصرين x و y من H لدينا

$$(A^* x , y) = \overline{(y , A^* x)} = \overline{(A y , x)} = (x , A y)$$

و هذا يعني أنّ

$$(A^*)^* = A^{**} = A \qquad (١.١.١٤)$$

كما وجدنا أعلاه فإنّ A^{**} يكون خطيّاً و محدوداً و يحقق المتراجحة

$$\| A^{**} \| \leq \| A^* \|$$

و بالتالي فإنّ

$$\| A \| \leq \| A^* \| \qquad (١.١.١٥)$$

و بمقارنة (١.١.١٣) و (١.١.١٤) نجد أنّ

$$\| A \| = \| A^* \|$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ

١) $(A+B)^* = A^* + B^*$

٢) $(A \cdot B)^* = B^* A^*$

انظر الحالتين ٣) و ٤) المذكورتين أعلاه بالنسبة للمؤثر A الكيفي.

٣) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad ; \forall \lambda \in \mathbb{C}$

مبرهنة (٢) : إذا كان A مؤثراً خطيّاً و محدوداً في H فإنّ

$$\| A^* A \| = \| A \|^2$$

البرهان: بما أنّ

$$\| A^* A \| \leq \| A^* \| \| A \| = \| A \| \| A \| = \| A \|^2$$

و أنّ

$$\| A \|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \| A x \| \right)^2 = \sup_{\|x\|=1} \| A x \|^2$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x)$$

$$\le \sup_{\|x\|=1} \|A^*Ax\| \|x\| = \|A^*A\|$$

نجد المطلوب.

سنستعرض الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنة (٣): ليكن T مؤثراً خطياً و ليكن T^{-1} موجوداً و لتكن ساحتا تعريفهما $D(T)$ و $D(T^{-1})$ كثيفتين في الفضاء H، أي إنّ المؤثرين T^* و $(T^{-1})^*$ موجودان، عندئذ تتحقق العلاقة

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \qquad (١.١.١٦)$$

البرهـــان: لـيكن f عنـصراً مـا مــن $D(T)$ و g عنـصراً مـا مـن $D\left((T^{-1})^*\right)$، عندئذ يكون

$$(f, g) = \left(T^{-1}Tf, g\right) = \left(Tf, (T^{-1})^* g\right)$$

و هذه المساواة تبين بأنّ

$$(T^{-1})^* g \in D(T^*)$$

و أنّ

$$T^*(T^{-1})^* g = g \qquad (١.١.١٧)$$

من ناحية ثانية إذا كان f عنصراً من $D(T^{-1})$ و h عنصراً من $D(T^*)$ فإنّ

$$(f, h) = \left(TT^{-1} f, h\right) = \left(T^{-1} f, T^* h\right)$$

و من هذا ينتج أنّ

$$T^* h \in D\left((T^{-1})^*\right)$$

و أنّ

$$(T^{-1})^* T^* h = h \qquad (١.١.١٨)$$

إنّ العلاقتين (١.١.١٧) و (١.١.١٨) تبينان أنّ

$$\left(T^*\right)^{-1}=\left(T^{-1}\right)^*$$

ملاحظة: كنّا قد عرّفنا المؤثّر المرافق A^* للمؤثّر $A\in\mathscr{L}\left(E_x,E_y\right)$ حيث E_x و E_y فضاءا باناخ على أنّه $A^*:E_y^*\to E_x^*$ و الذي يقابل كل دالّي $f\in E_y^*$ بالدالّي $A^*f=f_0\,A$. بكلام آخر إنّ الدالي $A^*f\in E_x^*$ يعمل وفق القاعدة

$$(A^*f)(x)=f\,(A\,x)$$

بالرغم من أنّ تعريف المؤثّر المرافق في نظرية فضاءات هيلبرت شكلياً مغاير لتعريف المؤثّر المرافق في فضاءات باناخ إلا أنّه في واقع الأمر نحن أمام حالة خاصّة من ذلك التعريف. في الواقع، إذا طابقنا كل عنصر $y\in H$ مع الدالّي الخطّي المولّد به و المعرّف على H : $y(x)=(x,y)$ فإنّ التعريف

$$(A\,x\,,y)=(x\,,A^*y)$$

يكتب في الصيغة المألوفة على الشكل

$$(A^*y)(x)=y\,(A\,x)$$

المـؤثّر المترافـق ذاتيـاً (*selfadjoint operator*): نقـول عـن المـؤثّر الخطّـي و المحـدود A إنّـه مترافـق ذاتيـاً (أو **مـؤثّر هيرميتـي** *Hermitian Operator*) إذا كان $A=A^*$.

لنلاحظ أنّه إذا كان المؤثّر A مترافقاً ذاتياً و كان λ عدداً حقيقاً فإنّ λA يكون مترافقاً ذاتياً و إذا كان A و B مترافقين ذاتياً فإنّ المؤثّر $A+B$ يكون مترافقاً ذاتياً، أمّا المؤثّر $A\cdot B$ فإنّه يكون مترافقاً ذاتياً إذا و فقط إذا كان المؤثّران A و B تبادليين. أخيراً، من السهل البرهان على أنّه إذا كانت متتالية المؤثّرات المترافقة ذاتياً $\{A_n\}$ متقاربة إلى المؤثّر A بانتظام في فضاء المؤثّرات الخطّية المحدودة أو نقطياً في ذلك الفضاء فإنّ المؤثّر A يكون أيضاً مترافقاً ذاتياً.

مثال (١): لتكن $\{e_1,e_2\}$ قاعدة متعامدة منظّمة في المستوي العقدي £ وليكن T مؤثّراً في £ : $T:£\to£$ و لنفرض أنّ $(a_{i\,j})$ هي المصفوفة الموافقة

لهذا المؤثّر بالنسبة للقاعدة المذكورة. و لنبرهن على أنّ مصفوفة المؤثّر المرافق T^* تكون $(\overline{a}_{j\,i})$.

لنفرض أنّ مصفوفة المؤثّر T^* هي $\left(b_{i\,j}\right)$.باستخدام العلاقة المعرّفة للمؤثّر المرافق

$$(T\,x\,,y\,)=(x\,,T^*y\,)$$

و بفرض أنّ

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\quad,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

نجد أنّ

$$\left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

و منه

$$\left(\begin{pmatrix}a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2\\a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}\,y_1+b_{12}\,y_2\\b_{21}\,y_1+b_{22}\,y_2\end{pmatrix}\right)$$

و بالتالي فإنّ

$$\begin{aligned}&a_{11}\,x_1\,\overline{y}_1+a_{12}\,x_2\,\overline{y}_1+a_{21}\,x_1\,\overline{y}_2+a_{22}\,x_2\,\overline{y}_2=\\&\qquad=x_1\,\overline{b}_{11}\,\overline{y}_1+x_1\,\overline{b}_{12}\,\overline{y}_2+x_2\,\overline{b}_{21}\,\overline{y}_1+x_2\,\overline{b}_{22}\,y_2\end{aligned}$$

و من هذه العلاقة، المحققة من أجل جميع x و y من £ نجد أنّ

$$a_{11}=\overline{b}_{11}\quad,\quad a_{12}=\overline{b}_{21}\quad,\quad a_{21}=\overline{b}_{12}\quad,\quad a_{22}=\overline{b}_{22}$$

و بالتالي فإنّ $(b_{i\,j})=(\overline{a}_{j\,i})$.

إذا كان E_n فضاءً وحدياً ذا n بعداً، فإنّه يمكننا النظر إليه كفضاء مماثل لفضاء هيلبرت المنتهي البعد و عندئذ يمكن مطابقة المؤثّرات الخطّية مع المصفوفات $(a_{i\,k})$ و التي عناصرها أعداد مركّبة. إنّ المؤثّر المرافق للمؤثر $(a_{i\,k})$ يكون $(\overline{a}_{k\,i})$ و يكون المؤثّر مترافقاً ذاتياً إذا كانت المصفوفة هيرميتية، أي إنّ عناصرها تحقق العلاقة

$a_{ik} = \overline{a}_{ki}$. في حالة المصفوفة الحقيقية (a_{ik}) يؤول شرط الترافق الذاتي إلى تناظر المصفوفة.

مثال (٢): ليكن المؤثّر A معرّفاً في الفضاء $L^2[0,1]$ بالعلاقة

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

إنّ المؤثّر A خطّي و مستمر و يطبق الفضاء المركّب $L^2[0,1]$ في نفسه، لذلك فإنّه لإيجاد المؤثّر المرافق A^* : $A^* : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ نأخذ عنصراً كيفياً $y = y(t)$ من الفضاء $L^2[0,1]$ و عندئذ يكون

$$(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t) \cdot \overline{y(t)}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau)\,d\tau \right) \overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 \int_0^t x(\tau)\,\overline{y(t)}\,d\tau\,dt$$

و بمعادلة موضعي المكاملة نجد أنّ

$$(Ax, y) = \int_0^1 x(t) \left(\overline{\int_t^1 y(\tau)\,d\tau} \right) dt = \int_0^1 x(t)\,\overline{A^* y(t)}\,dt$$

$$= (x, A^* y) \qquad ; \quad \forall x, y \in L^2[0,1]$$

و بالتالي فإنّ المؤثّر المرافق A^* يتعرف بالعلاقة

$$(A^* y)(t) = \int_t^1 y(\tau)\,d\tau \qquad ; \forall y \in L^2[0,1]$$

بمقارنة المؤثّرين A و A^* نجد أنّ A ليس مترافقاً ذاتياً

مثال (٣): من أجل مؤثّر فريدهولم في الفضاء $L^2[0,1]$ ذي النّواة $K(t,s)$ يكون المؤثّر المرافق هو مؤثّر فريدهولم ذو النّواة $\overline{K(s,t)}$ و أمّا شرط الترافق الذاتي فيكون

$$K(t,s)=\overline{K(s,t)}$$

و في الحالة التي تكون فيها النّواة حقيقية فإنّ الشرط الأخير يؤول إلى التناظر، أي إنّ النّواة متناظرة.

مثال (٤): لنستعرض في الفضاء $L^2[0,1]$ المؤثّر A الذي يقابل التابع $x(t)$ من $L^2[0,1]$ بالتابع $tx(t)$ من نفس الفضاء. أي إنّ المؤثّر A معرّف بالعلاقة

$$Ax(t)=tx(t) \quad ; \ \forall x(t)\in L^2[0,1]$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ هذا المؤثّر مترافق ذاتياً.

مثال (٥): (مؤثّر الضرب بتابع مستمر) ليكن المؤثّر T_k معرّفاً في الفضاء $L^2[0,1]$ بالعلاقة

$$(T_k g)(t)=k(t)\cdot g(t)$$

من أجل أي تابع $k(t)\in C[0,1]$ و أي تابع $g(t)$ من الفضاء $L^2[0,1]$، و لنبرهن على أنّ

$$(T_f)^*=T_{\bar{f}} \quad ; \forall f(t)\in C[0,1]$$

ليكن g و h عنصرين من $L^2[0,1]$ و ليكن $k=(T_f)^*h$ عندئذ و استناداً لتعريف الجداء الداخلي يكون

$$(T_f g,h)=(g,k)$$

و بالتالي فإنّ

$$\int_0^1 f(t)\cdot g(t)\cdot \overline{h(t)}dt=\int_0^1 g(t)\cdot \overline{k(t)}dt$$

إنّ هذه المساواة تتحقق إذا كان

$$\overline{k(t)}=\overline{h(t)}\cdot f(t)$$

أو

$$k(t)=h(t)\cdot \overline{f(t)}$$

و استناداً لوحدانية المؤثّر المرافق نجد أنّ

$$\left(T_f\right)^* h = k = \overline{f} \cdot h$$

و بالتالي فإنّ

$$(T_f)^* = T_{\overline{f}}$$

مثال (٦): ليكن المؤثّر S معرّفاً في الفضاء l_2 بالعلاقة

$$S\left(x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}\right) = \left(0, x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}\right)$$

من أجل أي عنصر $x \in l_2$. يسمّى المؤثّر S **بمؤثّر الإزاحة أحادية الجانب**، و لنوجد المؤثّر S^*.

بفرض أنّ $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ عنصران من l_2 و أنّ $z = \{z_n\} = S^* y$ يكون لدينا

$$\left(Sx, y\right) = \left(x, S^* y\right) = \left(x, z\right)$$

أو

$$\left(\left(0, x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}\right), \left(y_1, y_2, y_3, \mathrm{K}\right)\right) = \left(\left(x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}\right), \left(z_1, z_2, z_3, \mathrm{K}\right)\right)$$

و بالتالي فإنّ

$$x_1 \overline{y}_2 + x_2 \overline{y}_3 + x_3 \overline{y}_4 + \mathrm{L} = x_1 \overline{z}_1 + x_2 \overline{z}_2 + x_3 \overline{z}_3 + \mathrm{L}$$

إذا كان $y_2 = z_1$ و $y_3 = z_2$ و $y_4 = z_3$ و ... فإنّ المساواة الأخيرة تتحقق من أجل جميع $x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}$. استناداً لوحدانية المؤثّر المرافق يكون

$$S^*\left(y_1, y_2, y_3, \mathrm{K}\right) = \left(z_1, z_2, z_3, \mathrm{K}\right) = \left(y_2, y_3, y_4, \mathrm{K}\right)$$

§ ٢. الداليّات الخطية مرّة و نصف المرّة

Sesquilinear functionals

تعريف (١): ليكن H فضاء هيلبرت فوق حقل الأعداد المركّبة، نسمّي التطبيق F:

$$F : H \times H \to £$$

الذي يقابل كل زوج من العناصر $\langle x , y \rangle \in H \times H$ بعدد مركب نرمز له بـ $F\langle x , y \rangle$ بدالّي خطّي مرّة و نصف المرّة إذا حقق ذلك التطبيق الشروط الآتية:(*)

١) $F\langle \lambda x_1 + \mu x_2 , y \rangle = \lambda F\langle x_1 , y \rangle + \mu F\langle x_2 , y \rangle$

٢) $F\langle x , \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \overline{\lambda} F\langle x , y_1 \rangle + \overline{\mu} F\langle x , y_2 \rangle$

إنّ الشرط الأول يعني أنّ الدالّي خطّي بالنسبة لمتغيره الأول و أمّا الشرط الثاني فيعني أنّه جمعي بالنسبة لمتغيره الثاني (نصف خطّي).

من الواضح أنّ الجداء الداخلي هو دالي خطّي مرّة و نصف المرّة. ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن A مؤثراً خطّياً في هذا الفضاء $A : H \to H$ عندئذ يكون التطبيق

$$\langle x , y \rangle \to (A x , y)$$

دالياً خطّياً مرّة و نصف المرّة.

إذا كان F دالياً خطّياً مرّة و نصف المرّة فإنّ الدالي G المعرّف بالعلاقة

$$G\langle x , y \rangle = \overline{F\langle y , x \rangle}$$

يكون خطّياً مرّة و نصف المرّة، و إذا كان $G = F$ أي إنّه إذا كان

$$F\langle x , y \rangle = \overline{F\langle y , x \rangle}$$

من أجل جميع x و y من H فإنّ الدالّي F يسمّى بدالّي خطّي مرّة و نصف المرّة **متناظر**. نسمّي الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة F **موجباً** إذا كان

$$F\langle x , x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H \tag{١.٢.١}$$

أمّا إذا تحققت المتراجحة تماماً (كان الطرف الأيسر أكبر من الصفر تماماً) من أجل $x \neq 0$ فإنّ F **موجباً تماماً** أو **موجباً تحديداً** (*strictly positive or positive definite*). من الواضح أنّ الجداء الداخلي موجب تحديداً و متناظر.

(*) يسمّى هذا الدالّي في بعض الكتب بدالي ثنائي الخطّية (*bilinear functional*).

تعريف (٢) : نسمّي $F\langle x, x\rangle$ حيث F دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة بالصيغة التربيعية الموافقة للدالّي F (*quadratic form*) و نرمز لذلك بـ $\hat{F}(x)$. أي إنّ

$$\hat{F}(x) = F\langle x, x\rangle \qquad (١.٢.٢)$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ

$$F\langle x, y\rangle = \hat{F}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \hat{F}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) + \qquad (١.٢.٣)$$
$$+ i\,\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x+iy)\right) - i\,\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x-iy)\right)$$

استناداً إلى هذه العلاقة يمكننا أن نتوقع أنّه بمعرفة الصيغة التربيعية المرتبطة بدالّي خطّي مرّة و نصف المرّة يتعرّف الدالي الخطي مرّة و نصف المرّة بشكل وحيد. بكلام آخر إذا كان F_1 و F_2 دالّيين خطّيين مرّة و نصف المرّة و كانت $\hat{F}_1$ و $\hat{F}_2$ الصيغتين التربيعيتين الموافقتين لهما و كان $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ فإنّ $F_1 = F_2$. إنّ إثبات ذلك يتم باستخدام العلاقة (١.٢.٣).

مبرهنة (١): إذا كان F دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و كانت $\hat{F}$ الصيغة التربيعية الموافقة لـ F فإنّ F يكون متناظراً إذا و فقط إذا كانت $\hat{F}$ حقيقية القيم.

البرهان: لنفرض أولاً أنّ F متناظر، أي إنّ

$$F\langle x, y\rangle = \overline{F\langle y, x\rangle}$$

عندئذ يكون لدينا

$$\hat{F}(x) = F\langle x, x\rangle = \overline{F\langle x, x\rangle} = \overline{\hat{F}(x)}$$

و هو ما يثبت لزوم الشرط. من ناحية ثانية لنفرض أنّ $\hat{F}(x)$ حقيقي و لنعرّف

$$G\langle x, y\rangle = \overline{F\langle y, x\rangle}$$

عندئذ نجد أنّ

$$\hat{G}(x) = G\langle x, x\rangle = \overline{F\langle x, x\rangle} = \overline{\hat{F}(x)} = \hat{F}(x)$$

و هذا ما يثبت بدوره أنّ $G = F$.

ليكن A مؤثّراً خطّياً و محدوداً و مترافقاً ذاتياً في فضاء هيلبرت H و لنستعرض الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة

$$F\langle x , y \rangle = (A x , y) = (x , A y) = \overline{(A y , x)} = \overline{F\langle y , x \rangle}$$

أي إنّ F دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة و متناظر على $H \times H$. واستناداً للمبرهنة (١) يكون $(A x , x)$ حقيقياً. و بالعكس، إذا كان $(A x , x)$ حقيقياً فإنّ A يكون مترافقاً ذاتياً. في الواقع لنستعرض الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة

$$F\langle x , y \rangle = (A x , y)$$

بتطبيق المبرهنة (١) نجد أنّه على F أن يكون متناظراً و ذلك لأنّ الصيغة التربيعية الموافقة له حقيقية القيم و أنّ تناظر $(A F , x)$ يكافئ الترافق الذاتي للمؤثّر A. هكذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (٢): الشرط اللازم و الكافي كي يكون المؤثّر A المعرّف في فضاء هيلبرت H مترافقاً ذاتياً هو أن يكون $(A x , x)$ حقيقياً مهما يكن العنصر x من H.

الدالّيات الخطّية مرّة و نصف المرّة المحدودة

Bounded Sesquilinear Functionals

تعريف (٣): نقول عن الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة F إنّه محدود إذا وجد عدد موجب مثل k، بحيث إنّ

$$\left| F\langle x , y \rangle \right| \le k \, \|x\| \, \|y\| \quad ; \forall \, x , y \in H \qquad (٤.٢.١)$$

من أجل الدالّيين الخطّيين مرّة و نصف المرّة F_1 و F_2 و من أجل $\alpha \in £$ نعرّف $F_1 + F_2$ و αF نقطياً على النحو الآتي:

$$(F_1 + F_2)\langle x , y \rangle = F_1\langle x , y \rangle + F_2\langle x , y \rangle$$

$$(\alpha F)\langle x , y \rangle = \alpha F\langle x , y \rangle$$

إنّ صف الداليّات الخطّية مرّة و نصف المرّة المعرّفة على H يشكل فضاءً خطيّاً.

لتكن K مجموعة جميع الثوابت الموجبة k و المحققة للعلاقة (١.٢.٤) عندئذ من أجل الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة و المحدود F يمكن تعريف النظيم الآتي

$$\|F\| = \inf_{k \in K} k \qquad (١.٢.٥)$$

لنأخذ مجموعة جميع الصيغ التربيعية الموافقة للداليّات الخطّية مرّة و نصف المرّة و المعرّفة على H ، و لتكن $\hat{F}$ صيغة تربيعية موافقة خاصّة، نعرفها بحيث تكون صيغة تربيعية موافقة و محدودة و ذلك إذا وجد ثابت موجب مثل k بحيث إنّ

$$\left|\hat{F}(x)\right| \le k \|x\|^2 \quad ; \forall\, x \in H \qquad (١.٢.٦)$$

لتكن K مجموعة جميع الثوابت k المحققة للعلاقة (١.٢.٦) عندئذ يمكن تعريف نظيم على هذه المجموعة بالعلاقة

$$\|\hat{F}\| = \inf_{k \in K} k \qquad (١.٢.٧)$$

يمكننا الآن إيجاد نتائج مماثلة لمجموعة النتائج المرتبطة بالداليّات الخطّية المحدودة و بالمؤثّرات الخطّية المحدودة.

من أجل الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة و المحدود F يكون

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left|F\langle x, y\rangle\right| \qquad (١.٢.٨)$$

و من أجل الصيغة التربيعية الموافقة و المحدودة يكون

$$\|\hat{F}\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\hat{F}(x)\right| \qquad (١.٢.٩)$$

إنّ البرهانين على هاتين الحالتين متماثلان تماماً لذلك فإنّنا سنقتصر فقط على إثبات (١.٢.٨).

البرهان: بسهولة يمكن التأكد من أنّ $\|F\|$ بحد ذاته محدود من أجل F بمفهوم العلاقة (١.٢.٤) و ذلك باستخدام العلاقة (١.٢.٥)، و هكذا من أجل $\|x\|=\|y\|=1$ يكون

$$|F\langle x,y\rangle| \le \|F\|\,\|x\|\,\|y\| = \|F\|$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x,y\rangle| \le \|F\| \qquad (١.٢.١٠)$$

ليكن الآن x و y عنصرين مختلفين عن الصفر، عندئذ يكون لدينا:

$$|F\langle x,y\rangle| = \left|F\langle \frac{x}{\|x\|}\|x\|, \frac{y}{\|y\|}\|y\|\rangle\right| =$$

$$= \left|F\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\rangle\right| \|x\|\,\|y\|$$

$$\le \left(\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x,y\rangle|\right) \|x\|\,\|y\|$$

لذلك و باعتبار K كما في العلاقة (١.٢.٥) يكون

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x,y\rangle| \in K$$

و بالتأكيد فإنّ

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x,y\rangle| \ge \inf_{k\in K} k = \|F\| \qquad (١.٢.١١)$$

بمقارنة العلاقتين (١.٢.١٠) و (١.٢.١١) نحصل على العلاقة (١.٢.٨).

مبرهنة (٣): الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة يكون محدوداً، إذا وفقط إذا كانت $\hat{F}$ محدودة، أكثر من ذلك إذا كان F و $\hat{F}$ محدودين فإنّ

$$\|\hat{F}\| \le \|F\| \le 2\|\hat{F}\| \qquad (١.٢.١٢)$$

البرهان: إذا كان F محدوداً فإنّ

$$|\hat{F}(x)| = |F\langle x,x\rangle| \le \|F\|\,\|x\|\,\|x\|$$

و هذا بدوره لا يؤدّي فقط إلى محدودية $\hat{F}$ بل يؤدّي أيضاً إلى أنّ

$$\left\|\hat{F}\right\| \le \left\|F\right\| \qquad (1.2.13)$$

لنفرض الآن أنّ $\hat{F}$ محدود، استناداً إلى العلاقة (1.2.3) نجد أنّ

$$F\langle x, y\rangle = \hat{F}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) - \hat{F}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) +$$
$$+ i\,\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x+iy)\right) - i\,\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x-iy)\right)$$

باستخدام متراجحة المثلث من أجل القيم المطلقة و كون $\hat{F}$ محدوداً نجد أنّ

$$\left|F\langle x, y\rangle\right| \le \frac{1}{4}\left\|\hat{F}\right\| \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)$$

باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع يأخذ الطرف الأيمن الشكل

$$\frac{1}{4}\left\|\hat{F}\right\| \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\right) = \left\|\hat{F}\right\| \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

و بالتالي فإنّه من أجل $\|x\| = \|y\| = 1$ يكون لدينا

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left|F\langle x, y\rangle\right| \le 2\left\|\hat{F}\right\| \qquad (1.2.14)$$

إنّ حقيقة أنّ

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left|F\langle x, y\rangle\right|$$

منتهٍ تؤدّي إلى أنّ F محدود و أنّ (1.2.14) تؤدّي إلى أنّ

$$\left\|F\right\| \le 2\left\|\hat{F}\right\|$$

و بذلك يتم إثبات المبرهنة.

إنّ العلاقة (1.2.12) تأخذ شكلاً أكثر قوة إذا افترضنا أنّ F متناظر و هذا ما سنثبته الآن في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (٤): إذا كان F دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و محدوداً و متناظراً فإنّ

$$\|F\| = \|\hat{F}\|$$

البرهان: استناداً إلى العلاقة (١.٢.٣)و المبرهنة (١) نجد أنّ

$$|\operatorname{Re} F\langle x, y\rangle| \leq \left|\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right| + \left|\hat{F}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)\right|$$

و بما أنّ $\hat{F}$ محدود فإنّ الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة يكون أصغر أو يساوي لِ

$$\frac{1}{4}\|\hat{F}\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\|\hat{F}\|\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

و بالتالي فإنّه إذا كان $\|x\| = \|y\| = 1$ فإنّ

$$|\operatorname{Re} F\langle x, y\rangle| \leq \|\hat{F}\| \qquad (١.٢.١٥)$$

بكتابة $F\langle x, y\rangle$ بالصيغة القطبية:

$$F\langle x, y\rangle = re^{i\theta}$$

و بوضع $\alpha = e^{-i\theta}$ نجد أنّ

$$\alpha F\langle x, y\rangle = r = |F\langle x, y\rangle|$$

و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (١.٢.١٥) نجد أنّ

$$\|\hat{F}\| \geq |\operatorname{Re} F\langle \alpha x, y\rangle| \geq |\operatorname{Re} \alpha F\langle x, y\rangle| = |F\langle x, y\rangle|$$

و هذه العلاقة محققة من أجل جميع x و y التي من أجلها $\|x\| = \|y\| = 1$ و بالتالي فإنّ

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x, y\rangle| \leq \|\hat{F}\| \qquad (١.٢.١٦)$$

و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (١.٢.١٢) نأتي إلى المطلوب.

سنعرض الآن نتيجة من أجل الداليّات الخطيّة مرّة و نصف المرّة، هي تعميم لمتراجحة كوشي – شفارتز في الجداء الداخلي.

مبرهنة (٥): ليكن F دالّياً خطّياً مرّة نصف المرّة و موجباً و معرّفاً على فضاء هيلبرت H، عندئذ يكون

$$\left|F\langle x,y\rangle\right|^2 \le \hat{F}(x)\cdot\hat{F}(y) \quad ; \forall\, x,y \in H$$

البرهان: لنلاحظ أنّ المتراجحة تتحقق تلقائياً إذا كان $F\langle x,y\rangle = 0$، لذلك سنفرض أنّ $F\langle x,y\rangle \ne 0$، عندئذ من أجل أي عددين مركّبين α و β يكون لدينا

$$0 \le \hat{F}(\alpha x+\beta y) = F(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y) =$$
$$= \alpha\overline{\alpha}\hat{F}(x) + \alpha\overline{\beta}F\langle x,y\rangle + \overline{\alpha}\beta F\langle y,x\rangle + \beta\overline{\beta}\hat{F}(y) =$$
$$= \alpha\overline{\alpha}\hat{F}(x) + \alpha\overline{\beta}F\langle x,y\rangle + \overline{\alpha}\beta\overline{F\langle x,y\rangle} + \beta\overline{\beta}\hat{F}(y)$$

و ذلك لأنّ F موجب. لنضع الآن $\alpha = t$ حيث t عدد حقيقي و لنأخذ

$$\beta = \frac{F\langle x,y\rangle}{\left|F\langle x,y\rangle\right|}$$

فنجد أنّ $\quad \left|F\langle x,y\rangle\right| = \overline{\beta}F\langle x,y\rangle \quad ; \; \beta\overline{\beta} = 1$

و بالتالي فإنّ $\quad 0 \le t^2\hat{F}(x) + 2t\left|F\langle x,y\rangle\right| + \hat{F}(y)$

من أجل أي عدد حقيقي t. تبعاً لذلك يحقق المميز العلاقة:

$$4\left|F\langle x,y\rangle\right| - 4\hat{F}(x)\cdot\hat{F}(y) \le 0$$

و هذا ما يثبت صحة العلاقة المطلوبة.

مبرهنة (٦): الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه.

البرهان: في الواقع، إنّ

$$\left|F\langle x,y\rangle - F\langle x_0,y_0\rangle\right| =$$
$$= \left|F\langle x-x_0, y-y_0\rangle + F\langle x-x_0, y_0\rangle + F\langle x_0, y-y_0\rangle\right| \le$$
$$\le \|F\|\left(\|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\|\right)$$

و بما أنّ الطرف الأيمن يسعى إلى الصفر عندما $x \to x_0$ و $y \to y_0$ فإنّ الدالّي F مستمر.

مبرهنة (٧): إذا حقق التابع السلّمي ذو القيم المركّبة $\omega\langle x,y\rangle$ الشروط الآتية:

$$1°)\; \omega\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\omega\langle x_1,y\rangle + \alpha_2\omega\langle x_2,y\rangle$$

٢°) $\omega\langle x,\beta_1 y_1+\beta_2 y_2\rangle=\overline{\beta}_1\,\omega\langle x,y_1\rangle+\overline{\beta}_2\,\omega\langle x,y_2\rangle$

٣°) $\omega\langle x,x\rangle\le C\,\|x\|^2$

٤°) $|\omega\langle x,y\rangle|=|\omega\langle y,x\rangle|$

حيث C ثابت و x و x_1 و x_2 و y و y_1 و y_2 عناصر كيفية من H و α_1 و α_2 و β_1 و β_2 أعداد مركّبة كيفية، فإنّ ω يكون دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و نظيمه يحقق العلاقة

$$\|\omega\|\le C$$

البرهان: استناداً للخاصتين (1^o و (2^o يمكن التأكد مباشرة من أنّ

$$\omega\langle x,y\rangle+\omega\langle y,x\rangle=\frac{1}{2}\left(\omega\langle x+y\;,x+y\rangle-\omega\langle x-y\;,x-y\rangle\right)$$

و هذا يعني أنّ

(١.٢.١٧)

$$|\omega\langle x,y\rangle+\omega\langle y,x\rangle|\le\frac{C}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)=$$
$$=C\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

ليكن $\|x\|\le 1$ و $\|y\|\le 1$ و $y=\lambda z$ حيث إنّ λ وسيط نحدده فيما بعد و $|\lambda|=1$. عندئذ العلاقة (١.٢.١٧) تعطينا:

$$|\overline{\lambda}\;\omega\langle x,z\rangle+\lambda\;\omega\langle z,x\rangle|\le 2C \qquad (١.٢.١٨)$$

بفرض أنّ $\omega\langle x,z\rangle\ne 0$ و بالتوافق مع (4^o و بفرض أنّ

$$\omega\langle x,z\rangle=|\omega\langle x,z\rangle|\,e^{i\alpha}\quad,\quad\omega\langle z,x\rangle=|\omega\langle z,x\rangle|\,e^{i\beta}$$

تأخذ العلاقة (١.٢.١٨) الشكل

$$|\omega\langle x,z\rangle|\cdot\left|\overline{\lambda}e^{i\alpha}+\lambda e^{i\beta}\right|\le 2C$$

لنفرض الآن أنّ $\lambda=e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}$ فنجد أنّ

$$\bar{\lambda} e^{i\alpha} + \lambda e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

و هذا يعني أنّ

$$\left|\omega\langle x , z \rangle\right| \le C \quad ; \ (\|x\| \le 1 \ , \ \|z\| \le 1)$$

و هذا ما يثبت المبرهنة إذ أنه من أجل $0 = \left|\omega\langle x , z\rangle\right|$ تكون تلك العلاقة محققة أيضاً.

الشكل العام للدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة في فضاء هيلبرت H

مبرهنة(٨) : إذا كان $F\langle x , y \rangle$ دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و محدوداً في H فإنّه يوجد مؤثّر مثل A خطّي و محدود في H و يكون من أجله

$$F\langle x , y \rangle = (A x , y) \qquad (١.٢.١٩)$$

و هذا المؤثّر يتعرّف بشكل و حيد بالدالّي F. بالعكس إذا كان A مؤثّراً خطّياً و محدوداً في فضاء هيلبرت المركب H و كان

$$F\langle x , y \rangle = (A x , y)$$

فإنّ F يكون دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و محدوداً و أنّ $\|F\| = \|A\|$.

البرهان: لنبرهن أولاً على وحدانية المؤثّر A. إذا كان من أجل أي عنصرين x و y من H

$$F\langle x , y \rangle = (A_1 x , y) \quad ; \quad F\langle x , y \rangle = (A_2 x , y)$$

عندئذ من أجل أي عنصرين x و y من H يكون لدينا

$$(A_1 x , y) = (A_2 x , y)$$

أو

$$(A_1 x - A_2 x , y) = 0$$

و منه نجد أنّ $A_1 x - A_2 x = 0$ و بالتالي فإنّ $A_1 = A_2$.

ليكن F دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة و محدوداً. لنثبت العنصر x فنجد أنّ

$$G_x(y)=\overline{F\langle x,y\rangle}$$

دالّي خطّي معرّف على H، كما أنّه محدود و ذلك لأنّ

$$|G_x(y)|=|F\langle x,y\rangle|\le\|F\|\,\|x\|\,\|y\|$$

و منه يكون

$$\|G_x\|\le\|F\|\,\|x\| \tag{1.2.20}$$

و بما أنّ G_x دالّي خطّي و محدود فإنّه استناداً إلى مبرهنة ريس حول الشكل العام للدالّي الخطّي في فضاء هيلبرت، يوجد عنصر مثل z يتعرّف بشكل وحيد بالدالّي $\overline{F\langle x,y\rangle}$ و من أجله يكون $G_x(y)=\overline{F\langle x,y\rangle}=(y,z)$ و

$$\|G_x\|=\|z\| \tag{1.2.21}$$

و هكذا نجد أنّ

$$G_x(y)=F\langle y,x\rangle=(y,z)$$

بذلك يقابل كل عنصر $x\in H$ بعنصر z و بالتالي يتعرّف لدينا مؤثّر A بالعلاقة $z=Ax$ و يكون لدينا

$$.F\langle x,y\rangle=(Ax,y)$$

لنبرهن الآن على أنّ المؤثّر A خطّي و محدود. بما أنّ

$$G_{x_1+x_2}(y)=\big(y,A(x_1+x_2)\big)$$

و أنّ

$$\begin{aligned}G_{x_1+x_2}(y)&=\overline{F\langle x_1+x_2,y\rangle}=\\&=\overline{F\langle x_1,y\rangle}+\overline{F\langle x_2,y\rangle}=G_{x_1}(y)+G_{x_2}(y)=\\&=(y,Ax_1)+(y,Ax_2)=(y,Ax_1+Ax_2)\end{aligned}$$

مهما يكن $y\in H$ و بالتالي فإنّ

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$$

أي إنّ A جمعي. بالمثل تماماً يبرهن على أنّ A متجانس، و هكذا فإنّ A مؤثّر خطّي. لإثبات محدودية المؤثّر A نستخدم العلاقتين (١.٢.٢٠) و (١.٢.٢١) اللّتين تؤدّيان إلى أنّ

$$\|G_x\| = \|z\| = \|A\,x\| \leq \|F\|\,\|x\|$$

أي إنّ A مؤثّر محدود.

نأتي الآن لإثبات القسم الثاني من المبرهنة. ليكن

$$F\langle x\,,y\rangle = (A\,x\,,y)$$

و باستخدام متراجحة كوشي – شفارتز نجد أنّ

$$|F\langle x\,,y\rangle| = |(A\,x\,,y)| \leq \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$$

و هذا يعني أنّ F دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة و محدود و أنّ

$$\|F\| \leq \|A\| \qquad (١.٢.٢٢)$$

و بما أنّه من أجل أي عنصر x لدينا

$$\|A\,x\|^2 = (A\,x\,,A\,x) = F\langle x\,,A\,x\rangle = |F\langle x\,,A\,x\rangle| \leq \|F\|\,\|x\|\,\|A\,x\|$$

بالتالي فإنّ

$$\|A\,x\| \leq \|F\|\,\|x\|$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ

$$\|A\| \leq \|F\| \qquad (١.٢.٢٣)$$

و بالتالي فإنّ

$$\|A\| = \|F\|$$

و هو المطلوب.

هكذا نكون قد أثبتنا أنّ فضاء الدالّيات الخطّية مرّة و نصف المرّة و المحدودة و المعرّفة على فضاء هيلبرت H إيزومتري لفضاء المؤثّرات الخطّية

المحدودة $\mathscr{L}[H,H]$. إذا كان $A \in \mathscr{L}[H,H]$ مؤثراً ما فإنّه يمكننا الحديث عن دالّي خطي مرّة و نصف المرّة و محدود، موافق لـ A نحصل عليه وفق النهج المتبع في المبرهنة (٨). سنبين الآن على أنّه بدلالة المؤثّر الخطي المحدود A و الدالّي F الموافق له، الخطّي مرّة و نصف المرّة و المحدود يمكننا كتابة عبارة جديدة لتظيم المؤثّر A (انظر العلاقة (١.٢.٨)) :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |F\langle x , y\rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(A\,x , y)| \qquad (١.٢.٢٤)$$

المؤثّر المرافق: ليكن A مؤثّراً خطيّاً، محدوداً و معرّفاً على الفضاء H إنّ العبارة

$$(x , A\,y)$$

تمثّل دالّياً خطّياً مرّة و نصف المرّة بالنسبة لـ x و y و نظيم هذا الدالّي يساوي $\|A\|$. وفقاً لما برهنّا عليه أعلاه يوجد مؤثّر خطّي و محدود و وحيد مثل A^* معرّف على H و من أجله يكون

$$(x , A\,y) = (A^* x , y) \qquad (١.٢.٢٥)$$

من أجل أي عنصرين x و y من H، كما أنّ $PA\,P = PA^*\,P$. و هكذا فإنّ كل مؤثّر خطّي و محدود A و معرّف على H ($A \in \mathscr{L}[H,H]$) يقابل بمؤثّر مماثل A^* له نفس النظيم و بحيث إنّه من أجل أي عنصرين x و y من H تتحقق المساواة (١.٢.٢٥). يسمّى المؤثر A^* **بالمؤثّر المرافق** للمؤثر A. بسهولة يمكن التأكد من أنّ المؤثّر $A^{**} = (A^*)^*$ هو المؤثر A .

إذا كان المؤثّر A مساوياً لمرافقه، أي إنّ $A = A^*$ فإنّ المؤثّر A يسمّى **مؤثّراً مترافقاً ذاتياً**، و في هذه الحالة يكون الجداء الداخلي $(A\,x , x)$ من أجل أي عنصر $x \in H$ حقيقياً.

لنفرض الآن أنّ المؤثّر A محدود و مترافق ذاتياً و أنّ الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة المحدود و الموافق له هو F. بما أنّ A مترافق ذاتياً فإنّ F يكون متناظراً (انظر المبرهنتين (١) و (٢)) و استناداً إلى المبرهنة (٤) يكون

$$\|F\| = \|\hat{F}\|$$

حيث $\hat{F}$ الصيغة التربيعية الموافقة لـ F. يمكننا حساب $\|\hat{F}\|$ بالعلاقة (١.٢.٩) :

$$\|\hat{F}\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\hat{F}(x)\right|$$

لذلك فإنّه من أجل المؤثّر المترافق ذاتياً A يكون

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \left|(Ax, x)\right| \qquad (١.٢.٢٦)$$

بفرض أنّ

$$\Lambda = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad , \quad \lambda = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

فإنّه يكون لدينا

$$\|A\| = \max\left\{\left|(\Lambda)\right|, \left|\lambda\right|\right\}$$

ليكن الدالّي الخطّي مرّة و نصف المرّة المتناظر و المحدود F موجباً، أي إنّ

$$F\langle x, x\rangle \geq 0 \;\; ; \forall\, x \in H$$

عندئذ يحقق المؤثّر A ($A = A^*$) الخطّي و المحدود الذي يتعرّف بذاك الدالّي العلاقة

$$(Ax, x) \geq 0 \qquad (١.٢.٢٧)$$

نسمّي المؤثّر الخطّي و المحدود و المترافق ذاتياً A و المحقق للعلاقة (١.٢.٢٧) مؤثّراً موجباً و نكتب ذلك على الشكل $A \geq 0$.

لنلاحظ أنّه إذا كان A مؤثّراً موجباً، فإنّه من أجل أي عنصرين x و y من H تتحقق العلاقة

$$\left|(Ax, y)\right|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y) \qquad (١.٢.٢٨)$$

هذه العلاقة هي نتيجة مباشرة للمبرهنة (٥).

§ ٣. التقارب الضعيف لمتتاليات الدالّيات و العناصر

Weak convergence of sequences of

ليكن E فضاءً خطّياً منظماً. نقول إنّ متتالية الدالّيات الخطّية $\{f_n\}$ من E^* **متقاربة بضعف** إلى الدالّي الخطّي $f_0 \in E^*$، إذا كان $f_n(x) \to f_0(x)$ من أجل أي عنصر $x \in E$. بذلك نجد أنّ مفهوم التقارب الضعيف للدالّيات الخطّية يتطابق مع مفهوم التقارب النقطي للمؤثّرات. باستخدام مفهوم التقارب الضعيف يمكننا صياغة المبرهنتين (١) و (٢) المذكورتين في الصفحة (٢١١) من كتاب التحليل التابعي (١) على الشكل:

مبرهنة (١): متتالية الدالّيات الخطّية $\{f_n\}$ المتقاربة بضعف في نفسها تتقارب بضعف إلى دالّي خطّي ما f_0.

مبرهنة (٢): الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب متتالية الدالّيات الخطّية $\{f_n\}$ بضعف إلى الدالّي الخطّي f_0 هو

١) أن تكون المتتالية $\{\|f_n\|\}$ محدودة.

٢) $f_n(x) \to f_0(x)$ من أجل كل عنصر x من مجموعة ما M و التي التراكيب الخطّية لعناصرها كثيفة في كل مكان في E.

لنلاحظ أيضاً أنّه من المبرهنة (١) تنتج التمامية الضعيفة للفضاء E^* المرافق لفضاء باناخ E.

التقارب الضعيف لعناصر الفضاء: لنعرّف الآن مفهوم التقارب الضعيف لعناصر من الفضاء الخطّي المنظم.

ليكن E فضاء خطّياً منظّماً، و لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء E و x_0 عنصراً من نفس الفضاء. إذا كان $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ عندما $n \to \infty$ من أجل أي دالّي $f \in E^*$ فإنّنا نقول إنّ المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب بضعف إلى العنصر x_0 و نكتب ذلك على الشكل

$$x_n \xrightarrow{w} x_0$$

و نقول أيضاً إنّ x_0 هي نهاية ضعيفة للمتتالية $\{x_n\}$.

لنبرهن على أنّ كل متتالية لا يمكن لها أن تتقارب بضعف إلى نهايتين مختلفتين.

لنفرض أنّ $x_n \xrightarrow{w} x_0$ و $x_n \xrightarrow{w} \zeta_0$، أي إنّه من أجل كل دالّي $f \in E^*$ لدينا

$$f(x_n) \longrightarrow f(x_0) \quad \text{و} \quad f(x_n) \longrightarrow f(\zeta_0)$$

و بالتالي فإنّ $f(x_0) = f(\zeta_0)$ أو

$$f(x_0 - \zeta_0) = 0$$

و من هذا ينتج أنّ $x_0 = \zeta_0$.

بسهولة نرى أنّه إذا كانت $x_n \xrightarrow{w} x_0$ فإنّ أية متتالية جزئية منها $\{x_{n_k}\}$ تتقارب بضعف إلى x_0.

تبعاً لما ذكرنا فإنّ التقارب بالنظيم في الفضاء E يسمّى **تقارباً قوياً**. من الواضح أنّه من التقارب القوي للمتتالية $\{x_n\}$ إلى العنصر x_0 ينتج التقارب الضعيف لهذه المتتالية إلى نفس العنصر. و أمّا العكس فغير صحيح. أي إنّه يمكن أن تكون المتتالية متقاربة بضعف إلى عنصر ما، إلا أنّها لا تتقارب بقوة إلى ذلك العنصر. على سبيل المثال، لنستعرض في الفضاء $L^2[0,1]$ متتالية العناصر $\{\sin n\pi t\}$. لنضع $x_n = \sin n\pi t$، فيكون لدينا من أجل أي دالّي خطّي

$$f(x_n) = \int_0^1 \sin n\pi t \;\; \alpha(t) \;\; dt$$

حيث $\alpha(t)$ تابع جمعي من الدرجة الثانية ($\alpha(t) \in L^2[0,1]$) يتعرّف بشكل وحيد بالدالّي f. من الواضح أنّ $f(x_n)$ هو معامل فورييه للتابع $\alpha(t)$ بالنسبة للجملة $\{\sin n\pi t\}$ بالتالي فإنّ $f(x_n) \longrightarrow 0$ عندما $n \to \infty$. من ذلك ينتج أنّ $x_n \xrightarrow{w} 0$. من ناحية ثانية، بسهولة نجد أنّ $\{x_n\}$ لا تتقارب بقوة. في الحقيقة

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 (\sin n\pi t - \sin m\pi t)^2 \, dt = 1$$

في خلاف ذلك تتحقق المبرهنة الآتية:

مبرهنة (١): في الفضاء المنتهي البعد يتطابق التقارب القوي مع التقارب الضعيف.

يكفي أن نبرهن عَلى أنّه من التقارب الضعيف لمتتالية إلى عنصر ما في الفضاء المنتهي البعد ينتج التقارب القوي إلى ذلك العنصر. ليكن E فضاء منتهي البعد و لتكن $\{x_n\}$ متتالية من ذلك الفضاء و $x_n \xrightarrow{w} x_0$. بما أنّ الفضاء E منتهي البعد فإنّه توجد جملة مستقلة خطّياً من العناصر مثل $e_1, e_2, \ldots, e_k$ و بحيث إنّ كل عنصر $x \in E$ يكتب على الشكل

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_k e_k$$

حيث ξ_k أعداد حقيقية. لتكن

$$x_n = \xi_1^{(n)} e_1 + \xi_2^{(n)} e_2 + \cdots + \xi_k^{(n)} e_k$$

$$x_0 = \xi_1^{(0)} e_1 + \xi_2^{(0)} e_2 + \cdots + \xi_k^{(0)} e_k$$

لنستعرض الدالّي $f_i \in E^*$ و الذي من أجله $f_i(e_i) = 1$ و $f_i(e_j) = 0$ من أجل $i \neq j$. عندئذ يكون لدينا

$$f_i(x_n) = \xi_i^{(n)} \quad , \quad f_i(x_0) = \xi_i^{(0)} \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

و بما أنّ $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ من أجل أي دالي خطي f، فإنّ $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x_0)$ أي إنّ

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

و بما أنّ التقارب بالإحداثيات في الفضاء المنتهي البعد يؤدّي إلى التقارب بالنظيم فإنّ $x_n \to x_0$ بقوة.

ملاحظة: توجد فضاءات لا نهائية البعد يتطابق فيها التقارب الضعيف مع التقارب القوي، على سبيل المثال الفضاء l فضاء المتتاليات $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ التي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$.

لقد برهن أ. م. كاديتس **النتيجة الهامة الآتية:** إذا كان الفضاء E قابلاً للفصل، فإنّه يمكن تعريف نظيم مكافئ بحيث إنّ التقارب الضعيف $x_n \xrightarrow{w} x_0$ و $\|x_n\| \to \|x_0\|$ يؤدّي إلى التقارب القوي لـ $\{x_n\}$ إلى x_0 بالنسبة للنظيم الجديد.

مبرهنة (٢): إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بضعف إلى x_0، فإنّه توجد متتالية من التراكيب الخطيّة $\sum_{k=1}^{k_n} C_k^{(n)} x_k$ متقاربة بقوة إلى x_0.

بكلام آخر، إنّ x_0 تنتمي إلى المتنوّعة الخطيّة المغلقة المولّدة بالعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

لنفرض العكس، أي إنّ x_0 لا تنتمي للمتنوّعة الخطيّة المغلقة $\mathcal{L}$ المولدة بالعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$، عندئذ و استناداً إلى النتيجة الثانية لمبرهنة هان – باناخ (انظر كتاب أسس التحليل التابعي (١) صفحة (٢١٧)) يوجد دالّي خطّي مثل $f \in E^*$ بحيث إنّ $f(x_0) = 1$ و $f(x_n) = 0$ مع $n = 1, 2, \ldots$. إنّ هذا يعني أنّ $f(x_n) \not\to f(x_0)$ و الأمر الذي يناقض التقارب الضعيف للمتتالية $\{x_n\}$ إلى x_0.

مبرهنة (٣): ليكن A مؤثّراً خطّياً محدوداً و معرّفاً على الفضاء الخطّي المنظم E_x و مجموعة قيمه متوضّعة في الفضاء الخطّي المنظم E_y.

إذا كانت المتتالية $\{x_n\} \subset E_x$ متقاربة بضعف إلى $x_0 \in E_x$ فإنّ المتتالية $\{A x_n\} \subset E_y$ تتقارب بضعف إلى $A x_0 \in E_y$.

لنأخذ دالّياً ما $\varphi \in E_y^*$ عندئذ يكون

$$\varphi(A x_n) = f(x_n)$$

حيث $f \in E_x^*$. بالمثل فإنّ $\varphi(A x_0) = f(x_0)$ و بما أنّ $x_n \xrightarrow{w} x_0$ فإنّ:

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

أي إنّ

$$\varphi(A x_n) \longrightarrow \varphi(A x_0)$$

و بما أنّ φ دالّي خطّي كيفي من E_y^* فإنّ

$$A x_n \xrightarrow{w} A x_0$$

بذلك نجد أنّ كل مؤثّر خطّي و محدود ليس مستمراً فقط بقوة و إنّما أيضاً هو مستمر بضعف.

مبرهنة (٤): إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بضعف إلى x_0، فإنّ نظائم عناصر هذه المتتالية تكون محدودة.

سنستعرض العناصر x_n $(n=1,2,K)$ كعناصر من الفضاء E^{**}، عندئذ يعني التقارب الضعيف للمتتالية $\{x_n\}$ إلى العنصر x_0 أنّ المتتالية $\{x_n\}\subset E^{**}$ تتقارب إلى الدالّي $x_0\in E^{**}$ من أجل جميع العناصر $f\in E^*$. عندئذ و استناداً إلى مبرهنة باناخ – شتينهاوس تكون متتالية النظائم $\{\|x_n\|\}$ محدودة و هو المطلوب.

ملاحظة: إذا كانت x_0 نهاية ضعيفة للمتتالية $\{x_n\}$، فإنّ

$$\|x_0\|\leq \varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$$

علماً بأنّ وجود النهاية الدنيا المحدودة ينتج من المبرهنة السابقة.

في الواقع، لنفرض أنّ

$$\|x_0\|> \varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$$

عندئذ يوجد عدد مثل c بحيث إنّ

$$\|x_0\|>c> \varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$$

و بالتالي توجد متتالية مثل $\{x_{n_i}\}$ بحيث إنّ

$$\|x_0\|>c>\|x_{n_i}\|$$

عندئذ يوجد دالّي خطّي مثل f_0 بحيث إنّ $\|f_0\|=1$ و

$$f_0(x_0)=\|x_0\|>c$$

عندئذ يكون

$$f_0(x_{n_i}) \le \|f_0\|\|x_{n_i}\| = \|x_{n_i}\| < c$$

من أجل جميع الأعداد i . بالتالي فإنّ

$$f_0(x_n) \not\longrightarrow f_0(x_0)$$

الأمر الذي يناقض الشرط $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

من الممكن أن تتحقق المتراجحة في بعض الحالات بقوة:

$$\|x_0\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

كما في **المثال الآتي:**

لنستعرض في الفضاء $L^2[0,1]$ التوابع

$$x_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t$$

فيكون لدينا $\|x_n\| = 1$ و بالتالي فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$$

من ناحية أخرى، من أجل أي دالّي خطّي f نجد أنّ

$$f(x_n) = \sqrt{2}\int_0^1 \alpha(t)\sin n\pi t\, dt = \sqrt{2}\, c_n$$

حيث إنّ c_n هي معاملات فوريية للتابع $\alpha(t) \in L^2[0,1]$. بذلك نجد أنّ $f(x_n) \longrightarrow 0$ عندما $n \to \infty$ من أجل أي دالي f. أي إنّ $x_n \xrightarrow{w} x_0$ و بالتالي فإنّ $x_0 = 0$ و $\|x_0\| = 0 < \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$.

مبرهنة (٥): الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ بضعف إلى x_0 هو

١) أن تكون المتتالية $\{\|x_n\|\}$ محدودة.

٢) أنّ $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ من أجل أي دالّي f من مجموعة ما من الدالّيات Γ و التي التراكيب الخطّية لعناصرها كثيفة في كل مكان في E^* .

هذه المبرهنة ما هي إلا حالة خاصّة من المبرهنة (٢) الواردة في هذه الفقرة، للتأكد من ذلك ينبغي ملاحظة أنّ التقارب الضعيف للمتتالية $E \supset \{x_n\}$ إلى العنصر $x_0 \in E$ يكافئ التقارب الضعيف لهذه المتتالية كمتتالية من الدالّيات الخطّية المعرّفة على E^* إلى العنصر x_0 و الذي بدوره هو دالّي خطّي على E^*.

التقارب الضعيف في بعض الفضاءات:

التقارب الضعيف في l_p:

مبرهنة (٦): الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ و التي عناصرها $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\}$ من l_p بضعف إلى العنصر $x_0 = \left\{\xi_i^{(0)}\right\}$ من الفضاء l_p هو

١) أن تكون المتتالية $\{\|x_n\|\}$ محدودة.

٢) أن $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$ عندما $n \to \infty$ من أجل جميع i (بشكل عام ليس بانتظام).

من أجل البرهان علينا ملاحظة أنّ التراكيب الخطّية للعناصر

$$f_i = \{0,0,\ldots,0,1,0,\ldots\} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots$$

كثيفة في كل مكان في الفضاء $l_q = l_p^*$ و استناداً إلى المعيار العام (المبرهنة (٥)) يكون الشرط اللازم و الكافي للتقارب الضعيف $x_n \xrightarrow{w} x_0$ هو أن يتحقق الشرط الأول و أن يكون

$$f_i(x_n) = \xi_i^{(n)} \xrightarrow{w} f_i(x_0) = \xi_i^{(0)}$$

من أجل أي i.

بهذه الصورة يمكننا القول بأنّ التقارب الضعيف في l_p يعني التقارب بالإحداثيات مقروناً بمحدودية النظائم.

التقارب الضعيف في L^P:

مبرهنة (٧): الشرط اللازم و الكافي كي تتقارب المتتالية

$$\{x_n(t)\} \subset L^p[0,1]$$

بضعف إلى العنصر $x_0(t) \in L^p[0,1]$ هو

١) أن تكون المتتالية $\{\|x_n\|\}$ محدودة.

٢) أنّ $\forall t \in [0,1]$ $\int_0^t x_n(\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_0^t x_0(\tau)\,d\tau$.

إنّ الشرط الأول يتطابق مع الشرط الأول من المعيار العام. لنستعرض الشرط الثاني. لنضع

$$\alpha_\tau(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t \le \tau \\ 0 & ; \quad \tau < t \le 1 \end{cases}$$

عندئذ تكون التراكيب الخطّية للتوابع $\alpha_\tau(t)$، أي المجاميع

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\alpha_{\tau_i}(t) - \alpha_{\tau_{i-1}}(t)\right)$$

حيث $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1$ كثيفة في كل مكان في $L^q[0,1] = L^{p^*}[0,1]$ (*) بالتالي فإنه كي تتقارب $\{x_n(t)\}$ إلى $x_0(t)$ بضعف

$$x_n(t) \xrightarrow{w} x_0(t)$$

يلزم و يكفي أن يتحقق الشرط الأول و أنّه عندما $n \to \infty$ يكون

$$\int_0^1 x_n(t)\ \alpha_\tau(t)\ dt \longrightarrow \int_0^1 x_0(t)\ \alpha_\tau(t)\ dt$$

أو

$$\int_0^\tau x_n(t)\ dt \longrightarrow \int_0^\tau x_0(t)\ dt$$

من أجل أي نقطة $\tau \in [0,1]$.

(*) انظر المرجع *Natanson I.p. Theory of Functions of real variable* الصفحة (١٨٧) الطبعة الروسية عام (١٩٧٤).

التقارب الضعيف في فضاء هيلبرت:

بما أنّ أي دالّي خطّي $f(x)$ في فضاء هيلبرت H هو جداء داخلي، فإنّ التقارب الضعيف للمتتالية $\{x_n\}$ إلى x_0 يعني أنه من أجل أي عنصر $y \in H$ يكون

$$(x_n, y) \longrightarrow (x_0, y)$$

وجدنا سابقاً أنّه إذا كانت $x_n \longrightarrow x_0$ و $y_n \longrightarrow y_0$ فإنّ $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$ أي إنّ الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه بالنسبة للتقارب القوي. إذا كانت $x_n \xrightarrow{w} x_0$ و $y_n \xrightarrow{w} y_0$ فإنّه في الحالة العامة $(x_n, y_n) \not\longrightarrow (x_0, y_0)$.

على سبيل المثال إذا كانت

$$x_n = y_n = e_n$$

حيث $\{e_n\}$ متتالية متعامدة – منظمة ما فإنّ $e_n \xrightarrow{w} 0$ وذلك لأنّه أياً كان العنصر $h \in H$ فإنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (h, e_n) \right|^2 \le (h, h)$$

و بالتالي فإنّ

$$\lim_{n \to 0} (e_n, h) = 0$$

أي إنّ المتتالية $\{e_n\}$ تتقارب بضعف إلى الصفر.

من ناحية ثانية لدينا

$$(e_n, e_n) = \|e_n\|^2 = 1 \not\longrightarrow 0 = (0,0)$$

في خلاف ذلك أياً كانت $x_n \longrightarrow x_0$ و $y_n \xrightarrow{w} y_0$ فإنّ $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$. في الواقع، في هذه الحالة تكون النظائم $\|y_n\|$ محدودة، ليكن

$$M = \sup_n \| y_n \|$$

و عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &\le |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \le \\ &\le M \, \| x_n - x_0 \| + |(x_0, y_n - y_0)|\end{aligned}$$

إنّ الحدين في الطرف الأيمن يسعيان إلى الصفر. لنلاحظ أخيراً تحقق المبرهنة:

مبرهنة (٨): إذا كانت متتالية الأشعّة $\{x_n\}$ متقاربة بضعف إلى الشّعاع x_0 و كان

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \| x_0 \|$$

فإنّ

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0$$

أي إنّ المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب بقوة إلى x_0.

كنا قد استعرضنا في كتاب أسس التحليل التابعي (١) التقارب المنتظم و التقارب النقطي لمتتاليات مؤثّرات من $\mathscr{L}(X,Y)$. و سنعرّف هنا التقارب القوي و التقارب الضعيف لمتتالية مؤثّرات $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(X,Y)$.

نقول إنّ المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة بقوة إلى المؤثّر A و نرمز لذلك بـ

$$A_n \xrightarrow{s} A$$

إذا كان من أجل أي عنصر $x \in X$:

$$A_n x \longrightarrow A x$$

حيث إنّ التقارب الأخير هو تقارب بالنسبة للنظيم في Y. نقول إنّ المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة بضعف إلى المؤثّر A و نكتب ذلك على الشكل

$$A_n \xrightarrow{w} A$$

إذا تقاربت متتالية العناصر $\{A_n x\} \subset Y$ من أجل أي عنصر $x \in X$ بضعف إلى العنصر $A x$. بكلام آخر تتقارب المتتالية $\{A_n\}$ بضعف إلى A ($A_n \xrightarrow{w} A$) إذا كان

$$f(A_n x) \longrightarrow f(A x)$$

من أجل أي عنصر $x \in X$ و أي دالّي $f \in Y^*$. بتعبير أخير نقول إنّ $A_n \xrightarrow{w} A$ إذا كان $A_n x \xrightarrow{w} A x$ من أجل أي عنصر $x \in X$.

هكذا فإنّه توجد ثلاثة أشكال لتقارب متتالية $\{A_n\}$ من المؤثّرات الخطّية المحدودة و المعرفة على X و التي تأخذ قيمها في Y.

ليكن $X = Y = H$. إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثّرات الخطّية المحدودة المعرّفة في كل مكان في H متقاربة بانتظام، فإنّه تأكيداً تكون متقاربة بقوة، و إذا كانت متقاربة بقوة فإنّها تكون متقاربة بضعف.

بمثابة تمرين للطالب يطلب البرهان على أنّه من التقارب الضعيف للمتتاليتين $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ على الترتيب إلى A و B ينتج التقارب الضعيف للمتتالية $\{A_n \mathrm{m} B_n\}$ إلى $A \mathrm{m} B$ إلا أنّه لا ينتج التقارب الضعيف للمتتالية $\{A_n \cdot B_n\}$ إلى $A \cdot B$.

مسائل وتمارين

١. ليكن $c = \{c_n\}$ عنصراً من فضاء المتتاليات العددية m وليكن T_c مؤثراً في الفضاء l_2 معرّفاً بالعلاقة

$$T_c\left(\{x_n\}\right) = \{c_n x_n\}$$

أوجد المؤثّر المرافق .

٢. إذا كان T مؤثراً في الفضاء l_2 $(T : l_2 \longrightarrow l_2)$ معرّفاً بالعلاقة

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots)$$

فأوجد المؤثّر المرافق .

٣. ليكن H فضاء هيلبرت وليكن y و z عنصرين من H إذا كان T مؤثراً خطّياً ومحدوداً ومعرّفاً بالعلاقة

$$T(x) = (x, y)\, z$$

أثبت أن
$$T^*(w) = (w, z)\, y$$

٤. برهن صحة العلاقات الآتية:

a) $\left(R(A)\right)^{\perp} = \ker A^*$

b) $\left(R\left(A^*\right)\right)^{\perp} = \ker A$

c) $(\ker A)^{\perp} = \overline{R\left(A^*\right)}$

d) $\left(\ker A^*\right)^{\perp} = \overline{R(A)}$

حيث $R(A)$ هي مجموعة قيم المؤثّر A و $\ker A$ هي نواة المؤثّر A. أي إنّ $\ker A = \{x \in H : A x = 0\}$ و $\mathcal{L}^{\perp}$ هي المتممة المعامدة للمتنوعة الخطّية $\mathcal{L}$.

٥. إذا كـان المـؤثر A معرّفـاً فـي الفـضاء $£^{m}$ ويأخـذ قيمـه فـي $£^{m}$ ومعطـى بالمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{pmatrix}$$

أوجد المؤثر المرافق A^{*}.

٦. ليكن المؤثر A $\left(A : L^{p}[0,1] \longrightarrow L^{p}[0,1]\right)$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,\varphi=\int_{0}^{t} k(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

احسب المؤثر المرافق A^{*}.

٧. لـــــيكن $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,K)$ عنـــــصراً مـــــن l_p و لـــــيكن المؤثر A $\left(A : l_p \longrightarrow l_p\right)$ معرفاً بالعلاقة $A\,x=(0,0,0,\xi_5,\xi_6,K)$

أوجد المؤثر A^{*}.

٨. إذا كان المؤثر A معرّفاً في الفضاء $L^{2}[0,1]$ بالعلاقة

$$A\,x(t)=\begin{cases} x(2t) \; ; & 0\le t<\dfrac{1}{2} \\ 0 \; ; & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

أوجد المؤثر A^{*}.

٩. ليكن المؤثر A $\left(A : l_p \longrightarrow l_p\right)$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x=\left(\xi_1+\xi_2\,,\,\xi_1-\xi_2\,,\,\xi_3+\xi_4\,,\,\xi_4\,,\,\xi_5\,,K\right)$$

حيث $x=\left(\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\xi_3\,,K\right)$ عنصر من l_p، أوجد المؤثر A^{*}.

١٠.إذا كان $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,K)$ عنصراً من l_p وكان A معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x=(\xi_1,\xi_6,\xi_{11},\ldots)$$

أوجد المؤثر A^*.

١١.ليكن المؤثر A $\quad (A:L^2[0,1]\longrightarrow L^2[0,1])$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x(t)=x\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

أوجد المؤثر A^*.

١٢.إذا كان المؤثر A $\quad (A:L^p[0,3]\longrightarrow L^p[0,3])$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x(t)=\begin{cases} x(t) & ; \quad 0\le t<1 \\ x\left(\dfrac{t+3}{2}\right) & ; \quad 1\le t\le 3 \end{cases}$$

أوجد المؤثر A^*.

١٣.لنستعرض في الفضاء l_2 متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ $\quad (A_n:l_2\longrightarrow l_2)$ والمعرّفة بالعلاقة $n\in N$

$$A_n x=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\ldots)$$

حيث $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots)$ عنصر ما l_2.

١) برهن أن $A_n\in\mathscr{L}(l_2,l_2)$ من أجل أي عدد $n\in N$، وأنّ $\lim_{n\to\infty}A_n x=0$ من أجل $x\in l_2$.

٢) أوجد المتتالية $\{A_n^*\}$. هل صحيح أن $\lim_{n\to\infty}A_n^* x=0$ من أجل جميع العناصر المنتمية إلى l_2؟

١٤. إذا كان المؤثر A $\quad (A:L^p[0,1]\longrightarrow L^p[0,1])$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,\varphi=\int_0^t e^{is}\varphi(s)\,ds$$

احسب المؤثر A^*.

١٥.برهن ما يأتي:

١) إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $x_n \xrightarrow{w} x$ فإنّ

$$(x_n , y) \longrightarrow (x , y)$$

من أجل كل عنصر y من H.

٢) إذا كان H فضاء هيلبرت فإن $x_n \xrightarrow{w} x$ إذا وفقط إذا كان

$$(x_n , y) \longrightarrow (x , y)$$

من أجل كل عنصر y من H.

٣) إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية متعامدة في H فإنّ $x_n \xrightarrow{w} 0$ إلا أنّ $x_n \not\to 0$.

١٦. إذا كان H فضاء هيلبرت وكانت $x_n \xrightarrow{w} x$ فبيّن أنّ

$$\|x\| \le \overline{\lim_{n}} \|x_n\|$$

١٧. إذا كان $A_n \xrightarrow{S} A$ و $B_n \xrightarrow{S} B$ فبرهن أنّ $A_n + B_n \xrightarrow{S} A + B$ ثمّ برهن أنّه إذا كان $A_n \xrightarrow{S} C$ فإنّ $A = C$، وبالمثل بالنسبة للتقارب الضعيف.

١٨. إذا كان H فضاء هيلبرت وكانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات في H حيث $A \in \mathscr{L}(H,H)$ برهن أن $A_n \xrightarrow{w} A$ إذا وفقط إذا

$$(A_n x , y) \to (A x , y) \;\; ; \forall x , y \in H$$

١٩. إذا كان F دالّياً خطّياً مرّة ونصف المرّة وموجباً على H وكان $N = \{x \in H \;\; ; F^{\wedge}(x) = 0\}$ و فبرهن أنّ

$$N = \{x \in H ; F(x , y) = 0 \;\; ; \forall \; y \in H\}$$

٢٠. إذا كان H فضاء هيلبرت و كان A و B مؤثّرين في H $(A , B : H \to H)$ وبحيث إنّ

$$(A x , y) = (x , B y) \;\; ; \forall x , y \in H$$

برهن أنّ $A \in \mathscr{L}(H,H)$ و أنّ $B = A^*$.

٢١.برهن أنّ التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاء ^{n} ، متطابقان.

٢٢.تأكّد من أنّ التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاء l_2 غير متطابقين.

٢٣.هل التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاء $C^*[0,2\pi]$ متكافئان.

٢٤.ليكن $0 \in (a,b)$، وليكن δ داليّاً معرّفاً على الفضاء $C[a,b]$ بالعلاقة $\delta(x) = x(0)$، ولتكن المتتالية $\{\varphi_n(t)\}$ من الفضاء $C[a,b]$ محققة للشروط

$$a)\quad \varphi_n(t) = 0 \qquad ; \quad |t| > \frac{1}{n} \ , \varphi_n(t) \geq 0$$

$$b)\quad \int_a^b \varphi_n(t)\, dt = 1$$

برهن أنّ متتالية الداليّات

$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt \qquad ; \ \forall x \in C[a,b]$$

تتقارب بضعف إلى الدالّي δ.

الفصل الثاني

المؤثّرات الخطّية المحدودة في فضاء هيلبرت

Linear and Bounded Operators in Hilbert Space

سنعالج في هذا الفصل بعض صفوف المؤثّرات الخطّية المحدودة والمعرّفة في كل مكان في فضاء هيلبرت H، وسنتناول الخواص العامة لكل صف من تلك الصفوف وهو ما سنستخدمه في النظرية الطيفية لتلك المؤثّرات والتي سنستعرضها في الفصل الثالث من هذا الكتاب .

§ ١. المؤثّرات التامة الاستمرار (*)

Completely continuous operators

كان هيلبرت أول من لفت النظر إلى صف هام من المؤثّرات و المعروف بصف المؤثّرات التامة الاستمرار .

تعريف (١): نقول عن المؤثّر الخطّي A و المعرّف على H إنه تام الاستمرار إذا كانت صورة كل مجموعة محدودة من النقاط بالمؤثّر A مجموعة متراصة بمفهوم التقارب القوي.

من الواضح انه إذا كان المؤثّر الخطّي A تام الاستمرار فإنّه يكون محدوداً و بالتالي فهو مستمر. في الواقع، إذا كان الأمر بعكس ذلك، أي إن A غير محدود، فإنّه توجد متتالية من النقاط مثل $\{f_k\}$ من أجلها يكون

$$\|f_k\|=1 \quad ; \ k<\|Af_k\| \quad ; \ (k=1,2,3,\ldots)$$

وعندئذ لا تكون المجموعة $\{Af_k\}$ متراصة.

من الممكن إعطاء تعريف آخر للمؤثر تام الاستمرار.

(*) تعرف هذه المؤثّرات أيضا باسم المؤثّرات المتراصة (*compact operators*)

تعريف (٢): نقول عن المؤثّر الخطّي A المعرف على H إنّه تام الاستمرار إذا كانت صورة كل متتالية متقاربة بضعف وفق المؤثّر A هي متتالية متقاربة بقوة.

إن تكافؤ التعريفين ينتج مما يأتي:

توطئة (١): إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بضعف إلى x_0 وكانت متراصة فإنها تكون متقاربة بقوة.

البرهان: لنفرض العكس، أي إنّ المتتالية $\{x_n\}$ متراصة إلا أنّها ليست متقاربة بقوة. عندئذ يوجد عدد مثل $\varepsilon_0 > 0$ ومتتالية من الأدلّة n_1, n_2, K, n_k, K متزايدة وغير منتهية بحيث إنّ

$$\left\| x_{n_k} - x_0 \right\| \geq \varepsilon_0$$

وبما أن المتتالية $\{x_{n_i}\}$ متراصّة فإنها تحتوي على متتالية جزئية $\{x_{n_{ij}}\}$ متقاربة بقوة إلى عنصر ما مثل u_0 وبالتالي فهي متقاربة بضعف إلى u_0 $x_{n_{ij}} \xrightarrow{w} u_0$. من ناحية ثانية، إن $\{x_{n_{ij}}\}$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$ المتقاربة بضعف إلى x_0 وبالتالي فان $x_{n_{ij}} \xrightarrow{w} x_0$ وهذا بدوره يؤدّي إلى أن $u_0 = x_0$. هكذا يكون لدينا من جهة أولى

$$\| x_{n_{ij}} - x_0 \| \rightarrow \varepsilon_0$$

ومن جهة ثانية أنّ

$$\| x_{n_{ij}} - x_0 \| \rightarrow 0$$

وهذا تناقض وهو ما يثبت صحة التوطئة .

مبرهنة (١): صورة المتتالية بضعف بواسطة مؤثّر تام الاستمرار هي متتالية متقاربة بقوة.

البرهان: لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة بضعف إلى العنصر x_0، عندئذ تكون متتالية النظائم $\{\|x_n\|\}$ محدودة وبالتالي فإنّ $\{y_n = A x_n\}$ وفقا للتعريف (١) تكون متتالية متراصّة. من ناحية ثانية إنّ المتتالية $\{y_n = A x_n\}$ تتقارب بضعف

إلى $y_0 = A x_0$ (انظر المبرهنة (٣) من § ٣. من الفصل السابق) وهكذا تكون المتتالية $\{y_n\}$ متراصّة ومتقاربة بضعف إلى y_0. استناداً للتوطئة (١) تكون متقاربة بقوة إلى y_0 وهو المطلوب.

هكذا نجد أن التعريف (١) للمؤثّر التّام الاستمرار يحقق التعريف (٢).

لنفرض الآن أنّ $\{x_n\}$ متتالية متقاربة بضعف إلى x_0 وأنّ المتتالية صورتها وفق المؤثّر A، $\{A x_n\}$ متقاربة بقوة إلى $A x_0$. عندئذ من هذه المتتالية يمكن فصل متتالية جزئية مثل $\{A x_{n_k}\}$ متقاربة بقوة إلى $A x_0$، وبالتالي إنّ هذه المتتالية متراصّة. من ناحية ثانية إن المتتالية $\{x_n\}$ محدودة لكونها متقاربة بضعف ($\{\|x_{n_k}\|\}$ محدودة أيضاً) وصورتها وفق المؤثّر A متراصة. وهكذا نجد أنّ التعريف (٢) يحقق التعريف (١).

لنلاحظ أنّه إذا كان A مؤثّراً تام الاستمرار ومعرّفاً على فضاء هيلبرت H وكان B مؤثّراً خطّياً ومحدوداً ومعرّفاً على H فإنّ المؤثّرين AB و BA يكونان تامّي الاستمرار.

في الواقع، إنّ $B(M)$ صورة أية مجموعة محدودة $H \supset M$ بالمؤثّر B هي مجموعة محدودة، بالتالي فإنّ $A(BM)$ صورة هذه المجموعة بواسطة المؤثّر A تكون مجموعة متراصّة، هكذا تكون صورة أي مجموعة محدودة M بالمؤثّر AB هي مجموعة متراصّة وبالتالي فإنّ المؤثّر AB تام الاستمرار.

بالمثل إذا كانت M مجموعة محدودة فإنّ $A(M)$ تكون متراصّة وبما أن المؤثّر الخطّي B محدود (مستمر) فإنّ صورة المجموعة المتراصّة $A(M)$ بواسطة هذا المؤثّر هي $B(AM)$ مجموعة متراصة (انظر المبرهنة (٧) الصفحة ٢٧٩ من كتاب أسس التحليل التابعي (١)).

من المعلوم أنّ الكرة الواحدية في فضاء خطّي منظّم لانهائي البعد هي مجموعة غير متراصّة وهذا يؤدّي إلى أن المؤثّر الواحدي I $I: H \to H$ ليس تام الاستمرار (I مؤثّر خطّي ومحدود إلا أنّه ليس تام الاستمرار)، تبعاً لذلك نستنتج عدم وجود مقلوب محدود A^{-1} لمؤثّر تام الاستمرار A، بالتالي فإنّ A^{-1} ليس تام الاستمرار.

مبرهنة (٢): إذا كان المؤثِّران A و B تامي الاستمرار في الفضاء H، فإنّ المؤثِّر $(A + B)$ تام الاستمرار، كما أنّه من أجل أي مقدار سلّمي α يكون المؤثِّر αA تام الاستمرار.

البرهان: لتكن $S \subset H$ مجموعة محدودة ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من نقاط المجموعة S. بما أن S محدودة فإنّه يوجد عدد ثابت موجب مثل $M > 0$ بحيث يكون

$$\|x_n\| \le M \qquad \forall \quad n = 1,2,\ldots$$

و وفقاً لذلك تكون المتتالية $\{A x_n\}$ متراصّة وبالتالي يمكننا فصل متتالية جزئية متقاربة منها مثل $\{A x_{n_j}\}$ ولنفرض أنّ

$$A x_{n_j} \to y$$

لنستعرض الآن المتتالية $\{B x_{n_j}\}$. بما أن المؤثِّر B تام الاستمرار فإنّه من هذه المتتالية المتراصّة يمكننا فصل متتالية جزئية متقاربة ولنرمز للمتتالية الجزئية بـ $\{B x_{n_{jk}}\}$، بما أنّ $\{A x_{n_{jk}}\}$ متتالية جزئية من المتتالية الأصلية $\{A x_{n_j}\}$ المتقاربة فإنها تكون متقاربة وإلى نفس النهاية y التي تتقارب إليها المتتالية $\{A x_{n_j}\}$ وهكذا إذا كان

$$B x_{n_{jk}} \to z$$

فإنّه يكون لدينا

$$(A + B)\, x_{n_{jk}} \to y + z$$

وبالتالي فإنّ صورة المجموعة المحدودة $(A + B)(S)$ هي مجموعة متراصّة.

إنّ البرهان على أن αA، حيث α مقدار سلّمي، مؤثِّر تام الاستمرار ينتج مباشرة من التعريف.

مطلوبة

مبرهنة (٣): إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثّرات تامة الاستمرار والمعرّفة على H متقاربة بانتظام إلى مؤثّر A: $0 \to \|A_n - A\|$ عندما $n \to \infty$ فإنّ المؤثّر A يكون أيضا تام الاستمرار.

البرهان غير مطلوب

البرهان: لتكن M مجموعة محدودة في H، وليكن r ثابتاً موجباً بحيث إنّ $\|x\| \le r$ من أجل جميع العناصر $x \in M$. بما أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة بانتظام إلى A فإنّه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل n_0 بحيث إن

$$\mathrm{P}A_{n_0} - A\ \mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{r}$$

ليكن $A(M) = K$ و $A_{n_0}(M) = N$. إنّ المجموعة N هي $\varepsilon-$ شبكة للمجموعة K. في الحقيقة، لنأخذ من أجل أي عنصر $y \in K$ إحدى صوره العكسية $x \in M$ ولنضع $y_0 = A_{n_0} x$ $(A_{n_0} x \in N)$ عندئذ يكون لدينا

$$\mathrm{P}y - y_0\,\mathrm{P} = \mathrm{P}A\,x - A_{n_0}x\ \mathrm{P} \le \mathrm{P}A - A_{n_0}\ \mathrm{PP}x\ \mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{r}\cdot r = \varepsilon$$

من جهة ثانية و بما أنّ المؤثّرات A_{n_0} تامّة الاستمرار و أنّ M مجموعة محدودة فإنّ المجموعة N تكون متراصة وبالتالي فإنّ المجموعة K تمتلك من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ $\varepsilon-$ شبكة متراصّة وبالتالي فهي نفسها متراصّة. أي إنّ المؤثّر A يطبق مجموعة محدودة ما في مجموعة متراصّة وبالتالي فهو مؤثّر تام الاستمرار.

مبرهنة (٤): ليكن A مؤثّراً خطّياً ومحدوداً ومعرّفاً على H. إذا كان المؤثّر A^*A تام الاستمرار فإنّ المؤثّر A يكون تام الاستمرار.

البرهان: لتكن M مجموعة لا نهائية ومحدودة من الفضاء H $(\mathrm{P}f\ \mathrm{P} < C \quad ; \ \forall f \in M)$ ولتكن $\{f_k\}$ متتالية ما من عناصر M ولتكن صورتها بواسطة المؤثّر A^*A متراصّة. عندئذ يمكن فصل متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}$ من المتتالية الأصلية تكون من أجلها المتتالية $\{A^*A f_{n_k}\}$ متقاربة بقوة.

وبما أنّ

$\| Af_n - Af_m \|^2 =$

$$\| A f_n - A f_m \|^2 = \left(A (f_n - f_m) , A (f_n - f_m) \right) =$$

$$= \left(A^* A (f_n - f_m) , f_n - f_m \right) \leq \| A^* A f_n - A^* A f_m \| . \| f_n - f_m \|$$

$\| A^* A f_n - A^* A f_m \| . \| f_n - f_m \|$

و أنّ

$$\lim_{n,m \to \infty} \| A^* A f_n - A^* A f_m \| = 0$$

$$\| f_n - f_m \| \leq 2C$$

فإنّ

$$\lim_{n,m \to \infty} \| A f_n - A f_m \| = 0$$

أي إنّ المتتالية $\{ A f_n \}$ متقاربة وهو ما يثبت المبرهنة.

نتيجة: إذا كان المؤثّر A تام الاستمرار فإنّ المؤثّر A^* يكون تام الاستمرار.

في الحقيقة، إذا كان المؤثّر A تام الاستمرار فإنّ الجداء $A A^*$ كما ذكرنا أعلاه يكون تام الاستمرار. وبما أنّ

$$A A^* = (A^*)^* A^*$$

فإنّنا نجد بتطبيق المبرهنة (٤) مع استبدال المؤثّر A بالمؤثّر A^* أنّ A^* تام الاستمرار.

مثال (١): المؤثّر A في الفضاء $L^2 [0,1]$ والمعرّف بالعلاقة:

$$A x = y (t) = \int_0^1 k (t , s) x (s) ds$$

حيث إنّ

$$\int_0^1 \int_0^1 k^2 (t , s) dt \, ds < +\infty$$

هو مؤثّر تام الاستمرار.

لنفرض أولاً أنّ النّواة $k (t , s)$ هي تابع مستمر في المربّع $0 \leq t , s \leq 1$ ولتكن M مجموعة محدودة من عناصر الفضاء $L^2 [0,1]$ وأنّ

$$\int_0^1 x^2 (t) dt \leq r^2$$

من أجل جميع التوابع $x(t)$ المنتمية إلى M. لنستعرض الآن مجموعة التوابع

$$y(t)=\int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds \qquad ; \quad x(t)\in M$$

لنبرهن على أنّ التوابع $y(t)$ محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار، وهذا بدوره سيؤدّي إلى تراص المجموعة $\{y(t)\}$ بمفهوم التقارب المنتظم وبالتالي فإنّ $\{y(t)\}$ ستكون متراصّة بمفهوم التقارب الوسطي التربيعي (انظر أسس التحليل التابعي (١) الصفحة ٢٨٧). لدينا

$$|y(t)|=\left|\int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_0^1 k^2(t,s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^1 x^2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq k\,r$$

حيث

$$k=\max_{t,s}|k(t,s)|$$

وبالتالي فإنّ التوابع $y(t)$ محدودة بانتظام. من ناحية ثانية لدينا

$$|y(t_1)-y(t_2)|\leq\left(\int_0^1[k(t_1,s)-k(t_2,s)]^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^1 x^2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

وذلك من أجل $|t_1-t_2|<\delta$، حيث δ نختاره بحيث إنّه من أجل $|t_1-t_2|<\delta$ يكون

$$|k(t_1,s)-k(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{r}$$

إنّ التقدير $|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon$ لا يتعلق بوضع t_1,t_2 على المجال $[0,1]$ ولا يتعلق أيضا باختيار $y(t)$ من المجموعة M، تبعاً لذلك تكون مجموعة التوابع $\{y(t)\}$ متساوية الاستمرار. وهكذا نجد أن المؤثّر A تام الاستمرار في الحالة التي تكون فيها النّواة تابعاً مستمراً.

لنفرض الآن أنّ النّواة تابع جمعي من الدرجة الثانية. ولنأخذ متتالية من النّوى المستمرة $k_n(t,s)$ والمتقاربة وسطياً إلى النّواة $k(t,s)$. أي إنّ

$$\int_0^1\int_0^1 \{k(t,s)-k_n(t,s)\}^2\,dt\,ds \longrightarrow 0 \quad ; \; n\to\infty$$

لنضع
$$A_n x=\int_0^1 k_n(t,s)\,x(s)\,ds$$

فنجد أنّ
$$\|Ax-A_nx\|=\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 k(t,s)\,x(s)\,ds-\int_0^1 k_n(t,s)\,x(s)\,ds\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 \big(k(t,s)-k_n(t,s)\big)\,x(s)\,ds\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 \big(k(t,s)-k_n(t,s)\big)^2 ds\int_0^1 x^2(s)\,ds\right] dt\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\int_0^1\int_0^1 \big(k(t,s)-k_n(t,s)\big)^2 dt\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}\|x\|$$

بالتالي فإنّ
$$\|A-A_n\|\le\left\{\int_0^1\int_0^1 \big(k(t,s)-k_n(t,s)\big)^2 dt\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ومن هذا ينتج أنّ $\|A-A_n\|\to 0$ عندما $n\to\infty$. وبما أن جميع المؤثّرات تامة الاستمرار فإنّه استناداً إلى المبرهنة (٣) يكون المؤثر A تام الاستمرار.

ملاحظة: إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثّرات التّامة الاستمرار، متقاربة نقطيا، فإنّه من الممكن أن لا تكون النهاية مؤثّراً تام الاستمرار. في الواقع، لتكن $\{e_i\}$ قاعدة في H، لنستعرض المؤثّرات S_n المعرّفة بالعلاقة

$$S_n\, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

حيث إنّ
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

أي إنّ المؤثّرات S_n تطبق الفضاء H في الفضاءات المنتهية البعد E_n (*).

إن المؤثّرات $\{S_n\}$ تامة الاستمرار (انظر المسألة ٤) وعندما $n \to \infty$ تتقارب المتتالية $\{S_n\}$ نقطياً إلى المؤثّر الواحدي I والذي بدوره ليس تام الاستمرار.

تقريب المؤثّر تام الاستمرار بمؤثّرات منتهية البعد: ليكن A مؤثّراً تام الاستمرار في فضاء هيلبرت H $(A : H \to H)$ و لتكن S كرة الواحدة في H و K مجموعة العناصر من الشكل $y = A\, x$ حيث $x \in S$. بما أنّ المؤثّر A تام الاستمرار فإنّ المجموعة K متراصّة. عندئذٍ واستنادا إلى المبرهنة(٣) من الفقرة الثانية في الفصل الخامس في كتاب أسس التحليل التابعي (١)، الصفحة ٢٩٣، يمكن إيجاد مقابل كل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد مثل $n = n(\varepsilon)$ بحيث إنّ

$$\|R_n\, y\| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in K$$

بتثبيت هذا العدد n نجد

$$A\, x = y = S_n y + R_n y = S_n (A\, x) + R_n (A\, x) = A_1 x + A_2 x$$

حيث إن A_1 و A_2 مؤثّران خطّيان. تبعا لذلك نضع

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i\, e_i$$

فنجد
$$A_1 x = S_n\, y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, e_i$$

(*) يسمى المؤثر $S_n : H \to E_n$ $(\dim S_n (H) = n < \infty)$ بمؤثّر منتهي البعد.

من الواضح أنّ المؤثّر A_1 منتهي البعد (من أجل أي عنصر x ينتمي العنصر $A\,x$ إلى الفضاء المنتهي البعد الممتد على عناصر القاعدة $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

بالتالي فإنّ

$$\sup_{x \in S} \|A_2 x\| = \sup_{y \in K} \|R_n\, y\| < \varepsilon$$

ومنه ينتج أنّ

$$\|A_2\| < \varepsilon$$

هكذا فإننا نشرنا المؤثّر A تام الاستمرار في مجموع مؤثّرين، أحدهما منتهي البعد ونظيم المؤثّر الثاني لا يتجاوز عدداً معطى $\varepsilon > 0$ والذي يمكن اختياره صغيراً بقدرٍ كافٍ. تبعا لما ذكرنا يقولون إنّ المؤثّر تام الاستمرار في فضاء ذي قاعدة هو تقريباً مؤثّر منتهي البعد.

النظيم المطلق ***(Absolute norm)***: ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل وليكن A مؤثّراً خطّياً محدوداً في H $\left[A \in \mathcal{L}(H,H)\right]$. ولتكن $\{e_i\}_1^\infty$، $\{f_k\}_1^\infty$ قاعدتين ما متعامدتين – منظّمتين في H.

سنهتم بتلك الحالة التي يكون فيها

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|(Af_k, e_i)\right|^2 < \infty$$

بما أنّ (Af_k, e_i) $(i = 1,2,3,\dots)$ تمثّل عوامل فورييه للعنصر Af_k بالنسبة للقاعدة $\{e_i\}_1^\infty$ فإنّ

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|(Af_k, e_i)\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2 \qquad (٢.١.١)$$

من ناحية أخرى، لنستعرض الجداءات الداخلية $(A^* e_i, f_k) = (e_i, Af_k)$ كعوامل فورييه للعنصر $A^* e_i$ بالنسبة للقاعدة $\{f_k\}_1^\infty$ ومنه نستنتج أنّ

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|(Af_k, e_i)\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A^* e_i\|^2 \qquad (٢.١.١')$$

بمقارنة العلاقتين (٢.١.١) و (٢.١.١') نجد أنّ المقدار (المحدود أو غير المحدود)

$$\sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty}\left|\left(Af_k,e_i\right)\right|^2}=N\left(A\right) \qquad (٢.١.٢)$$

لا يتعلق باختيار القاعدتين $\{f_k\}_1^{\infty}$، $\{e_i\}_1^{\infty}$ وإنّما يتعلق فقط بالمؤثّر A. يسمّى هذا المقدار **بالنظيم المطلق** للمؤثّر A. مما ذكرنا أعلاه ينتج أنّ

$$N\left(A^*\right)=N\left(A\right) \qquad (٢.١.٣)$$

بما أنه بمثابة العنصر f_1 يمكننا أخذ أي شعاع واحدي، فإنّه استنادا إلى (٢.١.١) يكون

$$\left\|Af_1\right\|\le N\left(A\right)$$

وبالتالي فإنّ

$$\left\|A\right\|\le N\left(A\right)$$

أي إنّ النظيم العادي للمؤثّر لا يزيد عن النظيم المطلق.

بسهولة يمكن التأكد من أنّه إذا كان C مؤثّراً خطّياً محدوداً ما فإنّ

$$N\left(CA\right)\le\left\|C\right\|.N\left(A\right)$$

واستنادا إلى (٢.١.٣) يكون

$$N\left(AC\right)\le\left\|C\right\|.N\left(A\right)$$

إنّ النظيم المطلق يتمتع بالخصائص الأساسية التي يتمتع بها النظيم العادي، وفي حالة خاصّة من أجله تتحقق متراجحة المثلّث

$$N\left(A+B\right)\le N\left(A\right)+N\left(B\right)$$

في الحقيقة

$$N\left(A+B\right)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left\|Af_j+Bf_j\right\|^2}\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left\|Af_j+Bf_j\right\|\right\}^2}\le\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left\|Af_j\right\|^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left\|Bf_j\right\|^2}=$$

$$=N\left(A\right)+N\left(B\right)$$

إذا كانت النظائم المطلقة للمؤثرات $\{A_k\}_1^{\infty}$ محدودة و كانت السلسلة

$$\sum_1^{\infty} N\left(A_k\right) \leq \infty$$

متقاربة فإنّ السلسلة المؤثّرية

$$A = \sum_1^{\infty} A_k$$

تتقارب ويكون

$$N\left(A\right) \leq \sum_1^{\infty} N\left(A_k\right)$$

نترك البرهان للطالب.

بما أنّ النظيم المطلق $N\left(A\right)$ للمؤثّر A لا يتعلق باختيار القاعدتين $\{f_k\}_1^{\infty}$ و $\{e_j\}_1^{\infty}$، فإنّه يمكننا اختيارهما متماثلتين (نفس القاعدة) وعندئذ تكون الأعداد

$$\left(A e_k , e_j\right) = a_{jk} \qquad\qquad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

في تعريف النظيم المطلق ثابتة وهذه الأعداد تمثّل عندئذ عناصر المصفوفة الممثّلة للمؤثّر A في القاعدة $\{e_i\}_i^{\infty}$. (انظر التمثيل المصفوفي للمؤثرات المحدودة في فضاء هيلبرت القابل للفصل. على سبيل المثال يمكن العودة إلى كتاب:

Akhiezer N. I and Glozman I. M. ***Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*** *,P.* ٨٢

هكذا نرى أنّ المؤثّرات ذات النظائم المطلقة المحددة تشكل صفاً ضيقاً جداً هو صف المؤثّرات التي يمكن تمثيلها مصفوفياً والذي من أجله يكون

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \left|a_{jk}\right|^2 < \infty$$

مبرهنة(٥): إذا كان $N\left(A\right) < \infty$ فإنّ المؤثّر A يكون تام الاستمرار.

البرهان: لتكن $\{g_k\}_1^{\infty}$ قاعدة متعامدة - منظمة ما في H. بما أنّ

$$N(A) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \| A^{*} g_k \|^2}$$

فإنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد n_ε يكون من أجله

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^{*} g_k \|^2 < \varepsilon^2$$

لنعرف الآن مؤثراً A_ε بالعلاقة

$$A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} (Af, g_k)\, g_k$$

إنّ هذا المؤثّر معرّف في كل مكان في H وصورة أية مجموعة محدودة بواسطته هي مجموعة محدودة في فضاء منتهي البعد (عدد أبعاده n_ε) وهذه المجموعة متراصّة (استنادا إلى مبرهنة بولزانو – وايرشتراس) لذلك فإنّ A_ε تام الاستمرار وبما أنّه من أجل أي عنصر $f \in H$ لدينا

$$\| Af - A_\varepsilon f \|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \left| (Af, g_k) \right|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \left| (f, A^{*} g_k) \right|^2 \le$$

$$\le \| f \|^2 \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^{*} g_k \|^2 \le \varepsilon^2 \, \| f \|^2$$

وبالتالي فإنّ $\| A - A_\varepsilon \| \le \varepsilon$

إنّ كون A تام الاستمرار ينتج من المبرهنة الآتية.

مبرهنة(٦): إذا كان A مؤثّراً خطّياً ومحدوداً ومعرّفاً في كل مكان في H، وإذا وجد من أجل كل عدد موجب $\varepsilon > 0$ مؤثر A_ε تام الاستمرار محقق للمتراجحة

$$\| A - A_\varepsilon \| \le \varepsilon$$

فإنّ المؤثّر A يكون تام الاستمرار.

البرهان: لنأخذ متتالية الأعداد الموجبة $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$ و

لنستعرض متتالية المؤثِّرات التّامة الاستمرار الموافقة لها $A_{\varepsilon_1}, A_{\varepsilon_2}, \ldots$ والمحققة لشروط المبرهنة. لتكن M مجموعة محدودة ما من النقاط f $(\|f\| \le c)$ من الفضاء H. لنأخذ متتالية لا نهائية كيفية $\{f_k\}_1^\infty$ منتمية لـ M. استنادا للفرض يمكننا فصل متتالية جزئية من هذه المتتالية

$$f_{11}\ ,\ f_{12}\ ,\ f_{13}\ ,\ \ldots \qquad (٢.١.٤)$$

تكون صورتها بواسطة المؤثّر A_{ε_1} متتالية متقاربة. لنفصل من المتتالية (٢.١.٤) متتالية جزئية

$$f_{21}\ ,\ f_{22}\ ,\ f_{23}\ ,\ \ldots \qquad (٢.١.٥)$$

تكون صورتها بالمؤثّر A_{ε_2} متتالية متقاربة. بالاستمرار بهذه العملية نحصل على سلسلة لا نهائية من المتتاليات

$$\begin{matrix} f_{11} & , & f_{12} & , & f_{13} & , & \ldots \\ f_{21} & , & f_{22} & , & f_{23} & , & \ldots \\ f_{31} & , & f_{32} & , & f_{33} & , & \ldots \\ \ldots & , & \ldots & , & \ldots & , & \ldots \end{matrix}$$

تكون كل واحدة منها متتالية جزئية من سابقتها. إنّ صورة المتتالية القطرية $\{f_{kk}\}_1^\infty$ بواسطة كل من المؤثّرات A_{ε_i} تكون متقاربة، لنبرهن على أن صورة المتتالية القطرية $\{f_{kk}\}_1^\infty$ بواسطة المؤثّر A تكون أيضا متقاربة. بغية ذلك يكفي أن نبرهن على أنّ

$$\lim_{n,m\to\infty} \|A f_{nn} - A f_{mm}\| = 0 \qquad (٢.١.٦)$$

لدينا

$$\|A f_{nn} - A f_{mm}\| \le \|(A - A_{\varepsilon_k}) f_{nn}\| + \|(A - A_{\varepsilon_k}) f_{mm}\| +$$
$$+ \left\|A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm}\right\| \le$$
$$\le 2\,(\varepsilon_k + \|A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm}\|)$$

باختيار k كبيراً بقدر كاف يمكننا جعل الحد الأول في الطرف الأيمن صغيراً بالقدر الذي نريد. بعد ذلك يمكننا أخذ عدد N كبيراً بقدر كاف بحيث يكون الحد الثاني في الطرف الأيمن صغيراً بالقدر الذي نريد من أجل $N < n, N < m$ وهكذا نكون قد أثبتنا العلاقة (٦ .١ .٢).

§ ٢. مؤثّرات الإسقاط العامودي

Orthogonal Projections

سنبحث في هذه الفقرة في خواص مؤثّرات الإسقاط العامودي، تلك الخواص التي تتمتع بخاصة التكافؤ و كذلك سنبحث في التراكيب الخطّية لمؤثّرات الإسقاط و كذلك في جداء مؤثّري إسقاط و سنرى أنّ جداء مؤثّري إسقاط يكون مجدداً مؤثّر إسقاط إذا كان المؤثّران تبادليين.

تعريف مؤثّر الإسقاط: ليكن G فضاءً جزئياً من فضاء هيلبرت المجرد H و ليكن

$$F = H \ominus G$$

أي إنّ

$$H = G \oplus F$$

و هذا يعني أنّ كل عنصر $h \in H$ يكتب بشكل وحيد على الشكل

$$h = g + f$$

حيث $g \in G$ و $f \in F$. كنا قد سمينا الشّعاع g بمسقط الشّعاع h على الفضاء الجزئي G. نسمّي المؤثّر المعرّف على الفضاء H و الذي يقابل كل شعاع $h \in H$ بمسقطه على الفضاء الجزئي G بمؤثّر الإسقاط على G و نرمز له بالرمز P أو P_G. أي إنّ

$$g = Ph = P_G h$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ مؤثّر الإسقاط هو مؤثّر خطّي و محدود و نظيمه يساوي

الواحد. في الواقع، ليكن

$$h_1 = g_1 + f_1 \quad , \quad h_2 = g_2 + f_2$$

حيث $g_1 \, , \, g_2 \in G$ و $f_1 \, , \, f_2 \in F$ و عندئذٍ يكون

$$\alpha\, h_1 + \beta\, h_2 = (\alpha\, g_1 + \beta g_2) + (\alpha f_1 + \beta f_2)$$

$$\alpha\, g_1 + \beta g_2 \in G \quad , \quad \alpha f_1 + \beta f_2 \in F$$

$$\begin{aligned} p(\alpha\, h_1 + \beta\, h_2) &= \alpha\, g_1 + \beta\, g_2 \\ &= \alpha\, p\, h_1 + \beta\, p\, h_2 \end{aligned}$$

بما أنّ

$$\| h \|^2 = \| g \|^2 + \| f \|^2$$

فإنّ

$$\| g \| \leq \| h \| \tag{١.٢.٢}$$

و بالتالي فإنّ

$$\| P h \| \leq \| h \|$$

أي إنّ P مؤثّر محدود و إنّ

$$\| P \| \leq 1$$

إذا كان $h \in G$ فإنّ $g = h$ و بالتالي فإنّ المساواة في العلاقة (١.٢.٢) تتحقق و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ

$$\| P \| = 1$$

خواص مؤثّرات الإسقاط: من تعريف مؤثّر الإسقاط بسهولة نستنتج أنّ

١) $p^2 = p$

٢) $p^* = p$

في الحقيقة، من أجل أي عنصر $h \in H$ يكون الشّعاع $g = P\,h$ منتمياً لـ G و كذلك فإنّ $P\,g = g$. أي إنّ $P^2\,h = P\,h$ و هذا يعني أنّ

$$P^2 = P$$

للبرهـان علـى أنّ P مترافـق ذاتيـاً نأخـذ شـعاعين كيفيـين h_1 و h_2 مـن H و ليكن

$$h_1 = g_1 + f_1 \quad , \quad h_2 = g_2 + f_2$$

في هذه الحالة يكون

$$(g_1, h_2) = (g_1, g_2) = (h_1, g_2)$$

أي إنّ

$$(P\,h_1, h_2) = (h_1, P\,h_2)$$

من أجل أي عنصرين $h_1, h_2 \in H$، و هذا بدوره يعني أنّ $P^* = P$. من الخاصتين المبرهنتين ينتج أنّ مؤثّر الإسقاط P هو مؤثّر موجب(*) أي إنّ

$$(P\,h, h) \geq 0$$

في الواقع، إنّ

$$(P\,h, h) = (P^2\,h, h) = (P\,h, P^*h) = (P\,h, P\,h) \geq 0$$

سنبرهن الآن على أنّ الخاصتين (١ و٢) مميزتان للمؤثّر P.

مبرهنة (١): إذا كان P مؤثّراً خطّياً و معرّفاً على H و كان من أجل أي عنصرين h_1 و h_2 من H:

١) $(P^2\,h_1, h_2) = (P\,h_1, h_2)$

٢) $(P\,h_1, h_2) = (h_1, P\,h_2)$

فإنّه يوجد فضاء جزئي $G \subseteq H$ يكون p مؤثّر إسقاط عليه.

البرهان: لنتأكد أولاً من أنّ المؤثّر p محدود. بما أنّ

$$\| P\,h \|^2 = (P\,h, P\,h) = (P^2\,h, h) = (P\,h, h)$$

فإنّه يكون لدينا

$$\| P\,h \|^2 \leq \| P\,h \| \cdot \| h \|$$

(*) سنستعرض المؤثّرات الموجبة بالتفصيل في الفقرة الرابعة من هذا الفصل.

و بالتالي فإنّ

$$\|P h\| \leq \|h\|$$

أي إنّ المؤثّر p محدود و نظيمه لا يتجاوز الواحد.

لنرمز بـ G لمجموعة الأشعة $g \in H$ و التي من أجلها يكون

$$P g = g$$

من الواضح أنّ G متنوّعة خطّية و لنبرهن على أنّها مغلقة. أي إنّها فضاء جزئي. لتكن $g_n \in G$ $(n = 1,2,3,K)$ و لنفرض أنّ $g_n \to g$. في هذه الحالة يكون

$$g_n = P g_n$$

و هذا يعني أنّ

$$P g - g_n = P g - P g_n = P(g - g_n)$$

و منه نجد أنّ

$$\|P g - g_n\| \leq \|g - g_n\|$$

و بجعل $n \to \infty$ يكون لدينا

$$\|P g - g_n\| \leq 0$$

أي إنّ $P g = g$.

و بالتالي فإنّ $g \in G$ و هذا يثبت أنّ G متنوّعة خطّية مغلقة.

لنرمز بـ p_G لمؤثّر الإسقاط على G و علينا أن نبرهن على أنّ $P_G = P$ من أجل أي شعاع $h \in H$ يكون الشّعاع $P h = g$ منتمياً لـ G و ذلك لأنّ $P(P h) = P h$، كما أنّه للفضاء الجزئي G ينتمي الشعاع $P_G h$ و لذلك يكفي أن نبرهن على أنّ

$$(P h - P_G h, g') = 0 \quad , \left(\forall\, h \in H \;\; , \;\; g' \in G\right)$$

أو

$$(P h, g') = (P_G h, g') \quad \forall\, g' \in G$$

إنّ هذا الأمر ينتج من أنّ

$$(P h, g') = (h, P g') = (h, g')$$
$$(P_G h, g') = (h, P_G g') = (h, g')$$

ملاحظة: في نهاية هذا البند، لنلاحظ أنّه إذا كان P مؤثّر إسقاط على الفضاء الجزئي G فإنّ المؤثّر $(I - P)$ حيث I المؤثّر المطابق (الواحدي)، يكون مؤثّر إسقاط أيضاً إلا أنّه على $H \ominus G$.

العمليات على مؤثّر الإسقاط: سنبرهن في هذا البند مجموعة من القضايا البسيطة و المرتبطة بجمع و ضرب و طرح مؤثّرات الإسقاط.

مبرهنة (٢): جداء مؤثّري الإسقاط P_{G_1} و P_{G_2} هو مؤثّر إسقاط إذا و فقط إذا كان المؤثّران P_{G_1} و P_{G_2} تبادليين. أي إنّه إذا كان

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$$

و إذا تحقق ذلك فإنّ

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_G$$

حيث $G = G_1 \cap G_2$ (*)

البرهان: إذا كان الجداء $P_{G_1} P_{G_2}$ مؤثّر إسقاط فإنّ

$$P_{G_1} P_{G_2} = (P_{G_1} P_{G_2})^* = P_{G_2}^* P_{G_1}^* = P_{G_2} P_{G_1}$$

إنّ الشّعاع

$$g = P_{G_1} P_{G_2} h = P_{G_2} P_{G_1} h$$

تبعاً للتمثيل الأول ينتمي لـ G_1 و تبعاً للتمثيل الثاني ينتمي لـ G_2 و بالتالي فإنّه ينتمي للتقاطع $G_1 \cap G_2$ لهذين الفضاءين الجزئيين ومن ذلك ينتج أنّ $P_{G_1} P_{G_2} \subseteq P_{G_1 \cap G_2}$. و بما أنّ الاحتواء المعاكس واضح فإنّ المبرهنة تكون قد أثبتت في الاتجاه الأول.

لنفرض الآن أنّ $P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1} = P$

(*) إنّ كون P_{G_1} و P_{G_2} تبادليين يعني هندسياً أنّ الفضاءين الجزئيين $(G_1 \ominus (G_1 \cap G_2))$ و $(G_2 \ominus (G_1 \cap G_2))$ متعامدان.

عندئذ نجد أنّ

$$P^2=(P_{G_1}P_{G_2})^2=P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2}=P_{G_1}P_{G_2}=P$$

و

$$P^*=(P_{G_1}P_{G_2})^*=P_{G_2}^*P_{G_1}^*=P_{G_2}P_{G_1}=P_{G_1}P_{G_2}=P$$

و هذه العلاقات تبين أنّ المؤثّر $P_{G_1}P_{G_2}$ يحقق الخاصتين (١ و (٢ من المبرهنة (١) من البند السابق و بالتالي فهو مؤثّر إسقاط.

نتيجة: الفضاءان الجزئيان G_1 و G_2 يكونان متعامدين إذا و فقط إذا كان

$$P_{G_1}P_{G_2}=0$$

في الواقع، إذا كان $P_{G_1}P_{G_2}=0$ فإنّ $P_{G_2}P_{G_1}=0$ و بالتالي فإنّه من أجل أي عنصرين $g_1\in G_1$ و $g_2\in G_2$ يكون لدينا

$$(g_1,g_2)=(P_{G_1}g_1,P_{G_2}g_2)=(P_{G_2}P_{G_1}g_1,g_2)=0$$

أي إنّ $G_1\perp G_2$. بالعكس إذا كان $G_1\perp G_2$ فإنّه من أجل أي عنصر $h\in H$ يكون $P_{G_2}h\in G_2$ و بالتالي فإنّ

$$P_{G_1}P_{G_2}h=0\quad;\forall h\in H$$

مبرهنة (٣): مجموع مؤثّري الإسقاط P_{G_1} و P_{G_2}: $P_G=P_{G_2}+P_{G_1}$ هو مؤثّر إسقاط إذا وفقط إذا كان $P_{G_1}P_{G_2}=0$ أي إذا كان الفضاءان الجزئيان G_1 و G_2 متعامدين و في هذه الحالة يكون P_G مؤثّر إسقاط على $G=G_1\oplus G_2$.

البرهان: لزوم الشرط: ليكن $P_G=P_{G_1}+P_{G_2}$ مؤثّر إسقاط. عندئذ يكون

$$(P_{G_1}+P_{G_2})^2=P_{G_1}+P_{G_2}$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ

$$P_{G_1}P_{G_2}+P_{G_2}P_{G_1}=0$$

بالضرب من اليسار بـ P_{G_1} يكون

$$P_{G_1}P_{G_2}+P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}=0$$

بالضرب من اليمين بـ P_{G_1} يكون

$$P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}=0$$

و هذا يؤدي إلى أنّ $\quad P_{G_2}P_{G_1}=0$

كفاية الشرط: ليكن $P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}P_{G_1}=0$ عندئذ يكون

$$(P_{G_1}+P_{G_2})^2=P_{G_1}+P_{G_2}$$

$$(P_{G_1}+P_{G_2})^*=P_{G_1}^*+P_{G_2}^*=P_{G_1}+P_{G_2}$$

و بالتالي فإنّ $P_{G_1}+P_{G_2}$ مؤثّر إسقاط.

استناداً للفرض لدينا $P_{G_1}P_{G_2}=0$ و هذا يعني أنّ $G_1\perp G_2$. و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّه من أجل أي عنصر $h\in H$ يكون

$$P_G h=P_{G_1}h+P_{G_2}h=g_1+g_2\in G_1\oplus G_2 \qquad (٢.٢.٢)$$

و إذا كان $h=g_1+g_2$ عنصراً من $G_1\oplus G_2$ فإنّه بالأخذ بعين الاعتبار أنّ $P_{G_1}g_2=0$ و $P_{G_2}g_1=0$ يكون

(٢.٢.٣)

$$h=g_1+g_2=P_{G_1}g_1+P_{G_2}g_2=P_{G_1}(g_1+g_2)+P_{G_2}(g_1+g_2)=$$
$$=(P_{G_1}+P_{G_2})(g_1+g_2)=P_G h$$

من (٢.٢.٢) و (٢.٢.٣) ينتج أنّ P_G مؤثّر إسقاط على $G_1\oplus G_2$.

تعريف: نقول عن مؤثّر الإسقاط P_{G_2} إنّه جزء من مؤثّر الإسقاط P_{G_1} إذا كان $P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}$.

بالانتقال إلى المؤثّر المرافق نجد أنّ التعريف يكافئ التعريف: P_{G_2} جزء من P_{G_1} إذا كان $P_{G_2}P_{G_1}=P_{G_2}$.

لنبرهن الآن على أنّ مؤثّر الإسقاط P_{G_2} يكون جزءاً من مؤثّر الإسقاط P_{G_1} إذا و فقط إذا كان الفضاء الجزئي G_2 جزءاً من الفضاء الجزئي G_1. أي إنّ $G_2\subseteq G_1$. في الواقع، ليكن $P_{G_2}P_{G_1}=P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}$. مهما يكن العنصر

$h \in H$ يكون لدينا $(P_{G_2}h) \in G_2$. إلا أنّ $P_{G_1}(P_{G_2}h) = (G_2 h)$ و بالتالي فإنّ $(P_{G_2}h) \in G_1$ و هذا يعني أنّ $G_2 \subseteq G_1$. بالعكس ليكن $G_2 \subseteq G_1$، من هذا ينتج أنّه من أجل أي عنصر $h \in H$ يكون $(P_{G_2}h) \in G_2$ بما أنّ $G_2 \subseteq G_1$ فإنّ $(P_{G_2}h) \in G_1$ و هذا يعني أنّ $P_{G_1}(P_{G_2}h) = P_{G_2}h$ و هو المطلوب.

مبرهنة (٤): فرق مؤثّري الإسقاط P_{G_1} و P_{G_2}:

(٢.٢.٤)
$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$$

هو مؤثّر إسقاط إذا و فقط إذا كان $G_2 \subseteq G_1$، و في هذه الحالة يكون الفرق $P_{G_1} - P_{G_2}$ مؤثّر إسقاط على $G_1 \ominus G_2$.

البرهان: ليكن

$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$$

مؤثّر إسقاط، عندئذ يكون المجموع $P_{G_1} = P_G + P_{G_2}$ مؤثّر إسقاط أيضاً و هذا يعني استناداً إلى المبرهنة (٣) أنّ $G \perp G_2$ و أنّ $G \oplus G_2 = G_1$. من هذا ينتج أنّ $G_2 \subseteq G_1$ و أنّ $G = G_1 \ominus G_2$.

بالعكس، ليكن $G_2 \subseteq G_1$ و لنضع $G = G_1 \ominus G_2$. أي إنّ G هي المتممة المعامدة لـ G_2 في G_1. عندئذ يكون $G \perp G_2$ و $G \oplus G_2 = G_1$ و لهذا فإنّ P_{G_1} مجموع مؤثّري الإسقاط P_G و P_{G_2}:

$$P_{G_1} = P_G + P_{G_2}$$

هو مؤثّر إسقاط أيضاً و منه نجد أنّ

$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$$

و هو المطلوب.

ملاحظة: إنّ العلاقة $G_2 \subseteq G_1$ تكافئ المتراجحة

(٢.٢.٥)
$$\|P_{G_2} f\| \le \|P_{G_1} f\| \quad ; \forall f \in H$$

و تكافىء أيضاً المتراجحة

$$P_{G_2} \le P_{G_1} \quad (*) \qquad (٢.٢.٦)$$

لنبرهن الآن تكافؤ المتراجحتين (٢.٢.٥) و (٢.٢.٦) فيما بينهما. إنّ هذا الأمر ينتج من أنّ كلاً منهما مكافىء للمتراجحة

$$(P_{G_2} f , f) \le (P_{G_1} f , f) \qquad (٢.٢.٧)$$

في الواقع، بفرض أنّ

$$\mathrm{P} P_{G_2} f \ \mathrm{P} \le \mathrm{P} P_{G_1} f \ \mathrm{P} \quad ; \forall f \in H$$

فنجد أنّ

$$\mathrm{P} P_{G_2} f \ \mathrm{P}^2 \le \mathrm{P} P_{G_1} f \ \mathrm{P}^2$$

أو

$$(P_{G_2} f \, , \, P_{G_2} f) \le (P_{G_1} f \, , \, P_{G_1} f)$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى (٢.٢.٧). لنفرض الآن أنّ

$$P_{G_2} \le P_{G_1}$$

و هذا يعني أنّ

$$(P_{G_2} f \, , f) \le (P_{G_1} f \, , \, f) \quad ; \forall f \in H$$

و بسهولة يمكن التأكد من أنّ (٢.٢.٧) تؤدي إلى (٢.٢.٥) و (٢.٢.٦).

لنفرض الآن أنّ $G_2 \subseteq G_1$ من ذلك ينتج أنّ

$$P_{G_2} P_{G_1} = P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2}$$

و بالتالي فإنّه من أجل أي عنصر f من H يكون لدينا

$$\mathrm{P} P_{G_1} P_{G_2} f \ \mathrm{P} = \mathrm{P} P_{G_2} f \ \mathrm{P}$$

و منه نجد أنّ $\mathrm{P} P_{G_2} f \ \mathrm{P} \le \mathrm{P} P_{G_1} f \ \mathrm{P}$

أي إنّ المتراجحة (٢.٢.٥) محققة. بالعكس لنفرض أنّ المتراجحة (٢.٢.٥) محققة من

(*) سنستعرض المؤثرات الموجبة و مقارنتها لاحقاً.

أجل أي عنصر $f \in H$. هذا يعني أنه إذا كان $P_{G_1} f = 0$ فإنّ $P_{G_2} f = 0$، بكلام آخر إذا كان

$$F_2 = H \ominus G_2 \quad , \quad F_1 = H \ominus G_1$$

فإنّه من الانتماء $f \in F_1$ ينتج أنّ $f \in F_2$ و هذا يعني أنّ $F_1 \subseteq F_2$ و لذلك فإنّ

$$G_2 = H \ominus F_2 \subseteq H \ominus F_1 = G_1$$

و هو المطلوب.

متتاليات مؤثّرات الإسقاط

مبرهنة (٥)(*): إذا كانت $\{P_k\}_1^{\infty}$ متتالية لا نهائية و مطردة من مؤثّرات الإسقاط، فإنّ $\{P_k\}$ من أجل $k \to \infty$ تتقارب بقوة إلى مؤثر إسقاط P.

البرهان: لنفرض، على سبيل المثال، أنّ المتتالية $\{P_k\}_1^{\infty}$ غير متناقصة، أي إنّ $P_k \le P_{k+1}$ (**) ($k = 1,2,3,\ldots$). إنّ المتتالية محدودة و ذلك لأنّ $P_k \le I$ من أجل أي عدد k. لنفرض أنّ $m < n$ عندئذ يكون لدينا

$$\| P_n f - P_m f \|^2 = ((P_n - P_m) f , f) = \| P_n f \|^2 - \| P_m f \|^2$$

و ذلك لأنّه من أجل $m < n$ يكون الفرق $(P_n - P_m)$ مؤثّر إسقاط.

من العلاقة الأخيرة يتضح أنّ

$$\lim_{\substack{n>m \\ m \to \infty}} \| (P_n - P_m) f \| = 0$$

و بالتالي فإنّه من أجل أي عنصر $f \in H$ تكون النهاية موجودة بالمفهوم القوي:

$$\lim_{k \to \infty} P_k f = P f$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ P مؤثّر خطّي و محدود. و لنبرهن الآن على أنّ P

(*) قارن هذه المبرهنة بالمبرهنة (٢) من الفقرة § ٤. اللاحقة.

(**) إنّ المتراجحة $P_k \le P_{k+1}$ تعني أنّه من أجل أي عنصر $f \in H$ يكون $(P_k f, f) \le (P_{k+1} f, f)$.

مؤثّر إسقاط. من أجل أي عدد k و من أجل أي عنصرين f و g من H لدينا

$$(P_k f, P_k g) = (P_k f, g) = (f, P_k g)$$

و بالانتقال إلى النهاية عندما $k \to \infty$ نجد

$$(Pf, Pg) = (Pf, g) = (f, Pg)$$

و هذا يعني أنّ
$$P = P^* = P^2$$

أي إنّ P مؤثّر إسقاط.

مبرهنة (٦): إذا كانت متتالية مؤثّرات الإسقاط $\{P_k\}_1^\infty$ متقاربة بضعف إلى مؤثر إسقاط P، فإنّها تكون متقاربة بقوة إلى ذلك المؤثر.

البرهان: بما أنّ المتتالية متقاربة بضعف إلى المؤثّر P فإنّه من أجل أي عنصر $h \in H$ يكون لدينا:

و هذا يعني أنّ

$$\| P_k h \| \to \| P h \|$$

و بما أنّ المتتالية $\{P_k h\}_1^\infty$ تتقارب بضعف إلى Ph فإنّه استناداً إلى المبرهنة (٨) من الفقرة § ٣ من الفصل الأول تكون هذه المتتالية متقاربة بقوة إلى P.

§ ٣. المؤثّرات الوحدية و المؤثّرات الإيزومترية

Unitary and Isometric Operatos

تعتبر عملية الدوران في الفضاء الثلاثي البعد الإقليدي هي العملية الهندسية الأبسط بعد عملية الإسقاط. إنّ تلك العملية، كما هو معلوم، تحافظ على أطوال الأشعّة كما تحافظ على الزوايا بينها. سنستعرض هنا، في فضاءات هيلبرت، عملية مماثلة لعملية الدوران في الفضاء الثلاثي البعد.

تعريف: نسمي المؤثّر U المعرّف على الفضاء H $(D(U) = H)$ و الذي يطبقه في نفسه $(R(U) = H)$ **بمؤثّر وحدي** إذا كان

$$(Uf, Ug) = (f, g) \qquad (٢.٣.١)$$

من أجل جميع العناصر f و g من H.

لنلاحظ بأنّ هذا التعريف لا يقتضي خطّية المؤثّر U. لنبرهن الآن على أنّ للمؤثّر الوحدي مقلوب والذي بدوره هو مؤثّر وحدي أيضاً. بما أنّ الشرط اللازم و الكافي لوجود مقلوب لمؤثّر T هو أن تؤدّي المساواة $Tf = Tg$ إلى أنّ $f = g$، لذلك سنفرض أنّ $Uf = Ug$ و عندئذ يكون

$$\begin{aligned}
0 &= (Uf - Ug, Uf - Ug) \\
&= (Uf, Uf) - (Uf, Ug) - (Ug, Uf) + (Ug, Ug) = \\
&= (f, f) - (f, g) - (g, f) + (g, g) = \\
&= (f - g, f - g)
\end{aligned}$$

أي إنّ $f = g$.

بذلك يكون المؤثّر U^{-1} موجوداً و بما أنّ $D(U^{-1}) = R(U)$، $R(U^{-1}) = D(U)$ فإنّ المؤثّر U^{-1} كالمؤثّر U معرّف على الفضاء H و يطبقه في H. إذا فرضنا أنّ

$$Uf = f' \quad , \quad Ug = g'$$

فإنّه يمكننا كتابة العلاقة (٢.٣.١) على الشكل:

$$(f', g') = (U^{-1}f', U^{-1}g')$$

و هذا ما يثبت أنّ U^{-1} مؤثّر وحدي و ذلك لأنّ العنصرين g', f' يمكن لهما أن يكونا كيفيين من H.

ممّا برهنّا ينتج أنّه من أجل جميع العناصر g, f من H يكون:

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g) \qquad (٢.٣.٢)$$

في الواقع، لنضع $U^{-1}g = g'$ بالتالي فإنّ $g = Ug'$ في هذه الحالة يكون:

$$(Uf, g) = \left(Uf, Ug'\right) = \left(f, g'\right) = \left(f, U^{-1}g\right)$$

و هذا يتطابق مع العلاقة (٢.٣.٢).

لنبرهن الآن على أنّ المؤثّر الوحدي هو مؤثّر خطّي بالتأكيد. في الواقع ليكن:

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$$

في هذه الحالة و اعتماداً على المساواة (٢.٣.٢) نجد:

$$\begin{aligned}(Uf, g) &= (f, U^{-1}g) = \alpha_1 (f_1, U^{-1}g) + \alpha_2 (f_2, U^{-1}g) = \\ &= \alpha_1 (Uf_1, g) + \alpha_2 (Uf_2, g) = \\ &= (\alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2, g)\end{aligned}$$

و بما أنّ g عنصر كيفي فإنّ:

$$Uf = \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2$$

أي أنّ المؤثّر الوحدي هو مؤثّر خطّي. لنلاحظ أنّ العلاقة (٢.٣.٢) تعبّر عن تطابق المؤثّر المرافق للمؤثّر الوحدي مع مقلوب المؤثّر:

$$U^* = U^{-1}$$

أي إنّ

$$U^*U = UU^* = I$$

لنبرهن الآن القضيّة البسيطة الآتية: إذا كان المؤثّر T خطّياً و إذا حقّق العلاقة:

$$(Tf, Tf) = (f, f) \qquad (٢.٣.٣)$$

و كان $D(T) = R(T) = H$ فإنّ المؤثّر T يكون وحدياً.

البرهان: استناداً للعلاقة (٢.٣.٣) نجد أنّ:

$$(T\{f + \alpha g\}, T\{f + \alpha g\}) = (f + \alpha g, f + \alpha g)$$

و بما أنّ T مؤثّر خطّي فإنّ:

$$\begin{aligned}(Tf, Tf) + \alpha(Tg, Tf) + \overline{\alpha}(Tf, Tg) + |\alpha|^2(Tg, Tg) &= \\ = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + |\alpha|^2(g, g)\end{aligned}$$

و اعتماداً على (٢.٣.٣) مجدّداً نجد أنّ:

$$\alpha(Tg, Tf)+\bar{\alpha}(Tf, Tg)=\alpha(g, f)+\bar{\alpha}(f, g)$$

و بما أنّ α كيفي فإنّ:

$$(Tf, Tg)=(f, g)$$

و هذا ما يثبت أنّ T مؤثّر وحدي.

المؤثّر الإيزومتري: ليكن H_2, H_1 فضاءي هيلبرت. و لنصطلح أن نشير إلى الجداء الداخلي في H_1 بالدليل 1 و في H_2 بالدليل 2.

تعريف: نسمّي المؤثّر V المعرّف على H_1 $(D(V)=H_1)$ و الذي يطبّق H_1 على H_2 $(R(V)=H_2)$ **بمؤثّر إيزومتري،** إذا كان:

$$(Vf, Vg)_2=(f, g)_1 \tag{٢.٣.٤}$$

من أجل جميع العناصر f, g من H_1.

في حالة خاصّة يمكن لـ H_2, H_1 أن يكونا فضاءين جزئيين من فضاء هيلبرت H عندئذٍ نحجب أدلّة الجداء الداخلي و عادة يستخدم التعبير: **مؤثّر إيزومتري** في هذه الحالة، بينما يستخدم في الحالة العامّة التعبير: **تطبيق إيزومتري.**

إنّ المؤثّر الوحدي في H هو حالة خاصّة من المؤثّر الإيزومتري، و نحصل عليه إذا تطابق الفضاءان H_2, H_1 مع الفضاء H.

إنّ العديد من خواصّ المؤثّرات الوحديّة تُنقل إلى المؤثّرات الإيزومتريّة، و سنذكر بعض هذه الخواصّ دون التعرّض للبرهان:

١) يوجد مقلوب للمؤثّر الإيزومتري و هو بحدّ ذاته مؤثّر إيزومتري.

٢) إذا كان V مؤثّراً خطّياً و يطبّق الفضاء H_1 على الفضاء H_2 و كان من أجل أي عنصر $f \in H_1$

$$(Vf, Vf)_2=(f, f)_1$$

فإنّ V مؤثّر إيزومتري.

٣) كلّ مؤثّر إيزومتري هو مؤثّر خطّي.

في الواقع، ليكن f', f'' عنصرين من H_1 و $f=\alpha' f' + \alpha'' f''$ عندئذٍ من أجل أي عنصر g من H_1 يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(Vf, Vg)_2 &= (f, g)_1 = \alpha'(f', g)_1 + \alpha''(f'', g)_1 = \\ &= \alpha'(Vf', Vg)_2 + \alpha''(Vf'', Vg)_2 = \\ &= (\alpha' Vf' + \alpha'' Vf'', Vg)\end{aligned}$$

و بما أنّ $R(V)=H_2$ فإنّه من العلاقة الأخيرة ينتج أنّ:

$$Vf = \alpha' Vf' + \alpha'' Vf''$$

و هو ما يثبت خطيّة المؤثّر V.

في بعض الأحيان تواجهنا مؤثّرات **تسمّى مؤثّرات إيزومترية جزئياً**. هكذا يسمّى المؤثّر الخطّي U المطبّق في فضاء هيلبرت H و الذي يتطابق مع مؤثّر إيزومتري V في فضاء جزئي $D(V)\subset H$ و على المتمّمة المعامدة $H ! D(V)$ لذلك الفضاء الجزئي يؤول إلى الصفر. يسمّى الفضاء الجزئي $D(V)$ **الساحة الابتدائيّة** للمؤثّر الإيزومتري جزئياً U، كما و يسمّى الفضاء الجزئي $R(U)=R(V)$ **الساحة النهائيّة** للمؤثّر U.

بسهولة يمكن التأكّد من أنّه إلى جانب المؤثّر الإيزومتري جزئياً U يكون المؤثّر U^* إيزومترياً جزئياً و تبعاً لذلك تكون الساحة الابتدائيّة لـ U^* هي $R(V)$ و أمّا الساحة النهائيّة فتكون $D(V)$. و يكون التطبيقان المحقّقان بالمؤثّرين U و U^* لهاتين الساحتين عكوسين تبادليّاً. هذا يعني أنّ:

$$U^*U = P \quad , UU^* = Q \qquad (٢.٣.٥)$$

$$\left(U : D(V) \longrightarrow R(V) \quad ; \quad U^* : R(V) \longrightarrow D(V)\right)$$

حيث Q, P مؤثّرا إسقاط على $D(V)$ و $R(V)$ على الترتيب.

في الواقع، إذا كان U إيزومترياً جزئياً و ساحته الابتدائيّة هي $D(V)$ و كان P مؤثّر الإسقاط من H على $D(V)$ فإنّه من أجل أي عنصر f

من $D(V)$ يكون:

$$(U^*Uf,f)=\|Uf\|^2=\|f\|^2=(Pf,f) \qquad (٢.٣.٦)$$

أمّا إذا كان f عمودياً على $D(V)$ فإنّ $Uf=0$ و بالتالي فإنّ:

$$(U^*Uf,f)=(Pf,f)=0 \qquad (٢.٣.٧)$$

من العلاقتين (٢.٣.٦) و (٢.٣.٧) نجد أنّ:

$$(U^*Uf,f)=(Pf,f) \quad ; \forall f \in H$$

و من هذا ينتج أنّ $U^*U=P$.

بالعكس إذا كان U مؤثّراً خطّياً و محدوداً $U:H\to H$ و كان $U^*U=P$ مؤثّر إسقاط من H على $D(U)$ فإنّه يكون لدينا:

$$\|Uf\|^2=(U^*Uf,f)=(Pf,f)=\|Pf\|^2 \quad ; \forall f \in H$$

فإذا كان $f\in D(U)$ فإنّ $Pf=f$ و بالتالي يكون لدينا:

$$\|Uf\|^2=\|Pf\|^2$$

أو

$$\|Uf\|=\|f\|$$

أمّا إذا كان $f\perp D(U)$ فإنّ $Pf=0$ و بالتالي فإنّ $\|Uf\|=0$ و هكذا يكون لدينا:

$$\|Uf\|=\begin{cases}\|f\| & ; f\in D(U) \\ 0 & ; f\perp D(U)\end{cases}$$

أي أنّ U مؤثّر إيزومتري جزئيّاً. بالمثل تماماً تعالج الحالة $U^*U=Q$.

في حالة خاصّة، عندما يتطابق أحد الفضاءين الجزئيين $D(V)$ أو $R(V)$ مع الفضاء H فإنّ المؤثّر الإيزومتري جزئيّاً U يسمّى مؤثّراً **نصف وحدي**.

سنختتم هذا البند بواحد من المفاهيم الهامّة و الشائعة الاستخدام في التحليل التابعي.

تعريف: ليكن T_1,T_2 مؤثّرين خطّيين مطّبقين في الفضاءين H_1,H_2 على الترتيب و بحيث إنّ $D(T_2)\subseteq H_2$ و $R(T_1)\subseteq H_2$ و $D(T_1)\subseteq H_1$ و $R(T_2)\subseteq H_2$ (في حالة خاصّة يمكن أن يكون $H_1=H_2=H$) يسمّى المؤثّران T_1 و T_2 **متكافئين وحديّاً** إذا وجد مؤثّر إيزومتري V يطبّق H_1 في H_2 و ينقل $D(T_1)$ إلى $D(T_2)$ و هكذا إذا كان $f\in D(T_1)$ و كانت صورته بواسطة المؤثّر V هي g فإنّ صورة العنصر $T_1 f$ بواسطة المؤثّر V تكون $T_2 g$. بكلام آخر إنّ التكافؤ الوحدي يعني أنّ:

$$D(T_2)=V\ D(T_1)$$

و

$$T_1=V^{-1}T_2V$$

§ ٤. المؤثّرات الموجبة – الجذر التربيعي لمؤثّر موجب

Positive Operators – Square Root

المؤثّر الموجب: ليكن A مؤثّراً خطّياً في فضاء هيلبرت H. يسمّى المؤثّر A **موجباً** إذا كان:

$$(Ax,x)\geq 0 \qquad (٢.٤.١)$$

من أجل جميع العناصر $x\in H$. إذا كان $(Ax,x)>0$ من أجل جميع العناصر $x\neq 0$ فإنّ A **يسمّى مؤثّراً موجباً تحديداً** *(Positive Definite)*.

من الواضح مباشرةً بأنّ الطريقة الوحيدة ليحقّق المؤثّر الخطّي A العلاقة (٢.٤.١) هو أن يكون المقدار (Ax,x) حقيقيّاً بشكل دائم. أي أنّ الشرط اللازم ليكون المؤثّر A موجباً هو أن يكون (Ax,x) حقيقيّاً بشكل دائم. و استناداً للمبرهنة (٢) من الفصل الأوّل نجد أنّه ينبغي أن يكون المؤثّر A مترافقاً ذاتياً. في ضوء ذلك لا نفقد شيئاً بإعادة صياغة التعريف أعلاه على الشكل:

تعريف: إذا كان A مؤثراً مترافقاً ذاتياً و محققاً للعلاقة (١.٤.٢) من أجل جميع العناصر $x \in H$ فإنّ A يسمّى مؤثراً موجباً و نرمز لذلك بالشكل $A \geq 0$.

وفقاً لما ذكرنا يمكننا مقارنة المؤثرين المترافقين ذاتياً A, B، نضع $A \geq B$ أو $B \leq A$ (*) إذا و فقط إذا كان $A - B \geq 0$.

بسهولة يمكن التأكد من أنّ علاقة المقارنة المعرّفة في مجموعة المؤثرات المترافقة ذاتياً تتمتع بالخواص الآتية:

١) إذا كان $A \geq B$ و كان $C \geq D$ فإنّ $A + C \geq B + D$.

٢) إذا كان $A \geq 0$ و كان $\alpha \geq 0$ فإنّ $\alpha A \geq 0$.

٣) إذا كان $A \geq B$ و كان $B \geq C$ فإنّ $A \geq C$.

٤) إذا كان $A > 0$ و كان A^{-1} موجوداً فإنّ $A^{-1} > 0$.

من الواضح أيضاً أنّ كلاً من المؤثرين A^*A, AA^* هو مؤثر موجب أيّاً كان المؤثر الخطّي A و المغاير للمؤثر الصفري، و في حالة خاصّة يكون المؤثر $A^2 > 0$ من أجل أي مؤثر مترافق ذاتياً A مع $A \neq 0$ و من هذا ينتج، و كمثال على مؤثر موجب، أنّ مؤثر الإسقاط على فضاء جزئي في فضاء هيلبرت هو مؤثر موجب.

جداء المؤثرات الموجبة *(The Product Of Positive Operators)*:

مبرهنة(١): إذا كان A, B مؤثرين من $\mathscr{L}[H, H]$ و كان $A \geq 0$ و $B \geq 0$ و تبادليين فإنّ $AB \geq 0$.

البرهان: لنلاحظ أولاً أنّ المؤثرين A, B مترافقان ذاتياً و أنّ $A^2 \geq 0$. لنفرض أنّ المؤثر A مغاير للمؤثر الصفري، و لنشكّل المؤثرات:

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|}, A_2 = A_1 - A_1^2, \ldots, A_{n+1} = A_n - A_n^2, \ldots$$

إنّ كلّ مؤثر من هذه المؤثرات مترافق ذاتياً و لنبرهن على أنه من أجل كلّ عدد n يكون:

(*) المتراجحة $B \leq A$ تعني إمّا $B < A$ أو $B = A$.

$$0 \le A_n \le I \qquad (٢.٤.٢)$$

من الواضح أنّ $A_1 \ge 0$ و لنبيّن أنّ $I - A_1 \ge 0$.

$$((I - A_1)x, x) = (x, x) - (A_1 x, x) = (x, x) - \frac{1}{\|A\|}(Ax, x) \ge$$

$$\ge (x, x) - \frac{1}{\|A\|} \cdot \|A\| \|x\|^2 = 0$$

لنفرض أنّ العلاقة (٢.٤.٢) صحيحة من أجل $n = k$ و لنثبت صحّتها من أجل $n = k + 1$، أي إنه علينا إثبات أنّ المؤثّر

$$A_{k+1} = A_k - A_k^{\ 2}$$

يحقّق العلاقة (٢.٤.٢)، بغية ذلك نستعرض

$$\left(A_k^2 (I - A_k)\, x,\ x \right) = ((I - A_k) A_k\, x, A_k\, x) \ge 0$$

بالتالي فإنّ:

$$A_k^{\ 2}(I - A_k) \ge 0$$

بالمثل تماماً يمكننا التحقّق من أنّ:

$$A_k (I - A_k)^2 \ge 0$$

و بما أنّ مجموع مؤثّرين موجبين هو مؤثّر موجب فإنّ:

$$A_k^{\ 2}(I - A_k) + A_k (I - A_k)^2 \ge 0$$

و بإنجاز عمليّة الضرب في المتراجحة الأخيرة نجد أنّ:

$$A_{k+1} = A_k - A_k^{\ 2} \ge 0$$

بما أنّ

$$I - A_{k+1} = I - A_k + A_k^{\ 2}$$

و أنّ $I - A_k \ge 0$ و أنّ $A_k^{\ 2} \ge 0$ فإنّ $I - A_{k+1} \ge 0$ أي إنّ:

$$A_{k+1} \le I$$

من تعريف المؤثّر A_2 ينتج أنّ:

$$A_1 = {A_1}^2 + A_2$$

بالمثل نجد:

$$A_1 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + A_3$$

و

$$A_1 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + \cdots + {A_n}^2 + A_{n+1}$$

أو

$$\sum_{k=1}^{n} {A_k}^2 = A_1 - A_{n+1} \leq A_1 \qquad (٢.٤.٣)$$

(و ذلك لأنّ $A_{n+1} \geq 0$).

و بما أنّ كلّ مؤثّر A_k هو مؤثّر مترافق ذاتياً فإنّ:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} {A_k}^2 x \ , x\right) = \sum_{k=1}^{n} ({A_k}^2 x , x) = \sum_{k=1}^{n} (A_k x \ , \ A_k x) \leq (A_1 x \ , x)$$

و هذه العلاقة محقّقة من أجل أي عدد n و هذا بدوره يعني أنّ المتتالية المطّردة $\left\{\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2\right\}$ محدودة من الأعلى و بالتالي فإنّ نهايتها موجودة و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2$$

متقاربة و بالتالي فإنّ:

$$\|A_k x\| \to 0 \quad ; \ k \to \infty$$

باستخدام العلاقة (٢.٤.٣) نجد:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) x = A_1 x - A_{n+1} x \longrightarrow A_1 x$$

بما أنّ المؤثّر B تبادلي مع A فهو تبادلي مع كلّ مؤثّر من المؤثّرات A_n و بالتالي نجد:

$$(A B x , x) = \mathrm{P} A \ \mathrm{P}(B A_1 x , x) = \mathrm{P} A \ \mathrm{P} \lim_n \sum_{k=1}^{n} (B A_k^2 x , x) =$$

$$= \mathrm{P} A \ \mathrm{P} \lim_n \sum_{k=1}^{n} (B A_k x , A_k x) \geq 0$$

و هو المطلوب.

مبرهنة (٢): لتكن $\{A_n\}$ متتالية متزايدة من المؤثّرات المترافقة ذاتياً و التبادليّة فيما بينها و التي لا تزيد عن المؤثّر المترافق ذاتياً B و التبادلي مع كلّ مؤثّر من المؤثّرات A_n

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n \leq \ldots \leq B$$

عندئذٍ تتقارب المتتالية $\{A_n\}$ بقوّة إلى مؤثّر مترافق ذاتياً A و يكون $A \leq B$.

البرهان: لنستعرض المؤثّرات المترافقة ذاتياً

$$C_n = B - A_n$$

هذه مؤثّرات موجبة و تبادليّة فيما بينها كما أنّها تشكّل متتالية متناقصة، بالتالي فإنّه من اجل $n > m$ تكون المؤثّرات

$$(C_m - C_n) C_m \quad , \quad C_n (C_m - C_n)$$

أيضاً موجبة و منه نجد أنّ

$$(C_m{}^2 x , x) \geq (C_m C_n x , x) \geq (C_n{}^2 x , x) \qquad (٢.٤.٤)$$

و هذا يعني أنّ المتتالية العدديّة $\{(C_n{}^2 x , x)\}$ الحقيقيّة متناقصة و محدودة من الأدنى بالصفر لذلك فإنّ النهاية

$$\lim_n (C_n{}^2 x , x)$$

موجودة، و استناداً إلى العلاقة (٢.٤.٤) نجد أنّ المتتالية $\{(C_m C_n x , x)\}$ تسعى

إلى نفس النهاية و ذلك عندما n, m تسعيان إلى ∞. و عندئذ نجد أنّه عندما $n, m \to \infty$ فإنّ

$$\|C_m x - C_n x\|^2 = \left((C_m - C_n)^2 x, x\right) =$$
$$= (C_m{}^2 x, x) - 2(C_m C_n x, x) + (C_n{}^2 x, x) \longrightarrow 0$$

أي أنّ المتتالية $\{C_n x\}$ هي متتالية كوشي بمفهوم التقارب القوي، و بما أنّ الفضاء H تامّ فإنّ النهاية $\lim\limits_n C_n x$ موجودة و التي بدورها تؤدّي إلى وجود النهاية $\lim\limits_n A_n x$ من أجل جميع العناصر x. لنرمز لتلك النهاية بـ $A x$ أي إنّ

$$A x = \lim_n A_n x$$

و هذا يعني أنّ
$$A_n \xrightarrow{S} A$$

و باستخدام استمراريّة الجداء الداخلي نجد أنّ:

$$(A x, y) = \lim_n (A_n x, y) = \lim_n (x, A_n y) = (x, A y)$$

أي إنّ $A = A^*$. و بما أنّ:

$$(A_n x, x) \le (B x, x)$$

فإنّه بالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نجد أنّ:

$$(A x, x) \le (B x, x)$$

بالتالي فإنّ $A \le B$.

ملاحظة: إنّ المبرهنة السابقة محقّقة من أجل المتتاليات المطّردة المتناقصة أيضاً.

تعريف: يسمّى المؤثّر المترافق ذاتياً B **جذراً تربيعياً** للمؤثّر الموجب A إذا كان $B^2 = A$. إذا كان، بالإضافة لذلك $B \ge 0$ فإننا نكتب تلك العلاقة على الشكل $B = \sqrt{A}$ أو $B = A^{1/2}$.

باستخدام المبرهنة (٢) سنثبت وجود و وحدانيّة الجذر التربيعي لمؤثّر موجب.

مبرهنة (٣): إذا كان A مؤثّراً موجباً من $\mathscr{L}[H,H]$ فإنّه يوجد جذر تربيعي موجب و وحيد B للمؤثّر A و هذا الجذر يكون تبادلياً مع كلّ مؤثّر تبادلي مع A.

البرهان: إذا كان $A=0$ فإنّه من الواضح أنّ $B=0$ يحقّق شروط المبرهنة و هذه حالة تافهة ندعها جانباً. دون أن نمسّ عموميّة المسألة يمكننا أن نفرض أنّ $A\le I$ و ذلك لأنّه من أجل أي مؤثّر موجب A يكون:

$$(Ax,x)\le \|A\|\|x\|^2=\|A\|(x,x)$$

أو

$$\left(\frac{A}{\|A\|}x,\ x\right)\le (x,x)$$

أي أنّ

$$\frac{A}{\|A\|}\le I$$

لنستعرض متتالية المؤثّرات $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ حيث $B_0=0$، و

$$B_{n+1}=B_n+\frac{1}{2}(A-B_n{}^2)\quad ;(n=1,2,\dots) \qquad (٢.٤.٥)$$

بما أنّ جميع المؤثّرات B_n هي كثيرات حدود في A فإنّها تكون مترافقة ذاتياً و تبادليّة مع أي مؤثّر تبادلي مع A و في حالة خاصّة تكون جميع المؤثّرات B_n تبادليّة فيما بينها. أي إنّ $B_n B_m = B_m B_n$. لنبرهن الآن على أنّ المتتالية $\{B_n\}$ مطّردة و متزايدة و محدودة من الأعلى بالمؤثّر I. للبرهان أوّلاً على أنّ $B_n\le I$ من أجل جميع قيم n، نلاحظ صحّة هذا الأمر بالنسبة لـ $n=0$ و لنفرض أنّ ذلك صحيح من أجل B_n و لنثبت صحّة ذلك من أجل B_{n+1}. بما أنّ $A\le I$ و أنّ $(I-B_n)$ مؤثّر موجب و بالتالي فهو مترافق ذاتياً فإنّ:

$$I-B_{n+1}=\frac{1}{2}(I-B_n)^2+\frac{1}{2}(I-A)$$

مؤثّر موجب، أي إنّه من أجل جميع قيم n يكون:

$$B_n\le I \quad \text{مهما يكن العدد الطبيعي } n \qquad (٢.٤.٦)$$

بسهولة يمكن التأكّد من أنّ $B_n \le B_{n+1}$. في الحقيقة، من أجل $n=0$ الأمر واضح تبعاً للمساواة

$$B_1 = \frac{1}{2}A > 0 = B_0$$

لنفرض أنّ $B_{n-1} \le B_n$ و لنبرهن على أنّ $B_n \le B_{n+1}$. في الواقع، بما أنّ:

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2}\left[(I - B_{n-1}) + (I - B_n)\right](B_n - B_{n-1}) \qquad (٢.٤.٧)$$

فإنّ $B_{n+1} - B_n$ مؤثّر موجب و بالتالي فإنّ:

$$0 = B_0 \le B_1 \le B_2 \le \ldots \le I \qquad (٢.٤.٨)$$

استناداً للمبرهنة (٢) ينتج وجود مؤثّر مترافق ذاتياً B بحيث إنّ:

$$B \ge 0 \quad و \quad B_n \xrightarrow{S} B$$

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة (٢.٤.٥) نجد:

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2)$$

أي إنّ:

$$B^2 = A$$

لنتأكّد الآن من أنّ B تبادلي مع أي مؤثّر C تبادلي مع A. وجدنا أعلاه أنّ جميع المؤثّرات B_n تبادليّة فيما بينها و تبادليّة أيضاً مع أي مؤثّر تبادلي مع A، أي إنّ:

$$C\,B_n = B_n\,C \qquad (\forall\, n)$$

و بما أنّ $B_n \xrightarrow{S} B$ فإنّ:

$$B_n C x \to B C x$$

باستخدام استمراريّة المؤثّر C نجد أنّ:

$$\lim_n C B_n x = C \lim_n B_n x = C B x = \lim_n B_n C x = B C x$$

لنبرهن الآن على وحدانيّة الجذر التربيعي. لنفرض أنّ B_1 جذر تربيعي آخر موجب

من المؤثّر A و تبادلي مع A و مع كلّ مؤثّر تبادلي مع A. عندئذٍ يكون:

$$B_1 B = B B_1$$

لذلك إذا كان x عنصراً ما من H و كان $y = (B - B_1)x$ فإنّه يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(B y, y) + (B_1 y, y) &= \left((B + B_1)y, y\right) = \\ &= \left((B + B_1)(B - B_1)x, y\right) = \\ &= \left((B^2 - B_1^2)x, y\right) = 0\end{aligned}$$

و بما أنّ B_1 و B مؤثّران موجبان فإنّ ذلك يؤدّي إلى أنّ:

$$(B y, y) = (B_1 y, y) = 0$$

استناداً إلى الجزء الأوّل من المبرهنة يوجد مؤثّر موجب و مترافق ذاتياً مثل C بحيث إنّ $B = C^2$، و بما أنّ:

$$\|C y\|^2 = (C^2 y, y) = (B y, y) = 0$$

فإنّ $C y = 0$، بالتالي يكون لدينا:

$$B y = C(C y) = 0$$

و بالمثل تماماً نجد أنّ $B_1 y = 0$ و عندئذٍ يكون:

$$\|B_1 x - B x\|^2 = \left((B - B_1)^2 x, x\right) = \left((B - B_1)y, x\right) = 0$$

أي إنّه من أجل أي عنصر x من H يكون:

$$B x = B_1 x$$

بذلك نكون قد أثبتنا وحدانيّة الجذر التربيعي من مؤثّر موجب A.

مثال: لنستعرض في الفضاء $L^2[0,1]$ المؤثّر A المعرّف بالعلاقة:

$$A x(t) = t\, x(t)$$

إنّ هذا المؤثّر موجب و مترافق ذاتياً. إنّ الجذر التربيعي الموجب من هذا المؤثّر هو المؤثّر B حيث:

$$B x(t) = +\sqrt{t}\, x(t)$$

مسائل وتمارين

١. ليكن المؤثر A $\left(A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]\right)$ معرّفاً بالعلاقة

a) $Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds$.

b) $Ax(t) = x(\sqrt{t})$.

c) $Ax(t) = \int_0^1 x(s^2) ds$.

هل A مؤثّر تام الاستمرار؟

هل سيكون A تام الاستمرار إذا كان $A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$؟

٢. من أجل أي تابع φ من الفضاء $C[a,b]$ يكون المؤثّر A $\left(A : C[a,b] \to C[a,b]\right)$ و المعرّف بالعلاقة

$$Ax(t) = \varphi(t) \cdot x(t)$$

تام الاستمرار (يسمّى هذا المؤثّر بمؤثّر الضرب بالتابع φ).

٣. هل سيكون المؤثّر $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$ تام الاستمرار إذا كان:

a) $A : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$.

b) $A : C^{(2)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$.

c) $A : C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$.

٤. برهن أنّه إذا كان المؤثّر الخطّي A منتهي البعد فإنّه يكون تام الاستمرار.

٥. ليكن العدد $p > 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و لنستعرض المؤثّر

$$A : l_p \longrightarrow l_q$$

و المعرف بالعلاقة:

$$(A x)_i = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصر من l_p و أمّا المصفوفة العدديّة $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ فهي بحيث إنّ السلسلة $\sum_{i,j=1}^{\infty} \left| a_{ij} \right|^q$ متقاربة. برهن أنّ المؤثّر A تامّ الاستمرار.

٦. لنستعرض المؤثّر $A : l_p \longrightarrow l_p \quad (p > 1)$ و المعرّف بالعلاقة

$$A x = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \ldots)$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصر من l_p و $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية عدديّة معطاة.

ما هي الشروط التي ينبغي أن تحققها المتتالية $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ كي يكون المؤثّر A:

a) محدوداً.

b) تامّ الاستمرار.

٧. لتكن $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدة متعامدة – منظّمة في فضاء هيلبرت H، و ليكن Y فضاء باناخ. برهن أنّه إذا كان المؤثّر $A : H \longrightarrow Y$ خطّياً و مستمرّاً و بحيث إنّ السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| A e_k \right\|^2$ متقاربة فإنّ A تامّ الاستمرار.

٨. إذا كان المؤثّر A:

a) $A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A x(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

b) $A : l_p \longrightarrow l_q \qquad (p \geq 1)$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A x = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \ldots)$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصر من l_p و $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية عدديّة محدودة.

$$c)\quad A : L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow L^2(\mathbf{R})$$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A\,x(t) = a(t)\,x(t+h)$$

حيث $a(t)$ تابع محدود على $\mathbf{R}$ و قيوس وفق ليبيغ و $h \in \mathbf{R}$، أوجد المؤثّر A^* في الحالات المذكورة.

٩. ليكن A و B مؤثّرين من $\mathscr{L}(H)$ و ليكن $B \geq 0$. برهن أنّ $A^*BA \geq 0$. ($\mathscr{L}(H)$ فضاء المؤثرات الخطيّة المحدودة من H في H).

١٠. ليكن A و B مؤثّرين من $\mathscr{L}(H)$ (فضاء المؤثّرات الخطّية المحدودة من H في H) و $A \geq 0$ و $B \geq 0$. إذا كان $A + B = 0$ فبرهن أنّ $A = B = 0$.

١١. ليكن A مؤثّراً من $\mathscr{L}(H)$. برهن أنّ A مؤثّر إسقاط عامودي إذا و فقط إذا كان $A = A^*A$

١٢. إذا كان E_1 و E_2 مؤثّري إسقاط عموديّين و كان $E_1E_2 = 0$ فبرهن أنّ

$$\|E_1 + E_2\| < \|E_1\| + \|E_2\|$$

١٣. لتكن المؤثّرات A و B و C موجبة و ليكن $A \leq B$، و لنفرض أنّ C تبادلي مع كل من A و B. برهن أنّ $AC \leq BC$.

١٤. ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن المؤثّر A من $\mathscr{L}(H)$ و بحيث إنّ $0 < A \leq I$ برهن أنّ

$$0 < A^2 \leq A$$

١٥. ليكن A و B مؤثّرين من $\mathscr{L}(H)$ و $A \geq 0$ و $B \geq 0$. و لنفرض أنّ $A\,B = B\,A$ فبرهن أنّ

$$\sqrt{A\,B} = \sqrt{A}\,\sqrt{B}$$

١٦. ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن A من $\mathscr{L}(H)$ مؤثّراً مترافقاً ذاتياً. برهن على وجود مؤثّرين A^+ و A^- موجبين و بحيث إنّ

$$A = A^+ - A^- \quad , \quad A^+A^- = 0$$

الفصل الثالث

مفاهيم عامّة في نظرية المؤثّرات الخطّية و تطبيقاتها

استعرضنا في الفصل الثاني بعض صفوف المؤثّرات الخطّية في فضاء هيلبرت، و في هذا الفصل سنستعرض بعض المفاهيم العامّة المرتبطة بتلك المؤثّرات.

§ ١. الأشعة الخاصّة – الفضاءات الجزئية اللامتغيرة

Eigenvectors – Invariant Subspaces

نقول إنّ العدد λ هو **قيمة خاصّة** للمؤثّر **الخطّي** T إذا وجد عنصر مثل $f \neq \theta$ بحيث إنّ

$$Tf = \lambda f \qquad (٣.١.١)$$

وفقاً لذلك يسمّى الشّعاع f **شعاعاً خاصّاً** للمؤثّر T منتمياً للقيمة الخاصّة λ. إذا كان المؤثر T مغلقاً فإنّه بإتمام مجموعة جميع الأشعة الخاصّة المنتمية للقيمة الخاصة λ بالشّعاع الصفري، و نحصل على فضاء جزئي (منتهي أو غير منتهي البعد) و يسمّى هذا الفضاء **بالفضاء الجزئي الخاص** المنتمي للقيمة الخاصّة λ و يكون عدد أبعاد هذا الفضاء هو عدد مرّات تكرار القيمة الخاصّة λ.

إنّ المفهوم الأعم من مفهوم الفضاءات الخاصّة هو مفهوم الفضاءات الجزئية اللامتغيّرة.

يسمّى الفضاء الجزئي $H_1 \subseteq H$ **فضاءً جزئياً لا متغيراً** بالنسبة للمؤثّر T إذا كانت صورة كل عنصر f منتمٍ لـ H_1 و $D(T)$ منتمية إلى H_1. أي إنّه من

$$f \in D(T) \cap H_1$$

ينتج أنّ

$$Tf \in H_1$$

يمكن القول إنّ المؤثّر T يولد في الفضاء الجزئي اللامتغيّر H_1 مؤثّراً T_1 يكون من أجله

$$D(T_1) = D(T) \cap H_1 \quad ; \quad T_1 \subseteq T$$

و يسمّى المؤثر T_1 **بجزء المؤثّر T الواقع في H_1**.

نشير هنا، كما هو معلوم في الجبر الخطّي، إلى أنّ كل فضاء جزئي لا متغيّر و منتهي البعد يحتوي على الأقل على شعاع خاص واحد.

إذا كان H_1 فضاءً جزئيّاً لا متغيّراً بالنسبة للمؤثّر T، فإنّه من الممكن أن لا تكون المتممة المتعامدة $H \ominus H_1$ فضاء جزئيّاً لا متغيّراً بالنسبة لـ T.

سنفرض الآن أنّ الفضاءين الجزئيين H_1 و $H_2 = H \ominus H_1$ لا متغيّران بالنسبة للمؤثّر T، و لنفرض أنّ T_1 و T_2 هما جزءا المؤثّر الواقعان في H_1 و H_2 على الترتيب. إنّ السؤال الذي يطرح هنا هو:

هل تؤول دراسة المؤثّر T إلى دراسة المؤثّرين T_1 و T_2؟

من الواضح أنّ الجواب إيجابي إذا كان المؤثّر T معرّفاً على H. في الواقع، بأخذ عنصر ما $h \in H$ يمكننا أن نكتب

$$h = h_1 + h_2$$

حيث $h_1 \in H_1$ و $h_2 \in H_2$ و عندئذٍ يكون

$$T h = T_1 h_1 + T_2 h_2$$

إذا لم يكن المؤثّر T معرّفاً على H فإنّ النتيجة تبقى محققة فقط إذا لم يُخرج مؤثّر الإسقاط على الفضاء H_1 العناصر من $D(T)$. أي إنّه تتحقق المبرهنة الآتية

مبرهنة (١): إذا كان الفضاء الجزئي H_1 ومتممته المعامدة H_2 لا متغيّرين بالنسبة لـ T و إذا لم يخرج الإسقاط على الفضاء الجزئي H_1 العناصر من $D(T)$ فإنّه من أجل أي عنصر $f \in D(T)$ يكون

$$T f = T_1 f_1 + T_2 f_2$$

حيث T_1 و T_2 جزءا المؤثّر T الواقعان في H_1 و H_2 و أمّا f_1 و f_2 فهما مسقطا f على H_1 و H_2 على الترتيب.

تعريف: إذا حقق الفضاء الجزئي H_1 شروط المبرهنة (١) فإنّنا نقول إنّ الفضاء الجزئي H_1 يختزل (*reduce*) المؤثّر T.

بسهولة يمكن التأكد من أنّه إذا اختزل الفضاء الجزئي H_1 المؤثّر T فإنّ المتممة المعامدة H_2 تختزل المؤثّر T أيضاً. بمثابة مثال على فضاءين يختزلان المؤثر T نأخذ الفضاء الصفري و الفضاء H و يعتبر هذان الفضاءان بالفضاءين التافهين اللّذين يختزلان المؤثّر T. إذا لم توجد فضاءات جزئية أخرى تختزل المؤثّر T فإنّنا نقول إنّ المؤثّر T **غير قابل للاختزال.**

مبرهنة (٢): ليكن P مؤثّر الإسقاط على الفضاء الجزئي G، في هذه الحالة يكون الشرط اللازم و الكافي كي يختزل الفضاء الجزئي G المؤثر T هو أنّ يتحقق من أجل أي عنصر $f \in D(T)$ الشرطان

١) $Pf \in D(T)$

٢) $PTf = TPf$

بكلام آخر أن يكون المؤثر تبادلياً مع المؤثر P.

البرهان: **لزوم الشرط:** إذا اختزل الفضاء الجزئي G المؤثر T فإنّه من $f \in D(T)$ ينتج أنّ $Pf \in D(T)$ و هذا يعني تحقق الشرط (1 لإثبات الشرط (2 نضع $f = g + h$

حيث $g = Pf$. بما أنّ G يختزل T فإنّ

$$Tf = Tg + Th$$

حيث $(Tg) \in G$ و $(Th) \in H \ominus G$ و لذلك فإنّ

$$PTf = P(Tg) = Tg$$

أي إنّ

$$PTf = TPf$$

كفاية الشرط: لنفرض أنّه من أجل أي عنصر $f \in D(T)$ يتحقق الشرطان (1 و (2 حيث P مؤثّر الإسقاط على G. و لنبرهن على أنّ G يختزل المؤثّر T.

إنّ (1 تعني أنّ مؤثّر الإسقاط P لا يخرج العناصر من $D(T)$. من أجل أي عنصر $f \in G \cap D(T)$ يكون $Pf = f$ و بالتالي فإنّ

$$TPf = Tf$$

و بما أنّ

$$PTf = TPf$$

فإنّ

$$TPf = P(Tf) = Tf$$

أي إن $Tf \in G$. و بالتالي فإنّ G فضاء جزئي لا متغير بالنسبة لـ T.

و بسهولة نجد أنّه إذا كان $g \in G^{\perp}$ فإنّ $Tg \in G^{\perp}$ أي إنّ $G^{\perp}$ فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ T أيضاً. و هذا يعني أنّ G يختزل المؤثّر T.

$$PTg = TPg = 0 \quad \Rightarrow \quad Tg \in G^{\perp}$$

عادة يقولون إنّ مؤثّر الإسقاط P يختزل المؤثّر T إذا اختزل الفضاء الجزئي G الذي يسقط عليه المؤثّر P المؤثّر T.

إنّ إرجاع دراسة بنية المؤثّر T إلى دراسة الفضاءات الجزئية التي تختزله و دراسة أجزائه الواقعة في تلك الفضاءات الجزئية يستند إلى المبرهنة الآتية:

مبرهنة (٣): لتكن الفضاءات الجزئية H_k $(k = 1,2,\ldots,n \;; n \le \infty)$ متعامدة مثنى مثنى و

$$H = \sum_k \oplus H_k$$

و لنفرض أنّ كلاً منها يختزل المؤثّر الخطّي T و الذي نفترضه مغلقاً إذا كان $n = \infty$. و ليكن P_k مؤثّر الإسقاط على H_k و T_k جزء المؤثّر T الواقع في H_k. في هذه الحالة يكون الشرط اللازم و الكافي لانتماء العنصر f إلى $D(T)$ هو أن يكون:

$$\sum_{k=1}^{n} \|T_k P_k f\|^2 < \infty \quad , \quad P_k f \in D(T_k) \qquad (٣.١.٢)$$

و وفقاً لذلك يكون

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} T_k P_k f \qquad (٣.١.٣)$$

البرهان: ليكن f عنصراً ما من $D(T)$ ($f \in D(T)$). بما أنّ H_k يختزل المؤثر T فإنّ $P_k f$ ينتمي إلى $D(T)$ و هذا يعني أنّ

$$P_k f \in \left(D(T) \cap H_k\right) = D(T_k)$$

بالإضافة إلى ذلك فإنّ

$$P_k T f = T P_k f$$

و لهذا فإنّ

$$T f = \sum_{k=1}^{n} P_k T f = \sum_{k=1}^{n} T P_k f = \sum_{k=1}^{n} T_k P_k f$$

و من هذا ينتج في حالة $n = \infty$ تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| T_k P_k f \right\|^2$$

لنفرض الآن أنّ الشروط (٣.١.٢) محققة. فإذا كان $n < \infty$ فإنّ انتماء f إلى $D(T)$ و المساواة (٣.١.٣) تنتجان من خطّية $D(T)$. أمّا إذا كان $n = \infty$ فإنّه من خطّية $D(T)$ ينتج أولاً انتماء المجاميع

$$\sum_{k=1}^{r} P_k f \quad ; \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

إلى $D(T)$. و من ثمّ من تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| T_k P_k f \right\|^2$$

ينتج تقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f = \lim_{r \to \infty} T \left(\sum_{k=1}^{r} P_k f \right)$$

و بما أنّ T مغلق فإنّ

$$f \in D(T) \text{ و } T f = \sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f$$

لنستعرض الآن المثال الآتي:

ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل و لتكن $\{e_i\}_{k=-\infty}^{\infty}$ قاعدة متعامدة – منظّمة فيه و لنستعرض في H المؤثّر الخطّي U_0 و المعرّف على أشعّة الواحدة بالعلاقات

$$U_0 e_k = e_{k+1} \quad (-\infty < k < \infty)$$

و لنمدد هذا المؤثّر بالاستمرار إلى مؤثّر وحدي. بملاحظة أنّ الغطاء الخطّي المغلق G لمجموعة الأشعة $\{e_i\}_{k=q}^{\infty}$ من أجل عدد ما q $(q > -\infty)$ هو فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ U_0 إلا أنّ G لا يختزل المؤثّر U_0. في الواقع، إذا كان P مؤثّر الإسقاط على G فإنّ

$$U_0 P e_{q-1} = 0 \qquad , \qquad P U_0 e_{q-1} = P e_q = e_q$$

أي إنّ

$$U_0 P \neq P U_0$$

إنّ المؤثر U_0 هو مثال لمؤثّر لا يمتلك أشعة خاصّة. في الحقيقة، لنفرض أنّ f شعاع خاص لـ U_0 منتمٍ للقيمة الخاصّة λ. أي إنّ

$$U_0 f = \lambda f \quad ; f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k \neq 0$$

و منه نجد أنّ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_{k+1} = \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k$$

و بالتالي فإنّ

$$\alpha_k = \lambda \alpha_{k+1} \quad ; \quad (-\infty < k < \infty)$$

و بما أنّ

$$(f, f) = (U_0 f, U_0 f) = (\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f, f)$$

و $f \neq 0$ فإنّ $|\lambda| = 1$ و لذلك فإنّ

$$|\alpha_k| = |\alpha_0| \quad ; \quad (\text{m}k = 1, 2, 3, \text{K})$$

و هذا يخالف الفرض بأنّ

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

و بما أنّه لا توجد أشعّة خاصّة للمؤثّر U_0 فإنّه لا توجد فضاءات جزئية منتهية البعد تختزل المؤثّر U_0. (يبرهن على وجود فضاءات جزئية لا نهائيّة عدد الأبعاد تختزل المؤثر U_0).

الفضاءات الجزئية اللامتغيّرة بالنسبة لمؤثّر مترافق ذاتيا: ليكن A مؤثّراً مترافقاً ذاتياً في فضاء هيلبرت H. و لنستعرض بعض الخواصّ التي تتمتع بها الفضاءات الجزئية اللامتغيّرة بالنسبة لـ A.

إذا كان $\mathcal{N}$ فضاء جزئياً لا متغيّراً بالنسبة للمؤثّر A فإنّ المتممة المعامدة M لـ $\mathcal{N}$: $M = H \ominus \mathcal{N}$ هي أيضاً فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ A. في الواقع، إذا كان x عنصراً ما من M فإنّه من أجل أي عنصر y من $\mathcal{N}$ يكون $(x, y) = 0$ و بما أنّ $A y \in \mathcal{N}$ فإنّ $(x, A y) = 0$ و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ $(A x, y) = 0$ من أجل أي عنصر y من $\mathcal{N}$ و هذا يعني أنّ $A x \in M$.

مبرهنة (٤): القيم الخاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً أعداد حقيقية و الأشعّة الخاصّة المنتمية لقيم خاصّة مختلفة متعامدة.

البرهان: لتكن λ قيمة خاصّة للمؤثّر A و ليكن $f \neq 0$ الشّعاع الخاص المنتمي لتلك القيمة، أي إنّ

$$A f = \lambda f \quad , f \neq 0$$

عندئذٍ نجد

$$(A f , f) = \lambda (f , f)$$

و بما أنّ $(A f, f)$ حقيقي من أجل المؤثّر المترافق ذاتياً و أنّ $(f, f) > 0$ فإنّ λ عدد حقيقي. لإثبات الجزء الثاني من المبرهنة نفرض أنّ

$$A f_1 = \lambda_1 f_1 \text{ و } A f_2 = \lambda_2 f_2 \quad ; \lambda_1 \neq \lambda_2$$

عندئذٍ يكون

$$\lambda_1 (f_1, f_2) = (A f_1, f_2) = (f_1, A f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2)$$

و منه نجد

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$$

و بالتالي فإنّ

$$(f_1, f_2) = 0$$

لتكن $\Delta_A(\lambda)$ ساحة قيم المؤثّر $A_\lambda = A - \lambda I$ أي مجموعة العناصر من الشكل $y = (A - \lambda I)x$ حيث $x \in H$. لتكن الآن λ قيمة خاصّة للمؤثّر A و ليكن $N_A(\lambda)$ الفضاء الجزئي الخاص المنتمي للقيمة λ بسهولة يمكن التأكد من أنّ

$$H = \overline{\Delta_A(\lambda)} \oplus N_A(\lambda)$$

في الحقيقة، إذا كان y من $\Delta_A(\lambda)$ و u من $N_A(\lambda)$ فإنّ

$$(y, u) = ((A - \lambda I)x, u) = (x, Au - \lambda u) = (x, 0) = 0$$

و بالتالي فإنّ $\Delta_A(\lambda) \perp N_A(\lambda)$. إذا كان y من $\overline{\Delta_A(\lambda)}$ و $y \notin \Delta_A(\lambda)$ فإنّه توجد متتالية $\{y_n\}$ من $\Delta_A(\lambda)$ متقاربة إلى y : $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ و من المساواة $(y_n, u) = 0$ نجد أنّ

$$(y, u) = \lim_{n\to\infty}(y_n, u) = 0$$

و بالتالي فإنّ $\overline{\Delta_A(\lambda)} \perp N_A(\lambda)$.

لنفرض الآن $(y, u) = 0$ من أجل أي عنصر y من $\Delta_A(\lambda)$. أياً كان العنصر x من H يكون

$$0 = (Ax - \lambda x, u) = (x, Au - \lambda u)$$

و منه فإنّ $$Au - \lambda u = 0$$

أي إنّ $u \in N_A(\lambda)$ و بالتالي فإنّ

$$N_A(\lambda) = H \ominus \Delta_A(\lambda) = H \ominus \overline{\Delta_A(\lambda)}$$

هكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة (٥): الفضاء الجزئي الخاص المنتمي للقيمة الخاصّة λ للمؤثّر المترافق ذاتياً A هو المتممة المتعامدة في H للمتنوعة الخطيّة $\Delta_A(\lambda) = (A - \lambda I)\, D(T)$.

وفقاً لما ذكرناه أعلاه يكون $\overline{\Delta_A(\lambda)}$ فضاء جزئياً لا متغيّراً بالنسبة للمؤثّر المترافق ذاتياً A.

لنرمز بـ N للمجموع المتعامد لجميع الفضاءات الجزئية $N_A(\lambda)$ أي للغطاء الخطّي المغلق لجميع العناصر الخاصّة للمؤثّر A. إنّ N فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ A. إذا كان H فضاء قابلاً للفصل فإنّه في كل فضاء جزئي $N_A(\lambda)$ يمكننا بناء جملة تامّة منتهية أو قابلة للعد و متعامدة – منظّمة من الأشعّة الخاصّة. و بما أنّ الأشعة الخاصّة المنتمية إلى فضاءات جزئيّة مختلفة من $N_A(\lambda)$ متعامدة فإنّه بجمع تلك الجمل نحصل على جملة متعامدة من الأشعّة الخاصّة $\{x_n\}$ تامّة في N.

الفضاءات الجزئية اللامتغيّرة بالنسبة للمؤثّرات الوحدية: ليكن V مؤثّراً إيزومترياً من فضاء هيلبرت H_1 على فضاء هيلبرت H_2.

مبرهنة (٦): القيمة المطلقة للقيم الخاصّة للمؤثّر الإيزومتري تساوي الواحد و أنّ الأشعّة الخاصّة المنتمية إلى قيم خاصّة مختلفة متعامدة.

البرهان: في الواقع، ليكن

$$Vf = \lambda f$$

عندئذٍ يكون

$$(f,f) = (Vf, Vf) = (\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f,f)$$

ومنه نجد أنّ $|\lambda|^2 = 1$ و ذلك لأنّ $(f,f) \neq 0$.

من ناحية ثانية، إذا كان $Vf_1 = \lambda_1 f_1$ و $Vf_2 = \lambda_2 f_2$ فإنّ

$$(f_1, f_2) = (Vf_1, Vf_2) = (\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \overline{\lambda_2} (f_1, f_2)$$

و منه نجد

$$(1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2})\ (f_1, f_2) = 0$$

و هذا يعني أنّ $(f_1, f_2) = 0$ و ذلك لأنّ $(1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \neq 0$.

مبرهنة (٧): الشرط اللازم و الكافي كي يختزل الفضاء الجزئي G المؤثّر الوحدي U هو أن يكون G فضاء جزئياً لا متغيّراً بالنسبة لكل من U و U^{-1}.

البرهان: لنفرض أنّ الفضاء الجزئي G يختزل المؤثّر U عندئذٍ تكون المتممة المعامدة $H \ominus G$ فضاء جزئياً لا متغيّراً بالنسبة لـ U أي إنّه من أجل أي عنصر $f \in H \ominus G$ و أي عنصر $g \in G$ يكون

$$(Uf\ ,\ g) = 0$$

ومنه نجد أنّ

$$(f\ , U^{-1} g) = 0$$

و هذا يعني أنّ $U^{-1} g \in G$ أي إنّ G فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ U^{-1}.

بالعكس، ليكن G فضاءً جزئياً لا متغيّراً بالنسبة لـ U^{-1}، عندئذٍ من أجل أي عنصر $f \in H \ominus G$ و أي عنصر $g \in G$ يكون

$$(Uf\ ,\ g) = (f\ , U^{-1} g) = 0$$

و من هذا ينتج أنّ الفضاء الجزئي $H \ominus G$ لا متغيّر بالنسبة لـ U بالإضافة إلى ذلك فإنّ G لا متغيّر بالنسبة لـ U بالفرض، و بالتالي فإنّ G يختزل المؤثّر U.

§ ٢ . مفاهيم طيفية

Spectral Notions

مفهوم الطيف: كنا قد تعرضنا في أسس التحليل التابعي (١) إلى مفهوم القيم النظامية لمؤثّر و وجود المؤثّر الحال $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ و عرّفنا طيف المؤثّر بأنّه مجموعة جميع قيم λ من المستوي العقدي و التي ليست نظاميّة. هنا سنستعرض بالتفصيل مفهوم طيف المؤثّر بالنسبة لمؤثّر كيفي و من ثمّ سنستعرض و بشكل منفصل ذلك المفهوم بالنسبة لصفوف مختلفة من المؤثّرات الخطّية و المحدودة.

يعرّف طيف مصفوفة ، في الجبر الخطّي، بأنّه مجموعة قيمها الخاصّة، بينما يعرّف الطيف في نظرية المعادلات التكاملية بأنّه مجموعة الأعداد المميزة لتلك المعادلة وفقاً لذلك تكون بعض المعادلات غير المتجانسة (متجهية أو تابعية) و المتعلقة بوسيط λ قابلة للحل و بشكل وحيد أياً كان الطرف الأيمن من المعادلة إذا كانت λ غير منتمية للطيف و بشكل عام يقولون إنّ المعادلة غير قابلة للحل إذا انتمت λ للطيف.

نأتي الآن إلى العرض العام و لنفرض أنّه لدينا مؤثّر خطّي و مغلق T، و معرّف على متنوعة خطّية $D(T)$ كثيفة في H و ليكن λ وسيطاً سلّمياً يمكن له أن يأخذ أية قيمة عددية مركّبة و لنستعرض المعادلة المؤثّرية

$$Tf - \lambda f = g$$

إنّ دراسة هذا المعادلة تؤول إلى دراسة المتنوّعة الخطّية $\Delta_T(\lambda)$ الممسوحة بالشعاع $(T-\lambda I)f$ عندما يمسح الشعاع f المتنوعة $D(T)$ و باختصار يمكن كتابة $\Delta_T(\lambda)$ على الشكل

$$\Delta_T(\lambda) = (T - \lambda I)\, D(T)$$

إنّ المؤثر $T_\lambda = (T - \lambda I)$ يحقق تقابلاً (ليس بالضرورة أن يكون غامراً و متبايناً) بين $D(T)$ و $\Delta_T(\lambda)$. إذا كان ذلك التقابل (١-١) (غامراً و متبايناً) فإنّ مقلوب المؤثّر $(T-\lambda I)$ يكون موجوداً و تكون ساحة تعريف $(T-\lambda I)^{-1}$ هي $\Delta_T(\lambda)$ أمّا ساحة قيمه فهي $D(T)$.

تعريف (١): نسمّي قيم الوسيط λ التي من أجلها يكون المؤثّر المقلوب $(T-\lambda I)^{-1}$ موجوداً و معرّفاً على H $(\Delta_T(\lambda) = H)$ و محدوداً **بالقيم النظاميّة** للمؤثّر T. في هذه الحالة نقول إنّ λ تنتمي إلى المجموعة الحالة $\rho(T)$ للمؤثّر T (*resolvent set*). و تشكل جميع نقاط المستوي العقدي الأخرى **طيف المؤثّر T**.

في الحالات المشار إليها أعلاه و التي تنسب إلى الجبر الخطّي و نظرية المعادلات التكاملية، يتألف طيف المؤثّر من جميع قيمه الخاصّة إلا أنّه بشكل عام لا تغطّي مجموعة القيم الخاصّة الطيف و إنّ المبرهنة (١) الواردة أدناه تميّز القيم الخاصّة للمؤثّر بأنّها تلك القيم للوسيط λ التي من أجلها لا يوجد مقلوب للمؤثّر $(T-\lambda I)$ و بين تلك القيم يمكن أن تظهر قيم لـ λ يكون من أجلها $(T-\lambda I)^{-1}$ موجوداً إلا أنّه ليس معرّفاً على الفضاء H بأكمله أو أنّه غير محدود.

مبرهنة (١): إنّ المؤثّر $T_\lambda = (T - \lambda I)$ يكون تطبيقاً غامراً و متبايناً من $D(T)$ على $\Delta_T(\lambda)$ إذا و فقط إذا لم تكن λ قيمة خاصّة للمؤثّر.

البرهان: إذا لم يكن المؤثر $T_\lambda = (T - \lambda I)$ تطبيقاً غامراً و متبايناً بين $D(T)$ و $\Delta_T(\lambda)$ فإنّه يوجد عنصران مثل f_1 و f_2 من $D(T)$ و $(f_1 \neq f_2)$ بحيث إنّ

$$T f_2 - \lambda f_2 = g \quad , T f_1 - \lambda f_1 = g$$

و بالتالي فإنّ

$$T f = \lambda f$$

حيث $f = f_1 - f_2 \neq 0$. أي إنّ λ قيمة خاصّة للمؤثر T.

لتكن الآن λ قيمة خاصّة للمؤثّر T و لنفرض وجود حل للعلاقة $(T - \lambda I) f = g$ من أجل تلك القيمة لـ λ لنرمز لذلك الحل بـ f_0. أي إنّ

$$(T - \lambda I) f_0 = g$$

لنبرهن على أنّ هذا الحل ليس وحيداً. في الواقع، إذا كان $f_1 \neq 0$ شعاعاً خاصّاً للمؤثّر T منتمياً للقيمة λ، أي إنّ $T f_1 - \lambda f_1$ فإنّنا نجد أنّ

$$T(f_0 + f_1) - \lambda(f_0 + f_1) = g$$

أي إنّ $(f_0 + f_1)$ حل للمعادلة المذكورة و هذا يعني أنّ T_λ ليس غامراً و متبايناً.

تعريف (٢): إذا كانت المتنوّعة الخطّية $\Delta_T(\lambda)$ كثيفة في H و كان المقلوب $(T - \lambda I)^{-1}$ موجوداً إلا أنّه غير محدود فإنّنا نقول إنّ λ تنتمي إلى $C\,\sigma(T)$ الطيف المستمر للمؤثّر T (*Continuous Spectrum*).

تعريف (٣): إذا كانت المتنوعة الخطّية $\Delta_T(\lambda)$ غير كثيفة في H و إذا وجد للمؤثّر $(T - \lambda I)$ مقلوب محدود أو غير محدود فإنّنا نقول إنّ λ تنتمي إلى الطيف الباقي $R\,\sigma(T)$ للمؤثّر T (*Residual Spectrum*).

تعريف (٤): إذا كان المؤثّر $(T - \lambda I)^{-1}$ غير موجود فإنّنا نقول إنّ λ تنتمي إلى الطيف النقطي $P\,\sigma(T)$ للمؤثّر T (*Point Spectrum*).

لنلاحظ أنّ هذا الطيف يتألف تماماً من القيم الخاصّة للمؤثّر T.

التعريف	المؤثّر $(T-\lambda I)^{-1}$	محدودية $(T-\lambda I)^{-1}$	المتنوّعة الخطّية $\Delta_T(\lambda)$	المجموعة التي تنتمي لها λ
١	موجود	محدود	كثيفة في H	$\rho(T)$
٢	موجود	غير محدود	كثيفة في H	$C\ \sigma(T)$
٣	موجود	محدود أو غير محدود	ليست كثيفة في H	$R\ \sigma(T)$
٤	غير موجود		كثيفة أو غير كثيفة في H	$P\ \sigma(T)$

لنلاحظ أنّ المجموعات التي تنتمي لها λ في الجدول أعلاه غير متقاطعة و بالتالي فإنّ كل عنصر λ من المستوي العقدي يمكن له أن ينتمي إلى واحدة فقط من تلك المجموعات المذكورة و بالتالي يكون لدينا التقسيم الوحيد لـ £:

$$£ = \rho(T) \cup C\ \sigma(T) \cup R\ \sigma(T) \cup P\ \sigma(T)$$

تعريف (٥): نسمّي المجموعة $C\ \sigma(T) \cup R\ \sigma(T) \cup P\ \sigma(T)$ و التي نرمز لها بـ $\sigma(T)$ بطيف المؤثّر T. هكذا فإنّ طيف المؤثّر T هو اجتماع طيفه المستمر و طيفه الباقي و طيفه النقطي.

لنلاحظ أنّه إذا كان H منتهي البعد و كان T معرّفاً على H و كان $(T-\lambda I)^{-1}$ موجوداً فإنّه يكون محدوداً (جميع المؤثّرات الخطّية في الفضاءات المنتهية البعد محدودة) أكثر من ذلك إذا كان $(T-\lambda I)^{-1}$ موجوداً فإنّ المؤثّر $(T-\lambda I)$ يكون غامراً و متبايناً أي إنّه يحقق تطبيقاً (١-١) للفضاء المنتهي البعد على نفسه، و بالتالي فإنّ $\Delta_T(\lambda)=H$. و إذا كان $(T-\lambda I)^{-1}$ موجوداً على H فإنّه يكون محدوداً كما أنّ المتنوعة الخطّية $\Delta_T(\lambda)$ تكون كثيفة في H و تبعاً لذلك يسقط التعريفان (٢) و (٣) و بذلك تتحقق المبرهنة الآتية

مبرهنة (٢): إذا كان T مؤثّراً خطّياً معرّفاً على الفضاء المنتهي البعد H فإنّ $R\ \sigma(T) = \varnothing$ و كذلك $C\ \sigma(T) = \varnothing$.

إنّ مجموعة المؤثّرات الخطّية ذات السلوك المماثل كثيراً للمؤثّرات الخطّية في الفضاءات المنتهية البعد هي مجموعة المؤثّرات التامّة الاستمرار. من أجل هذه المؤثّرات يكون الصفر هو العدد الوحيد الممكن أن ينتمي إلى الطيف الباقي أو الطيف المستمر و بالإضافة لذلك فإنّ الطيف النقطي هو على الأكثر مجموعة قابلة للعد و هذا ما سنثبته في المبرهنة الآتية

مبرهنة (٣): ليكن المؤثّر T تام الاستمرار ($T : D(T) \to H$) عندئذٍ يكون الطيف النقطي $P\ \sigma(T)$ على الأكثر مجموعة قابلة للعد (من الممكن أن يكون خالياً) و تكون نقطة الصفر هي نقطة التجمع الوحيدة الممكنة له.

البرهان: لنبرهن على أنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد على الأكثر عدد منته من النقاط في المجموعة

$$P_\varepsilon = \left\{ \lambda \in P\ \sigma(T) \middle| \quad |\lambda| \geq \varepsilon \right\}$$

أي إنّه يوجد عدد منته من القيم الخاصّة λ المحققة للمتراجحة $|\lambda| \geq \varepsilon$. لنفرض العكس، أي إنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد غير منته من النقاط $\lambda \in P_\varepsilon$. بما أنّ العدد غير منته فإنّه يمكننا اختيار متتالية $\{\lambda_i\}$ جميع أعدادها مختلفة فيما بينها.

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \in P_\varepsilon \qquad (٣.٢.١)$$

لنفرض أنّ

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (٣.٢.٢)$$

متتالية الأشعة الخاصّة المنتمية للقيم الخاصّة (٣.٢.١) على الترتيب؛ أي إنّ

$$T\, x_n = \lambda_n\, x_n$$

و بما أنّ هذه الأشعّة توافق قيماً خاصّة مختلفة فيما بينها فإنّها تكون مستقلة خطّياً.

لنبرهن على أنّ مجموعة العناصر

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

من أجل أي عدد k مستقلة خطّياً. من أجل $k = 1$ القضية محققة. لنفرض الآن أنّ الأشعة

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

مستقلة خطّياً و لنبرهن على أنّ

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$$

مستقلة خطّياً. إذا كان

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \qquad (٣.٢.٣)$$

فإنّه بتطبيق المؤثّر T على طرفي العلاقة (٣.٢.٣) نجد

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x_i \qquad (٣.٢.٤)$$

من (٣.٢.٣) و (٣.٢.٤) ينتج أنّ $(\lambda_{k+1} \neq 0)$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right) c_i x_i = 0$$

و هذا غير ممكن لأنّ $1 - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} \neq 0$ و لأنّ الأشعّة $x_1, x_2, \ldots, x_k$ مستقلة خطّياً.

ليكن $\mathcal{M}_k$ الفضاء الجزئي المولّد بالعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_k$. بما أنّ $\mathcal{M}_k$ فضاء جزئي من الفضاء $\mathcal{M}_{k+1}$ فإنّه يوجد عنصر مثل $y_{k+1} \in \mathcal{M}_{k+1}$ و $\|y_{k+1}\| = 1$ و بحيث إنّ

$$\|y_{k+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$$

أياً كان العنصر $x \in \mathcal{M}_k$. لنقدر الآن $\|T y_m - T y_n\|$ مع الفرض بأنّ $n < m$ و أنّ $T_{\lambda_i} = T - \lambda_i I$:

$$T\,y_m - T\,y_n = \lambda_m\, y_m + T_{\lambda_m}\, y_m - \lambda_n\, y_n - T_{\lambda_n}\, y_n = \lambda_m\, y_m - \tilde{x}$$

حيث

$$\tilde{x} = \lambda_n\, y_n + T_{\lambda_n}\, y_n - T_{\lambda_m}\, y_m$$

لنلاحظ الآن أنّ

$$T_{\lambda_m}\, y_m = T\, y_m - \lambda_m\, y_m = T\,(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, x_i) - \lambda_m \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_i\, x_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \lambda_m\, x_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i\, (\lambda_i - \lambda_m)\, x_i$$

ولذلك فإنّ

$$T_{\lambda_m}\, y_m \in \mathcal{M}_{m-1}$$

و بما أنّ

$$y_n \in \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_{m-1}$$

و

$$T_{\lambda_n}\, y_n \in \mathcal{M}_{n-1} \subset \mathcal{M}_{m-1}$$

فإنّ

$$\tilde{x} \in \mathcal{M}_{m-1}$$

لنضع $\tilde{x} = \lambda_m\, \tilde{y}$ حيث إنّ $\tilde{y} \in \mathcal{M}_{m-1}$ فنجد أنّ

$$\left\| T\, y_m - T\, y_n \right\| = \left\| \lambda_m\, y_m - \lambda_m\, \tilde{y} \right\| = \left| \lambda_m \right| \left\| y_m - \tilde{y} \right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

و بالتالي فإنّه لا المتتالية $\{T\, y_n\}$ و لا أية متتالية جزئية منها يمكن لها أن تتقارب. من ناحية ثانية، إنّ المتتالية $\{y_n\}$ محدودة و بالتالي تكون صورتها $\{T\, y_n\}$ متراصّة؛ أي إنّها تحتوي على متتالية جزئية متقاربة بذلك نحصل على تناقض و هو ما يثبت المبرهنة.

طيفا مؤثّرين خاصّين:

مثال (١): ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل و لتكن

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

جملة متعامدة – منظّمة تامّة في H عندئذٍ يمثل أي عنصر $x \in H$ على الشكل

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \qquad (٣.٢.٥)$$

حيث $\alpha_n = (x, e_n)$. لتكن $\{\lambda_n\}$ متتالية عددية بحيث إنّ $\lambda_n \to 1$ و أياً من $\lambda_n \neq 1$.

ليكن T مؤثّراً معرّفاً في الفضاء H (*) ($T : H \to H$) بالعلاقة

$$T x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n \qquad (٣.٢.٦)$$

و لنبرهن على أنّ T يتمتّع بالخواص الآتية:

١) $\lambda_n \in P\,\sigma(T)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

٢) $1 \in C\,\sigma(T)$.

٣) إذا كانت $\lambda \neq \lambda_n$ من أجل أي عدد n و كانت $\lambda \neq 1$ فإنّ $\lambda \in \rho(T)$.

٤) $R\,\sigma(T) = \varnothing$.

بما أنّ $T e_n = \lambda_n e_n$ من أجل أي عدد n فإنّ الخاصّة ١) تنتج مباشرة. لنبرهن الآن الخاصّة ٢). إنّ ذلك يقتضي إثبات وجود مقلوب للمؤثّر $(T - I)$ غير محدود و أنّ $\Delta_T(1)$ كثيفة في H. لنضع

$$T_1 = T - I$$

(*) من الواضح أنّ $T x \in H$. في الواقع، بما أنّ المتتالية $\{\lambda_n\}$ متقاربة فإنها تكون محدودة. ليكن $|\lambda_n| \leq M$، عندئذٍ نجد أنّ

$$\|T x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\lambda_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = M^2 \|x\|^2$$

و لنبين أنّ T_1^{-1} موجود (معرّف على $\Delta_T(1)$). بغية ذلك سنبرهن على أنّ T_1 يحقق تطبيقاً (١-١) أي إنّه غامر و متباين، من أجل ذلك نفرض أنّ

$$T_1 x = \theta$$

و لنبرهن على أنّ $x = \theta$. في الواقع، إنّ $T_1 x = \theta$ تعني أنّ $T_1 x = x$ و استناداً للعلاقتين (٣.٢.٥) و (٣.٢.٦) نجد

$$(T - I)x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda_n - 1) e_n = 0$$

و بما أنّ $\{e_n\}$ جملة متعامدة – منظّمة و تامّة فإنّه يكون

$$\|(T - I)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\lambda_n - 1|^2 = 0$$

و بما أنّ $\lambda_n \neq 1$ من أجل أي عدد n فإنّ العلاقة الأخيرة تؤدّي إلى أنّ $\alpha_n = 0$ من أجل جميع الأعداد n و بالتالي فإنّ $x = \theta$. أي إنّ نواة المؤثّر T_1 تتألف من عنصر واحد هو العنصر الصفري و هذا بدوره يؤدي إلى وجود المؤثّر T_1^{-1}.

بما أنّ

$$T_1 e_n = (T - I)e_n = (\lambda_n - 1) e_n \qquad (٣.٢.٧)$$

فإنّ

$$\|T_1 e_n\| = |\lambda_n - 1| \to 0 \qquad (٣.٢.٨)$$

و بما أنّ الشرط اللازم و الكافي لوجود مقلوب محدود للمؤثّر T_1 هو تحقق المتراجحة

$$k \|x\| \leq \|T_1 x\| \quad \forall\, x \in H \qquad (٣.٢.٩)$$

أي وجود عدد ثابت مثل $k > 0$ يحقق المتراجحة (٣.٢.٩). في ضوء العلاقة (٣.٢.٨) مثل هذا الثابت k لا يمكن أن يكون موجوداً و هذا بدوره يعني أنّ T_1^{-1} غير محدود.
لإثبات أنّ $\Delta_T(1)$ كثيفة في H علينا ملاحظة أنّه من أجل أي عدد n يكون

$$T_1\left(\frac{e_n}{\lambda_n - 1}\right) = e_n$$

أي إنّ $e_n \in \Delta_T(1)$ و هذا بدوره يؤدي إلى أنّ

$$\left[\{e_1, e_2, K, e_n, K\}\right] \subset \Delta_T(1)$$

و بما أنّ $\{e_n\}$ جملة متعامدة – منظّمة و تامة فإنّ

$$\overline{\left[\{e_1, e_2, K, e_n, K\}\right]} = H$$

و هذا بدوره يعني أنّ $\overline{\Delta_T(1)} = H$ و بالتالي فإنّ $1 \in C\,\sigma(T)$

نأتي الآن لإثبات الخاصّة ٣). لنفرض أنّ العدد λ هو بحيث إنّ $\lambda \neq \lambda_n$ من أجل أي عدد n و أنّ $\lambda \neq 1$. من أجل مثل هذا العدد λ يوجد عدد حقيقي مثل $a_\lambda > 0$ و بحيث إنّ

$$|\lambda_n - \lambda| > a_\lambda > 0 \quad (\forall\, n)$$

و ذلك لأنّ عدم وجود مثل ذلك العدد $a_\lambda > 0$ يناقض حقيقة أنّ العدد ١ هو نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة $\{\lambda_1, \lambda_2, K\}$ (*). إنّ هدفنا الآن هو أن نبيّن أنّ مثل هذا العدد λ ينتمي إلى $\rho(T)$. إنّ هذا يقتضي إثبات وجود مقلوب محدود للمؤثر $(T - \lambda I)$ و أنّ $\Delta_T(\lambda)$ كثيفة في H.

بما أنّ

$$T_\lambda x = T x - \lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda_n - \lambda)\, e_n$$

فإنّنا نجد أنّ

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \|T_\lambda x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\lambda_n - \lambda|^2 \geq a_\lambda^2 \|x\|^2$$

و بالتالي فإنّ

(*) لنلاحظ أنه إذا كانت $\lambda \notin \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, K\}}$ فإنّ λ تقع على مسافة موجبة من لصاقة $\{\lambda_1, \lambda_2, K\}$.

$$\|T_{\lambda} x\| \geq a_{\lambda}\|x\| \quad ; \forall x \in H$$

و هذا يعني وجود مقلوب محدود للمؤثر T_{λ}. لنبيّن الآن أنّ المؤثّر T_{λ} هو تطبيق لـ H على H و بالتالي فإنّ ساحة قيمه تكون كثيفة في H. للبرهان على أنّه تطبيق على H نأخذ عنصراً ما y من H و ليكن

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n}\, e_{n}$$

و لنبرهن على وجود عنصر مثل $x \in H$ بحيث يكون $T_{\lambda} x=y$ أو بشكل مكافئ، إيجاد عنصر

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n}\, e_{n}$$

بحيث يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n}(\lambda_{n}-\lambda)\, e_{n}=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n}\, e_{n}$$

بأخذ

$$\alpha_{n}=\frac{\beta_{n}}{\lambda_{n}-\lambda}$$

يكون علينا إثبات أنّه من أجل α_{n} المذكورة يكون المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n}\, e_{n}$ عنصراً من الفضاء H. أي إنّه علينا أن نثبت بأنّ $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n}|^{2}<\infty$ في الواقع، إنّ هذا الأمر محقق تأكيداً و ذلك لأنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n}|^{2}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta_{n}|^{2}}{|\lambda_{n}-\lambda|^{2}}<\frac{1}{a_{\lambda}^{2}} \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n}|^{2}<\infty$$

بالتالي فإنّ $\Delta_{T}(\lambda)=H$ و هكذا نجد أنّه من أجل أي عدد λ، $\lambda \neq \lambda_{n}$ من أجل جميع الأعداد n و $\lambda \neq 1$ يكون λ عنصراً من المجموعة $\rho(T)$ وفقاً لما ذكرنا يكون الطيف الباقي $R\,\sigma(T)$ خالياً، أي إنّ

$$R\,\sigma(T)=\varnothing$$

مثال (٢): ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل و لتكن

$$e_1, e_2, K, e_n, K$$

جملة متعامدة – منظمّة و تامّة في H، عندئذٍ أي عنصر $x \in H$ يمثّل على الشكل

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

ليكن T مؤثراً معرّفاً في H بالعلاقة

$$T x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} e_{n+1}$$

يسمّى هذا المؤثّر بمؤثّر التدمير (*destruction operator*)، تبعاً لما ذكرناه نجد أنّ

$$T e_1 = \frac{e_2}{2} \quad , \quad T e_2 = \frac{e_3}{3} \quad , \quad K$$

و لنبرهن على وجود المؤثر T^{-1}. لنفرض أنّ

$$T x = \theta$$

و لنبيّن بأنّ $x = \theta$. في الواقع، إنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} e_{n+1} = \theta$$

يعني أنّ $\alpha_n = 0$ مع $n = 1, 2, \ldots$ و هذا يؤدّي إلى أنّ $x = \theta$. و بالتالي فإنّ T^{-1} موجود و معرّف على $\Delta(T)$. من الواضح أنّ $e_1 \notin \Delta(T)$ و بسهولة يمكن التأكد من أنّ

$$\overline{\Delta(T)} = \overline{\left[\{e_2, e_3, K\}\right]} \neq H$$

أي إنّ ساحة قيم المؤثّر T ليست كثيفة في H. من ذلك ينتج أنّ

$$0 \in R\,\sigma(T)$$

و نترك للطالب التأكد من أنّه من أجل جميع $\lambda \neq 0$ تكون $\lambda \in \rho(T)$.

القيم الفعلية التقريبية: (*Approximate Proper Values*)

ليكن المؤثّر T معرّفاً في فضاء هيلبرت H ‏($T:H\to H$)

تعريف: نقول عن العدد λ إنّه قيمة فعلية تقريبية للمؤثّر T إذا وجد من أجل كل عدد $\varepsilon>0$ عنصر مثل $x\in H$ بحيث إنّ $\|x\|=1$ و

$$\|(T-\lambda I)x\|<\varepsilon \qquad (٣.٢.١٠)$$

من الواضح أنّه يمكننا صياغة التعريف على الشكل:

من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عنصر مثل x مغاير الصفر و بحيث إنّ

$$\|(T-\lambda I)x\|<\varepsilon\|x\| \qquad (٣.٢.١١)$$

لنرمز بـ($\pi(T)$) لمجموعة جميع القيم الفعلية التقريبية. تسمّى هذه المجموعة **بالطيف التقريبي** للمؤثّر T (*Apporximate Spectrum*).

مبرهنة (٤): الشرط اللازم و الكافي كي يكون العدد λ قيمة فعلية تقريبية للمؤثّر T هو عدم وجود مقلوب محدود للمؤثّر ($T-\lambda I$).

البرهان: لنفرض أنّ λ تنتمي لـ ($\pi(T)$)، عندئذٍ يوجد عنصر مثل x_n و بحيث إنّ $\|x_n\|=1$ و

$$\|(T-\lambda I)x_n\|<\frac{1}{n}$$

من أجل $n=1,2,3,\ldots$. من الواضح أنّ المتراجحة الأخيرة تحول دون إيجاد عدد $k>0$ تتحقق من أجله المتراجحة

$$k\|x\|\le\|(T-\lambda I)x\| \qquad (٣.٢.١٢)$$

من أجل جميع العناصر $x\in H$، و هذا بدوره يؤدّي إلى عدم وجود مقلوب محدود للمؤثّر ($T-\lambda I$).

بالعكس، إذا لم يوجد للمؤثّر ($T-\lambda I$) مقلوب محدود من أجل تلك القيمة لـ λ فإنّه بالتالي لا يوجد عدد مثل $k>0$ تتحقق من أجله المتراجحة (٣.٢.١٢) من أجل جميع العناصر $x\in H$. و هذا يعني أنّه من أجل أي عدد ε يمكن إيجاد عنصر $x\in H$ و بحيث إنّ

$$\| x \| = 1$$

و

$$\| (T - \lambda I) x \| < \varepsilon$$

و بالتالي فإنّ λ قيمة فعلية تقريبية للمؤثّر T.

نتيجة: من المبرهنة المثبتة أعلاه ينتج أنّ

$$\pi(T) \subset \sigma(T)$$

$$\lambda \in \pi(T) \Rightarrow \lambda \notin \rho(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma(T)$$

المؤثّر الحالّ: (*Resolvent Operatro*) ليكن T مؤثّراً خطّياً و مغلقاً و ساحة تعريفه كثيفة في H، يسمّى المؤثّر المتعلق بالوسيط λ

$$R_{\lambda} = (T - \lambda I)^{-1}$$

بالمؤثّر الحال للمؤثّر T و ذلك من أجل جميع القيم لـ λ التي من أجلها يكون R_{λ} موجوداً و تكون ساحة تعريفه $\Delta_T(\lambda)$ كثيفة في H.

إنّ المؤثّر الحال R_{λ} للمؤثر T في كل نقطة نظامية λ للمؤثّر T هو مؤثّر معرّفّ على كل الفضاء H و محدود، كما أنّه يحقق تطبيقاً (١-١) بين $\Delta_T(\lambda)$ و $D(T)$، من ذلك، و بشكل خاص، ينتج أنه إذا كان $R_{\lambda} h = 0$ من أجل قيمة نظامية ما λ للمؤثّر T فإنّ $h = 0$.

مبرهنة (٥): من أجل كل قيمتين نظاميّتين λ و μ للمؤثّر T تتحقق المساواة

$$R_{\mu} - R_{\lambda} = (\mu - \lambda) R_{\mu} R_{\lambda} \qquad (٣.٢.١٢)$$

و التي تعرف بعلاقة هيلبرت.

البرهان: بما أنّ λ و μ قيمتان نظاميّتان للمؤثّر T، فإنّه من أجل أي عنصر $h \in H$ يكون

$$R_{\lambda} h = R_{\mu}(T - \mu I) R_{\lambda} h \quad , \quad R_{\mu} h = R_{\mu}(T - \lambda I) R_{\lambda} h$$

بطرح هاتين العلاقتين نحصل على العلاقة المطلوبة.

من علاقة هيلبرت تنتج تبادلية المؤثّرين الحالين R_λ و R_μ من أجل القيمتين النظاميتين λ و μ:

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

إنّ هذه الحالة هي حالة خاصّة من الحالة العامّة الآتية:

مبرهنة (٦): الشرط اللازم كي يكون المؤثّر T تبادلياً مع المؤثّر المحدود S و المعرّف في كل مكان في H هو أن يكون المؤثّر S تبادلياً مع المؤثّر الحال $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ من أجل كل قيمة نظامية λ، و يكفي أن يكون S و R_λ تبادليين من أجل قيمة نظامية λ واحدة على الأقل.

البرهان: لنفرض أنّ المؤثّرين T و S تبادليان، أي إنّ المساواة

$$TSf = STf$$

تتحقّق من أجل أي عنصر $f \in D(T)$.

إذا كانت λ قيمة نظامية للمؤثّر T و كان

$$f = R_\lambda h$$

فإنّ f يمسح $D(T)$ عندما h يمسح H. و بما أنّ T و S تبادليان فإنّه من أجل أي عنصر $f \in D(T)$ تتحقق العلاقة

$$(T - \lambda I)Sf = S(T - \lambda I)f$$

و هذا يعني أنّ

$$R_\lambda (T - \lambda I)Sf = R_\lambda S(T - \lambda I)f$$

و باستبدال f بـ $R_\lambda h$ نجد أنّ

$$R_\lambda S h = S R_\lambda h$$

بالعكس، لتكن λ قيمة نظامية للمؤثّر T و لنفرض أنّ

$$S R_\lambda h = R_\lambda S h \quad ; \forall h \in H$$

عندئذٍ يكون

$$(T-\lambda I)S R_{\lambda} h=(T-\lambda I) R_{\lambda} S h=S h$$

بوضع

$$h=(T-\lambda I) f \quad ; f \in D(T)$$

نجد أنّ

$$(T-\lambda I) S f=S(T-\lambda I) f \quad ; f \in D(T)$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ

$$T S f=S T f \quad ; f \in D(T)$$

§ ٣. طيوف بعض صفوف المؤثّرات

Spectra Of Some Classes Of Operator

أعطينا في الفقرة الثانية الاحتمالات الممكنة المتعلّقة بالمؤثّر $(T-\lambda I)^{-1}$ و بالساحة $\Delta_T(\lambda)$ و قد قابل ذلك تصنيف لطيف المؤثّر T. سنستعرض الآن الحالة الأهمّ، عندما يكون المؤثّر مترافقاً ذاتياً و بدلاً من T سنرمز له بـ A.

طيف المؤثّر المترافق ذاتياً: (*Spectrum of Self-Adjoint Operator*)

إضافةً لما ذكرنا في الفقرة الأولى من هذا الفصل حول القيم الخاصّة لمؤثّر ما T و حول الفضاءات الخاصّة سنذكر هنا أموراً مميّزة للمؤثّرات المترافقة ذاتياً.

مبرهنة (١): الشرط اللازم و الكافي كي تكون λ قيمة خاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً A هو أن يكون:

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$$

البرهان: لتكن λ قيمة خاصّة للمؤثّر A. أي إنّه يوجد عنصر $f \neq 0$ بحيث إنّ

$$A f=\lambda f \quad (f \neq 0)$$

في هذه الحالة و من أجل أي عنصر h من $D(A)$ يكون:

$$(f,(A-\lambda I) h)=(A f-\lambda f, h)=0$$

أي إنّ

$$f \perp \Delta_A(\lambda)$$

و هذا الأمر ممكن فقط إذا كان

$$\Delta_A(\lambda) \neq H$$

لنفرض الآن $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$، في هذه الحالة يوجد شعاع f في H مختلف عن الصفر و معامد للمتنوّعة الخطّيّة $\Delta_A(\lambda)$. لذا فإنّه من اجل أي عنصر $h \in D(A)$ يكون لدينا:

$$(f, (A - \lambda I) h) = 0$$

و هذا يعني أنّ

$$f \in D(A^*)$$

و أنّ

$$A^* f = \bar{\lambda} f$$

و بما أنّ $A = A^*$ فإنّه يكون:

$$A f = \bar{\lambda} f$$

أي إنّ $\bar{\lambda}$ قيمة خاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً A و هذا يعني أنّ λ حقيقي.

لنلاحظ أنّه في سياق البرهان أثبتنا مجدّداً المبرهنة (٥) الواردة في الفقرة الأولى.

مبرهنة (٢): الأعداد غير الحقيقيّة من المستوي المركّب £ هي نقاط نظاميّة للمؤثّر المترافق ذاتياً.

البرهان: إنّ العدد $\lambda = \xi + i\eta$ حيث $\eta \neq 0$، لا يمكن أن يكون قيمة خاصّة للمؤثّر A. و استناداً للمبرهنة (١) من الفقرة الثانية يكون المؤثّر $(A - \lambda I)^{-1}$ موجوداً. لنفرض أنّ

$$(A - \lambda I) f = g$$

عندئذٍ يكون

$$\|g\|^2=\|(A-\lambda I)f\|^2=((A-\xi I)f-i\eta f,(A-\xi I)f-i\eta f)$$
$$=\|(A-\xi I)f\|^2+i\eta((A-\xi I)f,f)-i\eta(f,(A-\xi I)f)+\eta^2\|f\|^2$$
$$=\|(A-\xi I)f\|^2+\eta^2\|f\|^2\geq\eta^2\|f\|^2$$

و منه نجد أنّ

$$\|f\|\leq\frac{1}{|\eta|}\|g\|$$

أي إنّ

$$\|(A-\lambda I)^{-1}g\|\leq\frac{1}{|\eta|}\|g\|$$

و بما أنّ هذه العلاقة محقّقة من أجل أي عنصر $g\in\Delta_A(\lambda)$ فإنّ المؤثّر $(A-\lambda I)^{-1}$ يكون محدوداً.

بما أنّ λ ليست قيمة خاصّة للمؤثّر A فإنّه استناداً إلى المبرهنة (١) يكون

$$\overline{\Delta_A(\lambda)}=H$$

و بذلك يتبقّى علينا أن نبرهن أنّ $\Delta_A(\lambda)$ مغلقة. لنفرض أنّ $\Delta_A(\lambda)\neq\overline{\Delta_A(\lambda)}$ و لتكن $\{y_n\}$ متتالية من $\Delta_A(\lambda)$ متقاربة إلى عنصر y من $\overline{\Delta_A(\lambda)}$، و لنفرض أنّ $\{y_n\}$ هو صورة العناصر $\{x_n\}$ بالمؤثّر $(A-\lambda I)$. أي إنّ

$$y_n=(A-\lambda I)x_n$$

بما أنّ المؤثّر $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود و محدود فإنّه يوجد ثابت مثل $k>0$ و بحيث تتحقّق المتراجحة

$$\|(A-\lambda I)x\|\geq k\|x\|\quad\forall x\in H$$

تبعاً لذلك نجد أنّ

$$\|x_n-x_m\|\leq\frac{1}{k}\|(A-\lambda I)x_n-(A-\lambda I)x_m\|$$
$$=C\|y_n-y_m\|$$

و بما أنّ المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة في نفسها فإنّ $\|y_n - y_m\| \to 0$ عندما $n, m \to \infty$ و هذا يعني أنّ $\|x_n - x_m\| \to 0$ عندما $n, m \to \infty$ أي إنّ المتتالية $\{x_n\}$ متتالية أساسيّة، و طالما أنّ H فضاء تام فإنّ المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى عنصر $x \in H$:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

وفقاً لذلك يكون:

$$(A - \lambda I)x = \lim_n (A - \lambda I)x_n = \lim_n y_n = y$$

و هكذا فإنّ $y \in \Delta_A(\lambda)$، أي أنّ $\Delta_A(\lambda)$ مغلقة و كثيفة في H.

نتيجة (١): إنّ طيف المؤثّر المترافق ذاتياً A يقع على المحور الحقيقي. وجدنا في الفصل الأوّل أنّه من أجل المؤثّر المترافق ذاتياً يكون:

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\} \qquad (١.٣.٣)$$

حيث:

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad ; \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

مبرهنة (٣): إنّ طيف المؤثّر المترافق ذاتياً يقع كلياً على المجال $[m, M]$ من المحور الحقيقي.

لإثبات هذه المبرهنة يكفي أن نبرهن على أنّ قيم λ الواقعة خارج المجال $[m, M]$ هي قيم نظاميّة.

لتكن $\lambda > M$ و لنفرض أنّ $\lambda = M + d$ حيث $d > 0$ عندئذٍ نجد:

$$\begin{aligned}(A_\lambda x, x) &= (Ax, x) - \lambda(x, x) \le \\ &\le M(x, x) - \lambda(x, x) = \\ &= (M - \lambda)(x, x) = -d(x, x) = -d\|x\|^2\end{aligned}$$

و بالتالي فإنّ:

$$|(A_\lambda x, x)| \ge d\|x\|^2$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$|(A_\lambda x, x)| \le \|A_\lambda x\| \|x\|$$

و بالتالي فإنّ:

$$\|A_\lambda x\| \ge d\|x\|$$

و هذه العلاقة تعني أنّ $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود و محدود أي أنّ λ قيمة نظاميّة .

بالمثل تماماً نبرهن الحالة $\lambda < m$.

مبرهنة (٤): العددان m, M ينتميان للطيف.

البرهان: لنبرهن، على سبيل المثال، أنّ M ينتمي لطيف المؤثّر A. نلاحظ أنّه إذا استبدلنا المؤثّر A بالمؤثّر A_μ فإنّ الطيف يخضع لإزاحة باتّجاه اليسار مقدارها μ و نتيجةً لذلك يستبدل العددان m, M بالعددين $M-\mu$ و $m-\mu$، لذلك و دون المسّ بعموميّة المسألة يمكننا اعتبار أنّ $0 \le m \le M$ و في هذه الحالة يكون:

$$M = \|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

و حسب تعريف الحدّ الأعلى الأصغري توجد متتالية من العناصر مثل $\{x_n\}$ بحيث إنّ $\|x_n\| = 1$ و

$$(Ax_n, x_n) = M - \delta_n \ , \delta_n \to 0, n \to \infty$$

بما أنّ

$$\|Ax_n\| \le \|A\| \|x_n\| = \|A\| = M$$

و أنّ

$$\begin{aligned}\|Ax_n - Mx_n\|^2 &= (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) \\ &= \|Ax_n\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2 \\ &\le M^2 - 2M(M-\delta_n) + M^2 = 2M\delta_n\end{aligned}$$

فإنّ

$$\|Ax_n - Mx_n\| \le \sqrt{2M\delta_n}$$

و بالتالي فإنّ

$$\|A x_n - M x_n\| \to 0 \;;\; \|x_n\| = 1$$

من هذه العلاقة يتّضح بأنّه لا يمكن أن يوجد مقلوب محدود للمؤثّر $A_M = (A - MI)$ و بالتالي فإنّ M تنتمي إلى طيف المؤثّر A.

نتيجة (٢): إنّ طيف كلّ مؤثّر مترافق ذاتيّاً غير خالٍ.

بالأخذ بعين الاعتبار المبرهنتين (١) و (٢) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة (٣): يمكن تعريف القيمة النظاميّة للوسيط λ على أنّها القيمة التي من أجلها يكون

$$\Delta_A(\lambda) = H$$

البرهان: إذا لم تكن λ عدداً حقيقيّاً فإنّ نظاميّتها قد حدّدت في المبرهنة (٢)، أمّا إذا كانت λ حقيقيّة، و كان $\Delta_A(\lambda) = H$ فإنّه استناداً إلى المبرهنة (١) لا يمكن أن تكون λ قيمة خاصّة للمؤثّر A. استناداً للمبرهنة (١) من الفقرة الثانية يكون المؤثّر $(A - \lambda I)$ غامراً و متبايناً و بالتالي فإنّ $(A - \lambda I)^{-1}$ موجود و معرّف على H و هذا المؤثّر مترافق ذاتيّاً(*) (λ عدد حقيقي) و بالتالي محدود و بالتالي فإنّ التعريف (١) الوارد في الفقرة الثانية محقّق أي أنّ λ قيمة نظاميّة.

يمكننا الآن و دون أن نناقض التعريف (١) المذكور في الفقرة الثانية أن نعطي التعريف الآتي:

تعريف (١): إذا كان A مؤثّراً مترافقاً ذاتيّاً فإنّ λ تكون نقطة نظاميّة للمؤثّر A إذا كان $\Delta_A(\lambda) = H$ و تكون نقطة من الطيف إذا كان $\Delta_A(\lambda) \neq H$.

سنذكر الآن تعريفاً يعطينا تصنيفاً لنقاط الطيف للمؤثّر المترافق ذاتيّاً.

تعريف (٢): نقول إنّ النقطة λ تنتمي للطيف النقطي للمؤثّر المترافق ذاتيّاً A إذا كان $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$ و إنّ λ تنتمي للطيف المستمرّ إذا كان $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$ أو إذا كانت λ قيمة خاصّة مكرّرة عدداً لا نهائيّاً من المرّات.

(*) إذا كان المؤثّر A معرّفاً على H و كان A مترافقاً ذاتيّاً فإنّ A مؤثّر محدود.

لنلاحظ أننا في هذا التعريف لم نستثن انتماء النقطة λ في الوقت نفسه للطيفين معاً حتّى في الحالة التي لا تكون فيها λ قيمة خاصّة مكرّرة عدداً لا نهائيّاً من المرّات.

استناداً للمبرهنة (١) آخذين بعين الاعتبار التعريف (٢) نجد أنّ الطيف النقطي يتطابق مع مجموعة القيم الخاصّة. تسمّى مجموعة النقاط المنعزلة من الطيف باستثناء القيم الخاصّة المكرّرة عدداً لا نهائيّاً من المرّات بالطيف المنفصل *(Discrete Spectrum)* (*)

من الجدير بالذكر أنّ هناك مؤثّرات تتمتّع بطيف نقطي فقط و أخرى تتمتّع بطيف مستمرّ فقط و سنوضح ذلك لاحقاً ببعض الأمثلة.

نأتي الآن إلى **المؤثّر الحالّ للمؤثّر المترافق ذاتياً** و سنعرف المؤثّر الحال R_λ للمؤثّر المترافق ذاتيّاً A أيضاً من أجل جميع القيم الخاصّة للمؤثّر A و بذلك يكون المؤثّر الحال R_λ معرّفاً في جميع نقاط المستوي العقدي £. بغية ذلك سنفرض أن λ' هي قيمة خاصّة للمؤثّر A و لنرمز بـ $N_A(\lambda')$ للفضاء الجزئي الخاصّ للمؤثّر A و المنتمي للقيمة λ'. إنّ الفضاء الجزئي كما نعلم، $N_A(\lambda')$ يختزل المؤثّر A. لنفرض أنّ A' هو جزء المؤثّر A الواقع في H' المتمّمة العامّة لـ $N_A(\lambda')$

$$H' = H ! \ N_A(\lambda')$$

بسهولة يمكن التأكّد من أنّ المؤثّر A' مترافق ذاتيّاً في H'، كما أنّ λ' ليست قيمة خاصّة له. لنعرّف $R_{\lambda'}$ ، بفرض أنّ:

$$R_{\lambda'} = (A' - \lambda' I)^{-1}$$

تكون ساحة تعريف المؤثّر $R_{\lambda'}$ هي المتنوّعة الخطيّة $\Delta_{A'}(\lambda')$ الكثيفة في H' و التي يرسمها الشعاع

(*) يبرهن على أنّ الطيف المنفصل جزء من الطيف النقطي للمؤثّر المترافق ذاتيّاً، انظر على سبيل المثال § ٩٣ من كتاب:

N.I Akhiezer, I. M. Glazman - Theory Of Linear Operators In Hilbert Space, Volume II

$$(A' - \lambda' I) f' = (A - \lambda' I) f'$$

عندما يمسح الشعاع f' المتنوّعة $D(A')$. بسهولة نرى أنّ هذه المتنوّعة يمسحها أيضاً الشعاع $(A - \lambda' I) f$ و ذلك عندما يمسح الشعاع f المتنوّعة $D(A)$، بهذه الصورة يكون:

$$\Delta_{A'}(\lambda') = \Delta_{A}(\lambda')$$

و أمّا ساحة قيم المؤثّر $R_{\lambda'}$ فهي $D(A')$ و تنتج من إسقاط $D(A)$ على المتمّمة المعامدة للفضاء الجزئي الخاصّ المنتمي للقيمة الخاصّة λ'.

لنبرهن أخيراً على أنّ:

$$(R_{\lambda})^{*} = R_{\overline{\lambda}} \qquad (٣.٣.٢)$$

لنفرض أنّ λ ليست قيمة خاصّة للمؤثّر (λ لا تنتمي للطيف النقطي)، استناداً للمبرهنة (٣) من الفقرة الأولى في الفصل الأوّل يكون:

$$(R_{\lambda})^{*} = \left[(A - \lambda I)^{-1}\right]^{*} = \left[(A - \lambda I)^{*}\right]^{-1} = (A - \overline{\lambda} I)^{-1} = R_{\overline{\lambda}}$$

و هو المطلوب.

مثال (١): ليكن المؤثّر A هو المؤثّر المطابق (الواحدي) I. إنّ طيف هذا المؤثّر يتألّف من قيمة خاصّة وحيدة هي $\lambda = 1$ و يكون الفضاء الخاصّ المنتمي إلى هذه القيمة هو $H_1 = H$. من أجل $\lambda \neq 1$ يكون المؤثّر $R_{\lambda} = \dfrac{1}{1-\lambda} I$ محدوداً.

مثال (٢): ليكن المؤثّر A: ($A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$) معرّفاً بالعلاقة:

$$A\, x(t) = t\, x(t) \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

من الواضح أنّ

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) = 0 \;\; , \;\; M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) \le 1$$

لنبرهن على أنّ جميع نقاط المجال $[0,1]$ تنتمي لطيف المؤثّر A (من ذلك ينتج أنّ $M = 1$).

في الحقيقة، لتكن $0 \le \lambda \le 1$ و لنستعرض المجال $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ (أو $[\lambda-\varepsilon, \lambda]$)
المحتوى في المجال المغلق $[0,1]$، و ليكن التابع $x_{\varepsilon}(t)$ معرّفاً بالعلاقة:

$$x_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & , t \in [\lambda, \lambda+\varepsilon] \\ 0 & , t \notin [\lambda, \lambda+\varepsilon] \end{cases}$$

عندئذٍ يكون

$$\int_0^1 x_{\varepsilon}^2(t)\, dt = \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, dt = 1$$

و بالتالي فإنّ التابع $x_{\varepsilon}(t)$ ينتمي للفضاء $L^2[0,1]$ ، تبعاً لذلك نجد أنّ:

$$A x_{\varepsilon}(t) = t\, x_{\varepsilon}(t)$$

و

$$A_{\lambda} x_{\varepsilon}(t) = (t-\lambda) x_{\varepsilon}(t)$$

و منه نجد أنّ

$$\left\| A_{\lambda} x_{\varepsilon}(t) \right\|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\lambda}^{\lambda-\varepsilon} (t-\lambda)^2 dt = \frac{\varepsilon^2}{3}$$

و بالتالي فإنّه عندما يسعى ε إلى الصفر فإنّ $\left\| A_{\lambda} x_{\varepsilon}(t) \right\| \to 0$
أي أنّ النقطة λ $(0 \le \lambda \le 1)$ تنتمي لطيف المؤثّر.

لنتأكّد من أنّ للمؤثّر A لا توجد قيم خاصّة، في الواقع لدينا:

$$A_{\lambda} x(t) = (t-\lambda) x(t)$$

فإذا كان $A_{\lambda} x(t) = 0$ فإنّ ذلك يعني أنّ $(t-\lambda)\ x(t) = 0$ تقريباً في كلّ مكان على المجال $[0,1]$ و هذا يؤدّي إلى أنّ $x(t) = 0$ تقريباً في كلّ مكان و بالتالي فإنّ λ ليست قيمة خاصّة.

لنرمز بـ N للمجموع المتعامد لجميع الفضاءات الجزئيّة الخاصّة $N_A(\lambda)$ المنتمية للقيم الخاصّة المختلفة λ. بكلام آخر إنّ N هي المتنوّعة الخطيّة المغلقة

المشكّلة من جميع العناصر الخاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً A. من الواضح أنّ N فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ A. بما أنّ H قابل للفصل فإنّه يمكننا بناء جملة متعامدة – منظّمة تامّة من الأشعّة الخاصّة في كلّ فضاء جزئي $N_A(\lambda)$ منتهية أو قابلة للعدّ. و بما أنّ الأشعّة الخاصّة المنتمية إلى قيم خاصّة مختلفة متعامدة، أي أنّ الأشعّة الخاصّة المنتمية إلى الفضاءات الجزئيّة $N_A(\lambda)$ المختلفة متعامدة، فإنّه باجتماع تلك الجمل نحصل على جملة من العناصر الخاصّة $\{x_n\}$ تامّة في الفضاء N. و لنرمز بـ G للمتمّمة المعامدة لـ N في H. ليكن A_G و A_N جزئي المؤثّر A في G و N على الترتيب، عندئذٍ يكون طيف المؤثّر A هو اجتماع طيفي المؤثّرين A_G و A_N المعروفين بالطيف النقطي و الطيف المستمرّ للمؤثّر A.

هكذا نجد أنّه إذا كان $H = G$ فإنّ طيف المؤثّر A يكون طيفاً مستمرّاً فقط كما في المثال (٢) أعلاه. أمّا إذا كان $N = H$ فإنّ طيف المؤثّر A هو طيف نقطي فقط. سنجد لاحقاً أنّ المؤثّرات التامّة الاستمرار تتمتّع بمثل هذا الطيف. و سنستعرض الآن بنية المؤثّرات المترافقة ذاتياً و التي تتمتّع بطيف نقطي فقط.

مؤثّرات ذات طيف نقطي فقط: لنفرض أنّ للمؤثّر المترافق ذاتياً A طيف نقطي فقط عندئذٍ يكون $H = N$، بالتالي فإنّه في H توجد جملة متعامدة – منظّمة تامّة من الأشعّة الخاصّة $\{x_n\}$:

$$A x_n = \lambda_n x_n \qquad (٣.٣.٣)$$

حيث λ_n القيم الخاصّة. إنّ كلّ عنصر x يمثّل بسلسلة فورييه:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \qquad (٣.٣.٤)$$

حيث $c_n = (x, x_n)$. لنرمز بـ P_n لمؤثّر الإسقاط المعرّف بالعلاقة:

$$P_n x = (x, x_n) x_n = c_n x_n$$

(P_n – مؤثّر الإسقاط على المستقيم: $t x_n, -\infty < t < +\infty$)

إنّ العلاقة (٣.٣.٤) يمكن كتابتها على الشكل:

$$x = I\,x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\, x$$

أو في الصيغة المؤثِّريَة

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \qquad (٣.٣.٥)$$

بسهولة نجد أنَّ

$$P_n\, P_m = 0 \quad ; \quad m \neq n \qquad (٣.٣.٦)$$

من العلاقتين (٣.٣.٣) و (٣.٣.٤) نجد أنَّ:

$$A\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, c_n\, x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, P_n\, x \qquad (٣.٣.٧)$$

(بما أنّ $|\lambda_n| \le \|A\|$ فإنّ المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n\, c_n)^2$ يكون محدوداً مع المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$)

و تكتب العلاقة (٣.٣.٧) في الصيغة المؤثِّريَة على الشكل:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, P_n \qquad (٣.٣.٨)$$

من (٣.٣.٧) و (٣.٣.٤) نجد أنّ:

$$(A\,x\,,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, |c_n|^2 \qquad (٣.٣.٩)$$

و هكذا نكون قد أرجعنا الصيغة التربيعيّة $(A\,x\,,\,x)$ إلى مجموع المربّعات. بالاعتماد على العلاقة (٣.٣.٧) يمكننا كتابة العلاقة (٣.٣.٩) على الشكل:

$$(A\,x\,,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, (P_n\, x\,,\,x) \qquad (٣.٣.١٠)$$

لنفرض الآن أنّ λ لا تنتمي للصاقة المجموعة $\{\lambda_n\}$ - مجموعة القيم الخاصّة.

عندئذ يوجد ثابت مثل $0<d$ بحيث إنّ $|\lambda - \lambda_n| > d$، بالتالي يكون لدينا:

$$A_\lambda\, x = (A - \lambda I)\,x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)\, P_n\, x$$

من هذه العلاقة و اعتماداً على العلاقة (٣.٣.٦) بسهولة نجد أنّ:

$$R_{\lambda}x = A_{\lambda}^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n - \lambda}P_n x \qquad (٣.٣.١١)$$

و بما أنّ $P_n x = c_n x_n$ فإنّ العلاقة (٣.٣.١١) تأخذ الشكل:

$$R_{\lambda}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}x_n$$

و بما أنّ:

$$\left|\frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\right| \leq \frac{|c_n|}{d}$$

فإنّنا نجد أنّ:

$$\| R_{\lambda}x \| \leq \frac{1}{d}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{d}\| x \|$$

و بالتالي فإنّ:

$$\| R_{\lambda} \| \leq \frac{1}{d}$$

هكذا فإنّ المؤثّر R_{λ} محدود و بالتالي فإنّ λ لا تنتمي لطيف المؤثّر A و تأخذ العلاقة (٣.٣.١١) في الصيغة المؤثّريّة الشكل:

$$R_{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n - \lambda}P_n \qquad (٣.٣.١٢)$$

إنّ العلاقات المستنتجة هنا مماثلة تماماً لعلاقات الصيغ التربيعيّة المتناظرة (الهيرميتيّة) للمصفوفات في الفضاءات ذات الـ n بُعداً و وجه الاختلاف فقط هو أنّ المجاميع المنتهية للعناصر تستبدل بسلاسل لا نهائيّة.

لقد طوّر هيلبرت النظريّة العامّة للمؤثّرات المترافقة ذاتياً و الصيغ التربيعيّة الموافقة لها (Ax, x) بالنظر إلى تلك الصيغ كنهاية لصيغ تربيعيّة ذات n متغيّراً و ذلك عندما $n \to \infty$، كما أنّه قد عرّف صفاً جديداً من المؤثّرات و هو صفّ

المؤثّرات ذات الطيف النقطي البحت و هو ما يسمّى بصفّ المؤثّرات التامة الاستمرار و سنستعرض هذا الصفّ من المؤثّرات لاحقاً.

طيف المؤثّرات الناظميّة: (*Spectrum Of Normal Operators*)

ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن $A: H \longrightarrow H : A$ مؤثّراً خطّياً و محدوداً و معرّفاً في H. بالتعريف يسمّى المؤثّر A **ناظمياً** إذا كان تبادلياً مع مرافقه، أي أنّ:

$$A\,A^{*}=A^{*}A \qquad (٣.٣.١٣)$$

مبرهنة (٥): الشرط اللازم و الكافي كي يكون المؤثّر A ناظمياً هو أن يكون:

$$\|A^{*}x\|=\|A\,x\| \;\;;\;\; \forall x\in H \qquad (٣.٣.١٤)$$

البرهان: ليكن المؤثّر A ناظمياً عندئذٍ نجد أن:

$$\|A\,x\|^{2}=(A\,x\,,A\,x)=(A^{*}A\,x\,,x)$$

$$\left\|A^{*}x\right\|^{2}=(A^{*}x\,,A^{*}x)=(A\,A^{*}x\,,x)=(A^{*}A\,x\,,x)$$

و هذا يعني أن

$$\|A\,x\|^{2}=\left\|A^{*}x\right\|^{2}$$

و بالتالي فإنّ

$$\|A\,x\|=\left\|A^{*}x\right\|$$

بالعكس، بفرض أنّ (٣.٣.١٤) محققة نجد أنّ:

$$\|A\,x\|^{2}=(A\,x\,,A\,x)=(A^{*}A\,x\,,x)$$

و أن

$$\left\|A^{*}x\right\|^{2}=(A^{*}x\,,A^{*}x)=(A\,A^{*}x\,,x)$$

بالتالي فإنّ

$$(A^{*}A\,x\,,x)=(A\,A^{*}x\,,x) \quad \forall x\in H$$

أي إنّ

$$A^*A = A\,A^*$$

و بالتالي فإنّ A مؤثّر ناظمي.

توطئة (١): إذا كان A مؤثّراً ناظمياً في فضاء هيلبرت H و كانت λ قيمة خاصّة له، و كان x $(x \neq 0)$ الشعاع الخاصّ المنتمي للقيمة λ فإنّ $\overline{\lambda}$ تكون قيمة خاصّة للمؤثّر A^* و يكون x هو الشعاع الخاصّ الموافق لهذه القيمة.

البرهان: ليكن $A\,x = \lambda x$ ، و بما أنّ $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ و أنّ $(A - \lambda I)^*$ تبادلي مع $(A - \lambda I)$ فإنّ المؤثّر $(A - \lambda I)$ ناظمي. استناداً للمبرهنة (٥) يكون:

$$\|(A - \lambda I)x\| = \|(A^* - \overline{\lambda} I)x\|$$

لكن $(A - \lambda I)x = 0$ و بالتالي فإنّ $(A^* - \overline{\lambda} I)x = 0$. أي أنّ:

$$A^*x = \overline{\lambda} x$$

و هو المطلوب.

توطئة (٢): إذا كان A مؤثّراً ناظمياً في فضاء هيلبرت H، فإنّ الأشعّة الخاصّة المنتمية لقيم خاصّة مختلفة تكون متعامدة.

البرهان: ليكن:

$$A\,x = \lambda x \qquad ; x \neq \theta$$

$$A\,y = \mu y \qquad ; y \neq \theta$$

و أنّ $\lambda \neq \mu$، عندئذٍ يكون:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (A\,x, y) = (x, A^* y)$$
$$= (x, \overline{\mu} y) = \mu(x, y)$$

و منه نجد أنّ:

$$(\lambda - \mu)(x, y) = 0$$

و بما أنّ $\lambda \neq \mu$ فإنّ $x \perp y$ و هو المطلوب.

وجدنا في التحليل التابعي (١) أنّ مقلوب المؤثّر $(A-\lambda I)$ يكون موجوداً إذا كانت λ محقّقة للعلاقة $|\lambda|>\|A\|$، بالتالي فإنّ قيم λ التي لا يكون من أجلها المقلوب موجوداً، أي تلك القيم التي تنتمي لطيف المؤثّر A، هي التي تحقّق المتراجحة:

$$|\lambda|\leq\|A\|$$

بالتالي فإنّ طيف المؤثّر A يقع داخل دائرة مركزها مبدأ الإحداثيّات و نصف قطرها $\|A\|$، عادةً يسمّى أصغر نصف قطر لدائرة من هذا الشكل (تحتوي على $\sigma(A)$) بنصف القطر الطيفي و يرمز له $r_\sigma(A)$ و يعرّف بالعلاقة:

$$r_\sigma(A)=\lim_n\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda| \qquad (٣.٣.١٥)$$

مبرهنة (٦): إذا كان A مؤثّراً ناظمياً فإنّ $r_\sigma(A)=\|A\|$ ، أكثر من ذلك يوجد عدد مثل $\lambda\in\sigma(A)$ بحيث يكون $|\lambda|=\|A\|$.

البرهان: بالعودة إلى المبرهنة (٥) و باستبدال كل x بـ Ax نجد:

$$\|A^*Ax\|=\|A^2x\|$$

و بالتالي فإنّ:

$$\|A^*A\|=\|A^2\|$$

و استناداً للمبرهنة (٢) من الفقرة الأولى في الفصل الأوّل يكون:

$$\|A^*A\|=\|A^2\|=\|A\|^2$$

و بالتالي فإنّ:

$$\|A^2\|=\|A\|^2 \qquad (٣.٣.١٦)$$

بما أنّ $(A^l)^*=(A^*)^l$ فإنّه إذا كان A مؤثّراً ناظمياً فإنّ A^n يكون ناظمياً أيضاً. من هذا و بالاستقراء الرياضي ينتج أنّ:

$$\|A^m\|=\|A\|^m \qquad (٣.٣.١٧)$$

من أجل جميع الأعداد m التي هي من الشكل 2^k. باستخدام العلاقة المعرّفة لنصف القطر الطيفي (٣.٣.١٥) نجد أنّ:

$$r_\sigma(A) = \lim_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left\|A^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \lim_n \|A\| = \|A\|$$

بما أنّ التابع $|\lambda|$ مستمرّ في λ و أنّ الطيف مجموعة مغلقة و محدودة فإنّ هذا التابع $|\lambda|$ يبلغ قيمته العظمى على $\sigma(A)$. بكلام آخر:

$$\|A\| = r_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

بذلك نرى أنّه توجد قيمة ما لـ λ من $\sigma(A)$ بحيث يكون:

$$|\lambda| = \|A\|$$

و هو المطلوب.

وجدنا أعلاه أنّ الطيف التقريبي $\pi(T)$ لمؤثّر T، في الحالة العامّة، محتوى في $\sigma(T)$ طيف ذلك المؤثّر. سنرى أنّه من اجل المؤثّرات الناظميّة يتحقّق الاحتواء المعاكس و هذا بدوره سيؤدّي إلى المبرهنة الآتية.

مبرهنة (٧): إذا كان A مؤثّراً ناظمياً فإنّ $\pi(A) = \sigma(A)$.

البرهان: لإثبات المبرهنة علينا أن نبيّن بأنّ $\sigma(A) \subset \pi(A)$ و لإثبات ذلك يكفي أن نبرهن على أنّ $C\,\pi(A)$ متمّمة $\pi(A)$ محتواة في $C\,\sigma(A)$ متمّمة $\sigma(A)$ بكلام آخر علينا أن نبرهن على أنّ

$$C\,\pi(A) \subset \rho(A)$$

لنفرض أنّ $\lambda \notin \pi(A)$ $(\lambda \in C\,\pi(A))$ هذا يعني أنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ تتحقّق المتراجحة:

$$\|Ay - \lambda y\| \geq \varepsilon \|y\| \qquad (٣.٣.١٨)$$

من أجل أي عنصر $y \in H$. إنّ العلاقة (٣.٣.١٨) تعني وجود مقلوب محدود للمؤثّر $(A - \lambda I)$. و لنبيّن الآن أنّ $\Delta_A(\lambda)$ كثيفة في H. أي علينا إثبات أنّ:

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = H \qquad (٣.٣.١٩)$$

إنّ العلاقة (٣.٣.١٩) تكافئ العلاقة:

$$[\Delta_A(\lambda)]^{\perp} = \{0\} \qquad (٣.٣.٢٠)$$

في الواقع، بأخذ المتمّمة المعامدة نجد أنّ:

$$\left([\Delta_A(\lambda)]^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

و بما أنّ $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{S}$ من أجل أيّة مجموعة S من H فإنّ العلاقة (٣.٣.٢٠) تؤول إلى (٣.٣.١٩) و بالعكس، هكذا يكون علينا إثبات العلاقة (٣.٣.٢٠). من الواضح أنّه إذا كان المؤثّر A ناظمياً فإنّ المؤثّر $(A-\lambda I)$ يكون كذلك و استناداً إلى ناظميّة المؤثّر $(A-\lambda I)$ و المبرهنة (٥) فإنّه يمكننا استبدال العلاقة (٣.٣.١٨) بالعلاقة:

$$\left\| A^{*}y - \overline{\lambda}y \right\| \geq \varepsilon \| y \| \qquad (٣.٣.٢١)$$

من المعلوم أنّ:

$$[\Delta_A(\lambda)]^{\perp} = N_{A^{*}}(\overline{\lambda})$$

لنفرض الآن أنّ:

$$y \in [\Delta_A(\lambda)]^{\perp} = N_{A^{*}}(\overline{\lambda})$$

بالتالي فإنّ:

$$A^{*}y - \overline{\lambda}y = 0$$

و بالأخذ بعين الاعتبار (٣.٣.٢١) نجد أنّ $y = 0$ و هو ما يثبت صحّة العلاقة (٣.٣.٢٠). هكذا يكون المؤثّر $(A-\lambda I)$ موجوداً و $\overline{\Delta_A(\lambda)} = H$ بالتالي فإنّ $\lambda \in \rho(A)$، و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ:

$$C\,\pi(A) \subset \rho(A)$$

و هو المطلوب.

إنَّ أهمّيّة هذه النتيجة تعود إلى استخدامها في إثبات المبرهنة التالية و التي تعطينا طريقة مناسبة في تمييز النقاط الطيفيّة للمؤثّر الناظمي.

مبرهنة (٨): إذا كان A مؤثّراً خطّيّاً و محدوداً في فضاء هيلبرت H ($A: H \longrightarrow H$) فإنّ القضيّتين الآتيتين متكافئتان:

١) يوجد عدد مثل $\lambda \in \pi(A)$ و بحيث أنّ $\|A\| = |\lambda|$.

٢) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(A x , x)|$

البرهان: لنثبت أنّ ١) تؤدّي إلى ٢). لتكن λ كما في ١) إذا تمكّنا من إثبات أنّ:

$$|\lambda| \in \overline{\{ \ |(A x , x)| \ ; \ \|x\| = 1 \ \}}$$

فإنّه سينتج أنّ:

$$\|A\| = |\lambda| \le \sup_{\|x\|=1} |(A x , x)| \le \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(A x , y)| = \|A\|$$

و بذلك تكون النتيجة قد برهنت. بما أنّ $\lambda \in \pi(A)$ فإنّه توجد متتالية مثل $\{x_n\}$ في H و بحيث إنّ $\|x_n\| = 1$ و

$$\|A x_n - \lambda x_n\| \longrightarrow 0$$

بما أنّ $\|x_n\| = 1$ فإنّه يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} |(A x_n , x_n) - \lambda| &= |(A x_n , x_n) - \lambda (x_n , x_n)| = \\ &= |(A x_n - \lambda x_n , x_n)| \le \|A x_n - \lambda x_n\| \to 0 \end{aligned}$$

و هذا يؤدّي إلى أنّ

$$|(A x_n , x_n)| \to |\lambda|$$

استناداً لما ذكرناه أعلاه نجد أنّ ١)$\Leftarrow$ ٢).

لنثبت الآن أنّ ٢) $\Leftarrow$ ١). إذا كان

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A x , x)|$$

فإنّه توجد متتالية من الأشعّة مثل $\{x_n\}$ و $\|x_n\| = 1$ و بحيث إنّ

$$|(A x_n , x_n)| \to \|A\| \qquad (٣.٣.٢٢)$$

بما أنّ المتتالية $\{(A x_n , x_n)\}$ متتالية محدودة من الأعداد المركّبة فإنّها تحتوي على متتالية جزئيّة متقاربة. لنفرض أنّ:

$$(A x_{n_k} , x_{n_k}) \to \lambda \qquad (٣.٣.٢٣)$$

عندئذٍ تؤدّي العلاقة (٣.٣.٢٢) إلى أنّ:

$$|\lambda| = \|A\|$$

لإتمام البرهان يكفي أن نبيّن أنّ:

$$\|A x_{n_k} - \lambda x_{n_k}\| \to 0$$

لبرهان ذلك (لاحظ أنّ $\|A x\| \le \|A\| \|x\| = |\lambda| \|x\|$) نأخذ:

$$\|A x_{n_k} - \lambda x_{n_k}\|^2 = \|A x_{n_k}\|^2 - (A x_{n_k} , \lambda x_{n_k}) - (\lambda x_{n_k} , A x_{n_k}) + |\lambda|^2$$

$$\le |\lambda|^2 \|x_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}(A x_{n_k} , x_{n_k}) - \lambda(x_{n_k} , A x_{n_k}) + |\lambda|^2$$

و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (٣.٣.٢٣) نجد أنّ الطرف الأيمن ينتهي إلى:

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

و هو المطلوب.

لنلاحظ أنّ المبرهنة (٦) تعني أنّه من أجل المؤثّر الناظمي يوجد بشكل دائم عدد مثل $\lambda \in \sigma(A)$ و يكون من أجله $|\lambda| = \|A\|$، بينما تفيد المبرهنة (٧) تطابق الطيفين $\sigma(A), \pi(A)$ بالنسبة للمؤثّر الناظمي A. تبعاً لذلك يتحقّق الشرط ٢) من المبرهنة (٨) بشكل دائم بالنسبة للمؤثّرات الناظميّة و باستخدام المبرهنة (٨) يمكننا حساب نظيم مؤثّر ناظمي محدود بالعلاقة:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A x , x)| \qquad (٣.٣.٢٤)$$

إنّ الشرط ٢) في المبرهنة (٨) يتحقّق بالتأكيد من أجل المؤثّر المترافق ذاتياً. بالعودة إلى العلاقة (٣.٣.٢٣) مع الأخذ بعين الاعتبار أنّ A مترافق ذاتياً نجد أنّ $\overline{\lambda} = \lambda$. أي

أنّ λ عدد حقيقي و هذا بدوره سيؤدّي إلى أنّ $\|A\|$ و $-\|A\|$ ينتميان إلى $\pi(A)$.

إنّ إيجاد الطيف الباقي لمؤثّر ما أمر ليس بالسهل، بكلام آخر هناك صعوبة دائمة في إيجاد هذا الطيف بالنسبة لمؤثّر كيفي. خلافاً لذلك فإنّ تلك الصعوبة تختفي من أجل صفّ المؤثّرات الناظميّة و على وجه الدقّة تتحقّق المبرهنة الآتية.

مبرهنة (٩): إذا كان A مؤثّراً ناظمياً فإنّ $R\,\sigma(A)=\varnothing$.

البرهان: إذا لم تكن $\Delta_A(\lambda)$ كثيفة في H من أجل قيمة ما λ فإنّ λ يمكن أن تنتمي إلى الطيف الباقي $R\,\sigma(A)$ أو إلى الطيف النقطي $P\,\sigma(A)$، و كي تتحقّق المبرهنة علينا أن نثبت أنّ λ تنتمي إلى الطيف النقطي كلّما كانت $\Delta_A(\lambda)$ غير كثيفة في H. لتكن λ بحيث إنّ

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq H$$

و منه نجد أن

$$\left[\overline{\Delta_A(\lambda)}\right]^{\perp} \neq \{0\}$$

و بما أنّ

$$\left[\overline{\Delta_A(\lambda)}\right]^{\perp} = N_{A^*}(\overline{\lambda})$$

و أنّ A مؤثّر ناظمي (كذلك يكون $A-\lambda I$) فإنّه استناداً للمبرهنة (٥) يكون

$$\|(A-\lambda I)x\| = \|(A^*-\overline{\lambda}I)x\|$$

و بالتالي فإنّ

$$N_{A^*}(\overline{\lambda}) = N_A(\lambda) \neq \{0\}$$

بالتالي يوجد عنصر x مغاير للصفر يكون من أجله:

$$(A-\lambda I)x = 0$$

و هذا يعني أنّ λ قيمة خاصّة للمؤثّر A. أي أنّها تنتمي للطيف النقطي $P\,\sigma(A)$.

سنستعرض الآن **بعض النتائج الطيفيّة للمؤثّرات التامّة الاستمرار.** ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل و ليكن T مؤثّراً خطّياً و محدوداً في H ($T : H \longrightarrow H$).

مبرهنة (١٠): إذا كان المؤثّر T تام الاستمرار و كان λ مغايراً للصفر فإنّ الفضاء الجزئي $N_T(\lambda)$ يكون منتهي البعد.

البرهان: لنفرض العكس، أي إنّ عدد أبعاد الفضاء $N_T(\lambda)$ من أجل $\lambda \neq 0$ غير منته، عندئذ يمكن اختيار مجموعة غير منتهية من العناصر المستقلّة خطّياً:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

من الفضاء الجزئي $N_T(\lambda)$ ، ثمّ نقوم بتحويل هذه الجملة إلى جملة متعامدة – منظّمة اعتماداً على طريقة شميت. من أجل $n \neq m$ يكون لدينا:

$$\|T x_n - T x_m\|^2 = \|\lambda x_n - \lambda x_m\|^2 = |\lambda|^2 \|x_n - x_m\|^2 = 2|\lambda|^2$$

و هذا يعني أنّه لا توجد متتالية جزئيّة من المتتالية $\{T x_n\}$ يمكن لها أن تكون متتالية كوشي و هذا ينفي إمكانيّة أن يكون المؤثّر T تامّ الاستمرار و هو ما يثبت المبرهنة.

و جدنا أعلاه أنّ $\sigma(T)$ طيف المؤثّر الناظمي T يتطابق مع الطيف التقريبي $\pi(T)$ لذلك المؤثّر. سنستعرض هنا نتيجة مشابهة متعلّقة بالمؤثّرات تامّة الاستمرار و سنبرهن على أنّ الطيف التقريبي للمؤثّر تام الاستمرار يتطابق مع الطيف النقطي.

مبرهنة (١١): إذا كان T مؤثّراً تامّ الاستمرار و كان العدد السلّمي λ مغايراً للصفر و منتمياً لـ $\pi(T)$ فإنّ $\lambda \in P\sigma(T)$.

البرهان: ليكن λ عدداً مغايراً للصفر و منتمياً لـ $\pi(T)$، عندئذٍ توجد متتالية من الأشعّة مثل $\{x_n\}$ نظيم كلّ شعاع منها يساوي الواحد و يكون من أجلها:

$$\|T x_n - \lambda x_n\| \to 0 \ , \ n \to \infty$$

بما أنّ المؤثّر T تامّ الاستمرار فإنّ المتتالية $\{T x_n\}$ متراصّة بالتالي فهي تحتوي على متتالية جزئيّة متقاربة مثل $\{T x_{n_k}\}$. لنفرض أنّ:

$$T x_{n_k} \to y$$

و بما أنّ أيّة متتالية جزئيّة من متتالية متقاربة تكون متقاربة أيضاً إلى نفس النهاية فإنّ:

$$\left\| T x_{n_k} - \lambda x_{n_k} \right\| \to 0$$

و بما أنّ:

$$\left\| y - \lambda x_{n_k} \right\| \leq \left\| y - T x_{n_k} \right\| + \left\| T x_{n_k} - \lambda x_{n_k} \right\|$$

فإنّنا نجد أنّ:

$$\lim_k \lambda x_{n_k} = y$$

بتطبيق المؤثّر T على طرفي العلاقة الأخيرة مع الأخذ بعين الاعتبار استمراريّة المؤثّر T نجد أنّ:

$$T y = T \lim_k \lambda x_{n_k} = \lambda \lim_k T x_{n_k} = \lambda y$$

لنبرهن الآن على أنّ $y \neq 0$. بما أنّ النظيم تابع مستمرّ فإنّه يكون لدينا:

$$\| y \| = \lim_k \| \lambda x_{n_k} \| = |\lambda| > 0$$

بالتالي فإنّ $y \neq 0$ هكذا نكون قد بيّنّا بأنّ:

$$T y = \lambda y \quad ; \lambda \neq 0 , y \neq 0$$

و بالتالي فإنّ y شعاع خاصّ منتمٍ للقيمة الخاصّة λ، أي أنّ $\lambda \in P\sigma(T)$.

في الحالة العامّة لدينا:

$$P\sigma(T) \cup C\sigma(T) \subset \pi(T) \tag{٣.٣.٢٥}$$

و بالتالي فإنّه من أجل أي مؤثّر T يتحقّق الاحتواء:

$$P\sigma(T) \subset \pi(T)$$

في حالة خاصّة و من أجل المؤثّر تامّ الاستمرار T يتحقّق الاحتواء:

$$P\sigma(T) - \{0\} \subset \pi(T) - \{0\} \tag{٣.٣.٢٦}$$

إنّ المبرهنة (١١) تعني أنّ:

$$\pi(T) - \{0\} \subset P\sigma(T) - \{0\} \tag{٣.٣.٢٧}$$

من العلاقتين (٣.٣.٢٦) و (٣.٣.٢١) نجد أنّ:

$$\pi(T)-\{0\}=P\,\sigma(T)-\{0\} \qquad (٣.٣.٢٨)$$

بفرض أنّ المؤثّر T تامّ الاستمرار و بمقارنة العلاقتين (٣.٣.٢١) و (٣.٣.٢٥) نستنتج أنّ **الصفر هو العنصر الوحيد الذي يمكن له أن ينتمي للطيف المستمرّ $C\,\sigma(T)$ للمؤثّر التامّ الاستمرار.**

ميرهنة (١٢): إذا كان T مؤثّراً تامّ الاستمرار و ناظمياً فإنّ $P\,\sigma(T)\neq\varnothing$ و عندئذٍ يوجد عدد مثل $\lambda\in P\,\sigma(T)$، و بحيث إنّ $\|T\|=|\lambda|$.

البرهان: بما أنّ المؤثّر T ناظمي فإنّ:

$$\pi(T)=\sigma(T)$$

و بالتالي فإنّ:

$$\sigma(T)-\{0\}=\pi(T)-\{0\}$$

و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (٣.٣.٢٨) نجد أنّ:

$$P\,\sigma(T)-\{0\}=\sigma(T)-\{0\}$$

من الواضح أنّه إذا كان $T=0$ فإنّ الأمر محقّق، من ناحية ثانية إذا كان T مغايراً للصفر فإنّ $\|T\|>0$ و بما أنّ T ناظمي فإنّ $r_\sigma(T)=\|T\|$ و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ $\sigma(T)-\{0\}\neq\varnothing$ و بالتالي يوجد عدد مثل λ ينتمي لـ $\sigma(T)$ و بحيث إنّ $\|T\|=|\lambda|$ و بما أنّ $\lambda\neq 0$ فإنّ $\lambda\in P\,\sigma(T)$ و هو المطلوب.

إنّ النتائج الطيفيّة للمؤثّرات التامّة الاستمرار و الناظميّة تتحقّق من أجل المؤثّرات تامّة الاستمرار و المترافقة ذاتياً. و بالأخذ بعين الاعتبار الخواصّ التي تتمتّع بها المؤثّرات المترافقة ذاتياً يمكننا صياغة نتائج إضافيّة تتعلّق بهذا الصفّ من المؤثّرات.

نتيجة (١): لكلّ مؤثّر مترافق ذاتياً و تامّ الاستمرار توجد قيمة خاصّة واحدة على الأقلّ.

في الواقع بما أنّ طيف المؤثّر المترافق ذاتيّاً غير خالٍ فإنّه توجد نقطة على الأقلّ تنتمي إلى هذا الطيف و بالأخذ بعين الاعتبار المبرهنة (١١) نجد أنّ هذه النقطة تنتمي إلى الطيف النقطي، أي أنها قيمة خاصّة للمؤثّر.

نتيجة (٢): كلّ فضاء جزئي $\mathscr{L}$ غير صفري، و لا متغيّر بالنسبة للمؤثّر المترافق ذاتيّاً و التامّ الاستمرار A يحوي على شعاع خاصّ لذلك المؤثّر.

في الواقع ، إنّ جزء المؤثّر $A_{\mathscr{L}}$ ($A_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}$) هو مؤثّر تامّ الاستمرار أيضاً، و استناداً للنتيجة (١) توجد قيمة خاصّة λ لهذا المؤثّر و بالتالي فإنّه في $\mathscr{L}$ يوجد شعاع خاصّ للمؤثّر $A_{\mathscr{L}}$ و هو بالذات شعاع خاصّ لـ A.

نتيجة (٣): طيف المؤثّر المترافق ذاتيّاً و التامّ الاستمرار هو طيف نقطي بحت.

في الواقع، إنّ G المتممة المعامدة لمجموع الفضاءات الجزئيّة الخاصّة هي الفضاء الصفري و ذلك لأنّه في الحالة المغايرة يوجد استناداً إلى النتيجة (٢) شعاع خاصّ للمؤثّر في G و هو ما يناقض تعريف G.

مبرهنة (١٣): يمكن لمجموعة القيم الخاصّة للمؤثّر المترافق ذاتيّاً و التامّ الاستمرار A أن توجد نقطة تجمّع واحدة فقط هي $\lambda = 0$.

إنّ هذه المبرهنة هي حالة خاصّة من المبرهنة (٣) من الفقرة (٢)، و يمكن إعطاء برهان مستقلّ.

في الواقع، إذا وجدت متتالية لا نهائيّة مثل $\{\lambda_n\}$ من القيم الخاصّة و بحيث إنّ $|\lambda_n| \geq c > 0$ فإنّه من أجل الأشعّة الخاصّة المنتمية لها $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ و المتعامدة يكون لدينا:

$$\|A x_n - A x_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2 c^2$$

من أجل $n \neq m$. و عندئذٍ لا تكون المتتالية $\{A x_n\}$ متراصّة، الأمر الذي يناقض كون A تامّ الاستمرار.

الفصل الرابع

النشر الطيفي للمؤثّرات المحدودة

Spectral Decomposition Theorem for Bounded – Linear Operators

§ ١. النظرية الطيفية للمؤثَّرات المحدودة الناظمية و المنتهية البعد

Spectral Theorem for Bounded, Normal, Finite – Dimensional Operators

وجدنا أنّه إذا كان المؤثّر T تام الاستمرار وكانت $\lambda \neq 0$ فإنّ الفضاء الجزئي $N_T(\lambda)$ يكون منتهي البعد، كما وجدنا أنّ الطيف النقطي $P\,\sigma(T)$ هو على الأكثر مجموعة قابلة للعد وأنّ الصفر هو النقطة الوحيدة التي يمكن لها أن تكون نقطة تجمّع للطيف النقطي.

سنستعرض في هذه الفقرة مبرهنتين، تساعدنا الأولى فيهما في إثبات الثانية والمسمّاة بمبرهنة النشر الطيفي.

مبرهنة (١): ليكن المؤثّر T : $(T : H \to H)$ تام الاستمرار وناظمياً، إذا كان $x \perp N_T(\lambda)$ من أجل كل عدد λ فإنّ $x = 0$ وهذا يعني أن

$$\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} N_T(\lambda)^{\perp} = \{0\}$$

البرهان: ليكن

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} N_T(\lambda)$$

وبما أن

$$\mathcal{L}^{\perp} = \left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} N_T(\lambda)\right)^{\perp} = \overline{\left[\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} N_T(\lambda)\right]}^{\perp}$$

$$= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \left[N_T(\lambda)\right]^{\perp}$$

فإنه إذا برهنّا على أنّ $\{0\} = \mathscr{M}^{\perp}$ فإنّنا نكون قد أثبتنا المطلوب.

لنلاحظ أنه من أجل أي عدد λ يكون المؤثّران T و T^* تبادليين مع T_λ

وبالتالي فإنّ

$$T\, N_T(\lambda) \subset N_T(\lambda)$$

و

$$T^*\, N_T(\lambda) \subset N_T(\lambda)$$

وهذا يؤدّي إلى أنّ

$$T(\mathscr{M}) \subset \mathscr{M}, \quad T^*(\mathscr{M}) \subset \mathscr{M} \qquad (٤.١.١)$$

لنفرض أنّ z عنصراً ما من $\mathscr{M}$ و y عنصراً من $\mathscr{M}^{\perp}$ في ضوء العلاقتين (٤.١.١) يكون

$$(z, Ty) = (T^*z, y) = 0$$

وبالتالي فإنّ

$$T\left(\mathscr{M}^{\perp}\right) \subset \mathscr{M}^{\perp} \qquad (٤.١.٢)$$

وبالمثل نجد أنّ

$$(z, T^*y) = (Tz, y) = 0$$

وهذا يثبت أنّ

$$T^*\left(\mathscr{M}^{\perp}\right) \subset \mathscr{M}^{\perp} \qquad (٤.١.٣)$$

وبما أن الفضاء الجزئي $\mathscr{M}^{\perp}$ مغلق فإنّ العلاقتين (٤.١.٢) و (٤.١.٣) تعنيان أنّ $\mathscr{M}^{\perp}$ يختزل المؤثّر T.

لنفرض الآن أنّ

$$\mathscr{M}^{\perp} \neq \{0\} \qquad (٤.١.٤)$$

وأنّ مقصور T على $\mathscr{M}^{\perp}$ هو B: $B = T\big|_{\mathscr{M}^{\perp}}$

بما أنّ $\mathscr{M}^{\perp}$ يختزل T فإنّ

$$T:\mathscr{L}^{\perp}\to\mathscr{L}^{\perp} \qquad ; \quad T^{*}:\mathscr{L}^{\perp}\to\mathscr{L}^{\perp}$$

وهذا يجعل للحديث عن ناظمية المؤثر $T\big|_{\mathscr{L}^{\perp}}$ معنى. في ضوء ذلك وكون T مؤثراً ناظمياً نستنتج أنّ Bمؤثّر ناظمي. لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $\mathscr{L}^{\perp}$ بحيث إنّ $\|x_n\|\le M$ من أجل جميع الأعداد n. بما أنّ $B\,x_n=T\,x_n$ من أجل جميع n وأنّ T تام الاستمرار فإنّ المتتالية $\{T\,x_n=B\,x_n\}$ تحتوي على متتالية جزئية متقاربة

$$B\,x_{n_k}=T\,x_{n_k}\to y$$

وبما أنّ الفضاء الجزئي $\mathscr{L}^{\perp}$ مغلق فإنّ $y\in\mathscr{L}^{\perp}$ وهذا يؤدّي إلى أنّ B مؤثّر تام الاستمرار وهكذا فإنّ المؤثّر B هو تام الاستمرار وناظمي في الفضاء $\mathscr{L}^{\perp}$، وبما أنّ $\mathscr{L}^{\perp}\neq\{0\}$ فإنّ ذلك يعطي الإمكانية للمؤثّر B أن يمتلك أشعّة خاصّة وذلك استناداً إلى المبرهنة (١٢) من الفقرة الثالثة من الفصل الثالث.

وبالتالي فإنّه يوجد شعاع مثل $x\in\mathscr{L}^{\perp}$ ومغاير للصفر ومنتمٍ للقيمة الخاصّة λ.

$$B\,x=T\,x=\lambda x\Rightarrow x\in N_T(\lambda)\subset\mathscr{L}$$

وبالتالي فإنّ $x\in\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}=\{0\}$ وهذا مناقض لطريقة اختيار العنصر x وهذا ما يثبت المبرهنة.

قبل الانتقال إلى مبرهنة النشر الطيفي للمؤثّرات المحدودة والناظمية والمنتهية البعد سنشير إلى التشابه الكبير بين هذه الحالة وبين الحالة التي يكون فيها الفضاء X منتهي البعد $(\dim X<\infty)$ ويكون للمؤثّر T الذي يطبق X في X طيف نقطي فقط ومؤلّف من عدد منته من القيم الخاصّة. إنّ الأمر نفسه يحدث عندما يكون X فضاء هيلبرت و لانهائي البعد أمّا المؤثّر T فإنّه خطّي ومحدود وناظمي ومنتهي البعد. لنبرهن على أنّ طيف المؤثّر T في هذه الحالة يكون نقطيا فقط. في الواقع، بما أنّ T مؤثّر ناظمي فإنّ طيفه الباقي خالٍ (المبرهنة (٩) من الفقرة الثالثة من الفصل الثالث) وبما أنّ هذا المؤثّر منتهي البعد فهو تام الاستمرار وبالتالي فإنّ الصفر هو النقطة الوحيدة التي يمكن أن تنتمي للطيف المستمر $C\,\sigma(T)$ و من ناحية ثانية إنّ $T(X)$ يجب أن

تكون كثيفة في X وبما أنّ $T(X)$ منتهي البعد فإنّه يكون مغلقاً إلا أنّ X لانهائي البعد وبالتالي فإنّ هذا الأمر لا يمكن أن يحدث وبالتالي فإنّ الطيف المستمر للمؤثّر T خالٍ أيضاً وهذا بدوره إضافة إلى ما ذكرنا يؤدّي إلى أنّ طيف المؤثّر T هو طيف نقطي فقط وبذلك يتبقى علينا أن نبرهن أنّ الطيف النقطي مشكل من عدد منتهٍ من العناصر ويشكل هذا الأمر الجزء الأول من المبرهنة التالية وأمّا الجزء الثاني من تلك المبرهنة فإنّه يؤدّي إلى مبرهنة النشر الطيفي المنشودة.

مبرهنة (٢): ليكن H فضاء هيلبرت المجرد وليكن T مؤثّراً ناظمياً في H.

١. إذا كان T منتهي البعد، فإنّ طيفه النقطي يكون مجموعة منتهية.

٢. إذا كان T تام الاستمرار وكان طيفه النقطي منتهيا، فإنّ T يكون منتهي البعد

فإذا كان $P\,\sigma(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\}$

فإنّ

(a $$T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i E_i$$

حيث أن E_i مؤثّر الإسقاط العمودي على $N_T(\lambda_i)$

(b $E_i \perp E_j$ من أجل $i \neq j$

(c $$\sum_{i=1}^{k} E_i = I$$

البرهان: لنفرض أولا أن المؤثّر T محدود وناظمي ومنتهي البعد، ولنبرهن على أن طيفه النقطي $P\,\sigma(T)$ منته. سنبرهن ذلك عن طريق نقض الفرض.

لنفرض أنّ

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$$

قيم خاصة مختلفة فيما بينها للمؤثّر T وأنّ

$$x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$$

الأشعّة الخاصّة المنتمية إلى تلك القيم على الترتيب. بما أنّ الأشعّة الخاصّة المنتمية لقيم خاصّة مختلفة للمؤثّر الناظمي متعامدة فإنّها تكون مستقلة خطّياً وبالتالي يمكننا أن نكتب

$$T\left(\lambda_n^{-1} x_n\right)=x_n$$

من أجل جميع الأعداد λ_n. إنّ العلاقة الأخيرة تكتب على ذلك الشكل، على الأكثر، من أجل قيمة وحيدة ل λ_n (λ_n مختلفة فرضاً) من ذلك ينتج أنّ $T(H)$ لانهائي البعد وهذا يناقض كون T منتهي البعد.

ليكن الآن T مؤثّراً ناظمياً وتام الاستمرار وأنّ

$$P\,\sigma(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\mathrm{K}\,,\lambda_k\}$$

ولنثبت أنّ T منتهي البعد. بما أنّ T مؤثّر ناظمي فإنّ الأشعة الخاصّة المنتمية لقيم خاصّة مختلفة تكون متعامدة وهذا يؤدّي إلى أنّ الفضاءات الجزئية ($N_T(\lambda_i)$ ($i=1,2,\mathrm{K}\,,k$) تكون متعامدة فيما بينها. إنّ الفضاء الممدد على اجتماع هذه الفضاءات الجزئية

$$M=\bigcup_{i=1}^{k} N_T(\lambda_i)$$

هو تماماً المجموع المباشر

$$N_T(\lambda_1)\dot{+}N_T(\lambda_2)\dot{+}\mathrm{K}\,\dot{+}N_T(\lambda_k)=\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i \;\middle|\; x_i\in N_T(\lambda_i)\right\}$$

وبما أنّ الفضاءات الجزئية ($N_T(\lambda_i)$ متعامدة مثنى مثنى فإنّه يمكننا أن نكتب

$$M=N_T(\lambda_1)\oplus N_T(\lambda_2)\oplus\mathrm{K}\,\oplus N_T(\lambda_k)$$

ولنبرهن الآن على أنّ $H=M$. لنلاحظ أنّه إذا كان M_1 و M_2 فضاءين جزئيين مغلقين وكان $M_1\perp M_2$ فإنّ المجموع $M_1\oplus M_2$ يكون أيضاً فضاءً جزئياً مغلقاً وفقاً لذلك يكون M فضاء جزئياً مغلقاً (ينتج ذلك بالاستقراء) وهكذا إذا استطعنا أن نثبت أنّ $M^{\perp}=\{0\}$ فإنّه يكون لدينا $H=M$. ليكن

$$\mathcal{S}=\bigcup_{i=1}^{k} N_T(\lambda_i)$$

عندئذ يكون $\mathcal{S}^{\perp}=M^{\perp}$ بذلك يكون علينا أن نبرهن على أنّ $\mathcal{S}^{\perp}=\{0\}$ بما أنّه من أجل أي عدد ($\lambda\notin P\,\sigma(T)$ يكون $N_T(\lambda)=\{0\}$ فإنّ

$$\mathscr{D} = \bigcup_{i=1}^{k} N_T(\lambda_i) = \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{L}} N_T(\lambda)$$

واستناداً إلى المبرهنة (١) يكون $\mathscr{D}^{\perp} = \{0\}$ و بالتالي فإنّ $H = M$.

وفقا لما برهنّا عليه يمكننا كتابة أي عنصر $x \in H$ وبشكل وحيد على النحو الآتي

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \quad ; \quad x_i \in N_T(\lambda_i) \tag{٤.١.٥}$$

بما أنّه من أجل $i \neq j$ يكون

$$x_i \in N_T(\lambda_i) \subset \left(N_T(\lambda_j)\right)^{\perp}$$

وهذا يؤدّي إلى أنّ

$$E_j\, x_i = 0 \qquad ; \quad i \neq j$$

وبالتالي فإنّه من أجل $i \neq j$ يكون $E_i \perp E_j$. تبعاً لذلك يمكننا أن نكتب

$$E_j\, x = \sum_{i=1}^{k} E_j\, x_i = E_j\, x_j = x_j$$

بتعويض x_i بـ $E_i\, x_i$ في العلاقة (٤.١.٥) نجد

$$x = \sum_{i=1}^{k} E_i\, x = \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) x \tag{٤.١.٦}$$

وهذا يؤدّي إلى أنّ

$$\sum_{i=1}^{k} E_i = I$$

وهو ما يبرهن على c).

بتطبيق المؤثّر T على طرفي العلاقة (٤.١.٥) وباستخدام العلاقة (٤.١.٦) نجد

$$T\, x = \sum_{i=1}^{k} T\, x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda\, x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, E_i\, x = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, E_i\right) x$$

وبالتالي فإنّ

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, E_i$$

وهو ما يثبت a).

بفرض أنّ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ مختلفة ومغايرة للصفر ، فإنّه يمكننا أن نكتب

$$T\,x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, E_i \, x$$

وهذا يعني أنّ

$$T\,x \in N_T\left(\lambda_1\right) \oplus N_T\left(\lambda_2\right) \oplus \ldots \oplus N_T\left(\lambda_k\right) \quad ; \; \lambda_i \neq 0$$

وبما أنّ كل فضاء جزئي $N_T\left(\lambda_i\right)$ هو فضاء منتهي البعد من أجل $\lambda_i \neq 0$ فإنّ مجموعها يكون كذلك منتهي البعد وهكذا يكون قد أثبتنا أنّ $T\left(H\right)$ فضاء منتهي البعد. وهذا يكافئ أنّ T منتهي البعد. وهو المطلوب.

لنلخص الآن ما ذكرنا أعلاه. إذا كان H فضاء هيلبرت و كان $T \in \mathscr{L}\left(H\right)$ مؤثّراً ناظمياً ومنتهي البعد فإنّ

i. T يكون تام الاستمرار وذلك لأنه مؤثّر منتهي البعد.

ii. الطيف النقطي للمؤثّر T منته وذلك لأن المؤثّر T منتهي البعد.

وبتطبيق a) و b) و c) من ٢) على المؤثّر T نكون قد حققنا النشر الطيفي للمؤثّر T، تماما كما في الحالة التي يكون فيها المؤثّر T ناظمياً ومعرّفاً في فضاء منتهي البعد (انظر الملحق I مبرهنة(٣)). بعد إثبات تلك المبرهنة لاحظنا وجود وحدانية للحالة وكانت مترافقة مع برهان المبرهنة (٤). في إثبات وحدانية النشر هناك لم نحتج إلى الفضاءات منتهية البعد ولهذا فإنّ وحدانية النشر تتحقق في الحالة العامة في الفضاءات اللانهائية البعد. ومن أجل الصلة المستقبلية نصيغ الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنة (٣):

I) ليكن H فضاء هيلبرت وليكن $T \in \mathscr{L}\left(H\right)$. إذا كان T مؤثّراً ناظمياً ومنتهي البعد فإنّ

a) للمؤثر T طيف نقطي منتهٍ: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

b) $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$ حيث E_i مؤثر الإسقاط العمودي على $N_T(\lambda_i)$.

c) $E_i \perp E_j$ من أجل $i \neq j$.

d) $\sum_{i=1}^{k} E_i = I$.

II) إذا كان T مؤثراً خطيّاً و ناظمياً يطبق H في H وكانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ أعداد مركّبة مختلفة فيما بينها و كانت $E_1, E_2, \ldots, E_k$ مؤثّرات خطّية مختلفة عن الصفر و بحيث إنّ

a) $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$.

b) $E_i \perp E_j$ من أجل $i \neq j$.

c) $\sum_{i=1}^{k} E_i = I$.

فإنّ الأعداد $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ تكون قيماً خاصة مختلفة للمؤثر T وتكون E_i مؤثّرات إسقاط عمودي على $N_T(\lambda_i)$ مع $i = 1, 2, \ldots, k$.

§ ٢. النشر الطيفي للمؤثّرات المترافقة ذاتياً

Spectral Theorem for Bounded Self – Adjoint Operators

في دراستنا لطيف المؤثّر المترافق ذاتياً وجدنا أنّه في الحالة التي يكون فيها الطيف نقطياً فقط توجد جملة متعامدة – منظّمة من الأشعّة الخاصّة $\{x_n\}$ بحيث إنّ

$$A x_n = \lambda_n x_n$$

حيث إنّ λ_n هي القيم الخاصّة للمؤثّر A. وفقاً لذلك، فإنّه من أجل أي عنصر $x \in H$ يكون

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

وبفرض أنّ P_n هو مؤثّر الإسقاط العمودي على المستقيم : $t\,x_n$ ، $(-\infty<t<\infty)$ والمعرف بالعلاقة

$$P_n x=(x,x_n)x_n=c_n x_n$$

وجدنا أنّ

١) $$\sum_{n=1}^{\infty} P_n=I$$

٢) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n=A$$

٣) $$R_\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}P_n$$

حيث أنّ λ لا تنتمي للطيف.

١. **نشر المؤثّر الواحدي (المطابق)** *(Resolution of the identity operator)*:

سنعمم العلاقات ١)، ٢)، ٣) من أجل أي مؤثّر مترافق ذاتياً.

توطئة (١): ليكن المؤثّران A,B مترافقين ذاتياً وتبادليين، وليكن $A^2=B^2$ وليكن P مؤثّر الإسقاط على الفضاء الجزئي فضاء أصفار المؤثّر $(A-B)$ عندئذ

١) كل مؤثّر خطّي ومحدود C وتبادلي مع $(A-B)$ يكون تبادلياً مع P.

٢) من $Ax=0$ ينتج أنّ $Px=x$.

٣) $A=(2P-I)B$.

البرهان: ليكن $\mathcal{L}$ الفضاء الجزئي الصفري للمؤثّر $(A-B)$ وليكن P مؤثّر الإسقاط على هذا الفضاء الجزئي، عندئذ إذا كان $y\in\mathcal{L}$ وكان C تبادلياً مع $(A-B)$ فإنّ Cy ينتمي مجدداً لـ $\mathcal{L}$ وذلك لأنّ

$$(A-B)Cy=C(A-B)y=0$$

تبعا لذلك يكون $C(Px) \in \mathscr{L}$ أياً كان العنصر $x \in H$، و لهذا فإنّ

$$PCPx = CPx$$

أي إنّ
$$PCP = CP$$

بالمثل تماما نجد أنّ
$$C^*P = PC^*P$$

ومنه نستنتج أنّ
$$PC = \left(C^*P\right)^* = \left(PC^*P\right)^* = PCP$$

وبالتالي فإنّ
$$PC = CP$$

وهو ما يثبت ١) .في حالة خاصة نجد أن

$$AP = PA \quad \text{و} \quad BP = PB$$

لنفرض الآن أنّ $Ax = 0$، عندئذٍ يكون

$$\|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = \left(B^2x, x\right) = \left(A^2x, x\right) = \|Ax\|^2 = 0$$

أي إنّ $Bx = 0$ ، ولذلك فإنّ

$$(A - B)x = 0$$

وبالتالي فإنّ

$$Px = x$$

نأتي الآن لإثبات ٣). بما أنّ

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 = 0$$

فإنّه من أجل أي عنصر x يكون $(A + B)x \in \mathscr{L}$

وبالتالي فإنّ
$$P(A + B)x = (A + B)x$$

أي إنّ
$$P(A + B) = A + B$$

وبما أنّه بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$P(A - B) = (A - B)P = 0$$

فإنّ
$$P(A + B) - P(A - B) = A + B$$

ومنه نجد $A=(2P-I)B$

وهو المطلوب.

مبرهنة (١): من أجل كل مؤثّر مترافق ذاتياً A يوجد مؤثّر إسقاط E_+ بحيث إنّ

١) كل مؤثّر خطّي ومحدود C وتبادلي مع A يكون تبادلياً مع E_+.

٢) $0\le AE_+$ ، $A(I-E_+)\le 0$.

٣) إذا كان $Ax=0$ فإنّ $E_+x=x$.

البرهان: ليكن E_+ مؤثّر الإسقاط من الفضاء H على الفضاء الصفري للمؤثّر $(A-B)$ حيث B هو الجذر التربيعي الموجب من المؤثّر A^2.

استنادا إلى التوطئة (١) ينتج مباشرة تحقق ١) و ٣)، وفي حالة خاصّة يكون $AE_+=E_+A$ و $BE_+=E_+B$ واعتماداً على تلك التوطئة مجدداً نجد أنّ

$$A=(2E_+-I)B$$

وبالتالي فإنّ

$$AE_+=BE_+\ge 0$$

و

$$A(I-E_+)=-(I-E_+)B\le 0$$

وذلك لأنّ جداء مؤثّرين موجبين وتبادليين هو مؤثّر موجب. وهكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة كلياً.

لنلاحظ أنّه من المساواة $A=(2E_+-I)B$ ينتج أنّ

$$BE_+=\frac{1}{2}(A+B)$$

وبالتالي فانّ

$$AE_+=\frac{1}{2}(A+B) \quad \text{و} \quad A(I-E_+)=\frac{1}{2}(A-B)$$

لنرمز بـ A_+ للمؤثّر AE_+ و بـ A_- للمؤثّر $A(I-E_+)$.

يسمّى المؤثر A_+ بالقسم الموجب للمؤثّر A ويسمّى A_- بالقسم السالب وعليه يكون

$$A = A_+ + A_-$$

مثال (١): لتكن A مصفوفة متناظرة ذات n بعداً ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصّة لهذه المصفوفة وليكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k < 0$ و $0 < \lambda_{k+1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$.

من المعلوم في الجبر الخطّي أنّ المصفوفة A مكافئة وحديا للمصفوفة القطرية

$$\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\right) = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

أي إنّ

$$A = U\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\right) U^{-1}$$

وعندئذٍ يكون

$$A_+ = U\left(0, 0, \ldots, 0, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\right) U^{-1}$$
$$A_- = U\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, 0, \ldots, 0\right) U^{-1}$$

مثال (٢): ليكن المؤثّر A معرّفاً في الفضاء $L^2\left[-1,1\right]$ بالعلاقة

$$A\,x\left(t\right) = t\,x\left(t\right)$$

عندئذٍ يكون

$$A_+\; x\left(t\right) = \frac{t + |t|}{2}\, x\left(t\right)$$
$$A_-\; x\left(t\right) = \frac{t - |t|}{2}\, x\left(t\right)$$

مبرهنة (٢): كل مؤثّر مترافق ذاتياً A يولد مجموعة من مؤثّرات الإسقاط $\{E_\lambda\}$ متعلقة بوسيط حقيقي λ و $(-\infty < \lambda < \infty)$ و محققة للشروط التالية :

١) من $AC = CA$ ينتج أنّ $E_\lambda C = C E_\lambda$ من أجل أي عدد λ.

٢) $E_\lambda \le E_\mu$ إذا كان $\lambda < \mu$.

٣) E_λ مستمر من اليسار بقوة. أي إنّ $E_{\lambda-0} = E_\lambda$.

٤) $E_\lambda = 0$ من أجل $-\infty < \lambda < m$ و $E_\lambda = I$ من أجل $M < \lambda < +\infty$

حيث m و M الحدّان الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري للمؤثّر A.

تسمّى المجموعة $\{E_\lambda\}$ بنشر المؤثّر الواحدي المولد بالمؤثّر A.

قبل إثبات هذه المبرهنة سنستعرض مثالين نوضح فيهما هذه المبرهنة.

مثال (١): لتكن A مصفوفة متناظرة ذات n بعداً

$$A = U\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) U^{-1}$$

حيث $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ وليكن e_i الشعاع الخاص المنتمي للقيمة الخاصّة λ_i، عندئذ من أجل $\lambda_i < \lambda \le \lambda_{i+1}$ يكون E_λ مؤثّر إسقاط على الفضاء الجزئي المولد بالأشعّة $e_1, e_2, \ldots, e_i$ والذي عدد أبعاده يساوي i بعداً. ومن أجل $\lambda < \lambda_i$ يكون $E_\lambda = 0$ ومن أجل $\lambda_n < \lambda$ يكون $E_\lambda = I$.

مثال (٢): ليكن المؤثّر A معرفاً في الفضاء $L^2\left[-1,1\right]$ بالعلاقة :

$$A\,x(t) = t\,x(t)$$

عندئذ يكون

$$E_\lambda\, x(t) = \varphi_\lambda(t)\, x(t)$$

حيث $\varphi_\lambda(t) = 0$ من أجل $\lambda < t$ و $\varphi_\lambda(t) = 1$ من أجل $\lambda \le t$. من الواضح أنّه من أجل $\lambda < -1$ يكون $E_\lambda = 0$ ومن أجل $\lambda > 1$ يكون $E_\lambda = I$.

نأتي الآن إلى إثبات المبرهنة.

ليكن λ عدداً حقيقياً ما و ليكن $A_\lambda = A - \lambda I$، ولنرمز بـ E_λ لمؤثّر الإسقاط $I - E_+(\lambda)$: $E_\lambda = I - E_+(\lambda)$ حيث $E_+(\lambda)$ هو مؤثّر الإسقاط المنشأ وفقاً للمبرهنة (١) من أجل المؤثّر $(A - \lambda I)$.

إنّ الشرط الأول ١) محقق وضوحاً، من ذلك وفي حالة خاصّة ينتج أنّ E_λ و E_μ تبادليان من أجل كل القيم لـ λ و μ.

نأتي الآن إلى إثبات ٢). لنستعرض مؤثّر الإسقاط

$$P = E_\lambda \left(I - E_\mu \right)$$

حيث $\lambda < \mu$. لدينا

$$E_\lambda P = E_\lambda^{\,2} \left(I - E_\mu \right) = E_\lambda \left(I - E_\mu \right) = P \qquad (٤.٢.١)$$

وبالمثل نجد أنّ

$$\left(I - E_\mu \right) P = P \qquad (٤.٢.١)$$

كما أنه بتعريف E_λ لدينا

$$\left(A - \lambda I \right) E_\lambda \le 0 \qquad (٤.٢.٣)$$

$$\left(A - \mu I \right) \left(I - E_\mu \right) \ge 0 \qquad (٤.٢.٤)$$

لنضع $y = P x$ من أجل أي عنصر $x \in H$. استنادا إلى (٤.٢.١) و (٤.٢.٢) يكون لدينا

$$E_\lambda y = E_\lambda P x = P x = y$$

وبالمثل أيضاً

$$\left(I - E_\mu \right) y = y$$

واستنادا إلى العلاقتين (٤.٢.٣) و (٤.٢.٤) مع الأخذ بعين الاعتبار $y = E_\lambda y$ و $y = \left(I - E_\mu \right) y$ نجد

$$\left((A - \lambda I) y , y \right) = \left((A - \lambda I) E_\lambda y , y \right) \le 0$$

$$\left((A - \mu I) y , y \right) = \left((A - \mu I)(I - E_\mu) y , y \right) \ge 0$$

بطرح المساواة الثانية من الأولى نجد

$$\left((\mu - \lambda) y , y \right) \le 0$$

أو
$$(\mu-\lambda)\|y\|^2 \le 0$$

من هذا وبالأخذ بعين الاعتبار المتراجحة $\mu > \lambda$ نستنتج أنّ $y = P\,x = 0$ حيث x عنصر كيفي من H وبالتالي فإنّ $P = 0$ أو

$$E_\lambda \cdot (I - E_\mu) = E_\lambda - E_\lambda E_\mu = 0$$

وهذا يبرهن على ٢).

لنستعرض المجال نصف المفتوح $[\lambda, \mu)$ من المحور الحقيقي، عندئذ من أجل مؤثّر الإسقاط $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$ يكون لدينا

$$E_\mu\, E(\Delta) = E(\Delta)$$
$$(I - E_\lambda) E(\Delta) = E(\Delta)$$

وبالتالي فإنّ

$$(A - \mu I) E(\Delta) = (A - \mu I) E_\mu E(\Delta) \le 0$$
$$(A - \lambda I) E(\Delta) = (A - \lambda I)(I - E_\lambda) E(\Delta) \ge 0$$

ومنه نجد أنّ

$$\lambda\, E(\Delta) \le A\, E(\Delta) \le \mu\, E(\Delta) \qquad (٤.٢.٥)$$

نأتي الآن إلى الشرط ٣). من أجل أي عنصر $x \in H$ تمثل العبارة $(E_\lambda x, x)$ تابعاً غير متناقص في λ ولذلك فإنّ النهاية $\lim\limits_{\lambda \to \mu - 0} (E_\lambda x, x)$ موجودة. ومن هذا نجد أنّ

$$\|E_\upsilon x - E_\lambda x\|^2 = ((E_\upsilon - E_\lambda)x, x) = (E_\upsilon x, x) - (E_\lambda x, x) \to 0$$

من أجل $\lambda < \upsilon < \mu$ و $\lambda, \upsilon \to \mu$. بالتالي فإنّه من أجل أي عنصر $x \in H$ تكون النهاية موجودة

$$\lim_{\lambda \to \mu - 0} E_\lambda x = E_{\mu - 0}\, x$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ $E_{\mu-0}$ هو مؤثّر إسقاط. لنبرهن أنّ

$$E_{\mu - 0} = E_\mu$$

ليكن

$$E\left(\Delta_0\right)=E_{\mu}-E_{\mu-0}$$

بما أنّ

$$E\left(\Delta\right)=E_{\mu}-E_{\lambda}\rightarrow E\left(\Delta_0\right)$$

عندما $\lambda\rightarrow\mu-0$ بمفهوم التقارب النقطي للمؤثّرات، فإنّه بالانتقال إلى النهاية في العلاقة (٤.٢.٥) (الأمر ممكن وضوحاً) نجد أنّ

$$\mu E\left(\Delta_0\right)=A\,E\left(\Delta_0\right)$$

ليكن الآن x عنصراً ما من H و $y=E\left(\Delta_0\right)x$ وفقا للمساواة الأخيرة نجد أنّ

$$\left(A-\mu I\right)y=0$$

تبعا لذلك ووفقا للشرط ٣) من المبرهنة (١) نجد أنّ $E_{\mu}y=0$. وبما أنّ

$$E_{\mu}E\left(\Delta\right)=E\left(\Delta\right)$$

فإنّه بالانتقال إلى النهاية نجد

$$E_{\mu}E\left(\Delta_0\right)=E\left(\Delta_0\right)$$

وبالتالي فإنّ

$$E\left(\Delta_0\right)x=E_{\mu}E\left(\Delta_0\right)x=E_{\mu}y=0$$

وبما أنّ x عنصر كيفي من H فإنّ ذلك يعني أنّ $E\left(\Delta_0\right)=0$ و هذا يثبت ٣)(*) بسهولة يمكن التأكد من تحقق الشرط ٤). ليكن $\lambda<m$ ولنفرض أنّ $E_{\lambda}\neq 0$، عندئذٍ يوجد عنصر مثل x بحيث إن $E_{\lambda}x\neq 0$. لنفرض أنّ $E_{\lambda}x=y$ فنجد أنّ $E_{\lambda}y=y$ إضافة إلى أنّه يمكننا اعتبار أنّ $\|y\|=1$ وعندئذٍ يكون

(*) وفقا لتعريف E_{λ} تنتمي أصفار المؤثر $\left(A-\lambda I\right)$ إلى المتممة المعامدة للفضاء الجزئي $\mathscr{L}_{E_{\lambda}}$.أما إذا عرفنا المؤثر E_{λ} بحيث تكون أصفار المؤثر $\left(A-\lambda I\right)$ في $\mathscr{L}_{E_{\lambda}}$ و هذا ممكن دون أن نخل بالشروط ١) و ٢) و ٤) فان E_{λ} يكون مستمراً من اليمين.

$$(Ay,y)-\lambda=(Ay,y)-\lambda(y,y)=((A-\lambda I)y,y)=$$
$$=((A-\lambda I)E_\lambda y,y)\le 0$$

أي إن

$$(Ay,y)\le\lambda<m$$

وهذا يناقض تعريف العدد m، وبالتالي فإنّ $E_\lambda=0$ من أجل $\lambda<m$. وبنتيجة الاستمرار من اليسار يكون $E_m=0$. بالمثل يبرهن على أنّ $E_\lambda=I$ من أجل $M<\lambda$.

٢. النشر الطيفي للمؤثّر المترافق ذاتياً:

مبرهنة (٣): ليكن A مؤثراً خطّياً ومحدوداً ومترافقاً ذاتياً في فضاء هيلبرت H، عندئذ تتحقق المساواة :

$$A=\int_m^{M+\varepsilon}\lambda dE_\lambda \qquad (٤.٢.٦)$$

حيث إنّ التكامل يفهم كنهاية للمجاميع التكاملية بمفهوم التقارب المنتظم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة، أمّا ε فهو عدد موجب كيفي.

البرهان: ليكن المجال نصف المفتوح $[m,M+\varepsilon)$ حيث $0<\varepsilon$ ولنجزّأه إلى المجالات $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ حيث إنّ $\Delta_k=[\lambda_k,\mu_k)$.

استنادا إلى العلاقة (٤.٢.٥) يكون لدينا

$$\lambda_k\ E(\Delta_k)\ \le\ A\ E(\Delta_k)\ \le\ \mu_k\ E(\Delta_k)$$

وذلك من أجل كل مجال Δ_k. بالجمع على k $(k=1,2,\ldots,n)$ وملاحظة أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)=I$$

نجد أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ E(\Delta_k)\ \le\ A\ \le\ \sum_{k=1}^{n}\mu_k\ E(\Delta_k)$$

ليكن υ_k عدداً ما من المجال $[\lambda_k,\mu_k)$، عندئذٍ نجد

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \upsilon_k)E(\Delta_k) \le A - \sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^{n}(\mu_k - \upsilon_k)E(\Delta_k)$$

بوضع $\delta = \max_{k}(\mu_k - \lambda_k)$ نجد استنادا إلى المتراجحات الأخيرة أنّ

$$-\delta I \;\le\; A - \sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k) \;\le\; \delta I$$

أي إنّ

$$-\delta(x,x) \;\le\; ((A - \sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k))x, x) \;\le\; \delta(x,x)$$

$$|((A-\sum_{k=1}\upsilon_k E(\Delta_k))x, x)| < \delta(x,x)$$

و من ذلك ينتج أنّ

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k) \right\| \le \delta$$

أي إنّ

$$A = \lim_{\delta \to 0}\sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k) = \int_{m}^{M+\varepsilon}\lambda \, dE_{\lambda}$$

وهو المطلوب.

إن العلاقة الأخيرة تؤول من أجل المؤثّر التام الاستمرار A إلى العلاقة

$$A = \sum_{n}\lambda_n P_n$$

ملاحظة: بما أنّ تقارب متتالية المؤثّرات $\{A_n\}$ بمفهوم التقارب المنتظم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة يؤدي إلى التقارب النقطي للمتتالية $\{A_n\}$ إلى A وأيضاً تتقارب متتالية الصيغ التربيعية $\{(A_n x, x)\}$ إلى الصيغة التربيعية (Ax, x) فإنّه من المبرهنة (٣) ينتج أنّ

$$١) \quad Ax = \lim_{\delta \to 0}\sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k)\, x = \int_{m}^{M+\varepsilon}\lambda \, dE_{\lambda}\, x$$

$$٢) \quad (Ax, x) = \lim_{\delta \to 0}\sum_{k=1}^{n}\upsilon_k \left(E(\Delta_k)x, x\right) = \int_{m}^{M+\varepsilon}\lambda \left(dE_{\lambda}\, x, x\right)$$

من أجل أي عنصر $x \in H$.

§ ٣. التوابع لمؤثّر – المؤثّر الحال – الطيف

Function of Operator – Resolvent Operator – Spectrum

تعريف $F(A)$: لنعرّف الآن تكاملاً من الشكل

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\,dE_{\lambda}$$

حيث $F(\lambda)$ تابع بسيط ما ذو قيم مركّبة معرّف على المجال $[m,M]$، أمّا $\{E_{\lambda}\}$ فهو نشر المؤثّر المطابق المولد بالمؤثّر المترافق ذاتيا A. إذا كانت λ_0 نقطة انقطاع للتابع $F(\lambda)$، فإنّنا نصطلح على اعتبار

$$F(\lambda_0)=F(\lambda_0+0)$$

لنمدد التابع $F(\lambda)$ على المجال نصف المفتوح $[M,M+\varepsilon)$ بأن نضع $F(\lambda)=F(M)$. ليكن $F(\lambda_k)=\upsilon_k$ على المجال $\Delta_k=[\lambda_k,\mu_k)$ مع $k=1,2,\text{K},n$، إضافة إلى أنّ

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\text{U}}}\Delta_k=[m,M+\varepsilon)$$

لنضع بالتعريف

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\,dE_{\lambda}=\sum_{k=1}^{n}\upsilon_k E(\Delta_k)$$

بسهولة يمكن التأكد من تحقق المساواة

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\,dE_{\lambda}=\sum_{k=1}^{p}\mathring{\vartheta}_k E(\mathring{\Delta}_k)$$

حيث $\mathring{\Delta}_k$ أية مجالات جزئية نصف مفتوحة، والتي عليها يكون $F(\lambda)$ ثابتاً، كما أنّ مجموعها يساوي $[m,M+\varepsilon)$. لنرمز للمؤثر $\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\,dE_{\lambda}$ بـ $F(A)$ ونسميه

تابعاً للمؤثّر A موافقاً للتابع $F(\lambda)$ للمتحول الحقيقي λ. بذلك نحصل على تقابل بين التوابع البسيطة لمتحول حقيقي والتوابع للمؤثّر A.

إنّ هذا التقابل يتمتع بالخواص الآتية

١) إذا كان

$$F(\lambda)=\alpha F_1(\lambda)+\beta F_2(\lambda)$$

فإنّ

$$F(A)=\alpha F_1(A)+\beta F_2(A)$$

(الخاصة الجمعية للتقابل)

٢) إذا كان

$$F(\lambda)=F_1(\lambda).F_2(\lambda)$$

فإنّ

$$F(A)=F_1(A).F_2(A)$$

(الخاصة الضربية للتقابل)

٣) $\overline{F}(A)=\left[F(A)\right]^*$ حيث إنّ $\overline{F}$ هو التابع المرافق عقدياً للتابع F.

٤) $\left\|F(A)\right\|\leq\max\left|F(\lambda)\right|$

٥) إذا كان B مؤثّراً خطّياً محدوداً وكان $AB=BA$ فإنّ

$$F(A)B=BF(A)$$

لبرهان ١) و ٢) نجزّئ المجال نصف المفتوح $\left[m,M+\varepsilon\right)$ إلى أجزاء Δ_k يكون عليها كل من التابعين $F_1(\lambda)$ و $F_2(\lambda)$ ثابتاً، عندئذٍ من أجل التابع

$$F(\lambda)=\alpha F_1(\lambda)+\beta F_2(\lambda)$$

يكون لدينا

$$F(A)=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha C_k^{(1)}+\beta C_k^{(2)}\right)E(\Delta_k)=$$

$$=\alpha\sum_{k=1}^{n}C_k^{(1)}E(\Delta_k)+\beta\sum_{k=1}^{n}C_k^{(2)}E(\Delta_k)=\alpha F_1(A)+\beta F_2(A)$$

من أجل التابع

$$F(\lambda)=F_1(\lambda).F_2(\lambda)$$

يكون لدينا

$$F(A)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} C_k^{(2)} E(\Delta_k)$$

وتبعا لتعامد $E(\Delta_k)$ و $E(\Delta_1)$ من أجل $k \neq 1$ يمكننا أن نكتب

$$F(A)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} C_k^{(2)} E(\Delta_k)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} E(\Delta_k)\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} C_\ell^{(2)} E(\Delta_\ell)\right)=$$

$$=F_1(A).F_2(A)$$

نأتي الآن إلى إثبات ٣). بما أنّ

$$(F(A)x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\, E(\Delta_k)\,x \;,\; y\right)=$$

$$=\left(x \;,\; \sum_{k=1}^{n} \bar{C}_k\, E(\Delta_k)\, y\right)=$$

$$=\left(x \;,\; \bar{F}(A)y\right)$$

فإنّنا نجد

$$\left[F(A)\right]^{*}=\bar{F}(A)$$

وأخيراً

$$\left|(F(A)x\,,x)\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\, E(\Delta_k)\,x\,,x\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\right|\left(E(\Delta_k)x\,,x\right)\le \max\left|F(\lambda)\right|(x,x)$$

ومنه نجد أنّ

$$\|F(A)\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \left(F(A)\, x\, ,\, x \right) \right| \leq \max |F(\lambda)|$$

وبسهولة يمكن التأكد من صحة الخاصة ٥).

من تعريف $F(A)$ ينتج، في حالة خاصّة، أنّ $E(\Delta) = \chi_{\Delta}(A)$ حيث $\chi_{\Delta}(\lambda)$ هو التابع المميز للمجال نصف المفتوح Δ. ليكن الآن $F(\lambda)$ تابعاً ما مستمراً على المجال $[m, M]$ ولنمدده على المجال $[m, M+\varepsilon)$ بوضع $F(\lambda) = F(M)$ من أجل $\lambda \in [M, M+\varepsilon)$. عندئذٍ توجد متتالية من التوابع البسيطة مثل $\{F_n(\lambda)\}$ تتقارب بانتظام على المجال $[m, M+\varepsilon)$ إلى التابع $F(\lambda)$، ولنستعرض توابع المؤثّر الموافقة $F_n(A)$، بما أنّ

$$\|F_n(A) - F_m(A)\| \leq \max |F_n(\lambda) - F_m(\lambda)| \longrightarrow 0$$

عندما $n, m \to \infty$، وبما أنّ فضاء المؤثّرات الخطّية تام فإنّه يوجد مؤثّر مثل B بحيث يكون

$$B = \lim_{n} F_n(A)$$

لنضع بالتعريف

$$B = \int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)\, dE_{\lambda}$$

لاحقا سنرمز لـ B بـ $F(A)$ ونسميه تابعاً للمؤثّر A موافقاً للتابع المستمر $F(\lambda)$ للمتحول الحقيقي λ. بسهولة يمكن التأكد من أن تعريف $F(A)$ لا يتعلق باختيار المتتالية $\{F_n(\lambda)\}$ المتقاربة إلى $F(\lambda)$ وأنّ الخواص ١) – ٥) تتحقق من أجل التوابع المستمرة. في حالة خاصّة يكون لدينا

$$A^n = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda^n\, dE_{\lambda} \quad ; \; n = 1, 2, \ldots$$

المؤثّر الحالّ: إنّ التقابل القائم بين التوابع للمتحول الحقيقي λ والتوابع للمؤثّر A يمكن استخدامه بشكل واسع في شرح عدد من خواص المؤثّر المترافق ذاتياً، و

في حالة خاصّة، في شرح الخواص الطيفية لذلك المؤثّر وهذا ما سنبينه في المبرهنات الآتية:

مبرهنة (٤): لوجود المؤثّر الحال $R_{\lambda_0}=\left(A-\lambda_0 I\right)^{-1}$ من أجل قيمة معطاة λ_0 يكفي تحقق أحد الشروط الآتية:

١) λ_0 ليس حقيقيا.

٢) λ_0 يقع خارج المجال $[m,M]$.

٣) إذا كانت $\lambda_0\in[m,M]$ فإنّه يوجد مجال نصف مفتوح $[\alpha,\beta)$ و $\alpha<\lambda_0<\beta$ يكون في داخله E_λ ثابتاً.

في جميع هذه الحالات يكون

$$R_{\lambda_0}=\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}$$

البرهان: في الواقع، في الحالتين الأولى والثانية يكون التابع

$$f(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\lambda_0}$$

مستمرا في المجال $[m,M+\varepsilon)$ و ذلك من أجل ε صغير بقدر كاف، ولذلك فإنّ

$$\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}\cdot\int_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)\,dE_\lambda=\int_m^{M+\varepsilon}dE_\lambda=I$$

وبما أنّ

$$\int_m^{M+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)\,dE_\lambda=A-\lambda_0 I$$

فإنّ

$$\int_m^{M+\varepsilon}\frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}=R_{\lambda_0}$$

في الحالة الثالثة نجزّئ المجال $[m,M+\varepsilon)$ إلى ثلاثة مجالات $[m,\alpha)$ و $[\alpha,\beta)$ و $[\beta,M+\varepsilon)$. ليكن $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}$ على المجال $[m,\alpha)$ وكذلك على

المجال $\left(\beta, M+\varepsilon\right]$ وخطّياً على المجال $\left[\alpha,\beta\right)$ إضافة إلى أنّ $\varphi(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-\lambda_0}$ و $\varphi(\beta)=\dfrac{1}{\beta-\lambda_0}$، بما أنّ E_λ ثابت على المجال $\left[\alpha,\beta\right)$ فإنّ

$$\int_\alpha^\beta \psi(\lambda)\, dE_\lambda = 0$$

أياً كان التابع $\psi(\lambda)$ ولذلك يمكننا أن نكتب

$$\int_m^{M+\varepsilon} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda = \int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}$$

وبالتالي فإنّ

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0} \cdot \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)\, dE_\lambda = I$$

ومن ذلك ينتج أنّ R_{λ_0} موجود ويساوي لـ

$$\int_m^{M+\varepsilon} \frac{dE_\lambda}{\lambda-\lambda_0}$$

مبرهنة (٥): إذا كان R_{λ_0} موجوداً من أجل القيمة الحقيقية λ_0 فإنّ λ_0 تقع داخل مجال نصف مفتوح $\left[\alpha,\beta\right)$ و $\lambda_0 \neq \alpha$ يكون عليه E_λ ثابتاً.

البرهان: لنأخذ من أجل أي عنصر $x \in H$ المساواة

$$(A-\lambda_0 I)x = \int_m^{M+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)\, dE_\lambda x$$

ولنطبق على طرفي هذه العلاقة المؤثّر $R_{\lambda_0} E(\Delta)$ حيث $\Delta = \left[\alpha,\beta\right)$ مجال نصف مفتوح ما يحتوي في داخله على النقطة λ_0. بنتيجة ذلك نجد

$$E(\Delta)x = R_{\lambda_0}\left(\int_\alpha^\beta (\lambda-\lambda_0)\, dE_\lambda x\right)$$

ومنه يكون

$$\left\| E(\Delta)x \right\| \leq \left\| R_{\lambda_0} \right\| \left\| \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - \lambda_0)\, dE_{\lambda} x \right\|$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - \lambda_0)\, dE_{\lambda} x \right\| \leq C \left\| E(\Delta)x \right\|$$

حيث $C = \max\left[[\beta - \lambda_0), (\lambda_0 - \alpha] \right]$ وبالتالي فإنّ

$$\left\| E(\Delta)x \right\| \leq C \left\| R_{\lambda_0} \right\| \left\| E(\Delta)x \right\|$$

لنختر المجال نصف المفتوح $[\alpha, \beta)$ صغيراً بقدرٍ كافٍ وبحيث يكون $C \left\| R_{\lambda_0} \right\| < \frac{1}{2}$ وعندئذ يكون

$$\left\| E(\Delta)x \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| E(\Delta)x \right\|$$

وهذا الأمر ممكن فقط إذا كان $E(\Delta)x = 0$، وبما أنّ x عنصر كيفي من H فإنّ $E(\Delta) = 0$، وبالتالي فإنّ $E(\mathring{\Delta}) = 0$ من أجل أي مجال نصف مفتوح $\mathring{\Delta} \subset \Delta$، وهذا يعني أنّ E_{λ} ثابت في المجال $[\alpha, \beta)$.

من المبرهنة (٤) ينتج مباشرة أنّ مجموعة النقاط النظامية للمؤثّر المترافق ذاتياً A هي مجموعة مفتوحة، بالتالي فإنّ طيف المؤثّر المترافق ذاتياً A هو مجموعة مغلقة متوضّعة على المحور الحقيقي.

- **القيم الخاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً:**

مبرهنة (٦): الشرط اللازم والكافي كي تكون λ_0 قيمة خاصّة للمؤثّر المترافق ذاتياً A هو أن تكون λ_0 نقطة انقطاع لـ E_{λ}.

البرهان: لزوم الشرط: لنفرض أنّ λ_0 قيمة خاصّة للمؤثّر A وأنّ $x_0 \neq 0$ هو الشعاع الخاص المنتمي إلى هذه القيمة. أي إنّ

$$A\, x_0 - \lambda_0\, x_0 = 0$$

عندئذ نجد أنّ

$$\left((A-\lambda_0 I)^2 x_0 \, , x_0 \right) = 0$$

و بالتالي

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2 \; d\left(E_\lambda x_0 \, , \, x_0\right) = 0$$

بما أنّ التابع المستكمل غير سالب وأنّه متزايد فإنّ

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d\left(E_\lambda x_0 \, , \, x_0\right) = 0$$

من أجل أي مجال نصف مفتوح $[\alpha,\beta)$. في حالة خاصّة، من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يكون

$$\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} \left(\lambda-\lambda_0\right)^2 d\left(E_\lambda x_0, x_0\right) = 0$$

وبما أنّه على مجال المكاملة لدينا $\left(\lambda-\lambda_0\right)^2 \geq \varepsilon^2$ فإنّ

$$\varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M+\varepsilon} d\left(E_\lambda x_0, x_0\right) = \varepsilon^2 \left[\left(x_0, x_0\right) - \left(E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0\right) \right] = 0$$

وبالتالي فإنّ

$$\left(x_0, x_0\right) - \left(E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0, x_0\right) = 0$$

أي إنّ

$$E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0 = x_0 \qquad (٤.٣.١)$$

بالمثل نجد أنّ

$$\int_{m}^{\lambda_0-\varepsilon} \left(\lambda-\lambda_0\right)^2 \, d\left(E_\lambda x_0, x_0\right) = 0$$

ومنه، وبالأخذ بعين الاعتبار أنّ $E_m = 0$ نجد

$$E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = 0 \qquad (٤.٣.٢)$$

من (٤.٣.١) و (٤.٣.٢) ينتج أنّ

$$\left(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon}\right)x_0=x_0$$

وبما أن ε كيفي فإنّ

$$\left(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}\right)x_0=x_0$$

وبالتالي فإنّ λ_0، فعلياً، نقطة انقطاع لـ E_λ و بالإضافة إلى ذلك فإنّ الشعاع الخاص x_0 ينتمي إلى للفضاء الجزئي الموافق لموئر الإسقاط $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$.

كفاية الشرط: ليكن $E_{\lambda_0+0}\neq E_{\lambda_0}$ ، عندئذ يكون $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$ مؤثّر إسقاط، وليكن x_0 عنصراً ما من الفضاء الجزئي المقابل للمؤثّر $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$، عندئذٍ يكون

$$\left(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}\right)x_0=x_0$$

أي أنّ x_0 ينتمي للمتممة المعامدة للفضاء $\mathscr{L}_{E_{\lambda_0}}$ في الفضاء $\mathscr{L}_{E_{\lambda_0+0}}$ لذلك فإنّ

$$E_{\lambda_0+0}\,x_0=x_0 \quad \text{و} \quad E_{\lambda_0}\,x_0=0$$

أكثر من ذلك فإنّ

$$E_\lambda x_0=x_0\ ;\ \lambda>\lambda_0$$

وبالتالي فإنّ

$$E(\Delta)\,x_0=x_0$$

من أجل $\Delta=\left[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon\right)$. لكن عندئذٍ يكون

$$A\,x_0=A\,E(\Delta)x_0=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\lambda\,d\,E_\lambda\,x_0$$

وبالتالي فإنّ

$$A\,x_0-\lambda_0\,x_0=\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\left(\lambda-\lambda_0\right)d\,E_\lambda x_0$$

ومنه نجد أنّ

$$\|Ax_0-\lambda_0x_0\|\ \le\ \varepsilon\,\|E(\Delta)\,x_0\|\ \le\ \varepsilon\,\|x_0\|$$

و بما أنّ ε كيفي فإنّ

$$\|Ax_0-\lambda_0x_0\|=0$$

وهذا يؤدّي إلى المطلوب.

في سياق البرهان وجدنا أن الفضاء الجزئي الذي يسقط عليه المؤثّر $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}$ مؤلّف من العناصر الخاصّة للمؤثّر A المنتمية للقيمة الخاصّة λ_0.

مسائل وتمارين

١. ليكن E فضاء خطّياً منظّماً فوق حقل الأعداد المركّبة £، وليكن A مؤثّراً من $\mathscr{L}(E)$. برهن أنه إذا وجد للمؤثّر A^2 شعاع خاص فإنّه للمؤثّر A يوجد أيضاً شعاع خاص .

٢. أوجد الأشعّة الخاصّة والقيم الخاصّة في الفضاء $C[-\pi,\pi]$ المعرّف فوق حقل الأعداد الحقيقية للمؤثّرات الآتية :

$$a)\quad A\,x(t)=x(-t)$$

$$b)\quad A\,x(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)\;x(s)\,ds$$

٣. ليكن المؤثّر $A:C[0,1]\rightarrow C[0,1]$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x(t)=x(0)+t\,x(1)$$

أوجد الطيف $\sigma(A)$، نصف القطر الطيفي $r_\sigma(A)$ والمؤثّر الحال $R_\lambda(A)$.

٤. ليكن E فضاء باناخ فوق الحقل £ وليكن $A:E\longrightarrow E$ مؤثّراً خطّياً و مستمراً. برهن على أنّه إذا وجدت من أجل العدد المركّب λ متتالية منظّمة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من نقاط E $(\mathrm{P}x_n\mathrm{P}=1\ ,\ \forall n\in ¥)$ بحيث إنّ

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n-\lambda x_n)=0$$

فإنّ $\lambda\in\sigma(A)$.

٥. أوجد الطيف النقطي $P\ \sigma(A)$ والطيف المستمر $C\ \sigma(A)$ والطيف الباقي $R\ \sigma(A)$ للمؤثّر $A:C[0,1]\rightarrow C[0,1]$ إذا كان المؤثّر A معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x(t)=\int_0^t x(s)\,ds\quad ;\ x=x(t)\in C[0,1]$$

أوجد أجزاء الطيف المذكورة أعلاه إذا كان المؤثّر معرّفاً في $L^1[0,1]$ أي إنّ $A:L^1[0,1]\longrightarrow L^1[0,1]$ وكذلك إذا كان $A:C_0[0,1]\longrightarrow C_0[0,1]$

حيث $C_0[0,1]$ هو فضاء جميع التوابع المستمرة على $[0,1]$ والتي تؤول إلى الصفر في النقطة $t=0$ وذات النظيم

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$$

٦. لتكن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة من الأعداد المركّبة وليكن $A : l_2 \longrightarrow l_2$ مؤثّراً معرّفاً بالعلاقة

$$Ax = (\alpha_1 \xi_1 , \alpha_2 \xi_2 , \ldots)$$

حيث إنّ $x = (\xi_1 , \xi_2 , \ldots)$ عنصرٌ من l_2. أوجد الطيوف $P\sigma(A)$ و $C\sigma(A)$ و $R\sigma(A)$ للمؤثّر A.

٧. ليكن $A : l_p \longrightarrow l_p$ $(1 \le P)$ مؤثّراً معرّفاً بالعلاقة

$$Ax = (\xi_2 , \xi_3 , \ldots)$$

حيث إنّ $x = (\xi_1 , \xi_2 , \xi_3 , \ldots)$ عنصر من l_p. أوجد الطيوف $P\sigma(A)$ و $C\sigma(A)$ و $R\sigma(A)$ لهذا المؤثّر.

٨. ليكن المؤثّر A مترافقاً ذاتياً ومعرّفاً في فضاء هيلبرت H فوق حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. برهن أنّ الطيف الباقي لهذا المؤثّر خالٍ.

٩. ليكن المؤثّر A مؤثّراً مترافقاً ذاتياً في فضاء هيلبرت H المعرّف فوق حقل الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$. ولتكن $\Delta_A(\lambda)$ مجموعة قيم المؤثّر $(A - \lambda I)$ متطابقة مع الفضاء H، أي إنّ

$$\Delta_A(\lambda) = R(A - \lambda I) = H$$

برهن أن $\lambda \in \rho(A)$.

١٠. ليكن A مؤثّراً تام الاستمرار ومترافقاً ذاتياً و معرّفاً في فضاء هيلبرت H المعرّف فوق حقل الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$. أوجد مجموعة مؤثّرات الإسقاط العامودي $\{E_\lambda\}$ (نشر المؤثّر المطابق) حيث $\lambda \in [m, M + \varepsilon)$ المولدة بالمؤثّر A وتأكد من تحقق علاقة النشر الطيفي

$$A = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda$$

للمؤثر A.

١١. إذا كان X فضاء هيلبرت و كان $A \in \mathscr{L}(X, X)$ فبرهن أنّ

a) إذا كانت $\lambda \in \rho(A)$ فإنّ $\lambda \in \rho(A^*)$.

b) إذا كانت $\lambda \in R\,\sigma(A)$ فإنّ $\lambda \in P\,\sigma(A^*)$.

c) إذا كانت $\lambda \in P\,\sigma(A)$ فإنّه إمّا أن تكون $\lambda \in P\,\sigma(A^*)$ أو $\lambda \in R\,\sigma(A^*)$.

d) إذا كانت $\lambda \in \sigma(A^*)$ فإنّ $\lambda \in \sigma(A)$.

e) إذا كانت $\lambda \in \rho(A^*)$ فإنّ $\lambda \in \rho(A)$.

١٢. بيّن أنّ $\pi(A) \subset P\,\sigma(A) \cup C\,\sigma(A)$.

١٣. إذا كان A مؤثّراً خطّياً محدوداً في فضاء هيلبرت X برهن أنّه إذا كانت $\lambda \in \rho(A)$ فإنّ $R\,(A - \lambda I) = X$.

١٤. إذا كان A مؤثّراً خطّياً محدوداً و كانت $\lambda \in \pi(A)$ فإنّ $|\lambda| \le \|A\|$.

١٥. ليكن X فضاء جداء داخلي، لا نهائي البعد و قابلاً للفصل و لتكن X مجموعة تامّة من الأشعة المتعامدة – المنتظمة. لنعرّف من أجل كل $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ مؤثراً A بالعلاقة

$$A\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, x_{n+1}$$

a) برهن أنّ A مؤثر محدود و أنّ $\|A\| = 1$.

b) برهن أنّ $P\,\sigma(A) = \varnothing$.

c) أوجد المؤثر المرافق A^*.

d) برهن أنّ الفضاءين الجزئيين الوحيدين اللذين يختزلان المؤثّر A هما $\{0\}$ و X.

١٦.إذا كان $A : X \longrightarrow X$ مؤثّراً تام الاستمرار و X فضاء لا نهائي البعد برهن أنّ $0 \notin \rho(A)$.

١٧.ليكن $A : X \longrightarrow X$ مؤثّراً تام الاستمرار و لتكن $\lambda \neq 0$ برهن على أنّه إمّا $\lambda \in \rho(A)$ أو $\lambda \in P\,\sigma(A)$.

١٨.ليكن $A : X \longrightarrow X$ حيث $X = l_1$ معرّفاً من أجل كل x: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \mathrm{K}, \alpha_n, \mathrm{K});\ x \in l_1$ بالعلاقة

$$A\,x = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \mathrm{K}, \frac{1}{n}\alpha_n, \mathrm{K}\right)$$

برهن أنّ A تام الاستمرار و أنّ $0 \in \mathrm{C}\,\sigma(A)$.

١٩.ليكن X فضاء هيلبرت اللانهائي البعد و القابل للفصل و لتكن $\{x_1, x_2, \mathrm{K}, x_n, \mathrm{K}\}$ مجموعة متعامدة – منظّمة تامّة و لنعرّف مؤثّراً A بالعلاقة

$$A\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} x_{n-1} \quad ;\ (x_0 = 0)$$

من أجل كل عنصر x من H

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

برهن أنّ $P\,\sigma(A) = \{0\}$.

٢٠.إذا كان X فضاء هيلبرت القابل للفصل و كانت $\{x_1, x_2, \mathrm{K}, x_n, \mathrm{K}\}$ جملة متعامدة – منظّمة و تامّة و كان A مؤثّراً معرّفاً على عناصر هذه الجملة بالعلاقة

$$A\,x_n = \lambda x_n - x_{n-1} \quad ;\ n = 1, 2, \mathrm{K}, \lambda \in F$$

(حيث F حقل سلّمي حقيقي أو مركب). أوجد طيف المؤثر $\sigma(A)$.

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الأول

٢. إذا كان T مؤثراً في الفضاء l_2 $(T : l_2 \longrightarrow l_2)$ معرّفاً بالعلاقة

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots)$$

فأوجد المؤثر المرافق .

ليكن $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ عنصرين ما من l_2 و ليكن $z = \{z_n\} = T^*\{y_n\}$. بما أنّ

$$(Tx, y) = (x, z)$$

فإنّه يكون لدينا

$$\begin{aligned}&((0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots), (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)) = \\ &= ((x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), (z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots))\end{aligned}$$

و بالتالي فإنّ

$$4x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + 4x_3\bar{y}_4 + \cdots = x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + x_3\bar{z}_3 + \cdots$$

إنّ العلاقة الأخيرة تتحقق إذا كان

$$z_1 = 4y_2 \quad , \quad z_2 = y_3 \quad , \quad z_3 = 4y_4 \quad , \quad \ldots$$

و بالتالي فإنّه استناداً لوحدانية المؤثر المرافق يكون

$$T^*(y) = (4y_2, y_3, 4y_4, \ldots)$$

٤. برهن صحة العلاقات الآتية:

a) $\left(R(A)\right)^{\perp} = \ker A^*$

b) $\left(R\left(A^*\right)\right)^{\perp} = \ker A$

c) $(\ker A)^{\perp} = \overline{R\left(A^*\right)}$

d) $\left(\ker A^*\right)^{\perp}=\overline{R(A)}$

حيث $R(A)$ هي مجموعة قيم المؤثر A و $\ker A$ هي نواة المؤثر A. أي إنّ $\ker A=\{x\in H: A\,x=0\}$ و $\mathscr{S}^{\perp}$ هي المتممة المعامدة للمتنوّعة الخطّية $\mathscr{S}$.

(a) لنلاحظ أنّ المتنوّعتين $\ker A$ و $\ker A^*$ مجموعتا أصفار المؤثّرين A و A^* هما مجموعتان مغلقتان و ذلك لأنّ A (وكذلك A^*) مؤثّر مستمر. أمّا المتنوّعتان $R(A)$ و $R(A^*)$، فهما ليستا مغلقتين دائماً. لنبرهن أولاً أنّ $(R(A))^{\perp}\subset\ker A^*$. ليكن $z\in(R(A))^{\perp}$ أي إنّ

$$(z\,,A\,x)=0\quad;\forall x\in H$$

باستخدام تعريف المؤثّر المرافق نجد أنّ

$$0=(z\,,A\,x)=(A^*z\,,x)\quad;\forall x\in H \qquad (١)$$

و بما أنّ العنصر الصفري هو العنصر الوحيد المعامد لجميع عناصر الفضاء H فإنّ $A^*z=0$. أي إنّ $z\in\ker A^*$.

بالعكس، إذا كان $z\in\ker A^*$ فإنّ العلاقة (١) تكون محققة و منها ينتج أنّ $z\in(R(A))^{\perp}$ و هذا بدوره يؤدي إلى أنّ

$$(R(A))^{\perp}=\ker A^*$$

(b) إنّ (b) تنتج من (a) باستبدال A بـ A^* و ملاحظة أنّ $A^{**}=A$.

(c) لنلاحظ أنّ تعامد الشعاع z مع المتنوّعة الخطّية $\mathscr{S}$ يكافئ تعامد z مع $\overline{\mathscr{S}}$ لصاقة المتنوّعة الخطّية $\mathscr{S}$ و هذا ينتج من استمرار الجداء الداخلي. تبعاً لذلك و استناداً إلى مبرهنة نشر الفضاء H في مجموع مباشر لفضاءاته الجزئية يكون لدينا

$$H=\ker A\oplus(\ker A)^{\perp}$$
$$H=\overline{R(A^*)}\oplus(R(A^*))^{\perp}$$

بالأخذ بعين الاعتبار ما برهناه في (b) من أنّ $\left(R(A^*)\right)^{\perp}=\ker A$ نجد أنّ

$$\overline{R(A^*)} = (\ker A)^{\perp}$$

(d) تبرهن تماماً كما في الحالة (c).

٦. ليكن المؤثّر A $\left(A : L^p[0,1] \longrightarrow L^p[0,1]\right)$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,\varphi = \int_0^t k(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

احسب المؤثّر المرافق A^*.

وجدنا أنّ المؤثّر المرافق $A^* : E_y^* \to E_x^*$ للمؤثّر $A \in \mathscr{L}(E_x, E_y)$

يعمل وفق القاعدة

$$(A^* f)(x) = f(Ax) \quad ; f \in E_y^*, x \in E_x$$

و هذه العلاقة تكتب على الشكل

$$(Ax, f) = (x, A^* f)$$

من أجل المؤثّر A المعرّف بالعلاقة

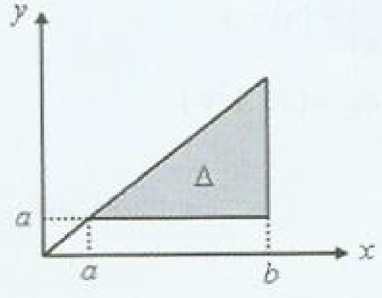
$$A\,\varphi = \int_0^t k(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

يكون لدينا

$$(A\,\varphi, \psi) = \int_0^1 \overline{\psi(t)} \int_0^t k(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,dt$$

و باستخدام علاقة ديرخليه

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx$$



نجد أنّ

$$\int_0^1 \overline{\psi(t)} \int_0^t k(t,s)\, \varphi(s)\, ds\, dt = \int_0^1 \varphi(s)\, ds \int_s^t k(t,s)\, \overline{\psi(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi(s)\, ds \int_s^1 \overline{\overline{k(t,s)}\, \psi(t)}\, dt =$$

$$= (\varphi, A^* \psi)$$

أي إنّ

$$A^* \psi = \int_s^1 \overline{k(t,s)}\, \psi(t)\, dt$$

٨. إذا كان المؤثّر A معرّفاً في الفضاء $L^2[0,1]$ بالعلاقة

$$A\,x(t) = \begin{cases} x(2t) \;; & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 0 \;; & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

أوجد المؤثّر A^*.

استناداً للعلاقة $(A\,x, y) = (x, A^* y)$ نجد أنّ

$$(A\,x, y) = \int_0^1 x(2t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

بإجراء التحويل $2t = u$ نجد $t = \frac{u}{2}$ و $dt = \frac{du}{2}$ و يكون

$$(A\,x, y) = \int_0^1 x(2t)\, \overline{y(t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(u)\, \overline{y(\frac{u}{2})}\, du = (x, A^* y)$$

و بالتالي فإنّ

$$A^* y(u) = \frac{1}{2}\, y(\frac{u}{2})$$

١٠. إذا كان $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, K)$ عنصراً من l_p وكان A معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x = (\xi_1, \xi_6, \xi_{11}, K)$$

أوجد المؤثر A^*.

ليكن $x = \{\xi_n\}$ و $y = \{\eta_n\}$ و $A^* y = z = \{\zeta_n\}$ استناداً للعلاقة

$$(A\,x, y) = (x, A^* y) = (x, z)$$

نجد أنّ

$$\big((\xi_1, \xi_6, \xi_{11}, K), (\eta_1, \eta_2, \eta_3, K)\big) = \big((\xi_1, \xi_2, \xi_3, K), (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, K)\big)$$

و بالتالي فإنّ

$$\xi_1 \overline{\eta}_1 + \xi_6 \overline{\eta}_2 + \xi_{11} \overline{\eta}_3 + L = \xi_1 \overline{\zeta}_1 + \xi_2 \overline{\zeta}_2 + \xi_3 \overline{\zeta}_3 + L$$

إنّ هذه المساواة تتحقق إذا كان

$$\zeta_1 = \eta_1 \quad , \quad \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_5 = 0 \quad , \quad \zeta_6 = \eta_2$$
$$\zeta_7 = \zeta_8 = \zeta_9 = \zeta_{10} = 0 \quad , \quad \zeta_{11} = \eta_3 \quad , \quad K$$

و بالتالي فإنّ

$$A^* y = (\eta_1, 0, 0, 0, 0, \eta_2 0, 0, 0, 0, \eta_3, \ldots)$$

١٢. إذا كان المؤثر A $\left(A : L^p[0,3] \longrightarrow L^p[0,3]\right)$ معرّفاً بالعلاقة

$$A\,x(t) = \begin{cases} x(t) & ; \quad 0 \le t < 1 \\ x(\frac{t+3}{2}) & ; \quad 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

أوجد المؤثر A^*.

$$(Ax, y) = \int_0^3 Ax(t)\overline{y(t)}dt$$
$$= \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt + \int_1^3 x(\frac{t+3}{2})\overline{y(t)}dt =$$
$$\frac{t+3}{2} = u \quad ; t = 2u-3 \ , \ \ dt = 2du$$
$$= \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt + 2\int_2^3 x(u)\overline{y(2u-3)}\,du$$

و بالتالي فإنَ

$$A^* y(u) = \begin{cases} y(u) & ; \quad 0 \le u \le 1 \\ 0 & ; \quad 1 < u < 2 \\ 2y(2u-3) & ; \quad 2 \le u \le 3 \end{cases}$$

١٤. إذا كان المؤثر A $\left(A : L^p[0,1] \longrightarrow L^p[0,1]\right)$ معرفاً بالعلاقة

$$A\,\varphi = \int_0^t e^{is}\varphi(s)ds$$

احسب المؤثر A^*.

لنكتب المؤثر A على الشكل

$$A\,\varphi = \int_0^t e^{is}\varphi(s)ds = \int_0^1 K(t,s)\,\varphi(s)ds$$

حيث
$$K(t,x) = \begin{cases} e^{is} & s \le t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

و بالتالي فإنَ

$$(A\,\varphi, \psi) = \int_0^1 \overline{\psi(t)} \int_0^t K(t,s)\,\varphi(s)ds\,dt$$

$$= \int_0^1 \varphi(s)\,ds \int_S^1 K(t,s)\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \varphi(s)\,ds \int_S^1 \overline{\overline{K(t,s)}\,\psi(t)}\,dt$$

و بالتالي فإنّ

$$A^*\psi(s) = \int_s^1 \overline{K(t,s)}\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_s^1 e^{-is}\,\psi(t)\,dt$$

١٨. إذا كان H فضاء هيلبرت وكانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثّرات في H برهن أن $A_n \xrightarrow{w} A$ حيث $A \in \mathscr{L}(H,H)$ إذا وفقط إذا

$$(A_n x, y) \to (A x, y) \quad ;\forall\, x, y \in H$$

لنفرض أنّ $A_n \xrightarrow{w} A$ هذا يعني أنّ المتتالية $\{A_n x\}$ متقاربة بضعف إلى $A x$ من أجل جميع العناصر $x \in H$. و استناداً للتقارب الضعيف في فضاء هيلبرت فإنّه من أجل أي عنصر $y \in H$ يكون

$$(A_n x, y) \to (A x, y) \quad ;\forall\, x, y \in H \qquad (*)$$

بالعكس، لنفرض أنّ (*) محققة من أجل جميع العناصر x و y من H عندئذٍ نجد أنّ

$$\left|(A_n x, y) - (A x, y)\right| \to 0 \quad ;\ n \to \infty$$

و بالتالي فإنّ

$$\left|(A_n x - A x\,,\,y)\right| \to 0 \quad ;\ n \to \infty$$

و هذا يعني أنّ

$$\lim_{n\to\infty}(A_n x - A x) = 0 \quad ;\ \forall x \in H$$

أي إنّ $\{A_n\}$ تتقارب بضعف إلى A.

٢٠. إذا كان H فضاء هيلبرت وكان A و B مؤثّرين في H $(A,B:H\to H)$ و بحيث إنّ

$$(Ax,y)=(x,By)\quad;\ \forall x,y\in H$$

برهن أنّ $A\in\mathscr{L}(H,H)$ و أنّ $B=A^*$.

لنبرهن أولاً على أنّ المؤثّر A خطّي. بما أنّ

$$\begin{aligned}\left(A(\alpha x_1+\beta x_2),y\right)&=(\alpha x_1+\beta x_2,By)=\\&=\alpha(x_1,By)+\beta(x_2,By)=\\&=\alpha(Ax_1,y)+\beta(Ax_2,y)=\\&=(\alpha Ax_1+\beta Ax_2,By)\end{aligned}$$

من أجل أية عناصر x_1 و x_2 و y من H و أياً كان المقداران السلّميّان α و β، فإنّ

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2$$

لنفرض الآن أنّ $\{x_n\}$ متتالية ما من عناصر الفضاء H متقاربة إلى العنصر x من H، عندئذٍ نجد أنّ

$$(Ax_n,y)=(x_n,By)$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $n\to\infty$ آخذين بعين الاعتبار استمرار الجداء الداخلي نجد

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(Ax_n,y)&=\lim_{n\to\infty}(x_n,By)=\\&=(x,By)=(Ax,y)\end{aligned}$$

بالتالي فإنّ $$\lim_{n\to\infty}Ax_n=Ax$$

و هو ما يثبت استمرار المؤثّر A. هكذا فإنّ $A\in\mathscr{L}(H,H)$ و باستخدام العلاقة المعرّفة للمؤثّر المرافق A^* نجد أنّ

$$(Ax,y)=(x,A^*y)\quad;\forall x,y\in H$$

و بالتالي فإنّ

$$(x, A^* y) = (x, B y) \ ; \forall x, y \in H$$

أي إنّ

$$\left(x, (A^* - B) y\right) = 0 \ ; \forall x, y \in H$$

بالتالي فإنّ

$$A^* y = B y \ ; \forall y \in H$$

أو

$$A^* = B$$

٢٢. تأكد من أنّ التقارب القوي والتقارب الضعيف في الفضاء l_2 غير متطابقين.

لنستعرض في الفضاء l_2 متتالية العناصر $\{e_i\}$ حيث

$$(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$$

$$e_i = (i - 1, 1, 0, ...) \ ; \ i = 1, 2, ...$$

و ليكن f دالّياً خطيّاً من l_2^* معرّفاً بالعلاقة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \text{K})$ عنصر من l_2 و f_n تنتمي إلى $(l_2^* = l_2)$ و تتعرّف بشكل وحيد بالدالي f. من علاقة التعريف نجد أنّ $f(e_i) = f_i$ و لذلك فإنّ $f_i \to 0$ عندما $i \to \infty$ أي إنّ $f(e_i) \to 0$ عندما $i \to 0$ و هذا يعني أنّ المتتالية $\{e_n\}$ تتقارب إلى الصفر بضعف في الفضاء l_2. في الوقت نفسه إنّ المتتالية $\{e_n\}$ لا تتقارب بقوة في الفضاء l_2 إلى العنصر الصفري. في الواقع، من أجل $n \neq m$ يكون

$$\| e_n - e_m \| = \sqrt{2} \not\to 0 \quad ; \ n, m \to \infty$$

٢٤. ليكن $0 \in (a, b)$، وليكن δ دالّياً معرّفاً على الفضاء $C[a, b]$ بالعلاقة $\delta(x) = x(0)$، ولتكن المتتالية $\{\varphi_n(t)\}$ من الفضاء $C[a, b]$ محققة للشروط

a) $\varphi_n(t)=0 \quad ; \; |t|>\frac{1}{n} \quad , \varphi_n(t)\geq 0$

b) $\int_a^b \varphi_n(t)\, dt = 1$

برهن أنّ متتالية الدالّيات

$$f_n(x)=\int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt$$

تتقارب بضعف إلى الدالي δ.

في الحقيقة، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى من أجل التكاملات، المعروفة في التحليل الرياضي(*) يكون من أجل أي تابع مستمر $x(t)$ على المجال $[a,b]$:

(*)مبرهنة القيمة الوسطى الأولى:

١) إذا كان التابعان $f(x)$ و $\varphi(x)$ محدودين و قابلين للمكاملة على المجال $[a,b]$.

٢) إذا حافظ التابع $\varphi(x)$ على إشارة واحدة على المجال $a<x<b$ فإنّ

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx=\mu\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

حيث

$$m\leq\mu\leq M$$

و

$$M=\sup f(x)$$

و

$$m=\inf f(x).$$

٣) إضافة إلى ذلك إذا كان $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ فإنّ $\mu=f(c)$ حيث $a\leq c\leq b$.

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,x(t)\,dt = \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,x(t)\,dt$$

$$= x(\xi)\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\;dt = x(\xi)$$

حيث $\xi \in (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ و لذلك فإنّه من أجل $n \to \infty$ يكون

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,x(t)\,dt \longrightarrow x(0)$$

و هذا يعني أنّ δ دالّي ممثّل في شكل نهاية (بمفهوم التقارب الضعيف) لمتتالية من الدالّيات $\{f_n\}$. لنلاحظ وفقاً لذلك أنّ

$$\|\delta\| = \|f_n\| = 1 \quad ; \forall n \in ¥$$

٢. من أجل أي تابع φ من الفضاء $C[a,b]$ يكون المؤثر A $(A:C[a,b]\to C[a,b])$ و المعرّف بالعلاقة

$$A\,x(t)=\varphi(t)\cdot x(t)$$

تام الاستمرار (يسمّى هذا المؤثر بمؤثر الضرب بالتابع φ).

لنبرهن أنّه إذا كان التابع φ مختلفاً و لو في نقطة واحدة $t_0\in[a,b]$ عن الصفر فإنّ المؤثّر الموافق A لن يكون تام الاستمرار. في الحقيقة، من أجل عدد كبير بقدر كاف مثل n $(n_0\le n)$ نستعرض المتتالية المحدودة من التوابع $\{x_n(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$ و $t\in[a,b]$ و المنشأة وفق الصورة الآتية: نعتبر أنّ $x_n(t)=0$ من أجل $a\le t\le t_0-\frac{1}{n}$ و $t_0+\frac{1}{n}\le t\le b$ و $x_n(t_0)=\frac{1}{\varphi(t_0)}$ أمّا على المجالين $\left[t_0-\frac{1}{n},t_0\right]$ و $\left[t_0,t_0+\frac{1}{n}\right]$ فإنّ $x_n(t)$ خطّي. لنبرهن على أنّ متتالية التوابع $\{x_n(t)\}_{n=n_0}^{\infty}$ هي مجموعة غير متراصّة. سنبرهن ذلك بطريقة النقض. لنفرض أنّ المجموعة $\left((A\,x_n)(t)\right)_{n=n_0}^{\infty}$ متساوية الاستمرار؛ أي إنّه من أجل كل عدد $0<\varepsilon$ يوجد عدد مثل $0<\delta$ بحيث إنّه إذا كان $|t'-t''|<\delta$ $(t',t''\in[a,b])$ فإنّ

$$\left|(A\,x_n)(t')-(A\,x_n)(t'')\right|<\varepsilon$$

من أجل أي عدد $n_0\le n$. من ذلك و من أجل $\varepsilon=1$ و العدد $0<\delta$ الذي يقابله و من أجل $t'=t_0$ و $t''=t_0+\frac{1}{n}$ حيث $\frac{1}{n}<\delta$ نجد

$$\left|A\,x_n(t_0)-A\,x_n(t_0+\frac{1}{n})\right|=|1-0|=1$$

و بالتالي فإنّ المؤثّر A ليس تام الاستمرار. بهذه الصورة نجد أنّ المؤثّر $A\,x(t)=\varphi(t)\cdot x(t)$؛ $x(t)\in C[a,b]$ يكون تام الاستمرار فقط عندما يكون $\varphi(t)=0$ من أجل جميع النقاط $t\in[a,b]$.

٤. برهن أنّه إذا كان المؤثر الخطي A منتهي البعد فإنّه يكون تام الاستمرار.

راجع القسم النظري.

٦. لنستعرض المؤثّر $A : l_p \longrightarrow l_p$ $(p > 1)$ و المعرّف بالعلاقة

$$A\,x = (\alpha_1\,\xi_1,\, \alpha_2\,\xi_2,\, \ldots)$$

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصر من l_p و $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية عدديّة معطاة.

ما هي الشروط التي ينبغي أن تحققها المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ كي يكون المؤثر A:

a) محدوداً.

b) تامّ الاستمرار.

a) لنبرهن على أنّ المؤثر A يكون محدوداً إذا و فقط إذا كانت المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ محدودة. في الواقع، لتكن المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ محدودة؛ أي إنّه يوجد عدد موجب مثل $\mathcal{M}$ بحيث إنّ $|\alpha_j| \le \mathcal{M}$ من أجل جميع الأعداد j. و عندئذٍ يكون

$$\|A\,x\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j\,\xi_j|^p \le \mathcal{M}^p\,\|x\|^p \quad ; \forall x \in l_p$$

أي إنّ المؤثّر A محدود و إنّ $\|A\| \le \mathcal{M}$.

لِيكن الآن المؤثّر A محدوداً و أنّ المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ غير محدودة. أي إنه من أجل كل عدد طبيعي ما n يوجد عدد مثل j_n بحيث يكون $|\alpha_j| > n$. لنستعرض الآن الشعاع e_{j_n} من الكرة الواحدية في الفضاء l_p و الذي جميع مركباته معدومة باستثناء المركبة j_n و التي تساوي 1. عندئذٍ يكون

$$\|A\,e_{j_n}\| = |\alpha_{j_n}| > n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

و بالتالي فإنّ

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|A\,x\| = \infty$$

و هذا يناقض محدودية المؤثّر A.

b) لنبرهن الآن على أنّ المؤثر A يكون تام الاستمرار إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ، لتكن $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و لنبيّن بأنّ A يكون تام الاستمرار. لتكن M مجموعة محدودة من l_p. أي إنّه يوجد عدد موجب مثل R بحيث إنّ $\|x\| \le R$ من أجل جميع العناصر $x \in M$. بما أنّ المؤثر A محدود فإنّه صورة $A(M)$ المجموعة M تكون محدودة. ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً ما عندئذٍ من الشرط $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ينتج وجود عدد مثل n_0 بحيث إنه بدءاً من هذا العدد يكون

$$|\alpha_n| < \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{R}$$

لذلك فإنّه من أجل كل نقطة $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in M$ يكون لدينا

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \left|(A\,x)_j\right|^p = \sum_{j=n_0}^{\infty} \left|\alpha_j\right|^p \left|\xi_j\right|^p < \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=n_0}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p \le \frac{\varepsilon}{R^p} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p \le \varepsilon$$

و استناداً إلى مبدأ التراص في الفضاء l_p تكون المجموعة $A(M)$ متراصّة و بالتالي فإنّ المؤثر A تام الاستمرار.

ليكن المؤثر A تام الاستمرار عندئذٍ يكون محدوداً، و وفقاً لـa) تكون المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ محدودة أيضاً. لنستعرض من أجل كل عدد طبيعي n الشعاع $e_n \in l_p$ الذي جميع مركباته معدومة باستثناء المركّبة ذات الدليل n فإنّها تساوي ١ ، عندئذٍ يكون $e_n \neq 0$ و بالتالي فإنّ $A\,e_n = \alpha_n\,e_n$ ؛ أي إنّ جميع الأعداد α_n قيم خاصّة للمؤثر التّام الاستمرار A و بالتالي فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

٨) إذا كان المؤثر A:

a) $A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A\,x(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

b) $A : l_p \longrightarrow l_p$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A\,x=(\alpha_1\,\xi_1,\,\alpha_2\,\xi_2,\,...)$$

حيث $x=(\xi_1,\,\xi_2,\,...)$ عنصر من l_p و $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية عدديّة محدودة.

$$c)\quad A:L^2(\mathbf{R})\longrightarrow L^2(\mathbf{R})$$

و معرّفاً بالعلاقة:

$$A\,x(t)=a(t)\,x(t+h)$$

حيث $a(t)$ تابع محدود على $\mathbf{R}$ و قيوس وفق ليبيغ و $h\in\mathbf{R}$، أوجد المؤثّر A^* في الحالات المذكورة.

a) إنّ المؤثّر A خطّي و مستمر و يطبّق فضاء هيلبرت فوق حقل الأعداد المركّبة $L^2[0,1]$ في نفسه. لذلك فإنّه من أجل تعريف المؤثّر المرافق $A^*:L^2[0,1]\longrightarrow L^2[0,1]$ نأخذ عنصراً كيفياً $y=y(t)\in L^2[0,1]$ و عندئذ نجد

$$(A\,x\,,\,y)=\int_0^1 A\,x(t)\overline{y(t)}dt=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)\overline{y(t)}dt=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^t x(\tau)\overline{y(t)}d\tau\right)dt$$

و بمبادلة موضعي المكاملة نجد أنّ

$$(A\,x\,,\,y)=\int_0^1 x(t)\overline{\left(\int_t^1 y(\tau)d\tau\right)}dt=$$

$$=\int_0^1 x(t)\cdot\overline{A^*y(t)}\,dt=(x\,,\,A^*y)$$

و بالتالي فإنّ المؤثّر المرافق A^* يتعرّف بالعلاقة

$$A^* y(t) = \int_t^1 y(\tau) d\tau \quad ; \quad y \in L^2[0,1]$$

بمقارنة عبارتي المؤثرين A و A^* نستنتج أنّ A ليس مترافقاً ذاتياً.

b) ليكن $1 < p$ إنّ المؤثر A خطّي و محدود (انظر المسألة ٦). لنذكر بأنّ $l_p^* = l_q$ حيث q هو العدد المترافق مع العدد p. بكلام آخر إنّ ناتج $\langle x, f \rangle$ تطبيق الدالّي $f \in l_p^*$ على العنصر $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_p$ تكتب بدلالة العلاقة

$$\langle x, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{f_j}$$

حيث $f = (f_1, f_2, \ldots) \in l_q$ (باعتبار أنّ l_p فضاء فوق حقل الأعداد المركبة). وفقاً لتعريف المؤثّر المرافق يكون

$$\langle A x, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j \overline{f_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\overline{\alpha}_j f_j} = \langle x, A^* f \rangle$$
$$\forall x \in l_p, \forall f \in l_q$$

و منه نجد أنّ

$$.A^* f = (\overline{\alpha}_1 f_1, \overline{\alpha}_2 f_2, \ldots)$$

و ذلك أياً كان $.f = (f_1, f_2, \ldots) \in l_q$

من أجل $p = 1$ يكون المؤثّر A مستمراً أيضاً إذا و فقط إذا كانت المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ محدودة. لنذكر بأنّ $l_1^* = m$؛ أي إنّ الفضاء المرافق لـ l_1 هو فضاء جمع المتتاليات العددية المحدودة و بشكل مماثل لما ذكرنا نجد أنّ

$$A^* f = (\overline{\alpha}_1 f_1, \overline{\alpha}_2 f_2, \ldots)$$

و ذلك إذا كان $.f = (f_1, f_2, \ldots) \in m$ بذلك نجد أنّ المؤثّر A يكون مترافقاً ذاتياً إذا كانت المتتالية $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ حقيقية. (جميع حدود المتتالية أعداد حقيقية).

c) من أجل الشروط المفروضة على التابع $a(t)$ يكون المؤثّر A خطيّاً و مستمراً و $\|A\| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} |a(t)|$. بما أنّ

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} a(t) x(t+h) \overline{y(t)} \, dt \quad ; \ x, y \in L^2(\mathbb{R})$$

فإنه بإجراء التحويل $t + h = \tau$ نجد

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \overline{\overline{a(\tau - h)} y(\tau - h)} \, d\tau = (x, A^* y) \quad ; \ x, y \in L^2(\mathbb{R})$$

و بالتالي فإنّ

$$A^* y(t) = \overline{a(t-h)} \ y(t-h) \quad ; \ \forall y \in L^2(\mathbb{R})$$

١٠) ليكن A و B مؤثّرين من $\mathcal{L}(H)$ (فضاء المؤثّرات الخطيّة المحدودة من H في H) و $A \ge 0$ و $B \ge 0$. إذا كان $A + B = 0$ فبرهن أنّ $A = B = 0$.

بما أنّ

$$0 = ((A+B)x, x) = (Ax, x) + (Bx, x) \quad ; \ \forall x \in H$$

و أنّ

$$(Ax, x) \ge 0 \ \text{و} \ (Bx, x) \ge 0$$

أياً كان العنصر $x \in H$ فإنّ

$$(Ax, x) = 0 \ , \ (Bx, x) = 0 \quad ; \ \forall x \in H$$

و هذا يعني أنّ $A = B = 0$.

١٢) إذا كان E_1 و E_2 مؤثّري إسقاط عموديّين و كان $E_1 E_2 = 0$ فبرهن أنّ $\|E_1 + E_2\| < \|E_1\| + \|E_2\|$

بما أنّ $E_1 E_2 = 0$ فإنّ مجموع المؤثّرين $E = E_1 + E_2$ يكون مؤثّر إسقاط أيضاً و بالتالي فإنّ $\|E\| = 1$. من ناحية ثانية، لدينا $\|E_1\| = 1$ و $\|E_2\| = 1$ و بالتالي فإنّ

$$1 = \| E \| = \| E_1 + E_2 \| < \| E_1 \| + \| E_2 \|$$

١٤) ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن المؤثّر A من $\mathcal{L}(H)$ و بحيث إنّ $0 < A \le I$ برهن أنّ $0 < A^2 \le A$

بما أنّ $0 < A \le I$ فإنّ المؤثّر $(I - A)$ موجب؛ أي إنّ $0 \le I - A$ بما أنّ المؤثّرين A و $(I - A)$ تبادليّان فإنّ جداءهما يكون مؤثّراً موجباً؛ أي إنّ $0 \le A(I - A)$، و بالتالي فإنّ $0 \le A - A^2$ و هذا يؤدّي إلى أنّ $A^2 \le A$ و بالتالي فإنّ $0 < A^2 \le A$.

١٦) ليكن H فضاء هيلبرت و ليكن A من $\mathcal{L}(H)$ مؤثّراً مترافقاً ذاتياً. برهن على وجود مؤثّرين A^+ و A^- موجبين و بحيث إنّ

$$A = A^+ - A^- \text{ و } A^+A^- = 0$$

بما أنّ المؤثّر A مترافق ذاتياً فإنّ المؤثّر A^2 يكون موجباً، بالتالي يمكننا فصل جذر تربيعي موجب و وحيد نرمز له بـ $\sqrt{A^2}$ يكون تبادلياً مع أي مؤثّر تبادلي مع A^2، و في حالة خاصّة يكون $\sqrt{A^2}$ تبادلياً مع المؤثّر A^2 نفسه.

لنشكل المؤثّرين

$$A^+ = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} + A)$$

$$A^- = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} - A)$$

من الواضح أنّ

$$A = A^+ - A^-$$

$$A^+A^- = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{A^2} + A)\cdot(\sqrt{A^2} - A)\right] = A^2 - A^2 = 0$$

بما أنّ $\sqrt{A^2} = A^+ + A^- \ge 0$ و أنّ $A^+A^- = 0$ فإنّ $A^+ \ge 0$ و $A^- \ge 0$. و هو المطلوب.

٢. أوجد الأشعّة الخاصّة والقيم الخاصّة في الفضاء $C\left[-\pi,\pi\right]$ المعرّف فوق حقل الأعداد الحقيقية للمؤثّرات الآتية :

a) $A\,x(t)=x(-t)$

b) $A\,x(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)\;x(s)\,ds$

a) علينا إيجاد جميع الأعداد الحقيقية λ التي من أجلها يوجد للمعادلة $A\,x=\lambda\,x$ حلول غير تافهة، أي للمعادلة $x(-t)=\lambda\,x(t)$ في الفضاء $C\left[-\pi,\pi\right]$. من الواضح أنّه إذا كانت $\lambda=1$ فإنّ كل تابع زوجي يحقق المعادلة، أمّا إذا كانت $\lambda=-1$ فإنّ كل تلك تابع فردي يحقق تلك المعادلة.

لنبيّن بأنّه للمؤثّر A لا توجد قيم خاصّة أخرى مغايرة لهاتين القيمتين. لنفرض أنّ $\lambda\neq\pm1$ قيمة خاصّة للمؤثّر A و أنّ $x_0=x_0(t)$ شعاعاً خاصّاً منتمياً لتلك القيمة، عندئذٍ نجد أنّ

$$x_0(-t)=\lambda_0\,x_0(t)\quad;\quad\forall\;t\in\left[-\pi,\pi\right]\;,\;x_0(t)\neq0$$

باستبدال t بـ $-t$ نجد أنّ

$$x_0(t)=\lambda_0\,x_0(-t)\quad;\quad\forall\;t\in\left[-\pi,\pi\right]$$

تبعاً لذلك يكون

$$x_0(t)=\lambda_0^2\,x_0(t)\quad;\quad\forall\;t\in\left[-\pi,\pi\right]$$

إلا أنّ العلاقة الأخيرة غير ممكنة لأنّ $\lambda_0^2\neq1$ و $x_0\neq0$ و بالتالي فإنّه للمؤثّر A توجد قيمتان خاصّتان هما $\lambda=-1$ و $\lambda=+1$، أمّا الأشعة الخاصّة المنتمية لهاتين القيمتين فقد ذكرت أعلاه.

b) علينا وصف جميع الأعداد الحقيقية λ و التي من أجلها يوجد للمعادلة

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)\ x(s)\,ds = \lambda x(t) \qquad ; \quad -\pi \le t \le \pi \qquad (1)$$

حلول غير تافهة في الفضاء $C\left[-\pi,\pi\right]$. بغية هذا الأمر نكتب النواة $\sin(t+s)$ على الشكل $\sin t\ \cos s + \cos t\ \sin s$ و لذلك فإنّ

$$\lambda x(t) = \sin t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\, x(s)\,ds + \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\, x(s)\,ds \qquad (2)$$

من (٢) ينتج أنّه ينبغي البحث عن حل $x(t)$ موافق لـ λ من الشكل

$$x(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$$

بتعويض هذه العبارة لـ $x(t)$ في العلاقة (٢) نجد

$$\alpha\,\lambda \sin t + \beta\,\lambda\ \cos t = \beta\,\pi \sin t + \alpha\,\pi\ \cos t \quad ; \quad -\pi \le t \le \pi$$

و بما أنّ التابعين $\sin t$ و $\cos t$ مستقلان خطيّاً على المجال $[-\pi,\pi]$ فإنّه يلزم أن يكون

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda - \beta\pi = 0 \\ \alpha\pi - \beta\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

و بما أنّ التابع الخاص $x(t)$ ينبغي أن يكون مغايراً للصفر، فإنّ (وفقاً للاستقلال الخطي للتابعين $\sin t$ و $\cos t$) ذلك يكون ممكناً إذا و فقط إذا كان أحد العددين α أو β مغايراً للصفر، ولذلك و كي يكون للجملة (٣) حل غير الحل الصفري فإنّ معين الجملة (٣) يساوي الصفر. أي إنّ $\lambda_1 = \pi$ و $\lambda_2 = -\pi$.

من أجل $\lambda_1 = \pi$ نجد أنّ $\alpha = \beta$ بذلك يكون $\lambda_1 = \pi$ قيمة خاصّة للمؤثّر A و يكون الشعاع $x(t) = \alpha(\sin t + \cos t)$ هو الشعاع الخاص الموافق لهذه القيمة (حيث $\alpha \ne 0$). بالمثل تماماً تكون $\lambda_2 = -\pi$ قيمة خاصّة للمؤثّر A و يكون $x(t) = \alpha(\sin t - \cos t)$ حيث $\alpha \ne 0$، الشعاع المنتمي لهذه القيمة.

لنبيّن الآن أنّ $\lambda_3 = 0$ هي قيمة خاصّة أيضاً للمؤثّر A. لنبرهن على وجود حل غير تافه للمعادلة

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)\ x(s)\, ds = 0$$

في الفضاء $C[-\pi,\pi]$. بكلام آخر لنوجد تابعاً مثل $x = x(t) \neq 0$ بحيث إنّ

$$\sin t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\ x(s)\, ds + \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\ x(s)\, ds = 0 \quad ; \quad -\pi \le t \le \pi \quad (٤)$$

استناداً للاستقلال الخطّي للتابعين $\sin t$ و $\cos t$ في المجال $[-\pi,\pi]$ نجد أنّ العلاقة تكافئ العلاقتين

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos s\ x(s)\, ds = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin s\ x(s)\, ds = 0$$

أي إنّ التوابع الخاصّة ستكون تلك التوابع المستمرة $x = x(t)$ على المجال $[-\pi,\pi]$ و المعامدة (بمفهوم الفضاء $L^2[-\pi,\pi]$) للتوابع $\cos t$ و $\sin t$ على سبيل المثال

$$x = \cos nt \quad ; \quad n = 0, 2, 3, \ldots$$

$$x = \sin nt \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots$$

بذلك تكون $\lambda_3 = 0$ قيمة خاصّة للمؤثّر A و يكون الفضاء الجزئي الخاص المنتمي لهذه القيمة لانهائي البعد و يتألّف من جميع التوابع المستمرة على $[-\pi,\pi]$ و المعامدة بمفهوم الفضاء $L^2[-\pi,\pi]$ للتابعين $\cos t$ و $\sin t$.

٤. ليكن E فضاء باناخ فوق الحقل $\mathbb{C}$ وليكن $A : E \longrightarrow E$ مؤثراً خطّياً و مستمراً. برهن على أنّه إذا وجدت من أجل العدد المركب λ متتالية منظمة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من نقاط E ($\|x_n\| = 1 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$) بحيث إنّ

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n - \lambda x_n) = 0$$

فإنّ $\lambda \in \sigma(A)$.

في الواقع، إذا كانت $\lambda \notin \sigma(A)$ فإنّها تكون نقطة نظاميّة أي إنّها تنتمي إلى $\rho(A)$ و هذا يعني أنّ المؤثّر $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود و مستمر و يطبّق E على نفسه و لذلك فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)^{-1}\left(Ax_n - \lambda x_n\right) = 0$$

و هذا يناقض المساواة $\|x_n\| = 1$ من أجل جميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

٦. لتكن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة من الأعداد المركبة وليكن $A : l_2 \longrightarrow l_2$ مؤثّراً معرّفاً بالعلاقة

$$Ax = \left(\alpha_1 \xi_1 , \alpha_2 \xi_2 , \ldots\right)$$

حيث إنّ $x = \left(\xi_1 , \xi_2 , \ldots\right)$ عنصرٌ من l_2. أوجد الطيوف $P\,\sigma(A)$ و $C\,\sigma(A)$ و $R\,\sigma(A)$ للمؤثّر A.

بما أنّ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة من الأعداد المركّبة فإنّ المؤثّر A يكون خطيّاً و مستمراً (انظر المسألة (٦) من مسائل الفصل الثاني). بسهولة نجد أنّ كل عدد α_j هو قيمة خاصّة للمؤثّر A و أنّ الشعاع الخاص المنتمي لهذه القيمة هو الشعاع e_j حيث

$$e_j = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{j-1},1,0,\ldots)$$

لنبرهن على أنّه لا توجد قيم خاصّة أخرى لهذا المؤثّر. في الواقع، ليكن λ عدداً مركّباً ما مغايراً لجميع الأعداد $\alpha_j \; ; \; (j \in \mathbb{N})$ و لنستعرض المعادلة $Ax = \lambda x$ حيث إنّ $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصر من l_2. من هذا نجد أنّ

$$\alpha_j \, \xi_j = \lambda \, \xi_j \qquad ; \quad j \in \mathbb{N}$$

لذلك فإنّ جميع $\xi_j = 0$ و بالتالي فإنّ القيم الخاصّة للمؤثّر A هي فقط الأعداد α_j حيث $(j \in \mathbb{N})$ و لهذا فإنّ

$$P\,\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$$

بما أنّ هذا الطيف هو مجموعة مغلّقة فإنّ جميع نقاط التراكم للمتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تنتمي للطيف. لنبيّن بأنّ كل عدد λ مغاير لجميع الأعداد α_j و مختلف عن جميع نقاط تراكم المتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ يكون قيمة نظامية للمؤثّر A أي إنّ $\lambda \in \rho(A)$.

بُغية هذا الأمر، لنلاحظ أولاً أنّه من أجل كل عدد λ يوجد عدد موجب ε بحيث $\left|\alpha_j - \lambda\right| \geq \varepsilon$ من أجل جميع الأعداد $j \in ¥$، و بالتالي فإنّه من أجل العنصر المعطى y:

$$y \in l_2 \quad , \quad y = (\eta_1, \eta_2, \text{K})$$

يمكن إيجاد عنصر $x \in l_2$ ؛ $x = (\xi_1, \xi_2, \text{K})$ بحيث يكون

$$A\,x - \lambda x = y$$

لتحقيق ذلك يكفي، من أجل كل عدد $j \in ¥$، أخذ

$$\xi_j = \frac{\eta_j}{\alpha_j - \lambda}$$

بذلك يكون
$$(A - \lambda I)^{-1} y = \left(\frac{\eta_1}{\alpha_1 - \lambda}, \frac{\eta_2}{\alpha_2 - \lambda}, \text{K} \right)$$

من الواضح أنّ هذا المؤثّر خطّي و أمّا محدوديته فتنتج من العلاقة:

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1} y\right\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|\eta_j\right|^2}{\left|\alpha_j - \lambda\right|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|y\| \quad ; \ \forall y \in l_2$$

و بالتالي فإنّه من أجل العدد λ المذكور يكون المؤثّر $(A - \lambda I)^{-1}$ خطّياً و محدوداً أي إنّ $\lambda \in \rho(A)$.

هـذا يعنـي أنّ $\sigma(A)$ طيـف المـؤثّر A يتـألّف مـن القـيم الخاصّـة α_j ($j \in ¥$) و التي تشكّل بحد ذاتها الطيف النقطي $P\,\sigma(A)$ لهذا المؤثّر و من جميع نقـاط تـراكم المتتاليـة $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. لنـدرس انتمـاء نقـاط التـراكم (إلـى أي قسم من أقسام الطيـف) مـن أجـل تلـك القـيم لــ λ يكـون المـؤثّر $(A - \lambda I)^{-1}$ موجـوداً و

$(A-\lambda I)^{-1}:\Delta_A(\lambda)\to l_2$. إنّ المتنوعـة الخطّيـة $\Delta_A(\lambda)$ تـشتمل علـى جميـع الأشعة المنتهية و التي هي صور لأشعة منتهية بواسطة التطبيق $(A-\lambda I)$ لذلك فإنّ $\overline{\Delta_A(\lambda)}=l_2$ تبعاً لذلك تنتمي λ إلى الطيف المستمر $C\ \sigma(A)$ للمؤثّر A و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ الطيف الباقي $R\ \sigma(A)$ خالٍ.

٨. ليكن المؤثر A مترافقاً ذاتياً ومعرفاً في فضاء هيلبرت H فوق حقل الأعداد المركبة £. برهن أنّ الطيف الباقي لهذا المؤثر خالٍ.

لتكن λ نقطة من طيف المؤثّر A، إلا أنّها ليست قيمة خاصّة للمؤثّر A، لذلك فإنّ λ تكون عدداً حقيقياً و بالتالي فإنّ المؤثّر $(A-\lambda I)$ يكون مترافقاً ذاتياً أيضاً. بما أنّ النقطة λ ليست قيمة خاصّة للمؤثّر A فإنّ النواة $\ker(A-\lambda I)$ تتألّف من عنصر واحد هو الصفر و هذا يعني $\left[R(A-\lambda I)\right]^{\perp}=\{0\}$ أي إنّ $R(A-\lambda I)$ كثيفة في كل مكان في H أي إنّ $\overline{R(A-\lambda I)}=H$. بالتالي فإنّ λ تنتمي للطيف المستمر $C\ \sigma(A)$ للمؤثّر A.

١٠. ليكن A مؤثّراً تام الاستمرار ومترافقاً ذاتياً و معرّفاً في فضاء هيلبرت H المعرّف فوق حقل الأعداد المركّبة £. أوجد مجموعة مؤثّرات الإسقاط العامودي $\{E_\lambda\}$ (نشر المؤثّر المطابق) حيث $\lambda\in[m,M+\varepsilon)$ المولدة بالمؤثّر A وتأكد من تحقق علاقة النشر الطيفي

$$A=\int_m^{M+\varepsilon}\lambda\, dE_\lambda$$

للمؤثّر A.

استناداً إلى مبرهنة هيلبرت – شميت توجد من أجل المؤثّر A متتالية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ من القيم الخاصّة و جملة من الأشعة الخاصّة $\{e_n\}$ المتعامدة و المنظّمة و التّامة في H و المنتمية إلى تلك القيم، إضافة إلى أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$. تبعاً لذلك تتحقق المساواة

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \qquad (*)$$

من أجل كل عنصر $x \in H$. إضافة إلى أنّ جميع القيم الخاصّة لهذا المؤثّر و العدد صفر، إذا لم يكن قيمة خاصّة للمؤثّر A، تشكل معاً طيف المؤثّر $\sigma(A)$. لذلك فإنّ جميع نقاط المجال $[m , M+\varepsilon)$ الأخرى، حيث $\varepsilon > 0$، و أنّ

$$m = \inf_{\|x\| \le 1} (Ax, x) \quad , \quad M = \sup_{\|x\| \le 1} (Ax, x)$$

تنتمي إلى المجموعة $\rho(A)$، عندئذٍ و وفقاً لخواص مجموعة مؤثّرات الإسقاط $\{E_\lambda\}$ حيث $\lambda \in [m , M+\varepsilon)$ فإنّه فقط في نقاط الطيف $\sigma(A)$ يكون للتابع E_λ انقطاع، إضافة إلى أنّه في النقطة $\lambda = \lambda_k$ يكون المؤثّر E_λ مؤثّر إسقاط على الفضاء الجزئي الخاص المنتمي لتلك القيمة الخاصّة. إنطلاقاً من ذلك تبنى الجملة $\{E_\lambda\}$ على النحو الآتي:

$$E_\lambda x = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_k < \lambda} (x, e_k) e_k & ; \lambda \le 0 \\ x - \sum\limits_{\lambda_k \ge \lambda} (x, e_k) e_k & ; \lambda > 0 \end{cases}$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّه من أجل جميع النقاط $\lambda \in [m , M+\varepsilon)$ يكون المؤثّر E_λ مؤثّر إسقاط و تتحقق جميع شروط النشر الطيفي للمؤثّر الواحدي (المطابق) و بالإضافة إلى ذلك و استناداً إلى خواص تكامل ستيلتجيس يكون

$$\int_m^{M+\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \quad ; \ \forall x \in H$$

لذلك فإنّه استناداً للعلاقة (*) يتطابق هذا التكامل مع Ax، أي إنّ

$$Ax = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda x \quad ; \ \forall x \in H$$

و بالتالي فإنّ الجملة $\{E_\lambda\}$ حيث $\lambda \in [m , M+\varepsilon)$ هي الجملة الطيفية للمؤثّر A.

١٢. بيّن أنّ $P\sigma(A) \cup C\sigma(A) \subset \pi(A)$.

لتكن $\lambda \in \left(P\sigma(A) \cup C\sigma(A)\right)$، عندئذٍ إمّا أن تنتمي λ للطيف النقطي $P\sigma(A)$ و إمّا أن تنتمي إلى $C\sigma(A)$. لنفرض أولاً أنّ $\lambda \in P\sigma(A)$. في هذه الحالة لا يكون المقلوب $(A-\lambda I)^{-1}$ موجوداً و بالتالي فإنّه لا يوجد ثابت مثل k بحيث تتحقق المتراجحة

$$\|(A-\lambda I)x\| \geq k\|x\| \quad ; \ \forall x \in X$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ $\lambda \in \pi(A)$. بالمثل نجد أنّه إذا كانت $\lambda \in C\sigma(A)$ فإنّ المقلوب، و إن كان موجوداً، $(A-\lambda I)^{-1}$ فإنّه لن يكون محدوداً و بالتالي فإنّه يوجد عنصر مثل $x \in X$ و ثابت $0<k$ بحيث إنّ

$$\|(A-\lambda I)x\| < k\|x\| \quad ; \ \forall x \in X$$

و بالتالي فإنّ $\lambda \in \pi(A)$. و هكذا يكون

$$P\sigma(A) \cup C\sigma(A) \subset \pi(A)$$

١٤. إذا كان A مؤثّراً خطّياً محدوداً و كانت $\lambda \in \pi(A)$ فإنّ $|\lambda| \leq \|A\|$.

لتكن $\lambda \in \pi(A)$ عندئذٍ من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يوجد عنصر مثل x من ساحة تعريف المؤثّر $(A-\lambda I)$ و $\|x\|=1$ و بحيث إنّ

$$\|(A-\lambda I)x\| < \varepsilon$$

و هذه المتراجحة تعني استحالة وجود مقلوب محدود للمؤثّر $(A-\lambda I)$ من ناحية ثانية إنّ وجود مقلوب محدود للمؤثّر $(A-\lambda I)$ يقتضي أن يكون $\|A\| < |\lambda|$ (انظر كتاب التحليل التابعي (١) الصفحة ١٨٥) و بالتالي فإنّ المتراجحة الأخيرة لن تتحقق و بالتالي فإنّ $\|A\| \geq |\lambda|$.

١٦. إذا كان $A : X \longrightarrow X$ مؤثّراً تام الاستمرار و X فضاء لا نهائي البعد برهن أنّ $0 \notin \rho(A)$.

راجع القسم النظري.

١٨. ليكن $A : X \longrightarrow X$ حيث $X = l_1$ معرّفاً من أجل كل x:

$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots);\ x \in l_1$ بالعلاقة

$$A\,x = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \ldots, \frac{1}{n}\alpha_n, \ldots \right)$$

برهن أنّ A تام الاستمرار و أنّ $0 \in C\,\sigma(A)$.

لتكن $M \subset l_1$ مجموعة محدودة. أي إنّه يوجد ثابت موجب مثل R بحيث يكون $\|x\| \leq R$ من أجل جميع العناصر $x \in M$. و بما أنّ المؤثّر A محدود $\left(\|A\,x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|x\|\right)$ فإنّ صورة المجموعة $M : (A\,M)$ تكون مجموعة محدودة. ليكن $\varepsilon > 0$ صغيراً بقدرٍ كافٍ، بما أنّ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ فإنّه يوجد عدد مثل n_0 بحيث إنّ

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{R} \quad ; \ \forall n > n_0$$

و بالتالي فإنّه من أجل كل عنصر $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ من M يكون لدينا

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \left|(A\,x)_j\right| = \sum_{j=n_0}^{\infty} \left|\frac{\alpha_j}{j}\right| < \frac{\varepsilon}{R} \sum_{j=n_0}^{\infty} |\alpha_j| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{R} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = \frac{\varepsilon}{R} \|x\| \leq \varepsilon$$

استناداً للمبرهنة المتعلّقة بمعيار التراص في الفضاء l_p $(1 \leq p)$ (انظر التحليل التابعي (١) الصفحة ٢٩٥) تكون المجموعة $(A\,M)$ متراصّة و بالتالي فإنّ A مؤثّر تام الاستمرار.

بسهولة يمكن التأكد من أنّه إذا كانت $\{e_n\}$ قاعدة متعامدة منظّمة في l_1 فإنّ $e_n = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1},1,0,\ldots)$ و إنّ $e_n \neq 0$ و

$$A\,e_n = \frac{1}{n} e_n$$

و بالتالي فإنّ الأعداد $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ قيم خاصّة للمؤثر و إنّ $\{e_n\}$ هي الأشعة الخاصّة الموافقة.

للبرهان على أنّ $0 \in C\ \sigma(A)$ علينا أن نبرهن على أنّ A^{-1} موجود إلا أنّه غير محدود و أنّ $R\,(A)$ كثيفة في X.

لنفرض $A\,x = 0$، من علاقة تعريف المؤثر نستنتج أنّ $x = 0$ و بالتالي فإنّ A^{-1} موجود. بما أنّ

$$\mathrm{P}A\ e_n\ \mathrm{P} = \mathrm{P}\frac{e_n}{n}\mathrm{P} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

فإنّ الشرط اللازم و الكافي لوجود مقلوب محدود A^{-1} (وجود ثابت مثل $0 < k$ بحيث إنّ $k\ \mathrm{P}x\ \mathrm{P} < \mathrm{P}A\,x\ \mathrm{P}$ من أجل جميع $x \in l_1$) لا يتحقق، و هكذا فإنّ المقلوب A^{-1} يكون غير محدود.

للبرهان على أنّ $R\,(A)$ كثيفة في X نلاحظ على أنّه من أجل أي عدد n يكون

$$A\,(n\,e_n) = e_n$$

و بالتالي فإنّ $e_n \in R\,(A)$، و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ

$$\left[\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}\right] \subset R\,(A)$$

و بما إنّ

$$\overline{\left[\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}\right]} = X$$

فإنّه يكون

$$\overline{R\,(A)} = X$$

و هذا يعني أنّ $0 \in C\ \sigma(A)$.

الملحق الأول

مؤثرات الإسقاط العامودي

المجاميع المباشرة المتعامدة

Orthogonal Projections and Orthogonal Direct Sums

قبل أن نعطي فكرة الإسقاط العامودي سنستعرض أفكاراً أساسية حول الإسقاط في الحالة العامّة. إنّ الإسقاط في فضاء متجهي (شعاعي) هو تطبيق خطي من نمط خاص. لنفرض أنّ الفضاء V منشور في مجموع مباشر

$$V = M \& N$$

أي إنّ أي عنصر z من V يكتب بشكل وحيد على الشكل

$$z = x + y$$

حيث $x \in M$ و $y \in N$. يسمّى التطبيق المعرّف بالعلاقة $E z = x$ بتطبيق الإسقاط على M في موازاة N و من الواضح أنّه يمكننا كتابة M و N على الشكل

$$M = \{z \,|\, E z = z\} \quad , \quad N = \{z \,|\, E z = 0\}$$

و أصبح الآن واضحاً أنّ M مجموعة قيم التطبيق E و أنّ N فضاءه الصفري، يمكننا إعطاء تعريف مكافئ للإسقاط و هو أن يكون المؤثّر الخطّي E خاملاً أي إنّ $E^2 = E$. إنّ الإسقاط على M يكون عامودياً إذا اشترطنا على المجموع المباشر للفضاء X أن يكون من الشكل

$$X = M \oplus M^{\perp}$$

و نقول إنّه الإسقاط على M بموازاة $M^{\perp}$. بالأخذ بعين الاعتبار هذه الأمور نصل إلى المبرهنة الأولى.

مبرهنة (١): إذا كان X فضاء جداء داخلي منتهي البعد و كان E مؤثّر إسقاط فإنّ القضايا الآتية تكون متكافئة.

١) E مؤثّر ناظمي.

٢) E مترافق ذاتياً.

٣) E مؤثّر إسقاط عامودي على ساحة قيمه.

البرهان: ١) يؤدّي إلى ٢). إذا كان E ناظمياً فإنّ

$$\|E^{*}z\| = \|E z\| \quad ; \quad z \in X$$

و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ $\boldsymbol{E\,z = 0}$ **إذا و فقط إذا كان** $\boldsymbol{E^{*}z = 0}$. ليكن الآن z شعاعاً ما من X و لنستعرض الشعاع $w = z - E\,z$. عندئذٍ يكون لدينا

$$E\,w = E\,z - E^{2}z = E\,z - E\,z = 0$$

و بالتالي فإنّ
$$E^{*}w = 0$$

بحساب $E^{*}w$ بشكل مباشر نجد

$$E^{*}w = E^{*}z = E^{*}E\,z = 0 \quad ; \quad \forall\, z \in X$$

و بالتالي فإنّ

$$E^{*} = E^{*}E \qquad (١)$$

و بالانتقال إلى مرافقه نجد

$$E = E^{*}E \qquad (٢)$$

و بمقارنة (١) مع (٢) نجد أنّ $E = E^{*}$. و هذا ما يثبت الجزء الأول.

البرهان على ٢) يؤدّي إلى ٣). لإثبات ذلك سنبرهن على أنّ الفضاء الصفري $N(E)$ للمؤثّر E هو المتممة المعامدة $R(E)$ ساحة قيم E. من المعلوم أنّه بالنسبة لأي مؤثّر خطّي A في فضاء الجداء الداخلي X يكون

$$R(A)^{\perp} = N(A^{*}) \qquad (٣)$$

فإنّنا نجد المطلوب باستبدال A بـ E و ملاحظة أنّ E مترافق ذاتياً.

لنثبت أخيراً أنّ ٣) يؤدّي إلى ١). بما أنّ E خامل فإنّه من أجل أي عنصرين x و y من X يكون لدنيا

$$(x - E\,x) \in N(E) = R(E)^{\perp}$$

$$E\,y \in R(E)$$

و بالتالي فإنّ

$$(x - E\,x\,,\, E\,y) = 0$$

أو

$$(x\,,\, E\,y) = (E\,x\,,\, E\,y) = (x\,,\, E^{*}E\,y) \qquad ; \ \forall x, y \in X$$

و بالتالي فإنّ $E = E^{*}E$، بعدئذٍ نتابع كما في برهان ١) ⇐ ٢) فنجد أنّ E مؤثّر مترافق ذاتياً و هذا بدوره يؤدّي إلى أنّ E ناظمي.

إنّ الرمز

$$X = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k \qquad (٤)$$

يعني أنّ X المجموع المباشر لـ $M_1, M_2, \ldots, M_k$ حيث M_i متنوّعة خطّية في X. و هذا يؤدّي إلى أنّ العبارتين الآتيتين صحيحتان:

الرمز

$$(a)\cdots \quad X = M_1 + M_2 + \cdots + M_k$$

يشير إلى جميع التركيبات الخطّية الممكنة للأشعة في $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

$$(b)\cdots \quad M_i \cap \{M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_k\} = \{0\}$$

من أجل أي عدد $i = 1,2,\ldots,k$. تسمّى المتنوعات الخطّية المحققة لـ (b) بمتنوعات خطّية مستقلة خطّياً. بالإضافة إلى (a) و (b)، لدينا أيضاً $M_i \perp M_j$ من أجل $i \neq j$ (أي إنّه إذا كان $x \in M_i$ و $y \in M_j$ فإنّ $x \perp y$). في إطار ذلك كلّه نقول إنّ العلاقة (٤) تمثّل نشراً مباشراً متعامداً للفضاء و أنّ المتنوعات الخطّية نفسها متعامدة.

مبرهنة (٢): ليكن X فضاء جداء داخلي منته البعد، و ليكن

$$X = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$$

و ليكن E_j مؤثر الإسقاط العامودي على M_j من أجل $j = 1,2,\ldots,k$ ، عندئذ تكون العبارات الآتية متكافئة:

١) $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ (مجموع متعامد).

٢) $I = E_1 + E_2 + \cdots E_k \quad$, and $\; E_i E_j = 0 \quad , \; i \neq j$

حيث I هو المؤثر الواحدي (المطابق).

٣) إذا كانت B_j قاعدة متعامدة في M_j و $j = 1,2,\ldots,k$ فإنّ $\bigcup_{j=1}^{k} B_j$ تكون قاعدة متعامدة في X.

البرهان: لنبرهن ١) تؤدّي إلى ٢). لنفرض أنّ

$$X = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k \qquad \text{(مجموع متعامد)}$$

هذا يعني وجود عناصر وحيدة مثل x_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ من أجل كل عنصر $x \in X$ بحيث إنّ

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

حيث $x_i \in M_i$. بتطبيق المؤثر E_i على طرفي العلاقة الأخيرة نجد

$$\begin{aligned} E_i x &= E_i x_1 + E_i x_2 + \cdots + E_i x_i + \cdots + E_i x_k \\ &= 0 + 0 + \cdots + E_i x_i + \cdots + 0 = x_i \end{aligned}$$

و بالتالي فإنّه من أجل أي عنصر x يمكننا أن نكتب

$$x = E_1 x + E_2 x + \cdots + E_k x$$

أو

$$x = (E_1 + E_2 + \cdots + E_k)\, x$$

و بما أنّ هذه العبارة صحيحة من أجل أي عنصر $x \in X$ فإنّ

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$$

من الواضح أنّ $M_j \subset M_i^{\perp}$ و ذلك لأنّ المتنوعات الخطّية متعامدة.

و هكذا بما أنّ $E_j x \in M_j$ فإنّه يكون لدينا $E_i E_j x = 0$ من أجل أي عنصر $x \in X$ أو أنّ $E_i E_j$ مؤثّر صفري من أجل $i \neq j$.

إنّ البرهان على الحالات الأخرى يتم بنفس الطريقة.

من المعلوم في نظريّة المؤثّرات الخطّية في الفضاءات المنتهية البعد، أنّه إذا كان A مؤثّراً مترافقاً ذاتيّاً في فضاء جداء داخلي X منتهي البعد: $A : X \to X$ فإنّه توجد قاعدة متعامدة – منظّمة في X من الأشعة الخاصّة للمؤثّر A. و كذلك الأمر إذا كان المؤثّر A ناظميّاً، كما أنّه من المعلوم بالنسبة لهذين النوعين من المؤثّرات بأنّ الأشعة الخاصّة المنتمية إلى قيم خاصّة مختلفة تكون متعامدة(*).

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ قيماً خاصّة مختلفة للمؤثّر الناظمي A، و لنجمع عناصر القاعدة المتعامدة – المنظّمة المنتمية إلى كل قيمة من هذه القيم كما يلي:

$$\underbrace{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1j_1}}_{\lambda_1} ; \underbrace{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2j_2}}_{\lambda_2} ; \ldots ; \underbrace{x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kj_k}}_{\lambda_k}$$

لنرمز بـ M_i للفضاء الجزئي الصفري للمؤثّر $(A - \lambda_i I)$ حيث $i = 1, 2, \ldots, k$

$$M_i = N_A(\lambda_i) \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

يمكننا كتابة أي شعاع $x \in X$ على الشكل

$$x = \underbrace{\alpha_{11} x_{11} + \cdots + \alpha_{1j_1} x_{1j_1}}_{\in M_1} + \underbrace{\alpha_{21} x_{21} + \cdots + \alpha_{2j_2} x_{2j_2}}_{\in M_2} +$$

$$+ \cdots + \underbrace{\alpha_{k1} x_{k1} + \cdots + \alpha_{kj_k} x_{kj_k}}_{\in M_k}$$

و يمكننا أن نستنتج أنّ $X = M_1 + M_2 + \cdots + M_k$. لنفرض الآن أنّ

$$x \in M_i \cap \{M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_k\}$$

(*) انظر على سبيل المثال كتاب (Bachman G., and Lawrence N. **Functional Analysis**) الفصل الثاني.

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_k$$

مع ذلك $x \in M_i$ يؤدّي إلى أنّ $(x , x_j) = 0$ من أجل $j \neq i$ ؛ و عندئذٍ

$$(x , x) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_k , x) = 0$$

و بالتالي فإنّ

$$x = 0$$

و بالأخذ بعين الاعتبار أنّ الأشعة الخاصّة المنتمية لقيم خاصّة مختلفة متعامدة نستنتج أنّ المتنوعات الخطّية $M_1, M_2, \ldots, M_k$ تشكل مجموعاً مباشراً متعامداً للفضاء المنشور (لنشر الفضاء).

لنفرض الآن أنّ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ مؤثّرات الإسقاط العامودية على $M_1, M_2, \ldots, M_k$ على الترتيب. استناداً للمبرهنة (٢) نجد أنّ

١) $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$

٢) $E_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,k$

و ذلك لأنّ جميع M_i مغايرة لـ $\{0\}$.

٣) $E_i E_j = 0 \quad ; \quad i \neq j$

و بما أنّ الفضاء منشور في مجموع مباشر فإنّ ذلك يقتضي وجود عناصر $x_i \in M_i$ ($i = 1,2,\ldots,k$) بحيث إنّه من أجل أي عنصر $x \in X$ يكون

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

بتطبيق المؤثّر A على العنصر x نجد

$$A x = \sum_{i=1}^{k} A x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i x = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i) x$$

و بالتالي فإنّ

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i \qquad (٥)$$

و هكذا فقد حصلنا على "نشر" المؤثّر الناظمي A في تركيب خطّي لمؤثّرات إسقاط عامودية حيث إنّ المعاملات العددية هي القيم الخاصّة المختلفة للمؤثّر A. يسمّى التمثيل (٥) **بالصيغة الطيفية** للمؤثّر A. و لنلخص النتائج بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة (٣): يقابل كل مؤثّر ناظمي A معرّف في فضاء جداء داخلي X فوق حقل الأعداد المركّبة و منتهي البعد بكميّات سلّمية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ هي القيم الخاصّة المختلفة للمؤثّر A و بمؤثّرات إسقاط عامودية $E_1, E_2, \ldots, E_k$ (k عدد موجب لا يزيد عن $\dim X$) و بحيث إنّ

١) E_i مؤثّر الإسقاط العامودي على $N_A(\lambda_i)$ حيث $i = 1,2,\ldots,k$.

٢) $E_i \neq 0$ من أجل $i = 1,2,\ldots,k$ و $E_i E_j = 0$ من أجل $i \neq j$.

٣) $\sum_{j=1}^{k} E_j = I$.

٤) $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j = A$.

تسمّى هذه المبرهنة **بمبرهنة النشر الطيفي للمؤثّر الناظمي**. لنلاحظ مباشرة أنّه إذا كان المؤثّر مترافقاً ذاتياً فإنّه يمكننا إضعاف الفرض بحيث يكون الفضاء فضاء جداء داخلي فوق حقل الأعداد الحقيقية، إذ إنّ الحاجة للأعداد المركّبة كانت لضمان وجود قيم خاصّة للمؤثّرات الناظمية. إذا فعلنا ذلك فإنّنا سنسمّي المبرهنة عندئذٍ بمبرهنة النشر الطيفي للمؤثّر المترافق ذاتياً.

نذكر هنا كلمة أخيرة حول الصيغة الطيفية لأي مؤثّر ناظمي و هي وحدانية تلك الصيغة. و قبل الشروع في إثبات الوحدانية سنذكر بعض الحقائق المتعلقة بما يسمّى كثيرات **حدود لاغرانج**[*].

---

[*] للمزيد حول هذا الأمر يمكن العودة إلى كتاب

Hoffman K. ank Kunze R. ***Linear Algebra.***

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ أعداداً مركّبة مختلفة فيما بينها. يعرّف كثير حدود لاغرانج ذي الدليل i على أنّه

$$P_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

لنلاحظ مباشرة أنّ

$$P_i(\lambda_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \; i \neq j \\ 1 & ; \; i = j \end{cases}$$

و لنلاحظ أيضاً أنّه إذا كان $P(\lambda)$ كثير حدود ما من درجة لا تزيد عن $k-1$ فإنّه يمكن تمثيله على الشكل

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} P_i(\lambda)\, P(\lambda_i)$$

حيث $P_i(\lambda)$ كثير حدود لاغرانج.

مبرهنة (٤): لنفرض أنّ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ أعداد مركّبة مختلفة فيما بينها و أنّ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ مؤثّرات خطّية كل منها مغاير للصفر و بحيث إنّه يمكن كتابة المؤثّر الناظمي A على الشكل

١) $A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j$

٢) $E_i E_j = 0 \quad ; \; i \neq j$

٣) $\sum_{j=1}^{k} E_j = I$

عندئذٍ تكون الأعداد $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ هي القيم الخاصّة المختلفة للمؤثّر A و يكون E_i مؤثّر الإسقاط العامودي على $N_A(\lambda_i)$ من أجل $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

البرهان: للبرهان على أنّ كلاً من E_i مؤثّر إسقاط نحتاج إلى تطبيق E_i على طرفي العلاقة ٣) آخذين بعين الاعتبار ٢). لنبيّن الآن أنّ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ هي القيم الخاصّة المختلفة للمؤثّر A. لنرمز بـ $R(E_i)$ لمجموعة قيم المؤثّر E_i و ليكن

$x \in R(E_i)$ عنصراً مغايراً للصفر (مثل هذا العنصر موجود لأنّ E_i لا يطابق الصفر) بما أنّ $x \in R(E_i)$ و E_i موثّر إسقاط فإنّه يكون لدينا

$$E_i\, x = x \quad ; \quad \forall x \in R(E_i)$$

بتطبيق A على طرفي العلاقة الأخيرة نجد

$$A\, x = A\, E_i\, x$$

لنبرهن الآن على أنّ A تبادلي مع E_i مع $i = 1,2,\dots,k$ أي إنّ

$$A\, E_i\, x = E_i\, A\, x$$

بما أنّ
$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, E_i$$

فإنّه استناداً إلى الخاصّة ٢) من الفرض يكون لدينا

$$A^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\, E_i \qquad (٦)$$

بتطبيق A على طرفي العلاقة (٦) مجدداً و بالأخذ بعين الاعتبار ٢) نجد أنّه من أجل أي عدد صحيح موجب n يكون

$$A^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n\, E_i$$

و بالتالي فإنّه من أجل أي كثير حدود $f(\lambda)$ يمكننا أن نكتب

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i)\, E_i$$

و بما أنّ هذا الأمر محقق من أجل أي كثير حدود، فإنّه يكون محققاً من أجل كثيرات حدود لاغرانج المذكورة أعلاه. من أجل كثير حدود لاغرانج ذي الدليل j يكون لدينا

$$P_j(A) = \sum_{i=1}^{k} P_j(\lambda_i)\, E_i = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ji}\, E_i = E_j$$

هكذا يكون E_j كثير حدود في A و بالتالي فإنّه تبادلي مع A و يمكننا الآن أن نكتب (مستخدمين ١) ثانية):

$$A\,x = E_i\,A\,x = E_i\,(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,E_j\,x)$$
$$= \lambda_i\,E_i\,x = \lambda_i\,x$$

و هذا يعني أنّ كل عدد λ_i هو قيمة خاصّة للمؤثّر A.

لنبيّن الآن أنّ هذه الأعداد هي القيم الخاصّة الوحيدة للمؤثّر A. لنفرض أنّ

$$A\,x = \mu\,x \quad ; \; x \neq 0$$

أو

$$(A - \mu\,I)x = 0$$

باستخدام ١) و ٣) يمكننا أن نكتب

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu\,)E_i\,x = 0$$

و بتطبيق E_j على طرفي هذه العلاقة نجد أنّه من أجل أي عدد $j = 1,2,...,k$ يكون

$$(\lambda_j - \mu\,)E_j\,x = 0$$

إذا كان $\lambda_j \neq \mu$ فإنّه من أجل أي عدد j يكون $\lambda_j - \mu \neq 0$ و هذا يؤدّي إلى أنّ $E_j\,x = 0$ من أجل $j = 1,2,...,k$ و باستخدام ٣) نجد أنّ ذلك يؤدّي إلى أنّ

$$x = E_1\,x + \cdots + E_k\,x = 0$$

و هذا تناقض لأنّ $x \neq 0$ و بالتالي فإنّ μ يساوي واحداً من الأعداد λ_i.

لنبرهن الآن على أنّ E_i هو مؤثّر إسقاط عامودي على $N_A(\lambda_i)$ الفضاء الصفري للمؤثّر $(A - \lambda_i\,I)$. علينا أولاً أن نبرهن على أنّ

$$R(E_i) = N_A(\lambda_i)$$

لنفرض أنّ $x \in N_A(\lambda_i)$ أي إنّ $(A - \lambda_i\,I)\,x = 0$. و باستخدام ١) و ٣) يمكننا أن نكتب

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i\,)E_j\,x = 0$$

بتطبيق E_m على طرفي هذه العلاقة، آخذين بعين الاعتبار ٢) نجد أنّ

$$(\lambda_m - \lambda_i) E_m x = 0$$

فإذا كان $m \neq i$ فإنّ ذلك يؤدّي إلى أنّ $E_m x = 0$ و بالتالي فإنّ

$$x = E_1 x + E_2 x + \dots + E_k x = E_i x$$

أو

$$x \in R(E_i)$$

كنّا قد بيّنا أنه إذا كان $x \in R(E_i)$ فإنّ الشعاع x يكون شعاعاً خاصّاً للمؤثّر A و هكذا نكون قد حققنا تطابق المجموعتين $R(E_i)$ و $N_A(\lambda_i)$.

لإتمام البرهان علينا أن نثبت أنّ E_i هو مؤثّر الإسقاط العامودي على $N_A(\lambda_i)$. بما أنّ A ناظمي و أنّ $E_i = P_i(A)$ مؤثّر ناظمي أيضاً فإنّ E_i يكون مؤثّر إسقاط و ناظمياً و بالتالي يكون E_i مؤثّر إسقاط عامودي على ساحة قيمه استناداً للمبرهنة (١).

سنذكر الآن مبرهنة تؤدّي إلى طريقة بديلة في تمييز المؤثّر المرافق لمؤثّر ناظمي و تشكل تطبيقاً هامّاً للنظرية الطيفية.

مبرهنة (٥): ليكن X فضاء جداء داخلي منتهي البعد و ليكن A معرّفاً على X، عندئذٍ يكون المؤثّر A ناظمياً إذا و فقط إذا كان A^* كثير حدود في A.

البرهان: إذا أمكن كتابة A^* على شكل كثير حدود في A فعندئذٍ يكون A^* تبادلياً مع A و هو ما يثبت كفاية الشرط. لإثبات اللّزوم نفرض أنّ A مؤثّر ناظمي عندئذٍ و استناداً إلى مبرهنة النشر الطيفي يمكننا كتابة A على الشكل:

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j$$

حيث λ_j هي القيم الخاصّة للمؤثّر A و E_j مؤثّر الإسقاط العامودي على $N_A(\lambda_j)$. بما أنّ المؤثّر E_j مترافق ذاتياً فإنّه يمكننا أن نكتب:

$$A^* = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j E_j)^* = \sum_{j=1}^{k} \overline{\lambda}_j E_j$$

كنّا قد وجدنا في المبرهنة (٤) أنّ المؤثّر E_j يكتب على الشكل $P_j(A)$ حيث $P_j(\lambda)$ كثير حدود لاغرانج ذو الدليل j و عندئذٍ يكون

$$A^* = \sum_{j=1}^{k} \overline{\lambda}_j \, P_j(A)$$

و هو ما يثبت صحة المبرهنة.

لنفرض الآن أنّ المؤثّر A ناظمي و معرّف على فضاء الجداء الداخلي X فوق حقل الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ و المنتهي البعد. في ضوء مبرهنة النشر الطيفي يمكننا أن نكتب A على الشكل

$$A = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$$

حيث إنّ λ_i هي القيم الخاصّة للمؤثّر A و E_i هي مؤثّرات الإسقاط العامودية المذكورة في المبرهنة (٣)، كما أنّه يمكننا أن نكتب

$$A^* = \overline{\lambda}_1 E_1 + \cdots + \overline{\lambda}_k E_k$$

إذا كانت $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$ أياً كان $i = 1, 2, \ldots, k$، فإنّه من الواضح أنّ $A = A^*$ و لنلاحظ أيضاً أنّ

$$A^* A = |\lambda_1|^2 E_1 + \cdots + |\lambda_k|^2 E_k$$

لنفرض الآن أنّ القيمة المطلقة لكل قيمة خاصّة λ_i تساوي ١ أياً كان $i = 1, 2, \ldots, k$ عندئذٍ يكون

$$A^* A = I$$

بالعكس إذا كان

$$A^* A = I$$

فإنّ ذلك يؤدّي إلى أنّ

$$I = |\lambda_1|^2 E_1 + \cdots + |\lambda_k|^2 E_k$$

و هذه العلاقة تؤدّي بدورها إلى أنّ

$$E_i = |\lambda_i|^2 E_i$$

أو

$$(1-|\lambda_i|^2)E_i = 0$$

و بما أنّ جميع المؤثرات E_i ($i=1,2,...,k$) مختلفة عن الصفر فإنّ $|\lambda_i|^2 = 1$ من أجل $i=1,2,...,k$. هكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية.

مبرهنة (٦): ليكن A مؤثراً ناظمياً معرّفاً على فضاء الجداء الداخلي X فوق حقل الأعداد المركّبة £ و المنتهي البعد عندئذٍ

١) A يكون مترافقاً ذاتياً إذا و فقط إذا كانت جميع قيمة خاصّة حقيقية.

٢) A يكون وحدياً إذا و فقط إذا كانت القيمة المطلقة لكل قيمه الخاصّة لـ A تساوي الواحد.

ذكرنا سابقاً أنّه من أجل أي مؤثر ناظمي A و أي كثير حدود $P(\lambda)$ يكون

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j)\, E_j$$

حيث λ_j و E_j هي ذاتها المعرّفة في المبرهنة (٣).

لنفرض الآن أنّ $f(\lambda)$ تابع ما ذو قيم مركّبة و معرّف على النقاط $\lambda_1,\lambda_2,K,\lambda_k$ و ليكن A مؤثراً خطّياً عندئذٍ يمكن تعريف $f(A)$ بالعلاقة

$$f(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\, E_j$$

من الوهلة الأولى يبدو أنّه من المعقول أن نتوقع بأنّ صف المؤثرات الخطّية الناتج عن هذه الطريقة سيكون أوسع من صف المؤثّرات الناتج عن كثيرات الحدود في A. و سنبيّن أنّ هذين الصفّين الناتجين بطريقتين مختلفتين في التعميم متطابقان. بغية هذا الأمر سنفرض أنّ $f(\lambda)$ تابع مركب ما معرّف على النقاط المختلفة $\lambda_1,\lambda_2,K,\lambda_k$ و أنّ $\alpha_j = f(\lambda_j)$. لنستعرض الآن التابع كثير الحدود

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, P_j(\lambda)$$

حيث $P_j(\lambda)$ هو كثير حدود لاغرانج ذو الدليل j. في هذه الحالة يكون المؤثّر الخطّي الموافق لكثير الحدود هذا هو

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, P_j(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) E_j = f(A)$$

بالتالي فإنّه من أجل أي تابع ذي قيم مركّبة من هذا النوع يوجد كثير حدود يؤدّي إلى نفس المؤثّر الخطّي، على سبيل المثال لنفرض أنّ $f(\lambda) = \overline{\lambda}$ و الذي ليس كثير حدود. في هذه الحالة يكون لدينا $f(A) = A^* = \overline{\lambda}_1 E_1 + \cdots + \overline{\lambda}_k E_k$ و بملاحظة أنّ $E_j = P_j(A)$ نجد أنّ $f(A)$ كثير حدود في A.

الملحق الثاني

التحليل الطيفي للمؤثِّرات تامّة الاستمرار

Spectral Analysis of Completely Continuous Operators

§ ١. توطئتان مساعدتان

Two Lemmas

سندرس في هذا الفصل النظرية الطيفية لبعض صفوف مؤثِّرات تامّة الاستمرار و هذه النظرية تعميم مباشر لما يقابلها في الجبر الخطّي و نظرية المعادلات التكاملية. إنّ النظرية الطيفية للمؤثِّرات التامّة الاستمرار تمثّل مدخلاً فعلياً للنظرية العامّة للمؤثِّرات في فضاء هيلبرت.

إنّ تمامية فضاء هيلبرت لا تستخدم، كما سنرى لاحقاً، في جميع المواضع في دراسة و بناء النظرية الطيفية للمؤثِّرات تامّة الاستمرار. لنلاحظ أنّه حين عدم الاشتراط مسبقاً على تمامية الفضاء فإنّ ساحة التطبيقات للنظرية تصبح أكثر اتساعاً، لذلك فإنّه في هذا الفصل، و إلى جانب المقترحات المتعلّقة بالمؤثِّرات في فضاء هيلبرت H، فإنّنا سنستعرض عدداً من المقترحات المتعلّقة بالمؤثِّرات في جملة خطّية مُمتَرة ما R (*) و إلى تلك المقترحات تعود أيضاً التوطئتان اللّتان سنعرضهما أدناه.

(*) تسمّى الجملة الخطّية R ممترة إذا قابلنا كل زوج من عناصرها $f, g \in R$ بعدد مركب (f, g) محقق للخواص الآتية

a) $(f, g) = \overline{(g, f)}$.

b) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g)$.

c) $(f, f) \geq 0$.

$(f, f) = 0$ فقط إذا كان $f = 0$. يسمّى العدد (f, g) بالجداء الداخلي للعنصرين f و g.

توطئة (١): إذا كانت $\{g_k\}_0^{\infty}$ متتالية متعامدة منظّمة لا نهائية من الأشعّة في R و كان

$$A\,g_k = \beta_{k0}\,g_0 + \beta_{k1}\,g_1 + \cdots + \beta_{kk}\,g_k \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

حيث A مؤثّر تام الاستمرار في R، فإنّ

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{kk} = 0$$

البرهان: لنفرض أنّ $n > m$ عندئذٍ يكون

$$\|A\,g_n - A\,g_m\|^2 =$$

$$= \|\beta_{nn}\,g_n + \cdots + \beta_{n\,m+1}\,g_{m+1} + (\beta_{nm} - \beta_{mm})g_m + \cdots + (\beta_{n0} - \beta_{m0})g_0\|^2$$

$$= |\beta_{nn}|^2 + \cdots + |\beta_{n\,m+1}|^2 + |\beta_{nm} - \beta_{mm}|^2 + \cdots + |\beta_{n0} - \beta_{m0}|^2 \ge |\beta_{nn}|^2$$

إذا لم ينتهِ β_{kk} إلى الصفر عندما $k \to \infty$، فإنّه توجد متتالية لا نهائية من الأدلّة

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

يكون من أجلها

$$\left|\beta_{n_j n_j}\right| \ge \delta \qquad (j = 1,2,3,\ldots)$$

و لذلك فإنّ

$$\|A\,g_{n_k} - A\,g_{n_i}\|^2 \ge \delta^2 > 0$$

و هذا يعني أنّ المتتالية الشعاعية اللانهائية $\left\{A\,g_{n_j}\right\}_0^{\infty}$ لا تحتوي على متتالية جزئية ما متقاربة، الأمر الذي يناقض تراص مجموعة الأشعة $\{A\,g_k\}_0^{\infty}$ الناجم عن كون A مؤثّراً تام الاستمرار.

توطئة (٢): إذا كانت $\lambda \neq 0$ و كان A مؤثّراً تام الاستمرار في R و كانت $\{f_k\}_0^{\infty}$ متتالية لا نهائية من الأشعة في R محققة للعلاقات

$$A\,f_0 - \lambda f_0 = 0$$

$$A\,f_n - \lambda f_n = f_{n-1} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

فإنّ $f_0 = 0$ (و هذا يعني أنّ $f_n = 0$ من أجل $n = 1,2,3,\ldots$)

البرهان: لنبرهن أولاً على أنه إذا كان $f_0 \neq 0$، فإنّه بين الأشعة f_k ($k = 1,2,3,\ldots$) لا توجد أشعة مرتبطة خطيّاً. في الواقع، إذا افترضنا وجود أشعة بين الأشعة

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$$

هي تركيبات خطيّة للأشعة التي سبقتها و أنّ الشعاع الأول بين تلك الأشعة كان f_n فإنّ

$$f_n = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1} \qquad (١)$$

بتطبيق المؤثّر A على طرفي هذه العلاقة نجد

$$\lambda_n f_n + f_{n-1} = \alpha_0 \lambda f_0 + \alpha_1 (\lambda f_1 + f_0) + \cdots + \alpha_{n-1} (\lambda f_{n-1} + f_{n-2})$$

و منه و استناداً إلى العلاقة (١) نحصل على علاقة تناقض علاقتنا المفروضة

$$f_{n-1} = \alpha_1 f_0 + \alpha_2 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-2}$$

أي إنّ f_n ليس هو الشعاع الأول الذي هو تركيب خطّي للأشعة التي سبقته بل هو f_{n-1}.

لنفرض أنّ التوطئة ليست صحيحة، أي إنّه علينا اعتبار الأشعة $f_0, f_1, f_2, \ldots$ مستقلّة خطيّاً، و بالتالي يمكننا معامدة و تنظيم هذه المتتالية.

ليكن

$$\begin{aligned}
g_0 &= \alpha_{00} f_0 \\
g_1 &= \alpha_{10} f_0 + \alpha_{11} f_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_k &= \alpha_{k0} f_0 + \alpha_{k1} f_1 + \cdots + \alpha_{kk} f_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

هي المتتالية المتعامدة – المنظّمة الناتجة. لنلاحظ الآن أنّ

$$
\begin{aligned}
A g_k &= \alpha_{k0}\lambda f_0 + \alpha_{k1}(\lambda f_1 + f_0) + \cdots + \alpha_{kk}(\lambda f_k + f_{k-1}) = \\
&= \alpha_{k1} f_0 + \alpha_{k2} f_1 + \cdots + \alpha_{kk} f_{k-1} + \lambda g_k = \\
&= \beta_{k0} g_0 + \beta_{k1} g_1 + \cdots + \beta_{k\,k-1} g_{k-1} + \lambda g_k \quad (k = 1,2,3,\ldots)
\end{aligned}
$$

إنّ هذه العلاقات تناقض التوطئة (١) و هو ما يثبت أنّ f_0 لا يمكن أن يكون مغايراً للصفر $(f_0 \neq 0)$.

§ ٢. حول القيم الخاصّة للمؤثّرات التامّة الاستمرار في R

On the eigenvalues of completely continuous operators in R

في هذا البند و كما هو واضح من العنوان سندرس مؤثّرات في جملة خطّية كيفية و قابلة للتمتير (مُمتَّرة) R، و في البندين اللاحقين سنفرض أنّ الجملة R تامّة، أي إنّها فضاء هيلبرت H.

مبرهنة (١): إنّ عدد الأشعة الخاصّة و المستقلّة خطّياً لكل مؤثّر تام الاستمرار في R و المنتمية إلى قيم خاصّة تزيد بقيمتها المطلقة عن عدد ρ $(\rho > 0)$ أياً كان هذا العدد الموجب منتهياً.

البرهان: لنفرض العكس، أي إنّه توجد مجموعة لا نهائية من الأشعة المستقلة خطياً f_n، $(n = 1,2,3,\ldots)$ و التي من أجلها

$$
A f_n = \lambda_n f_n \quad , \quad |\lambda_n| > \rho > 0 \; (n = 1,2,3,\ldots)
$$

بمعامدة و تنظيم المتتالية $\{f_n\}_1^{\infty}$ نحصل على متتالية من الأشعة المتعامدة و المنظّمة

$$
\begin{aligned}
& g_1 = \alpha_{11} f_1 \\
& g_2 = \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2 \\
& g_k = \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \cdots + \alpha_{kk} f_k \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

وفقاً لذلك يكون

$$
\begin{aligned}
A g_k &= \alpha_{k1} A f_1 + \alpha_{k2} A f_2 + \cdots + \alpha_{kk} A f_k = \\
&= \alpha_{k1} \lambda_1 f_1 + \alpha_{k2} \lambda_2 f_2 + \cdots + \alpha_{kk} \lambda_k f_k
\end{aligned}
$$

و بالتالي فإنّ

$$A\,g_k-\lambda_k\,g_k=\alpha_{k1}(\lambda_1-\lambda_k)f_1+\cdots+\alpha_{k\,k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)f_{k-1}=$$
$$=\beta_{k1}g_1+\beta_{k2}g_2+\cdots+\beta_{k\,k-1}g_{k-1}$$

بهذا الشكل يكون

$$A\,g_k=\beta_{k1}g_1+\beta_{k2}g_2+\cdots+\beta_{k\,k-1}g_{k-1}+\lambda_k\,g_k$$

و استناداً إلى التوطئة (١) من البند السابق نجد أنّ ما توصّلنا إليه يناقض الفرض أنّ $|\lambda_k|>\rho>0$ مع $(k=1,2,3,\dots)$.

نتيجة (١): إنّ نقطة التجمع الوحيدة للقيم الخاصّة للمؤثّر التام الاستمرار في R يمكن أن تكون نقطة الصفر ٠.

نتيجة (٢): كل قيمة خاصّة و مختلفة عن الصفر للمؤثّر التام الاستمرار في R تقابل بعدد منتهٍ من الأشعة الخاصّة المستقلة خطّياً. بكلام آخر إنّ تكرار (*multiplicity*) كل قيمة خاصّة مختلفة عن الصفر للمؤثّر التام الاستمرار في R منتهٍ.

نتيجة (٣): إنّ مجموعة الأشعة الخاصّة و المستقلّة خطّياً و المنتمية لقيمة خاصّة مختلفة عن الصفر للمؤثّر التام الاستمرار ليست بأكثر من مجموعة قابلة للعد.

مبرهنة (٢): إذا كان A مؤثّراً تام الاستمرار في R و كانت المعادلة

$$A\,f-\lambda\,f=h \qquad (١)$$

من أجل عدد ما $\lambda\neq 0$ قابلة للحل من أجل كل عنصر $h\in R$ فإنّه للمعادلة

$$A\,f-\lambda\,f=0 \qquad (٢)$$

يوجد حل وحيد $f=0$. أي إنّ λ ليست قيمة خاصّة للمؤثّر A.

البرهان: إذا حقق الشعاع $f_0\neq 0$ المعادلة (٢)، فإنّه بحل المعادلة (١) من أجل $h=f_0$ نجد شعاعاً f_1 من أجله يكون

$$A\,f_1-\lambda\,f_1=f_0$$

و من ثمّ نجد شعاعاً f_2 من أجله يكون

$$A f_2 - \lambda f_2 = f_1$$

بالاستمرار في هذه العملية نحصل على متتالية لا نهائية مثل $\{f_k\}_0^{\infty}$ و بحيث إنّ

$$A f_k - \lambda f_k = f_{k-1} \qquad (k = 1,2,3,...)$$

$$A f_0 - \lambda f_0 = 0 \quad , \quad f_0 \neq 0$$

إلا أنّ هذه العلاقات تناقض التوطئة (٢) من البند السابق و هو ما يثبت المبرهنة.

نتيجة (٤): إذا كانت المعادلة (١) قابلة للحل من أجل عدد $\lambda \neq 0$ و من أجل أي عنصر $h \in R$، فإنّ هذه المعادلة تكون قابلة للحل من أجل كل عنصر $h \in R$ بشكل وحيد، و بالتالي فإنّه للمؤثّر $(A - \lambda I)$ يوجد مقلوب $(A - \lambda I)^{-1}$ في كل R.

مبرهنة (٣): يوجد ثابت مثل $\mathcal{L}$ يتعلق فقط بالمؤثّر التام الاستمرار A في R و بالعدد $\lambda \neq 0$ بحيث إنّه في كل مرّة تكون فيها المعادلة

$$A f - \lambda f = h \qquad (١)$$

قابلة للحل فإنّه من أجل واحد على الأقل من حلولها f تتحقق المتراجحة

$$\|f\| \leq \mathcal{L} \|h\|$$

البرهان: لتكن

$$f_1 , f_2 , ..., f_k$$

جميع الأشعة الخاصّة المستقلّة خطيّاً للمؤثّر A و المنتمية للقيمة الخاصّة λ، لا نستثني تلك الحالة التي لا تكون فيها λ قيمة خاصّة للمؤثّر، في هذه الحالة تكون $k = 0$. ليكن f^* حلاً ما للمعادلة (١)، عندئذٍ يكون الحل العام لهذه المعادلة من الشكل

$$f = f^* + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k$$

حيث $\alpha_1 , \alpha_2 , ... , \alpha_k$ أعداد كيفية. لنختر هذه الأعداد بحيث يكون نظيم الشعاع $\|f\|$ أصغرياً. لنرمز للحل الناتج بـ f^0. إنّ هذا الحل يتطابق مع f^* إذا كان $k = 0$. لنفرض أنّ h يمسح المجموعة M مجموعة جميع تلك العناصر التي من

أجلها تكون المعادلة (١) قابلة للحل. إنّ كل شعاع $h \in M$ يقابل بشعاع ما f^{0} و علينا إثبات أنّ

$$\sup_{h \in M} \frac{\mathrm{P} f^{0} \mathrm{P}}{\mathrm{P} h \, \mathrm{P}} < \infty$$

لنفرض العكس، إنّ هذا يعني وجود متتالية مثل $\{h_k\}$ من أجلها يكون

$$\frac{\mathrm{P} f_k^{0} \mathrm{P}}{\mathrm{P} h_k \, \mathrm{P}} \longrightarrow \infty$$

لنقسم طرفي المساواة

$$A f_k^{0} - \lambda f_k^{0} = h_k \qquad (k = 1,2,3,...)$$

على $\mathrm{P} f_k^{0} \mathrm{P}$ فنحصل على العلاقة

$$A f_k'^{0} - \lambda f_k'^{0} = h_k' \qquad (k = 1,2,3,...)$$

حيث

$$h_k' = \frac{h_k}{\mathrm{P} f_k^{0} \mathrm{P}} \quad , \quad \mathrm{P} f_k'^{0} \mathrm{P} = 1 \qquad (k = 1,2,3,...)$$

وفقاً لذلك يكون العدد واحد هو القيمة الأصغرية لنظيم حل المعادلة (١) و ذلك إذا كان الطرف الأيمن مساوياً h_k'. بما أنّ المؤثر A تام الاستمرار فإنه توجد متتالية مثل

$$f_{n_1}'^{0}, f_{n_2}'^{0}, f_{n_3}'^{0}, \ldots, f_{n_k}'^{0}$$

من أجلها تكون النهاية

$$\lim_{i \to \infty} A f_{n_i}'^{0}$$

موجودة، و بما أنّه بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$h_k' \longrightarrow 0$$

فإنّه أيضاً تكون النهاية

$$\lim_{i \to \infty} f_{n_i}'^{0} = g$$

موجودة، و بالتالي فإنّ

$$A\,g-\lambda g=0$$

إضافة إلى أنّ $P g P= 1$، أي إنّ g شعاع خاص للمؤثّر A.

إنّ الشعاع $f'^{0}_{n_i}-g$ محاكٍ للشعاع $f'^{0}_{n_i}$ الذي يمثّل حلاً للمعادلة (أ) من أجل الطرف الأيمن h'_{n_i}، و بما أنّ القيمة الأصغرية لنظيم حل هذه المعادلة هي العدد واحد فإنّ

$$P f'^{0}_{n_i}-g\;P\geq 1$$

و هذا غير ممكن. بهذه الصورة نكون قد أثبتنا المبرهنة.

§ ٣. الخواص اللاحقة للمؤثّرات تامّة الاستمرار

Further properties of completely continuous operators

مبرهنة (١): إذا كانت $\lambda\neq 0$ قيمة خاصّة للمؤثّر التام الاستمرار A في الفضاء H، فإنّ $\overline{\lambda}$ تكون قيمة خاصّة للمؤثّر A^{*}.

البرهان: لنفرض أنّ الشعاع h يمسح الفضاء H. عندئذٍ لا يمسح الشعاع

$$A\,h-\lambda\,h=g$$

كل الفضاء و إنّما يمسح متنوعة خطّية ما $G\subset H$ و ذلك لأنّ المعادلة

$$A\,f-\lambda\,f=g$$

ليست قابلة للحل من أجل جميع العناصر g في الطرف الأيمن منها. بسهولة نجد أنّ المتنوّعة الخطّية G مغلقة، و بالتالي فهي فضاء جزئي. في الواقع، إذا كانت $g_n\in G\;\;;(n=1,2,3,...)$ فإنّه استناداً إلى المبرهنة (٣) من البند السابق توجد أشعة h_n^{0} من أجلها يكون

$$A\,h_n^{0}-\lambda\,h_n^{0}=g_n\qquad (n=1,2,3,...)$$

و

$$\|h_n^0\| \leq C \|g_n\| \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

إذا كان $g_n \to g$ فإنّ متتالية الأشعة $\left\{h_n^0\right\}_1^\infty$ تكون محدودة و بالتالي توجد متتالية جزئية $\left\{h_{n_i}^0\right\}_{i=1}^\infty$ من أجلها تكون النهاية

$$\lim_{i\to\infty} A\, h_{n_i}^0$$

موجودة، و بالتالي يوجد عنصر h:

$$h=\lim_{i\to\infty} h_{n_i}^0$$

و هذا يعني تحقق المساواة

$$A\,h-\lambda h=g$$

و هو ما يثبت انتماء g إلى G ($g\in G$). أي إنّ المتنوّعة الخطّية G مغلقة.

بما أنّ الفضاء الجزئي G لا يتطابق مع H، فإنّه يوجد شعاع مختلف عن الصفر مثل f و معامد لـ G، أي إنّه من أجل أي عنصر $h\in H$ يكون

$$(A\,h-\lambda h,\, f\,)=0$$

و منه نجد أنّ

$$(A\,h,\, f\,)=(\lambda h,\, f\,)$$

أو

$$(h_1,\, A^* f\,)=(h,\, \bar{\lambda}\, f\,)$$

أي إنّ

$$A^* f=\bar{\lambda}\, f$$

و هو المطلوب.

يمكننا الآن تعميم المبرهنة (٢) من البند السابق. لقد أكّدت تلك المبرهنة على أنّه إذا كانت $\lambda\neq 0$ قيمة خاصّة للمؤثّر التام الاستمرار A في R فإنّ المعادلة

$$A f-\lambda f=g \qquad (١)$$

قابلة للحل ليس من أجل جميع العناصر $g \in R$. لنفرض الآن أنّ المؤثّر A مطبّق في H و سنبيّن بأنّ المعادلة (١) تكون قابلة للحل من أجل جميع العناصر g.

مبرهنة (٢): ليكن A مؤثّراً تام الاستمرار في الفضاء H. إنّ الشرط اللازم و الكافي كي تكون المعادلة (١) قابلة للحل من أجل $\lambda \neq 0$ هو أن يكون الشعاع g معامداً للفضاء الجزئي الخاص F للمؤثّر A^* و المنتمي للقيمة الخاصّة $\bar{\lambda}$. وفقاً لذلك، و في الحالة التي لا تكون فيها $\bar{\lambda}$ قيمة خاصّة للمؤثّر A^* فإنّه علينا أن نفهم تحت F الفضاء الجزئي الصفري، أي إنّه في هذه الحالة تكون المعادلة (١) قابلة للحل أيّاً كان الطرف الأيمن فيها.

البرهان: لتكن G هي مجموعة جميع الأشعّة التي لها الشكل

$$g = A\,h - \lambda h$$

وجدنا أعلاه أنّ G تشكل فضاءً جزئياً، تبعاً لذلك يكفي إثبات أنّ $H \ominus G$ يتطابق مع الفضاء الجزئي الخاص F للمؤثّر A^* و المنتمي للقيمة $\bar{\lambda}$.

لنفرض أنّ الشعاع f معامد لـ G. في هذه الحالة و بإعادة البرهان في المواضع الموافقة و المذكورة في المبرهنة (١) نجد أنّ

$$A^* f = \bar{\lambda}\, f$$

بذلك يكون $f \in F$ و هذا يعني أنّ

$$H \ominus G \subseteq F$$

و منه، في حالة خاصّة، ينتج أنّه إذا لم تكن $\bar{\lambda}$ قيمة خاصّة للمؤثّر A^* فإنّ $H \ominus G = \{0\}$. أي إنّ $G = H$، و هذا يعني أنّ المعادلة (١) قابلة للحل أيّاً كان الطرف الأيمن فيها.

يتبقى علينا أن نبرهن على أنّه إذا كانت $\bar{\lambda}$ قيمة خاصّة للمؤثّر A^*، فإنّه يكون

$$F \subseteq H \ominus G \tag{٢}$$

و هكذا، لنفرض أنّ F غير خالٍ و ليكن $f \neq 0$ عنصراً ما من F و لنأخذ أي شعاع من الشكل

$$g = Ah - \lambda h$$

فيكون لدينا

$$(f\ ,\ g) = (f\ ,\ Ah - \lambda h) = (A^{*} f - \overline{\lambda} f\ ,\ h) = 0$$

و هذا يعني أنّ $f \perp G$ و هو ما يثبت العلاقة (٢) و هذا بدوره يثبت المبرهنة.

إنّ المُطلّع على نظرية المعادلات التكاملية يستنتج أنّ ما أثبتناه هنا هو تعميم لمبرهنتي فريدهولم الأولى و الثانية، كما أنّه يتحقق تعميم مبرهنة فريدهولم الثالثة و التي تصاغ على النحو الآتي:

"إنّ قياس (عدد أبعاد) الفضاءين الخاصّين للمؤثّرين تامّي الاستمرار A و A^{*} في H و المنتميين للقيمتين الخاصّتين λ و $\overline{\lambda}$ هو نفسه للفضاءين. و هذا ما سنثبته في البند التالي."

§ ٤. طريقة ف. ريس في نظرية المعادلات التابعية الخطّية

F. Riesz's method in the theory of linear functional equations

ليكن A مؤثراً تام الاستمرار في الفضاء H، و لنأخذ عدداً ما $\lambda \neq 0$، و لنرمز بـ K_{λ} لمجموعة الأشعّة g التي من أجلها تكون المعادلة

$$(A - \lambda I)^{n} x = g$$

قابلة للحل من أجل أية قيمة $n = 1,2,3,...$، و لنرمز بـ N_{λ} لمجموعة جميع الأشعّة f التي تحقق المعادلة

$$(A - \lambda I)^{m} f = 0 \qquad (١)$$

من أجل عدد طبيعي ما m.

إذا لم تكن λ قيمة خاصّة للمؤثّر A فإنّ $K_{\lambda} = H$ بينما N_{λ} تتألّف من شعاع وحيد هو الشعاع الصفري، وفقاً لذلك تبرز أهمّية المجموعتين K_{λ} و N_{λ} فقط في الحالة التي تكون فيها λ قيمة خاصّة للمؤثّر A. سنكون بحاجة أيضاً للمتنوعتين الخطّيتين $K_{\overline{\lambda}}^{*}$ و $N_{\overline{\lambda}}^{*}$ الناتجتين عن استبدال A بـ A^{*} و λ بـ $\overline{\lambda}$.

لنسرد الآن خواص المتنوعات الخطّية المعرّفة أعلاه:

١°) إنّ كلاً من المتنوّعتين K_λ و N_λ فضاء جزئي في H.

٢°) كل شعاع $h \in H$ يمثَّل بشكل وحيد على الشكل

$$h = g + f$$

حيث $g \in K_\lambda$ و $f \in N_\lambda$.

٣°) عدد أبعاد N_λ منته.

٤°) $N_{\bar{\lambda}}^{*} = H \ominus K_\lambda$.

٥°) للفضاءين الجزئيين N_λ و $N_{\bar{\lambda}}^{*}$ نفس عدد الأبعاد.

نصطلح على تسمية العدد الذي يشير إلى عدد أبعاد الفضاء الجزئي N_λ **رتبة القيمة الخاصّة** λ و نُذكّر بأنّ عدد أبعاد الفضاء الجزئي المنتمي للقيمة λ (أي العدد الأعظمي للأشعة الخاصّة و المستقلّة خطّياً) يسمّى **عدد مرّات تكرار (مضاعفات)** تلك القيمة الخاصّة. من الواضح أنّ الرتبة أكبر أو تساوي عدد مرّات التكرار (المضاعفات) و تسمّى الفضاءات الجزئية N_λ **بالفضاءات الصفرية للمؤثّر A** في H و يسمّى أيضاً الشعاع f المغاير للصفر و المنتمي لـ N_λ **جذراً** للمؤثّر A (*).

لنفرض مؤقتاً أنّ الخواص المذكورة للمتنوّعتين K_λ و N_λ محقّقة و لنثبت اعتماداً على تلك الخواص الشكل المماثل لمبرهنة فريدهولم الثالثة و التي صغناها في البند السابق، لنلاحظ بغية هذا الأمر، أنّ كل شعاع خاص e للمؤثّر A و منتمٍ للقيمة الخاصّة λ يمكن كتابته على الشكل

$$e = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n$$

حيث إنّ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ قاعدة ما في N_λ. من أجل تعيين الأمثال $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ تكون لدينا المعادلة

$$(A - \lambda I)\, e = \xi_1 [A f_1 - \lambda f_1] + \xi_2 [A f_2 - \lambda f_2] + \cdots + \xi_n [A f_n - \lambda f_n] = 0$$

(*) أحياناً نستعرض جذوراً منتمية للقيمة الخاصّة $\lambda = 0$، عندئذٍ تكون المتنوعة الجذرية متنوعة صفرية للمؤثّر. في جميع الحالات المدروسة هنا $\lambda \neq 0$.

بما أنّ الشعاع الممثّل للطرف الأيسر لهذه المعادلة، و الذي سنرمز له بـ h ينتمي لـ N_λ فإنّه استناداً إلى الخاصّة ٤°) يكون معامداً لـ $K_{\bar{\lambda}}^*$ و استناداً للخاصّة ٢°) يكون

$$h = g + f$$

حيث $g \in K_{\bar{\lambda}}^*$ و $f \in N_{\bar{\lambda}}^*$ بالتالي فإنّ

$$(h, h) = (h, g + f) = (h, f)$$

لذلك فإنّه من أجل أن تتحقق المساواة $h = 0$ يكفي أن يكون $h \perp N_{\bar{\lambda}}^*$ و من الواضح أنّ هذا الشرط لازم أيضاً. و هكذا فإنّه من أجل تعيين الأمثال ξ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ علينا أن نشترط بأن يكون الشعاع h معامداً كل شعاع من الأشعّة المستقلّة خطيّاً f_k^* و المولّدة لـ $N_{\bar{\lambda}}^*$. و بما أنّ عدد هذه الأشعّة هو n، استناداً إلى الخاصّة ٥°)، فإنّه يكون لدينا الجملة

$$\begin{aligned} &\xi_1(A f_1 - \lambda f_1, f_i^*) + \xi_2(A f_2 - \lambda f_2, f_i^*) + \cdots + \\ &\quad + \xi_n(A f_n - \lambda f_n, f_i^*) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \end{aligned} \qquad (٢)$$

بشكل مماثل، و من أجل إيجاد الأشعّة الخاصّة

$$e^* = \eta_1 f_1^* + \eta_2 f_2^* + \cdots + \eta_n f_n^*$$

للمؤثّر A^* و المنتمية للقيمة الخاصّة $\bar{\lambda}$ تكون لدينا الجملة

$$\begin{aligned} &\eta_1 (A^* f_1^* - \bar{\lambda} f_1^*, f_i) + \eta_2 (A^* f_2^* - \bar{\lambda} f_2^*, f_i) + \cdots + \\ &\quad + \eta_n (A^* f_n^* - \bar{\lambda} f_n^*, f_i) = 0 \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

و التي يمكن كتابتها على الشكل

$$\begin{aligned} &\bar{\eta}_1(A f_i - \lambda f_i, f_1^*) + \bar{\eta}_2(A f_i - \lambda f_i, f_2^*) + \cdots + \\ &\quad + \bar{\eta}_n(A f_i - \lambda f_i, f_n^*) = 0 \\ &\qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \end{aligned} \qquad (٣)$$

بما أنّ كلاً من الجملتين (٢) و (٣) هو منقول للجملة الأخرى، فإنّ عدد الأشعة المستقلّة خطّياً لأي منهما هو نفسه بالنسبة للجملة الأخرى. بهذه الصورة تكون مرّات التكرار (المضاعفات) للقيمة الخاصّة λ للمؤثّر A مساوياً لمضاعفات القيمة الخاصّة $\bar{\lambda}$ للمؤثّر A^*، و في هذا الأمر تتلخص مبرهنة فريدهولم الثالثة المصاغة في البند السابق.

نأتي الآن لإثبات الخواص المذكورة أعلاه، للمتنوّعتين K_λ و N_λ، نبتدأ بدراسة المتنوّعة K_λ. من الواضح أنّ هذه المتنوّعة خطّية، كما أنّه من الواضح أيضاً أنّه من أجل أي عدد طبيعي n يكون

$$K_\lambda \subseteq G^{(n)}$$

حيث $G^{(n)}$ المتنوعة الخطّية التي يمسحها الشعاع

$$g_n = (A - \lambda I)^n h$$

وذلك عندما يمسح الشعاع h الفضاء H. في إثبات المبرهنة (١) في البند السابق، كنّا قد بيّنا أنّ المتنوعة الخطّية $G^{(1)}$ التي يمسحها الشعاع

$$g_1 = (A - \lambda I) h$$

مغلقة، أي إنّها تمثّل فضاءً جزئيّاً في H. تبعاً لذلك تكون كل متنوعة من المتنوّعات الخطّية $G^{(n)}$ مغلقة، أي إنّها فضاء جزئي في H. في الواقع، إنّ الشعاع g_n الذي يمسح $G^{(n)}$ يمكن أن يمثّل على الشكل

$$g_n = \left(B + (-1)^n \lambda^n I\right) h$$

حيث إنّ المؤثّر

$$B = A^n - \binom{n}{1} \lambda A^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} A$$

هو مؤثّر تام الاستمرار و ذلك لأنّ المؤثّر A تام الاستمرار.

بسهولة نرى أنّ $G^{(n+1)} \subseteq G^{(n)}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ إلا أنّه من الممكن التأكيد على أكثر من ذلك. على وجه التحديد، و من أجل عدد طبيعي k ما يكون

$$G^{(k+1)} = G^{(k)}$$

و بالتالي فإنّ

$$G^{(k)} = G^{(k+1)} = G^{(k+2)} = \ldots$$

و هذا يعني أنّ

$$G^{(k)} = K_{\lambda}$$

و بالتالي فإنّ K_{λ} فضاء جزئي. هكذا نجد أنّ عملية تشكيل الفضاءات الجزئية $G^{(n)}$ تتقطع و هذا تمييز جوهري لطريقة ريس المذكورة.

إنّ البرهان على وجود القيم المشار إليها k يتم بنقض الفرض. لنفرض أنّ $G^{(n+1)} \neq G^{(n)}$ من أجل أي عدد طبيعي n. من هذا الفرض ينتج وجود متتالية لا نهائية من الأشعة $\{g_i^*\}_0^{\infty}$ و بحيث إنّ

a) $g_i^* \in G^{(i)}$

b) $\|g_i^*\| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots \ ; \ \ G^{(0)} = H)$

c) $g_i^* \perp G^{(i+1)}$

إذا كان $j > i$ فإنّ $G^{(j)} \subseteq G^{(i+1)}$ لذلك فإنّه بالاستناد إلى c) يكون $g_i^* \perp G^{(j)}$ و هذا يعني أنّ

$$(g_i^*, g_j^*) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (٤)$$

من جهة ثانية و بما أنّ $(A - \lambda I) G^{(i)} = G^{(i+1)}$، فإنّ

$$A g_j^* - \lambda g_j^* \in G^{(j+1)} \subset G^{(i+1)} \quad ; \quad (j > i)$$

و لذلك فإنّ

$$(A g_i^* - \lambda g_i^* \, , \, g_i^*) = 0$$

و استناداً إلى (٤) يكون

$$(A g_j^* \, , \, g_j^*) = 0$$

من هذه العلاقات ينتج أنّه من أجل جميع $j > i$ يكون

$$\left\|A g_j^* - A g_i^*\right\|^2 = \left\|(\lambda g_i^* - \lambda g_j^*) - A g_j^*\right\|^2 =$$

$$= \left\|\lambda g_i^* + (A g_i^* - \lambda g_i^*) - A g_j^*\right\|^2 =$$

$$= |\lambda|^2 + \left\|(A g_i^* - \lambda g_i^*) - A g_j^*\right\|^2 \geq |\lambda|^2$$

و هذه المتراجحة تناقض تراص مجموعة الأشعة

$$A g_1^* \ , A g_2^* \ , \mathrm{K} \ , \ A g_i^* \ , \ \mathrm{K}$$

بهذه الصورة نكون قد أثبتنا أنّه من أجل عدد طبيعي ما k يكون

$$G^{(k)} = K_\lambda$$

لنبيّن الآن أنّ سلسة القيم الطبيعية m في العلاقة (ا) المعرّفة للمتنوّعة N_λ يمكن أيضاً قطعها و على وجه الدقّة: إذا كان $f \in N_\lambda$ فإنّ المساواة (ا) تتحقق من أجل $m = k$ (من الممكن أن لا تتحقق من أجل $m < k$) من ذلك، بسهولة ينتج أنّ N_λ فضاء. و هكذا ليكن

$$(A - \lambda I)^m f = 0 \qquad (ه)$$

من أجل $m > k$. في هذه الحالة يكون $m - 1 \geq k$ و بالتالي فإنّ

$$g \equiv (A - \lambda I)^{m-1} f \in K_\lambda$$

و استناداً إلى (ه) نجد أنّ

$$A g - \lambda g = 0$$

بما أنّ $g \in K_\lambda = G^{(k)}$، فإنّ $g \in G^{(k+1)}$ و هذا يعني أنّ

$$g = (A - \lambda I) g_1$$

حيث $g_1 \in G^{(k)} = K_\lambda$. و لهذا فإنّ $g_1 \in G^{(k+1)}$ و هذا يعني أنّ

$$g_1 = (A - \lambda I) g_2$$

حيث $g_2 \in G^{(k)} = K_\lambda$. بالاستمرار بهذه العملية نأتي إلى المعادلات

$$A g_n - \lambda g_n = g_{n-1} \quad ; \quad (n = 1,2,3,\ldots \quad , \quad g_0 = g)$$

$$A\,g = g$$

من هذه المعادلات و استناداً للتوطئة (٢) من البند الأول ينتج أنّ(*)

$$g = 0$$

بذلك نكون قد أثبتنا أنّه من (ه) تنتج المساواة

$$(A - \lambda I)^{m-1} f = 0$$

و ذلك إذا كان $m > k$ بإعادة نفس الخطوات السابقة نأتي إلى المساواة

$$(A - \lambda I)^{k} f = 0$$

لنبرهن الآن على أنّه لا يمكن استبدال المؤشر k بآخر أصغر منه. بغية ذلك نختار شعاعاً h بحيث إنّ

$$(A - \lambda I)^{k-1} h \notin G^{(k)}$$

و هذا الأمر ممكن و ذلك لأنّ $G^{(k)} \neq G^{(k-1)}$ و أنّ الشعاع $(A - \lambda I)^{k-1} f$ يمسح $G^{(k-1)}$ عندما يمسح الشعاع f الفضاء H. إنّ الشعاع

$$h_1 = (A - \lambda I)^{k} h$$

ينتمي لـ K_λ و لذلك فإنّه يمكن أن يمثل على الشكل

$$h_1 = (A - \lambda I)^{2k} h_0 = (A - \lambda I)^{k} g$$

حيث $g = (A - \lambda I)^{k} h_0$ و $g \in G^{(k)} = K_\lambda$. بذلك نرى أنّ الشعاع $f = h - g$ يحقق العلاقة

$$(A - \lambda I)^{k} f = 0$$

أي إنّه ينتمي إلى N_λ. إلى جانب ذلك لدينا

$$(A - \lambda I)^{k-1} f = (A - \lambda I)^{k-1} h - (A - \lambda I)^{k-1} g$$

(*) لنلاحظ أنّ من خلال ما ذكرنا نكون قد برهنا على أنّه إذا كان

$$A\,g = \lambda g$$

و $g \in K_\lambda$ فإنّ $g = 0$. وسنستخدم ذلك لاحقاً.

إنّ الطرف الأيمن لهذه المساواة مختلف عن الصفر و ذلك لأنّ الحد الأول منه لا ينتمي لـ $G^{(k)}$ بينما الحد الثاني ينتمي لـ $G^{(k)}$.

إنّ الخاصّة الأولى للمتنوّعتين K_λ و N_λ قد أثبتت. لنبرهن الآن الخاصّة الثانية. لنفرض أنّنا أخذنا شعاعاً ما h من الفضاء H و لنفرض أنّ

$$h_1 = (A - \lambda I)^k h$$

بما أنّ $h_1 \in G^{(k)} = G^{(k+1)}$ فإنّه، و كما وجدنا أعلاه، يمكن تمثيل h_1 على الشكل

$$h_1 = (A - \lambda I)^k g$$

حيث $g \in G^{(k)} = K_\lambda$. لنفرض أنّ

$$f = h - g$$

فنجد أنّ

$$(A - \lambda I)^k f = (A - \lambda I)^k h - (A - \lambda I)^k g = 0$$

أي إنّ $f \in N_\lambda$، و هكذا فإنّه نكون قد مثّلنا شعاعاً ما $h \in H$ على الشكل

$$h = f + g$$

حيث $f \in N_\lambda$ و $g \in K_\lambda$. و هو المطلوب.

إذا كان النشر المذكور ليس وحيداً، فإنّه يوجد شعاع مثل $f \neq 0$ ينتمي للفضاءين الجزئيين K_λ و N_λ. و من انتماء f لـ N_λ ينتج أنه من أجل عدد طبيعي ما $k \geq p$ يكون

$$(A - \lambda I)^p f = 0$$

و ذلك لأنّ

$$g = (A - \lambda I)^{p-1} f \neq 0$$

و هذا يعني أنّ

$$A g = \lambda g \quad ; \quad g \neq 0$$

و

$$g \in K_\lambda$$

إلا أننا قد وجدنا أعلاه (انظر الحاشية السفلية في أسفل الصفحة قبل السابقة) أنّ ذلك غير ممكن. بذلك نكون قد أثبتنا الخاصّة ٢°).

إنّ كل شعاع $f \in N_\lambda$ يحقق المعادلة

$$\left(B-(-1)^{k-1}\lambda^k I\right)f=0$$

حيث

$$B=A^k-\lambda\binom{k}{1}\lambda A^{k-1}+\ldots+(-\lambda)^{k-1}\binom{k}{k-1}A$$

إذا كان $f \neq 0$ فإنّ f شعاع خاص للمؤثّر B ينتمي للقيمة الخاصّة $(-1)^{k-1}\lambda^k \neq 0$. استناداً إلى النتيجة (٢) من البند الثاني يكون عدد الأشعّة المستقلّة خطّياً و المتمتّعة بهذه الخاصّة منتهٍ. بالتالي فإنّ الخاصّة ٣°) قد أثبتت.

لنبرهن الآن الخاصّة ٤°). بغية ذلك نأخذ شعاعاً ما $f^* \perp K_\lambda$. عندئذٍ و من أجل أي شعاع $h \in H$ يكون

$$\left(f^*,\, (A-\lambda I)^k h\right)=0$$

و يمكننا كتابة ذلك على الشكل

$$\left((A^*-\overline{\lambda} I)^k f^*,\, h\right)=0$$

و بما أنّ h شعاع كيفي فإنّه من العلاقة الأخيرة ينتج

$$(A^*-\overline{\lambda} I)^k f^*=0$$

بكلام آخر $f^* \in N^*_{\overline{\lambda}}$، بذلك نكون قد برهنّا على أنّ

$$H \ominus N_{K_\lambda} \subseteq N^*_{\overline{\lambda}}$$

لنفرض الآن أنّ $f^* \in N^*_{\overline{\lambda}}$. ذلك يعني أنّ

$$(A^*-\overline{\lambda} I)^m f^*=0$$

حيث، من الواضح، إنّه يمكننا اعتبار $m \geq k$. من أجل أي شعاع $h \in H$ تكون لدينا المساواة

$$\left((A^{*}-\bar{\lambda}I)^{m}f^{*},\ h\right)=0$$

و هذه العلاقة يمكن كتابتها على الشكل

$$\left(f^{*},\ (A-\lambda I)^{m}h\right)=0$$

عندما يمسح الشعاع h الفضاء H فإنّ الشعاع $(A-\lambda I)^{m}h$ يمسح المتنوّعة K_{λ} و لذلك فإنّ $f^{*}\perp K_{\lambda}$ و بالتالي نكون قد برهنّا على أنّ

$$N_{\bar{\lambda}}^{*}\subseteq H\ominus K_{\lambda}$$

و بالمقارنة مع ما وجدنا أعلاه نجد أنّ

$$N_{\bar{\lambda}}^{*}=H\ominus N_{K_{\lambda}}$$

و هذا ما يثبت الخاصّة ٤°).

لإثبات الخاصّة الأخيرة نأخذ قاعدة ما $f_1, f_2, \ldots, f_n$ في الفضاء الجزئي N_{λ} و لنرمز بـ g_i لمسقط f_i على K_{λ} و لنضع

$$f_i^{*}=f_i-g_i\quad;\quad(i=1,2,3,\ldots,n)$$

بما أنّ $f_i^{*}\perp K_{\lambda}$ فإنّه وفقاً للخاصّة ٤°) يكون $f_i^{*}\in N_{\bar{\lambda}}^{*}$. إنّ الأشعة f_i^{*} مستقلّة خطّياً و ذلك لأنّه في الحالة المعاكسة تكون لدينا المساواة

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\cdots+\alpha_n g_n$$

علماً بأنّه ليست جميع العوامل α_i معدومة. إنّ الطرف الأيسر ينتمي لـ N_{λ} بينما الطرف الأيمن ينتمي لـ K_{λ} بالتالي فإنّ المساواة الأخيرة تناقض الخاصّة ٢°). و هكذا فإنّ جميع الأشعة f_i^{*} مستقلّة خطّياً و هذا يعني أنّ عدد أبعاد $N_{\bar{\lambda}}^{*}$ لا يقل عن عدد أبعاد N_{λ} و بما أنّ $A=(A^{*})^{*}$ فإنّ عدد أبعاد N_{λ} لا يقل عن عدد أبعاد $N_{\bar{\lambda}}^{*}$ و هذا ما يثبت الخاصّة ٥°).

§ ٥. مبرهنة حول وجود شعاع خاص للمؤثّر المترافق ذاتياً و التام الاستمرار

A theorem on the existence of an eigenvector for self ad joint completely continuous operator

تنص المبرهنة الأساسية المتعلقة بالمؤثّرات المترافقة ذاتياً و التامّة الاستمرار على أنّ

"كل مؤثّر تام الاستمرار و مترافق ذاتياً $A \neq 0$ في أيّة جملة خطّية مُمتَّرة R يمتلك شعاعاً خاصّاً واحداً على الأقل منتمياً لقيمة خاصّة مختلفة عن الصفر λ."

سنثبت هذه المبرهنة بطريقتين

البرهان الأول: ليكن

$$M = \sup_{\|g\|=1} \left|(A g , g)\right| = \sup_{\|g\|=1} \|A g\|$$

استناداً لتعريف الحد الأعلى، توجد متتالية منظّمة من الأشعة مثل $\{g_n\}_1^{\infty}$ من أجلها تكون النهاية

$$\lim_{n\to\infty} (A g_n , g_n)$$

موجودة و تساوي $+M$ أو $-M$. لنرمز لهذه النهاية المختلفة عن الصفر بـ λ. لنفصل من المتتالية المحدودة $\{g_n\}_1^{\infty}$ متتالية جزئية $\{g_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ من أجلها تكون النهاية $\lim_{n\to\infty} A g_{n_i}$ موجودة و تساوي h

$$\lim_{i\to\infty} A g_{n_i} = h \qquad (١)$$

إنّ هذا الأمر ممكن وفقاً لتعريف المؤثّر التام الاستمرار.

بما أنّ

$$\|A g_{n_i} - \lambda g_{n_i}\|^2 = \|A g_{n_i}\|^2 - 2\lambda (A g_{n_i} , g_{n_i}) + \lambda^2$$

فإنّ

$$\lim_{i\to\infty} \|A g_{n_i} - \lambda g_{n_i}\|^2 = \|h\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = h^2 - \lambda^2 \qquad (٢)$$

إلا أنّ

$$\|A g_{n_i}\| \leq M \|g_{n_i}\| = M = |\lambda|$$

و بالتالي فإنّ

$$\|h\| \le |\lambda|$$

و بما أنّ الطرف الأيسر من المساواة (٢) غير سالب فإنّ $\|h\| = |\lambda|$ و هذا يعني أنّ

$$\lim_{i\to\infty} \|A g_{n_i} - \lambda g_{n_i}\| = 0 \qquad (٣)$$

من ذلك ينتج أنّ النهاية $\lim_{i\to\infty} g_{n_i}$ موجودة و تساوي $\frac{h}{\lambda}$.

لنعرّف شعاعاً $e = \frac{h}{\lambda}$، من الواضح أنّ نظيم هذا الشعاع يساوي الواحد. و بكتابة العلاقة (٣) على الشكل

$$A e - \lambda e = 0$$

نحصل على المطلوب.

البرهان الثاني: ليكن f_0 شعاعاً ما و بحيث إنّ $A f_0 \ne 0$. بسهولة نرى أنه في هذه الحالة يكون $A^n f_0 \ne 0$ من أجل كل عدد طبيعي n. في الواقع، إذا كان من أجل عدد طبيعي ما $k \ge 1$

$$A^{k+1} f_0 = 0 \quad , \quad A^k f_0 \ne 0$$

لكان لدينا

$$0 = (A^{k+1} f_0 \,,\, A^{k-1} f_0) = (A^k f_0 \,,\, A^k f_0) \ne 0$$

و هذا مستحيل. مما ذكرنا ينتج أنّه يمكننا تعريف متتاليتين من الأشعة

$$\{f_k\}_0^\infty \quad , \quad \{f'_k\}_0^\infty$$

محققتين للعلاقات

$$f'_k = \frac{f_k}{\|f_k\|} \quad , \quad f_{k+1} = A f'_k \quad ; \quad (k = 0,1,2,...)$$

من هذه التعاريف ينتج أنّ

$$\|f_k\| \le \|f_{k+1}\| \quad ; \quad (k = 1,2,3,...) \qquad (٤)$$

و

$$\|f_{k-1}\|\|f_k\|=(f_{k-1}, f_{k+1})=(f_{k+1}, f_{k-1}) \quad ; \quad (k=1,2,3,\ldots) \qquad (٥)$$

في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}\|f_k\|&=(f_k, f_k')=(A f'_{k-1}, f'_k)=(f'_{k-1}, A\, f'_k)=\\&=(f'_{k-1}, f_{k+1})\leq \|f'_k\|\|f_{k+1}\|=\|f_{k+1}\|\end{aligned}$$

و هذا ما يثبت العلاقة (٤). كما أننا قد أثبتنا من خلال البرهان أنّ

$$(f'_{k-1}, f_{k+1})=\|f_k\|$$

و من هذا تنتج العلاقة (٥)

$$\left(\frac{f_{k-1}}{\|f_{k-1}\|}, f_{k+1}\right)=\|f_k\|$$

و بما أننا كنّا قد رمزنا لنظيم المؤثّر A بـ M، فإنّ

$$\|A\, f'_{k-1}\|\leq M$$

و بالتالي فإنّ

$$\|f_k\|\leq M$$

بذلك نجد أنّ متتالية النظائم $\{\|f_k\|\}_1^{\infty}$ غير المتناقصة محدودة و هذا يعني وجود النهاية المحدودة

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\| = \lambda \qquad (٦)$$

و بما أنّ المؤثّر A تام الاستمرار، فإنّه توجد متتالية جزئية مثل $\{f'_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ من أجلها تكون للمتتالية

$$f_{n_i+1}=A\, f'_{n_i}$$

نهاية. لنرمز لهذه النهاية بـ g

$$f_{n_i+1}\longrightarrow g$$

بملاحظة أنّ

$$f_{n_i+2} = A\, f'_{n_i+1} = \frac{A\, f_{n_i+1}}{\|f_{n_i+1}\|}$$

نستنتج تقارب المتتالية $\left\{f_{n_i+2}\right\}_{i=1}^{\infty}$ و بالمثل يبرهن على تقارب المتتالية $\left\{f_{n_i+3}\right\}_{i=1}^{\infty}$. لنضع

$$f_{n_i+2} \longrightarrow h \quad , \quad f_{n_i+3} \longrightarrow h'$$

و لنحسب $\|h'-g\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|h'-g\|^2 &= \lim_{i\to\infty} \|f_{n_i+3} - f_{n_i+1}\|^2 = \\
&= \lim_{i\to\infty}\left(\|f_{n_i+3}\|^2 + \|f_{n_i+1}\|^2 - (f_{n_i+3}, f_{n_i+1}) - (f_{n_i+1}, f_{n_i+3})\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

و من أجل ذلك استخدمنا العلاقتين (٥) و (٦). و هكذا فإنّ $h' = g$. من جهة ثانية،

$$h = \frac{A\,g}{\lambda} \quad , \quad h' = \frac{A\,h}{\lambda}$$

و بذلك نجد أنّ

$$A\,g = \lambda h \quad , \quad A\,h = \lambda\, g$$

و منه فإنّ

$$A(h+g) = \lambda(h+g) \quad , \quad A(h-g) = -\lambda(h-g)$$

بما أنّ $\lambda = \|g\|$ فإنّ الشعاع g مغاير للصفر و بالتالي فإنّ أحد الشعاعين، على الأقل، $h+g$ و $h-g$ مختلف عن الصفر. و هذا الشعاع المختلف عن الصفر هو شعاع خاص للمؤثّر A موافق للقيمة الخاصّة λ أو $-\lambda$.

لنلاحظ أنّ المبرهنة المثبتة قد لا تكون صحيحة من أجل مؤثّرات كيفية (غير مترافقة ذاتياً) و تامّة الاستمرار، على سبيل المثال، نذكر مؤثّر فولتيرا التكاملي في الفضاء $L^2[0,1]$

$$Tf = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$$

ذا النّواة المستمّرة $K(x,t)$ لا توجد له أشعّة خاصّة.

§ ٦. طيف المؤثّرات المترافقة ذاتيّاً و التامّة الاستمرار

Spectrum Of Self-Adjoint, Completely Continuous Operators

برهنّا في البند السابق على وجود قيمة خاصّة واحدة على الأقلّ $\lambda \neq 0$ للمؤثّر التامّ الاستمرار و المترافق ذاتيّاً و المختلف عن المؤثّر الصفري. سنبني في هذا البند جملة تامّة من الأشعّة الخاصّة للمؤثّر A و على وجه الدقّة سنثبت المبرهنة الآتية.

مبرهنة: من أجل المؤثّر A توجد متتالية منتهية أو غير منتهية من الأشعّة الخاصّة المتعامدة فيما بينها مثنى مثنى و المنظّمة

$$e_1 , e_2 , e_3 , \mathrm{K}$$

و المنتمية للقيم الخاصّة المختلفة عن الصفر

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \mathrm{K} ,$$
$$\left(|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \right)$$

و التامّة في Δ_A ساحة قيم المؤثّر A. أي إنّه من أجل كلّ شعاع f من الشكل $f = Ah$ تتحقّق معادلة الإغلاق

$$\|f\|^2 = \sum_k |(f, e_k)|^2$$

البرهان: استناداً للمبرهنة في البند السابق يوجد شعاع مثل e_1 $(\|e_1\| = 1)$ و بحيث إنّ

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1$$

و حيث

$$\lambda_1 = \pm \sup_{\|g\|=1} |(Ag, g)|$$

بغية الملاءمة سنرمز للمؤثّر A بـ A_1 و للجملة R بـ R_1 و لنضع

$$R_2 = R_1 !\ \ \{e_1\}$$

من الواضح أنّ R_2 هي جملة خطّية مُمتزّة. وفقاً لذلك إذا كان $f \in R_2$ فإنّ $A_1 f \in R_2$ ، في الواقع، من $(f\ ,\ e_1) = 0$ ينتج أنّ

$$(A_1 f\ , e_1) = (f\ , A_1 e_1) = (f\ , \lambda e_1) = 0$$

و بالإضافة إلى ذلك فإنّ A_2 جزء المؤثّر A_1 و الواقع في R_2 هو أيضاً مؤثّر تامّ الاستمرار و مترافق ذاتياً. إذا لم يطابق المؤثّر A_2 الصفر فإنّه يمكننا مجدّداً تطبيق مبرهنة البند السابق. استناداً إلى تلك المبرهنة يوجد شعاع مثل e_2 من أجله يكون

$$A_2 e_2 = \lambda_2 e_2 \qquad (\|e_2\| = 1)$$

و بما أنّ $e_2 \in R_2$ فإنّ $(e_2 , e_1) = 0$، و وفقاً لذلك يكون

$$|\lambda_2| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in R_2}} |\ (A_1 f\ , f\ )\ | \le \sup_{\|g\|=1} |\ (A_1 g\ , g\ )\ | = |\lambda_1|$$

نستمرّ بهذه العمليّة و نبني الجملة الخطّية

$$R_3 = R_2 !\ \ \{e_2\}$$

و نعرّف الشعاع الخاصّ e_3 و القيمة الخاصّة λ_3 و هكذا. إنّ هذه العمليّة تنقطع، فقط في الحالة التي يتطابق فيها A_n (من أجل عدد ما n) جزء المؤثّر A_1 والواقع في R_n مع المؤثّر الصفري. في هذه الحالة نحصل على عدد منته من الأشعّة المتعامدة مثنى مثنى و المنظّمة

$$e_1 , e_2 , \cdots , e_{n-1}$$

و المنتمية للقيم الخاصّة المختلفة عن الصفر

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_{n-1}$$

إضافةً إلى أنّ

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_{n-1}|$$

و

$$|\lambda_k| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in R_k}} |(A_1 f, f)|$$

إذا لم تنقطع العمليّة فإنّنا نحصل على متتالية غير منتهية من العناصر $\{e_k\}_1^{\infty}$ المتعامدة و المنظّمة، إضافةً إلى أنّ $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0$ و ذلك استناداً إلى المبرهنة (١) من البند الثاني.

لنأخذ الآن شعاعاً ما $f = A\,h$ و لنضع

$$g = h - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k)\, e_k$$

حيث إنّ العدد m يساوي عدد عناصر المتتالية $\{e_k\}$ إذا كان هذا العدد منتهياً. و m يكون عدداً طبيعيّاً كيفيّاً في الحالة المغايرة.

بما أنّ

$$(g, e_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

فإنّ $g \in R_{m+1}$ ، و لذلك فإنّ

$$\|A g\|^2 \leq \|A_{m+1}\|^2_{R_{m+1}} \|g\|^2$$

أو

$$\left\| A\,h - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k) A\, e_k \right\|^2 \leq \|A_{m+1}\|^2_{R_{m+1}} \|g\|^2 \qquad (١)$$

و بملاحظة أنّ

$$(h, e_k) A\, e_k = (h, e_k) \lambda_k e_k = (h, A\, e_k) e_k = (A\,h, e_k) e_k$$

و أنّ

$$\|g\| \leq \|h\|$$

و بالأخذ بعين الاعتبار أنّ $f = A\,h$ ، يمكننا كتابة العلاقة (١) على الشكل

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k \right\|^2 \leq \|A_{m+1}\|^2_{R_{m+1}} \|h\|^2 \qquad (٢)$$

في الحالة التي تكون فيها المتتالية

$$e_1 \, , e_2 \, , e_3 \, , K \tag{٣}$$

منتهية، ينتج أنّ

$$f = \sum_{k=1}^{m} (f \, , e_k) \, e_k$$

أمّا إذا كانت المتتالية (٣) غير منتهية، فإنّه من (٢) ينتج أنّ

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} (f \, , e_k) \, e_k \right\|^2 \leq \lambda_{m+1}^2 \| \, h \, \|^2$$

أو

$$0 \leq \| \, f \, \|^2 - \sum_{k=1}^{m} \left| (f \, , e_k) \right|^2 \leq \lambda_{m+1}^2 \| \, h \, \|^2$$

بجعل $m \to \infty$ نجد أنّ

$$\| \, f \, \|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| (f \, , e_k) \right|^2$$

و هو المطلوب.

§ ٧. المؤثّرات تامّة الاستمرار و الناظميّة

Completely Continuous, Normal Operators

ليكن S مؤثّراً تام الاستمرار و معرّفاً في الجملة الخطّية المُمتزَة R و لنفرض أنّ المؤثّر المرافق S^* موجود في كلّ مكان في R و أنّ $S^*S = S\,S^*$. باختصار نقول إنّ المؤثّر S هو مؤثّر تامّ الاستمرار و ناظمي في R. لنستعرض المؤثّر $A = S^*S$ إنّ هذا المؤثّر هو مؤثّر تامّ الاستمرار و مترافق ذاتياً و من أجله يتحقّق

$$A\,S = S\,A \; , \quad A\,S^* = S^*A \; , \quad (A f \, , f) \geq 0$$

من أجل أيّ شعاع $f \in R$. إنّ الخاصّة الأخيرة تنتج من إنّ

$$(A f \, , f) = (S^*S f \, , f) = (S f \, , S f)$$

استناداً إلى هذه الخاصّة تكون جميع القيم الخاصّة للمؤثّر A غير سالبة. لنرمز لها بـ

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \cdots$$

استناداً لما ذكرناه في البند السابق توجد جملة تامّة متعامدة – منظّمة من الأشعّة الخاصّة g_k للمؤثّر A في Δ_A

$$A\, g_k = \rho_k^2\, g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

لنأخذ قيمة خاصّة ما للمؤثّر A (لتكن ρ^2) و لنفرض أنّ هذه القيمة مكرّرة r مرّة و لتكن

$$g^{(1)}, g^{(2)}, \mathrm{K}\,, g^{(r)}$$

الأشعّة الخاصّة المتعامدة – المنظّمة للمؤثّر A المنتمية للقيمة الخاصّة ρ^2 و ليكن، G الفضاء الجزئي الخاصّ الممدّد على تلك الأشعّة. لنبرهن على أنّ G فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ S و S^*.

ليكن $g \in G$ عندئذٍ يكون

$$A\, S g = S\, A g = \rho^2\, S g$$

و هذا يعني أنّه إمّا Sg يساوي الصفر و هذا يتحقّق فقط إذا كان $g = 0$، و إمّا أن يكون شعاعاً خاصّاً للمؤثّر A منتمياً للقيمة ρ^2 و لذلك فإنّ $Sg \in G$.

بالمثل نجد أنّ $S^* g \in G$.

لنلاحظ الآن أنّه إذا كان $g \in G$ و $h \in G$ فإنّ

$$(Sg, Sh) = (S^* S\, g, h) = (Ag, h) = \rho^2 (g, h)$$

لذلك فإنّه على الفضاء الجزئي G يكون لدينا $S = \rho U$ حيث U مؤثّر G– وحدي بالإضافة إلى ذلك تتحقّق المساواة $S^* = \rho U^* = \rho U^{-1}$

بما أنّ $U\, g^{(i)} \in G$ فإنّه يمكننا أن نضع

$$U\, g^{(i)} = \alpha_{1i}\, g^{(1)} + \alpha_{2i}\, g^{(2)} + \cdots + \alpha_{ri}\, g^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

لنبحث عن الأشعّة الخاصّة للمؤثّر U. إذا كان f شعاعاً خاصّاً و كان

$$f = x_1 g^{(1)} + x_2 g^{(2)} + \cdots + x_r g^{(r)}$$

فإنّه من المساواة

$$Uf = \theta f$$

ينتج أنّ

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1r} x_r &= \theta x_1 \\
\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2r} x_r &= \theta x_2 \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad &\cdots\cdots \\
\alpha_{r1} x_1 + \alpha_{r2} x_2 + \cdots + \alpha_{rr} x_r &= \theta x_r
\end{aligned}$$

و من أجل θ تكون لدينا المعادلة

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\theta & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\theta & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rr}-\theta \end{vmatrix} = 0$$

إنّ كلّ جذر لهذه المعادلة يقابل بشعاع خاصّ للمؤثّر U، لذلك فإنّ القيمة المطلقة لكلّ جذر من جذور هذه المعادلة تساوي الواحد. لنفرض أنّ $\theta^{(1)}$ أحد تلك الجذور و أنّ $f^{(1)}$ الشعاع الخاصّ المنتمي لهذه القيمة. لنأخذ مجموعة جميع الأشعّة من الفضاء $G_1 \equiv G$ و المعامدة للشعاع $f^{(1)}$. إنّ مجموعة الأشعّة هذه تشكّل فضاء G_2 و يكون المؤثّر U في G_2 مؤثّراً وحديّاً. لذلك و بإعادة الخطوات السابقة نجد أنّ للمؤثّر U يوجد شعاع خاصّ في G_2 و لنرمز لهذا الشعاع بـ $f^{(2)}$ و للقيمة الخاصّة الموافقة له بـ $\theta^{(2)}$.

بتطبيق عمليّة التشطير هذه نبني جملة من r شعاعاً متعامدة و يمكن اعتبارها منظّمة

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \mathrm{K}, f^{(r)},$$

و التي من أجلها يكون

$$Uf^{(j)} = \theta^{(j)} f^{(j)} \qquad (j = 1,2,3,\cdots,r)$$

إلاّ أنّ

$$S f^{(j)} = \rho U f^{(j)} = \rho \theta^{(j)} f^{(j)} \qquad (j = 1,2,3,\cdots,r)$$

لذلك فإنّ $f^{(j)}$ هو شعاع خاصّ للمؤثّر S منتمٍ للقيمة $\rho\theta^{(j)}$. بالمثل تماماً يبرهن على أنّ $f^{(j)}$ هو شعاع خاصّ للمؤثّر S^* منتمٍ للقيمة $\rho\overline{\theta^{(j)}}$. باستبدال الأشعّة

$$g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, \cdots, g^{(r)}$$

في جملة الأشعّة الخاصّة

$$g_1, g_2, g_3, \cdots$$

للمؤثّر A بالأشعّة

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(r)}$$

و بالتعامل مع كلّ قيمة خاصّة، مكرّرة أكثر من مرّة، للمؤثّر A على هذا النحو نحصل على القسم الأوّل من المبرهنة الآتية:

مبرهنة: يقابل كلّ مؤثّر تامّ الاستمرار و ناظمي $S \neq 0$ في R بجملة متعامدة – منظّمة من الأشعّة $\{e_k\}$ و بجملة من الأعداد $\{\lambda_k\}$ المركّبة و المختلفة عن الصفر و التي من أجلها يكون

$$S e_k = \lambda_k e_k \quad , \quad S^* e_k = \overline{\lambda_k} e_k \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

إنّ جملة الأشعّة الخاصّة هذه تامّة بمفهوم أنّ أي عنصر f من الشكل $S h$ أو الشكل $S^* h$ يمثّل بالسلسلة

$$f = \sum_k (f, e_k) e_k \qquad (١)$$

لإثبات القسم الثاني من المبرهنة نضع $f = S h$ و لنستعرض الشعاع

$$f' = S^* f = S^* S h = A h$$

استناداً إلى المبرهنة المتعلّقة بالمؤثّر المترافق ذاتياً والتامّ الاستمرار و إلى أنّ الأشعّة(*) e_k تشكّل جملة تامة بالمفهوم المشار إليه و متعامدة و منظّمة من الأشعّة الخاصّة للمؤثّر A و تتحقّق من أجلها معادلة الإغلاق

$$\| f' \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | (f', e_k) |^2$$

بكلام آخر إنّ f' هو نهاية قويّة للمتتالية

$$\sum_{k=1}^{n} (f', e_k) e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

لذلك فإنّ

$$(f', h) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (f', e_k)(e_k, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (f', e_k)(e_k, h)$$

و بما أنّ

$$(f', h) = (S^* f, h) = (f, S h) = (f, f)$$

$$(f', e_k) = (S^* f, e_k) = (f, S e_k) = \bar{\lambda}_k (f, e_k)$$

$$(e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(S^* e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(e_k, S h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(e_k, f)$$

فإنّ العلاقة الناتجة لدينا يمكن كتابتها على الشكل

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | (f, e_k) |^2$$

بذلك نكون قد أثبتنا العلاقة (١) إذا كان $f = S h$. و بالمثل تماماً تبرهن الحالة $f = S^* h$.

§ ٨. نشر مؤثّر تامّ الاستمرار كيفي في سلسلة من المؤثّرات الأحاديّة البعد

Expansion Of An Arbitrary Completely Continuous Operator As A Series Of One Dimensional Operators

---

(*) للتحديد نقبل بأن عدد هذه الأشعّة غير منتهٍ.

كنّا قد ذكرنا أنّ المؤثّر الخطّي T في H يسمّى مؤثّراً منتهي البعد إذا كان هذا المؤثّر محدوداً و كانت ساحة قيمه Δ_T فضاءً جزئيّاً منتهي البعد في H.

إنّ المؤثّرات المنتهية البعد تتميّز بالتمثيل الآتي

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} (f, g_k) h_k \qquad (١)$$

حيث n قياس Δ_T، $\{h_k\}_1^n$ قاعدة ما في Δ_T، و أمّا $\{g_k\}_1^n$ فهي جملة منتهية العدد من الأشعّة غير المتعلّقة بـ f.

للبرهان على العلاقة (١) نختار في Δ_T قاعدة متعامدة منظّمة $\{h_k\}_1^\infty$، عندئذٍ من أجل أي شعاع $f \in H$ يكون لدينا

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$$

حيث α_k أعداد يمكن إيجادها من العلاقات

$$\alpha_k = (Tf, h_k)$$

بذلك تكون α_k داليات خطّية متعلّقة بـ f، بالتالي و استناداً إلى تمثيل ريس للدالّي الخطّي في فضاء هيلبرت توجد عناصر g_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ تمثّل α_k بدلالتها على الشكل

$$\alpha_k = (f, g_k)$$

إنّ المؤثّرات أحاديّة البعد الواردة في الطرف الأيمن من (١) تكتب على الشكل $(\text{g}, g_k)\ h_k$ الأمر الذي يؤدّي إلى كتابة العلاقة (١) على الشكل

$$T = \sum_{k=1}^{n} (\text{g}, g_k)\ h_k$$

إنّ تعميم الحقيقة المبسّطة التي ذكرناها هي المبرهنة الآتية

مبرهنة (١): ليكن T مؤثّراً تامّ الاستمرار في H، و ليكن H_0 فضاءه الصفري. في هذه الحالة توجد جملتان متعامدتان منظّمتان من الأشعّة $\{e_k\}_0^\infty$،

$\{g_k\}_1^\infty$ و متتالية مطّردة متناقصة من الأعداد الموجبة $\{\mu_k\}_1^\infty$، $\mu_k \to 0$ تتمتّع بالخاصّة الآتية: من أجل أي شعاع $h \in H$ يتحقّق النشران

$$(\text{٢}) \quad \left.\begin{array}{l} h = h_0 + (h, e_1) e_1 + (h, e_2) e_2 + \cdots \qquad h_0 \in H_0 \\ T\,h = \mu_1 (h, e_1) g_1 + \mu_2 (h, e_2) g_2 + \cdots \end{array}\right\}$$

و اللذان يفهمان بمفهوم التقارب القوي.

البرهان: لنبدأ من الحالة التي يكون فيها المؤثّر T مترافقاً ذاتيّاً، في هذه الحالة تكون المبرهنة نتيجة لمبرهنة البند (٦). في الواقع، بفرض $T = A$ و بأخذ الأشعّة الخاصّة $e_1, e_2, e_3, \mathrm{K}$ للمؤثّر A الموافقة للقيم الخاصّة المغايرة للصفر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathrm{K}$ $(\lambda_k \to 0)$ نحصل وفقاً للبند (٦) من أجل أي شعاع $f = A\,h$ على التمثيل

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

حيث

$$(f, e_k) = (A\,h, e_k) = (h, A\,e_k) = \lambda_k\,(h, e_k)$$

بذلك و من أجل أي شعاع $h \in H$ يكون

$$A\,h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,(h, e_k) e_k$$

إذا وضعنا

$$h_0 = h - \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k$$

أي إن

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k$$

فإنّ

$$A\,h_0 = A\,h - \sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)\,A\,e_k = 0$$

و هكذا فإنّه في حالة المؤثّر المترافق ذاتياً $T = A$ تتحقّق المبرهنة و إضافةً لذلك فإنّ

$$g_k = e_k \quad و \quad \mu_k = \lambda_k$$

ليكن الآن T مؤثّراً تامّ الاستمرار كيفيّاً، و لنشكّل المؤثّر التامّ الاستمرار و المترافق ذاتياً $A = T^*T$، و لنعرّف متتالية من القيم الخاصّة المختلفة عن الصفر $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ $(\lambda_k \to 0)$ لهذا المؤثّر و نعرّف متتالية متعامدة منظّمة من الأشعّة الخاصّة الموافقة $\{e_k\}_1^{\infty}$

$$(e_k, e_j) = \delta_{kj}$$

لنلاحظ أنّه في هذه الحالة يكون

$$\lambda_k = (A\,e_k, e_k) = (T^*T\,e_k, e_k) = (T\,e_k, T\,e_k) > 0$$

و بالتالي يمكننا أن نفرض أنّ $\lambda_k = \mu_k^2$ حيث $0 < \mu_k$ و

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots$$

وفقاً لما برهنّا يمكن تمثيل أي عنصر $h \in H$ على الشكل

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)e_k \tag{٣}$$

حيث إنّ h_0 ينتمي للفضاء الجزئي الصفري للمؤثّر A. بما أنّه من أجل أي عنصرين $f_1, f_2 \in H$ يكون

$$(T\,f_1, T\,f_2) = (T^*T\,f_1, f_2) = (A\,f_1, f_2)$$

فإنّ الفضاءين الجزئيّين الصفريّين للمؤثّرين A, T يتطابقان. من (٣) ينتج أنّ

$$T\,h = \sum_{k=1}^{\infty}(h, e_k)T\,e_k \tag{٤}$$

بفرض أنّ

$$T\,e_k = \mu_k\,g_k$$

نجد العلاقة

$$\mu_k \, \mu_j \, (g_k , g_j) = (T e_k , T e_j) = (A e_k , e_j) = \lambda_k \, (e_k , e_j)$$

و منه نجد أن

$$(g_k , g_j) = \delta_{k j}$$

و بما أنه يمكننا كتابة العلاقة (٤) على الشكل

$$T h = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \, (h , e_k) \, g_k$$

فإنّ المبرهنة تكون قد أثبتت كليّاً.

من المبرهنة المثبتة و المبرهنة (٢) من الفقرة المتعلّقة بالمؤثّرات التامّة الاستمرار(*) نجد المبرهنة الهامّة الآتية:

مبرهنة (٢): الشرط اللازم و الكافي كي يكون المؤثّر الخطّي T المعرّف في كلّ مكان في H تامّ الاستمرار هو أن يوجد من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ مؤثّر خطّي منتهي البعد T_ε يحقّق المتراجحة

$$\| T - T_\varepsilon \| < \varepsilon \tag{٥}$$

البرهان: لزوم الشرط: ليكن المؤثّر T تامّ الاستمرار. عندئذٍ من أجله يتحقّق التمثيل (٢) ، و هذا يعني أنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يحقّق المؤثّر T_ε المنتهي البعد و المعرّف بالعلاقة

$$T_\varepsilon = \mu_1 (h , e_1) g_1 + \mu_2 (h , e_2) g_2 + \cdots + \mu_n (h , e_n) g_n$$

المتراجحة

$$\| T h - T_\varepsilon h \|^2 \le \mu_{n+1}^2 \Big(\left| (h , e_{n+1}) \right|^2 + \left| (h , e_{n+2}) \right|^2 + \cdots \Big) \le \mu_{n+1}^2 \| h \|^2$$

(*) إذا وجد من أجل كل عدد موجب $\varepsilon > 0$ مؤثّر تام الاستمرار A_ε محقق للمتراجحة

$$\| A - A_\varepsilon \| \le \varepsilon$$

فإنّ المؤثّر A نفسه يكون تام الاستمرار .

و هذا يؤدّي إلى المتراجحة (٥) إذا كان $\varepsilon > \mu_{n+1}$

الكفاية: تنتج مباشرة من المبرهنة (٢) المشار إليها أعلاه و ذلك لأنّ كلّ مؤثّر منتهي البعد هو مؤثّر تامّ الاستمرار.

§ ٩. وجود فضاء جزئي لا متغيّر للمؤثّر التامّ الاستمرار في H

Existence Of An Invariant Sub-Space For Any Completely Continuous Operator

إنّ وجود شعاع خاصّ لمؤثّر يعني أنّ المؤثّر يمتلك فضاءً جزئياً لا متغيّراً (أحادي البعد)، و كنّا قد ذكرنا في نهاية البند (٥) أنّ للمؤثّر التامّ الاستمرار قد لا يوجد أي شعاع خاصّ. تبعاً لذلك فإنّه لا يمتلك أي فضاء جزئي لا متغيّر و أحادي البعد. من ذلك لا ينتج أنّ لهذا المؤثّر لا توجد فضاءات جزئيّة لا متغيّرة. بالرغم من أنّه للمؤثّر التكاملي

$$Tf = \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt \qquad ; \quad f(t) \in L^2[0,1]$$

الوارد في نهاية البند (٥) لا يوجد أي شعاع خاصّ، فإنّه لهذا المؤثّر توجد مجموعة من الفضاءات الجزئيّة المستمرّة اللامتغيّرة. في الواقع من أجل أي عدد a $(0<a<1)$ إنّ مجموعة جميع التوابع $f(t) \in L^2[0,1]$ و التي تؤول إلى الصفر في المجال $0<t<a$ تمثّل فضاءً جزئياً لا متغيّراً.

تبعاً لذلك يظهر السؤال الآتي: هل يمتلك كل مؤثّر تامّ الاستمرار فضاءً جزئياً لا متغيّراً؟ إنّ الجواب على هذا السؤال إيجابي و قد أعطيت الإجابة على هذا السؤال في عام ١٩٣٥ من قبل الرياضي نيمان و سنستعرض في هذا البند مبرهنته الرائعة.

مبرهنة (١): أي مؤثّر تامّ الاستمرار A في فضاء هيلبرت H يمتلك فضاءً جزئياً لا متغيّراً.

البرهان: إذا كان الفضاء H غير قابل للفصل فإنّ المبرهنة تكون تقريباً واضحة. في الواقع، لنأخذ شعاعاً ما $h_0 \neq 0$ و لنشكّل العناصر

$$h_0 \ , \ A\,h_0 = h_1 \ , \ A\,h_1 = h_2 \ , \ \cdots$$

عندئذٍ يكون الغطاء المغلق لتلك العناصر قابلاً للفصل و بالتالي فهو مختلف عن H و إنّ قياسه (عدد أبعاده) أكبر أو يساوي الواحد و هو، من الواضح، لا متغيّر بالنسبة لـ A، بهذه الصورة يمكننا أن نفرض أنّ الفضاء H قابل للفصل، لإثبات المبرهنة سنبني بواسطة انتقالات إلى النهايات مؤثّرين $S \neq I$ و $T \neq 0$ معرّفين في كلّ مكان في H و محقّقين للشروط

$$(١)\quad \left.\begin{array}{l} \|S\| \leq 1 \ , \ \|T\| \leq 1 \ , \ T - S \neq I \\ S\,A\,S = A\,S \ , \ T\,A\,T = A\,T \end{array}\right\}$$

و من ثمّ سنعرّف فضاءً جزئياً G من جميع العناصر $g \in G$ و التي من أجلها

$$S\ g = g$$

و فضاءً جزئياً F من جميع العناصر $f \in H$ و التي من أجلها

$$T\ f = f$$

إنّ كلّ فضاء جزئي منها هو فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ A. ليكن على سبيل المثال $g \in G$ عندئذٍ نجد أنّ

$$A\ g = A\ S\ g$$

و استناداً إلى (١) يكون $A\,S\,h \in G$ من أجل أي عنصر $h \in H$، و لذلك فإنّ $A\ g \in G$. من ذلك تتّضح طريقة البرهان. و يتبقّى فقط التأكّد من أنّ تلك الطريقة تؤدّي إلى فضاء جزئي لا متغيّر غير تافه. لنلاحظ استناداً إلى خواصّ المؤثّرين $T\,,\,S$ أنّه تتحقّق بشكل دائم، على الأقلّ، واحدة من الحالتين الآتيتين

$I \cdot \quad S \neq 0 \quad S \neq I$

$II \cdot \quad T \neq 0 \quad T \neq I$

بما أنّ هاتين الحالتين متماثلتان، فإنّنا سنقتصر على دراسة الحالة الأولى.

من $S \neq I$ ينتج أنّ $G \neq H$ و إذا كان، إضافةً إلى ذلك، $G \neq \{0\}$ فإنّ الفضاء الجزئي G يكون فضاءً جزئياً لا متغيّراً و بذلك تتحقّق المبرهنة.

لنفرض أنّ $G=\{0\}$ ، عندئذٍ من أجل أي شعاع $h\in H$ و الذي من أجله $S\,h\neq 0$ (مثل هذا الشعاع موجود و ذلك لأنّ $S\neq 0$) و باستخدام الملاحظة الواردة أعلاه $A\,S\,h\in G$ نستنتج أنّ $A\,S\,h=0$ و بالتالي فإنّ $S\,h$ شعاع خاصّ للمؤثّر A موافق للقيمة الخاصّة 0. في هذه الحالة يكون الفضاء الجزئي الأحاديّ البعد المولّد بذلك الشعاع الخاصّ فضاءً جزئيّاً لا متغيّراً تؤكّد وجوده المبرهنة.

و الآن تنحصر مسألتنا في بناء المؤثّرين $T\,,S$ المحقّقين للشروط المذكورة أعلاه. بغية هذا الأمر نختار في الفضاء H قاعدة ما متعامدة – منظّمة $\{h_n\}_1^{\infty}$ و من أجل كلّ عدد طبيعي k نرمز بـ H_k (k- بعداً) للغطاء الخطّي للأشعّة $h_1,h_2,\cdots,h_k$ و بـ P_k لمؤثّر الإسقاط العمودي على H_k. لنعرّف في كلّ فضاء جزئي H_k مؤثّراً $A_k=P_k\,A$. استناداً إلى مبرهنة **شور** الجبريّة يمثّل المؤثّر A_k بالنسبة لقاعدة ما في H_k بمصفوفة مثلّثية و هذا الأمر يعني هندسيّاً إنّه في H_k توجد متتالية متزايدة بقوّة من الفضاءات الجزئيّة

$$\{0\}=H_{k\,0}\subset H_{k\,1}\subset\cdots\subset H_{k\,k}=H_k$$

و التي كلّ منها لا متغيّر بالنسبة لـ A_k. لنرمز بـ $P_{k\,j}$ لمؤثّر الإسقاط العمودي من H على $H_{k\,j}$ و لنلاحظ أنّ $h_1\in H_k$ من أجل أي عدد $k=1,2,\cdots$ حيث h_1 هو شعاع الواحدة الأوّل في القاعدة المختارة في الفضاء H، لذلك فإنّه من أجل أي عدد k تتحقّق العلاقات

$$0=\left\|\,h_1-P_{k\,k}\,h_1\right\|\leq\left\|\,h_1-P_{k\,,k-1}\,h_1\right\|\leq\cdots\leq\left\|\,h_1-P_{k\,0}\,h_1\right\|=1$$

و ينتج منها إنّه من أجل أي عدد مثبّت θ $(0<\theta<1)$ يوجد عدد وحيد $r(k)$ و $r(k)<k$ من أجل كلّ عدد k و بحيث إنّ

$$\left\|\,h_1-P_{k\,r(k)+1}\,h_1\right\|<\theta\leq\left\|\,h_1-P_{k\,,r(k)}\,h_1\right\| \qquad (٢)$$

و استناداً إلى المبرهنة(*) و المتعلّقة بالتراصّ الضعيف لمجموعة المؤثّرات المحدودة

(*) مبرهنة: كل مجموعة من المؤثّرات الخطّية في فضاء هيلبرت القابل للفصل H و التي لا تزيد نظائمها عن عدد مثبّت متقاربة بضعف.

بانتظام يمكننا إيجاد متتالية $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ بحيث تتقارب متتاليتا المؤثّرات $\{P_{k_i,r(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ ، $\{P_{k_i,r(k_i)+1}\}_{i=1}^{\infty}$ بضعف.

لنرمز للنهايتين بـ S و T. وهكذا فإنّه من أجل أي عنصر $h \in H$ و $i \to \infty$ يكون

$$P_{k_i,r(k_i)}\, h \xrightarrow{w} S\, h \;,\; P_{k_i,r(k_i)+1}\, h \xrightarrow{w} T\, h \qquad (٣)$$

و استناداً إلى المبرهنة المشار إليها في الصفحة أعلاه يكون $\|S\| \le 1$، $\|T\| \le 1$.

لنبرهن الآن أنّ $T \ne 0$ و $S \ne I$ و أنّ $T - S \ne I$. بما أنّ المؤثّر الصفري 0 هو مؤثّر إسقاط فإنّه في الحالة $T = 0$ يكون التقارب $P_{k_i,r(k_i)}\, h \longrightarrow 0$ استناداً إلى المبرهنة المتعلّقة بمجموع مؤثّري إسقاط ليس ضعيفاً فقط بل قوياً و لذلك فإنّه من (٣) ينتج أنّ

$$\lim_{i\to\infty}\left\| h_1 - P_{k_i,r(k_i)+1}\, h_1 \right\| = \|h_1\| \le \theta$$

و هذا غير ممكن و ذلك لأنّ $\|h_1\| = 1$. بالمثل ، من أجل $S = I$ يكون التقارب $P_{k_i,r(k_i)}\, h \longrightarrow h$ قوياً و استناداً إلى (٣) نجد أنّ

$$\theta \le \lim_{i\to\infty}\left\| h_1 - P_{k_i,r(k_i)}\, h_1 \right\| = 0$$

و هذا مرفوض.

أخيراً و من أجل $T - S = I$ و استناداً إلى المبرهنة المتعلّقة بتقارب متتالية من مؤثّرات الإسقاط ينتج أنّ متتاليات مؤثّرات الإسقاط الأحاديّة البعد $\{P_{k_i,r(k_i)+1} - P_{k_i,r(k_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ تتقارب بقوّة إلى المؤثّر I و هذا غير ممكن.

هكذا يتبقّى علينا إثبات العلاقات (١) و بالمثل يمكننا الاقتصار على برهان العلاقة الأولى. بغية هذا الأمر نلاحظ أوّلاً أنّه من أجل أي مؤثّر تامّ الاستمرار B و من أجل $i \to \infty$

$$P_{k_i,r(k_i)}\; B\; P_{k_i,r(k_i)} \xrightarrow{w} S\; B\; S \qquad (٤)$$

في الواقع، من أجل أي عنصر $h \in H$ تتقارب المتتالية $\left\{P_{k_i, r(k_i)}\, h\right\}_{i=1}^{\infty}$ بضعف و لذلك فإنّ المؤثّر تامّ الاستمرار B ينقلها إلى متتالية متقاربة بقوّة

$$f_i \equiv B\; P_{k_i, r(k_i)}\, h \longrightarrow B\; S\; h \equiv f$$

من ناحيةٍ أخرى لدينا

$$P_{k_i, r(k_i)} f_i = P_{k_i, r(k_i)} f + P_{k_i, r(k_i)} (f_i - f)$$

إنّ الحدّ الأوّل في الطرف الأيمن ومن أجل $i \to \infty$ يتقارب بضعف إلى $S\, f$، و إنّ الحدّ الثاني يتقارب بقوّة إلى الصفر و ذلك لأنّ $\|f_i - f\| \longrightarrow 0$. لذلك و من أجل $i \to \infty$ يكون

$$P_{k_i, r(k_i)} f_i \xrightarrow{w} S f$$

و هذا يعني إنّه من أجل $i \longrightarrow \infty$ يكون

$$P_{k_i, r(k_i)} B\, P_{k_i, r(k_i)}\, h \xrightarrow{w} S\, B\, S\, h$$

أي إنّ العلاقة (٤) قد برهنت من أجل أي مؤثّر تامّ الاستمرار B. إذا أخذنا $B = A$ فإنّه تكون لدينا المساواة

$$P_{k_i, r(k_i)}\; A\; P_{k_i, r(k_i)} = P_{k_i}\; A\; P_{k_i, r(k_i)} \qquad (٥)$$

إلاّ أنّ P_k تتقارب بقوّة إلى I عندما $k \longrightarrow \infty$ و من ذلك ينتج أنّ

$$P_{k_i}\; A\; P_{k_i, r(k_i)} \longrightarrow A\; S \qquad (٦)$$

بمفهوم التقارب القوي.

باستخدام (٤) من أجل $B = A$ و العلاقتين (٥) و (٦) نجد أنّ

$$S\, A\, S = A\, S$$

بهذه الصورة نكون قد أثبتنا المبرهنة (١) تماماً. من هذه المبرهنة تنتج القضيّة الهامّة الآتية المتعلّقة بالفضاءات الجزئيّة اللامتغيّرة البينيّة.

مبرهنة (٢): إذا كان الفضاءان الجزئيّان G' و $G'' \subset G''$ لا متغيّرين بالنسبة للمؤثّر التامّ الاستمرار A و كان

$$\dim(G'' !\ \ G') > 1$$

فإنّه يوجد للمؤثّر A فضاء جزئي لا متغيّر G يحقّق العلاقة

$$G' \subset G \subset G''$$

البرهان: لنرمز بـ A'' لجزء المؤثّر A الواقع في G''. عندئذٍ يكون G' فضاءً جزئيّاً لا متغيّراً بالنسبة للمؤثّر A'' و هذا يعني أنّ $G'' !\ G'$ فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ $(A'')^*$، و استناداً للمبرهنة (١) يوجد في $G'' !\ G'$ فضاء جزئي لا متغيّر F بالنسبة للمؤثّر $(A'')^*$ مغاير للفضاء الصفري و للفضاء $G'' !\ G'$. و عندئذٍ يحقّق الفضاء الجزئي $G = G'' !\ F$ جميع المتطلّبات و بذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة.

§ ١٠. المؤثّرات النوويّة

Nuclear Operators

في هذا البند سنفرض مجدّداً أنّ H فضاء هيلبرت القابل للفصل. و سنستعرض صفّاً خاصّاً من المؤثّرات تامّة الاستمرار و أكثر خصوصيّة من صفّ مؤثّرات هيلبرت – شميت.

ليكن T مؤثّراً تامّ الاستمرار ما و لنعرّف من أجل هذا المؤثّر مؤثّراً تامّ الاستمرار و موجباً $A = T^*T$ إنّ قيمه الخاصّة المختلفة عن الصفر هي قيم موجبة. لتكن

$$\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \mu_3^2 \geq \cdots \qquad (\mu_k > 0)$$

متتالية تامّة من القيم الخاصّة و لتكن

$$e_1, e_2, e_3, K$$

متتالية الأشعّة الخاصّة المتعامدة و المنظّمة الموافقة. تسمّى الأعداد μ_k عادةً بالأعداد- S (الأعداد الشاذّة) للمؤثّر T و تكتب على الشكل

$$\mu_k = S_k(T) \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

من تعريف القيمة الأعظميّة الخاصّة ينتج مباشرةً أنّ

$$\|T\| = \sqrt{\|A\|} = \mu_1$$

و باستخدام مفهوم الطيف للمؤثّر A بسهولة يمكن التعبير عن النظيم المطلق للمؤثّر T. في الحقيقة

$$N^2(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (T e_k, T e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (T^* T e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (A e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2$$

بذلك نجد أنّ المؤثّر T يكون مؤثّر هيلبرت – شميت إذا و فقط إذا كان

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty \qquad (١)$$

لنعطِ الآن التعريف الآتي

تعريف: يسمّى المؤثّر تامّ الاستمرار T نوويّاً إذا كان

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty \qquad (٢)$$

بما أنّه من العلاقة (٢) تنتج العلاقة (١) فإنّ كلّ مؤثّر نووي يكون مؤثّر هيلبرت – شميت.

مبرهنة (١): ليكن T مؤثّراً نوويّاً، عندئذٍ من أجل أي اختيار في H لقاعدة متعامدة منظّمة $\{f_k\}_0^{\infty}$ تتقارب السلسلة

$$\sum_{1}^{\infty} (T f_k, f_k)$$

إطلاقاً و مجموعها لا يتعلّق باختيار القاعدة و تتحقّق المتراجحة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (T f_k, f_k) \right| \le \sum_{1}^{\infty} \mu_k \qquad (٣)$$

البرهان: استناداً إلى المبرهنة (١) من البند (٨) ، يمكننا من أجل أي عنصر $h \in H$ أن نكتب النشرين الآتيين

$$h = h_0 + (h, e_1) + (h, e_2) e_2 + \cdots$$
$$T\ h = \mu_1 (h, e_1) g_1 + \mu_2 (h, e_2) g_2 + \cdots$$

حيث

$$T\ e_k = \mu_k\ g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

و أنّ h_0 ينتمي للفضاء الصفري للمؤثّر T. من هذين النشرين ينتج أنّ

$$(T\ f_k, f_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f_k, e_i)(g_i, f_k) \qquad (٤)$$

و هذا يعني أنّ

$$\sum_1^{\infty} \left| (T\ f_k, f_k) \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| (f_k, e_i) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| (f_k, g_i) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

و هكذا نكون قد أثبتنا التأكيدين الأوّل و الثالث، أمّا التأكيد الثاني فإنّه ينتج من العلاقات

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k, e_i)(g_i, f_k) = (g_i, e_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

في الحقيقة، بالجمع في (٤) نجد استناداً إلى هذه العلاقات المساواة

$$\sum_1^{\infty} (T\ f_k, f_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (g_i, e_i)$$

و التي يتّضح منها أنّ الطرف الأيسر لا يتعلّق باختيار القاعدة المتعامدة المنظّمة $\{f_k\}_1^{\infty}$.

باستخدام مفاهيم الجبر الخطّي، يمكننا القول إنّ للمؤثّر النووي T أثراً مصفوفياً منتهياً.

$$Sp\ T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (T\ f_k, f_k)$$

مبرهنة (٢): إذا كان T مؤثّراً محدوداً معرّفاً في كلّ مكان في H و كانت السلسلة

$$\sum_{1}^{\infty}(T f_k , f_k)$$

متقاربة إطلاقاً من أجل قاعدة متعامدة منظّمة واحدة على الأقلّ $\{f_k\}_1^{\infty}$، فإنّ المؤثّر T يكون مؤثّراً نووياً.

يمكن للطالب الاطّلاع على برهان هذه المبرهنة في كتاب غوبيرغ .ي. تس. و م. غ كريين (*Ghoberg I. C., and M. G. krein*)(*)

سنقتصر هنا على إثبات المبرهنة (٢) في الحالة الخاصّة عندما يكون المؤثّر T محدوداً و موجباً و معرّفاً في كلّ مكان في H. من أجل هذا المؤثّر تتحقّق العلاقات

$$|(T f_j , f_k)|^2 \le (T f_j , f_j)(T f_k , f_k)$$

و لذلك فإنّ المتراجحة

$$\sum_{1}^{\infty}(T f_k , f_k) < \infty \qquad (4')$$

تؤدّي إلى المتراجحة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(T f_j , f_k)\right|^2 < \infty$$

و من ذلك ينتج أنّ المؤثّر T هو مؤثّر هيلبرت – شميت. و هذا يعني أنّه تامّ الاستمرار. لتكن $\{\lambda_k\}$ متتالية تامّة من القيم الخاصّة الموجبة لهذا المؤثّر و $\{e_k\}$ المتتالية المتعامدة – المنظّمة من الأشعّة الخاصّة الموافقة. لنبن المؤثّر S و المعرّف على أي عنصر $h \in H$ بالعلاقة

(*) *Introduction to the theory of linear nonselfadjiont operators in Hilbert spaces. Math. Monographs Vol.* ١٨, *Amer. Math. Soc. Providence, R.I.,* ١٩٦٩ *MR*٣٦*, No* ٣١٣٧; ٣٩, *No*٧٤٤٧.

$$S\,h=\sum_{1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,(h,e_k)e_k \qquad (\sqrt{\lambda_k}>0)$$

من الواضح أنّ S مؤثّر موجب و تامّ الاستمرار و أنّ $T=S^2$.

بما أنّ

$$\sum_{1}^{\infty}(T\,f_k\,,f_k)=\sum_{1}^{\infty}(S^2 f_k\,,f_k)=\sum_{1}^{\infty}\|S\,f_k\|^2$$

فإنّه استناداً إلى $(4')$ يكون

$$\sum_{1}^{\infty}\|S\,f_k\|^2<\infty$$

و هذا يعني أنّ S أيضاً هو مؤثّر هيلبرت – شميت و لذلك فإنّه من أجل أي قاعدة متعامدة – منظّمة $\{g_k\}_1^{\infty}$ يكون

$$\sum_{1}^{\infty}\|S\;g_k\|^2=\sum_{1}^{\infty}\|S\;f_k\|^2=\sum_{1}^{\infty}\|S\;e_k\|^2=\sum_{1}^{\infty}\lambda_k \qquad (\text{ه})$$

و هنا خطوة واحدة فقط تحتاج إلى توضيح، ذلك لأنّ المتتالية المتعامدة المنظّمة $\{e_k\}$ ليست قاعدة في H. إلاّ أنّه إذا أتممناها إلى قاعدة بواسطة متتالية ما من الأشعة $\{e'_k\}$، فإنّ كلّ شعاع من الأشعة e'_k سينتمي إلى الفضاء الجزئي الصفري للمؤثّر T و تكون لدينا العلاقات

$$\|S\,e'_i\|^2=(S\,e'_i\,,S\,e'_i)=(T\,e'_i\,,e'_i)=0$$

من المساواة (ه) ينتج أنّ

$$\sum_{1}^{\infty}(T\;g_k\,,g_k)=\sum_{1}^{\infty}\lambda_k$$

و هو ما يثبت المبرهنة (٢) إذا كان المؤثّر T موجباً.

المراجع العلميّة

References

١. Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M. **Theory of Linear Operators in Hilbert**, Vol I, pitman, London, ٣١٢ pages,١٩٨١.

٢. Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M. **Theory of Linear Operators in Hilbert**, Vol II, pitman, London, ٣١٢ - ٥٥٢ pages,١٩٨١.

٣. Bachman, G, and Narici, L., **Functional Analysis**, Academic press ٥٣٠ pages, New York ١٩٦٦.

٤. Kadets, V. M. **Course in Functional Analysis**, Kharkov ٦٠٧ pages ٢٠٠٦.

٥. LiusterniK, L.A. and Sobolev, W.E. **Elements of Functional Analysis**, Ungar, New York, ٥٢٠ pages ١٩٦٥.

٦. Riesz F. and Nagy Sz. B. **Functional Analysis**, Ungar, New York ٤٦٥ pages ١٩٧٢.

٧. Rudin, W. **Functional Analysis** Mc Graw – Hill, New York ١٩٧٣.

٨. Rynne, B. and Youngson, **Linear Functional Analysis**, Springer ٢٧٣ pages ٢٠٠٠.

جدول المصطلحات العلميّة

A

Abstract function	تابع مجرّد
Abstract Hilbert space	فضاء هيلبرت المجرّد
Additive operator	مؤثّر جمعي
Adjoint operator	مؤثّر مرافق
Approximate proper value	قيم تقريبية فعلية
Approximate spectrum	طيف تقريبي

B

B – space	B – فضاء (فضاء باناخ)
Banach space	فضاء باناخ
Basis	قاعدة
Basis of finite – dimensional subspace	قاعدة في فضاء جزئي منتهي البعد
Bounded operator	مؤثّر محدود
Bounded set	مجموعة محدودة
Bounded totally	محدود كلّياً
Buniakovskii inequality	متراجحة بونياكوفسكي

C

Cauchy – Schwarz inequality	متراجحة كوشي – شوارتز
Cauchy sequence	متتالية كوشي

Cauchy sequence, strong	متتالية كوشي بقوّة
Cauchy sequence weak	متتالية كوشي بضعف
Closed linear operator	مؤثّر خطّي مغلق
Closed set	مجموعة مغلقة
Compact	تراص – متراص
Compact, totally	تراص موضعي
Compact relatively	تراص نسبي
Complete orthonormal set	مجموعة متعامدة منظّمة تامّة
Conjugate	مرافق
Conjugate operator	مؤثّر مرافق
Conjugate space	فضاء مرافق
Continuity	استمرار
Continuous	مستمر
Continuous, uniformly	مستمر بانتظام
Convergence	تقارب
Convergence in the p^{th} power	تقارب من القوة p
Convergence in mean with weight ρ	تقارب في الوسط (وسطياً) بالوزن ρ
Norm – convergence	تقارب بالنظيم
Strong convergence of sequence of operators	تقارب قوي لمتتالية مؤثّرات
Uniform convergence of sequence of operators	تقارب بانتظام لمتتالية مؤثّرات
Weak convergence of sequence of elements	تقارب ضعيف لمتتالية عناصر

Convex set	مجموعة محدّبة

D

Dense	كثيف
Everywhere dense set	مجموعة كثيفة في كل مكان
Nowhere dense set	مجموعة غير كثيفة في أي مكان
Dimension	بُعد
Direct sum	مجموع مباشر
Distance	مسافة
Domain of a function	ساحة تعريف تابع

E

Eigenelement	عنصر خاص
Eigenvalue	قيمة خاصّة
approximate	قيمة تقريبية
Eigenvector	شعاع خاص
Element	عنصر
Everywhere dense set	مجموعة كثيفة في كل مكان

F

Finite	منتهي
Finite dimensional operator	مؤثّر منتهي البعد

Functional	دالّي
Functional, linear	دالّي خطّي

G

Greatest lower bounded of an operator	الحد الأعلى الأصغري لمؤثّر
Graph	بيان

H

Hahn – Banach theorem	مبرهنة هان – باناخ
Hilbert space	فضاء هيلبرت
Hölder inequality	متراجحة هولدر

I

Idempotent	جامد (خامل)
Independence, linear	استقلال خطّي
Inequality	متراجحة
Inner product	جداء داخلي
Inner product space	فضاء جداء داخلي
Isometric	إيزومتري (متساوي المسافة)
Isometry	الإيزومترية

L

Limit	نهاية
Limit of a sequence	نهاية متتالية
Limit point	نقطة نهاية
Linear	خطّي
Linear combination	تركيب خطّي
Linear dependence	ارتباط خطّي
Linear functional	دالّي خطّي
Linear independence	استقلال خطّي
Linear operator	مؤثّر خطّي

M

Manifold	متنوّعة
Manifold, linear	متنوّعة خطّية
Metric	مسافة

N

Norm	نظيم
Norm of element	نظيم عنصر
Norm of an operator	نظيم مؤثّر
Normed linear space	فضاء خطّي منظّم

Nowhere dense set	مجموعة كثيفة في أي مكان

O

Open set	مجموعة مفتوحة
Operator	مؤثر
Operator, additive	مؤثر جمعي
Operator, adjoint	مؤثر مرافق
Operator, bounded	مؤثر محدود
Operator, continuous	مؤثر مستمر
Orthogonal	متعامد
Orthogonal complement	متممة متعامدة
Orthogonal direct sum	مجموع مباشر متعامد
Orthogonal projection	إسقاط متعامد
Orthogonal set of vector	مجموعة أشعة متعامدة
Orthogonalization	معامدة
Orthogonal systems	جمل متعامدة

P

Parallelogram law	قاعدة متوازي الأضلاع
Positive operator	مؤثر موجب
Projection	إسقاط
Projection, orthogonal	إسقاط متعامد (عمودي)

Projection, products	جداءات متعامدة

R

Radical	جذري
Range of an operator	ساحة قيم مؤثّر
Reduce	يختزل
Regular point	نقطة نظاميّة
Resolution of the identity	نشر المؤثّر المطابق
Resolvent	مفكّك (حال)
Resolvent operator	مؤثّر مفكّك (حال)
Resolvent set	مجموعة حالّة

S

Scalar	سلّمي
Scalar product	جداء سلّمي
Self – adjoint operator	مؤثّر مترافق ذاتياً
Sesquilinear functional	دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة
Sesquilinear functional, bounded	دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة محدود
Sesquilinear functional, positive	دالّي خطّي مرّة و نصف المرّة موجب
Sesquilinear functional, quadratic form	صيغة تربيعيّة لدالّي خطّي مرّة و نصف المرّة
Sesquilinear functional, symmetric	صيغة تناظريّة لدالّي خطّي مرّة و نصف

	المرة
Space	فضاء
Banach space	فضاء باناخ
Complete space	فضاء تام
Conjugate space	فضاء مرافق
Euclidean space	فضاء إقليدي
Hilbert space	فضاء هيلبرت
Linear space	فضاء خطّي
Metric space	فضاء متري (مسافة)
normed space	فضاء منظّم
Reflexive space	فضاء انعكاسي
Unitary space	فضاء وحدي
Spectral	طيفي
Spectral measure	قياس طيفي
Spectral radius	نصف قطر طيفي
Spectrum	طيف
Approximate spectrum	طيف تقريبي
Continuous spectrum	طيف مستمر
Discrete spectrum	طيف منفصل
Point spectrum	طيف نقطي
Residual spectrum	طيف باقي
Square root	جذر تربيعي
Subspace	فضاء جزئي

T

Topological vector space	فضاء توبولوجي شعاعي
Totally	كلّي
Totally bounded	محدود كليّاً
Totally ordered	مرتّب كليّاً
Transformation	تحويل

U

Uniform convergence of sequence of operators	تقارب منظّم لمتتالية مؤثرات
Unitary operator	مؤثّر وحدي
Unitary space	فضاء وحدي

V

Value	قيمة
Variation	تغيّر (تحوّل)
Calculus of variation	حساب التحويلات

Weak convergence of sequenc of elements	[illegible]

University of Aleppo Publications
Faculty of Science

PRINCIPLES OF FUNCTIONAL ANALYSIS 2

Prof. Shahadeh AL-Assadi

$R_\mu - R_\lambda = (\mu$

1220481

Academic Year
2014

سعر المبيع للطلاب ٢٧٥ ل . س