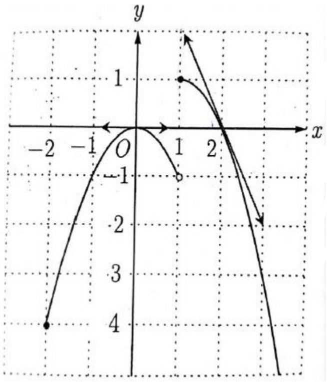
المدة ثلاث ساعات

نموذج امتحان نصفي في مادة الرياضيات
للصف الثالث الثانوي العلمي (2023 – 2024)

الاسم:.........................

الدرجة: 600

❖ أولاً: أجب عن أربعة من الأسئلة التالية الخمسة التالية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: ليكن الخط c الخط البياني للتابع f المعرف على $I = [-2, +\infty[$

1. هل f اشتقاقي عند 1؟ علل إجابتك.
2. احسب $f'(2)$ واكتب معادلة المماس للخط c في النقطة التي فاصلتها 2
3. ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$ ؟
4. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,3,0)$ و $B(-4,1,-2)$

أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ وحدد طبيعتها.

السؤال الثالث: ليكن $z = -2 + i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M

1. عين العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(1 + 3i)$ ونسبته $k = -2$
2. عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A في المساواة $b + 2 - i = e^{i\frac{5\pi}{6}}(a + 2 - i)$.

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $f(x) = \tan x$.

احسب $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج النهاية الآتية: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$f(x) = \frac{x^2 + 2 + \sin x}{x}$ خطه البياني C

أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❖ ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}} \end{cases}$ ولنتأمل المتتالية $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_n$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية واحسب v_1
2) عبر عن v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n
3) احسب نهاية المتتالية v_n وبين أنها متقاربة.

التمرين الثاني: لتكن الأعداد المركبة $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1$

1) اكتب كلاً من العددين z_1 , z_2 بالشكل الأسي.
2) حل في C المعادلة $z^3 = z_3$
3) أثبت أن $(z_3)^{12} + \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ حقيقي.

4) اكتب العدد $z = \frac{z_1}{z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي. ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

1) اكتب قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين في النقطة $A(0,2)$
2) اكتب التابع f دون قيمة مطلقة ثم أوجد نهاية التابع عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$ واستنتج معادلة كل مقارب أفقي

التمرين الرابع: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط C,B,A التي تمثلها الأعداد العقدية التالية $a = -1+i$, $b = 2-i$, $c = 1+4i$ والمطلوب:

1) اكتب العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي، واستنتج طبيعة المثلث ABC
2) عين ε مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تجعل $\frac{c-m}{b-m}$ عدداً تخيلياً بحتاً، حيث $Z \neq b$
3) عين Ғ مجموعة $M(Z)$ التي تجعل $\frac{c-m}{b-m}$ عدداً حقيقياً، حيث $Z \neq b$

❖ ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس النقاط $A\left(-\frac{1}{2},3,1\right), B(-1,0,2), C(2,1,1), D(-3.3.-1)$

1) a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثل مستوٍ، أوجد معادلته.
   b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته.
2) a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD) .
   b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) .
3) احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$.
4) a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A .
   b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع وفق $g(x) = \frac{-x}{x+4}$ المعرف على $R/\{-4\}$ والمطلوب:

1) أوجد $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$
2) عين عدد حقيقي A يحقق إذا كان $x > A$ كان $g(x)\epsilon]-1.2, 0.8[$
3) أوجد التابع المشتق $g'(x)$ واستنتج على المجال $]0,+\infty[$ مشتق كلاً من:

$$A(x) = \frac{-\cos x}{\cos x+4} \qquad h(x) = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$$

4) بفرض التابع $f(x) = \ln[g(x)]$ أوجد مجموعة تعريف f واستنتج $f'(x)$
5) أثبت أن $A(-2,0)$ مركز تناظر لـ f
6) هل يقبل التابع مماس لـ C موازي للمستقيم $\Delta: y - x + e = 0$
7) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

مع تمنياتكم لكم بالتوفيق والنجاح

إعداد أ. معتز شحادة ود. منال البابا

أولاً:

حل السؤال الأول:

1) f غير اشتقاقي عند 1

التعليل: " نلاحظ أن الخط البياني ينقطع عند $x=1$ فالتابع f معرف عند $x=1$ وغير مستمر عند $x=1$ فهو غير اشتقاقي عند $x=1$

2) أن $f'(2)=m$ ميل المماس المائل

لحساب ميل مماس مائل من الرسم:

نوجد نقطتين من الخط

$(1,2)$, $(2,0)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-2}{2-1} = -2$$

إذاً: $f'(2) = -2$

ملاحظة:

لحساب مشتق من رسم نميز حالتين

① قيمة حدية إذاً $f'(x_0)=0$

② نقطة تماس {لمماس مائل}

ميل المماس $f'(x_0) = m$ هو المشتق عند $\underline{x_0}$

3) حلول $f'(x) \leq 0$

المشتق أصغر من الصفر (سالب)

إذاً نبحث عن جزء الخط البياني الذي يكون فيه التابع متناقص ونختار المجال من محور xx'

$x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$

مجال مفتوح عند 1 لأن f غير اشتقاقي (غير مستمر) عند 1

4) $f(x) > 0$

نبحث عن جزء من الخط البياني الذي يقع فوق محور xx' ونختار المجال الموافق من محور xx'

$x \in [1,2[$

d مماس

نقطة $(2,0)$

ميل $m=-2$

بما أن $m=-2$, $f(2)=0$

معادلة المماس:

$y-y_0 = m(x-x_0)$

$y-0 = -2(x-2)$

$\Rightarrow \boxed{y = -2x+4}$

السؤال الثاني:

$\overrightarrow{AM}\,(x-2, y-3, z)$

$\overrightarrow{BM}\,(x+4, y-1, z+2)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

$(x-2)(x+4)+(y-3)(y-1)+z(z+2)=0$

$x^2+4x-2x-8+y^2-y-3y+3+z^2+2z=0$

$x^2+2x+1-1-8+y^2-4y+4-4+3+z^2+2z+1-1=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=11$

بما أن $11>0$

فالمجموعة $\mathcal{E}$ تمثل معادلة كرة مركزها

$\Omega(-1, 2, -1)$

ونصف قطرها $r=\sqrt{11}$

السؤال الثالث:

$z=-2+i$

1

$\underset{\text{المركز}}{z'-\omega}=\overset{\text{نسبة}}{k}(z-\underset{\text{المركز}}{\omega})$

$z'-(1+3i)=-2(-2+i-(1+3i))$

$\Rightarrow z'-(1+3i)=-2(-3-2i)$

$\Rightarrow z'=6+4i+1+3i$

$\Rightarrow \boxed{z'=7+7i}$

2

$b-(-2+i)=e^{i\frac{5\pi}{6}}(a-(-2+i))$

النقطة B صورة النقطة A وفق

دورانR مركزه $\omega=-2+i$

وزاويته $\theta=\frac{5\pi}{6}$

حل السؤال الرابع :

حساب نهاية باستخدام تعريف العدد المشتق

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{4}$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + (1)^2 = 2$

ونستنتج أنه:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$$

حل السؤال الخامس:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 2 + \sin x}{x} - x$$

$$\frac{x^2 + 2 + \sin x - x^2}{x} = \frac{2 + \sin x}{x}$$

نعلم أنه: $-1 \le \sin x \le +1$

$1 \le 2 + \sin x \le 3$

في جوار $+\infty$: $x > 0$

$$\frac{1}{x} \le \frac{2 + \sin x}{x} \le \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

حسب الإحاطة $\Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \sin x}{x} = 0$

إذاً $D : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

* أضافي: دراسة الوضع النسبي

$\rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{2 + \sin(x)}{x}$

نلاحظ أن $1 < 2 + \sin(x) < 3$ من الإحاطة

البسط موجب و $x > 0$ مقام موجب

$\rightarrow f(x) - y_\Delta > 0$

إذاً C فوق Δ أياً كان $x > 0$

ثانياً: حل التمرين الأول:

$$(U_n)_{n \ge 1} : \begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n}{e}} \end{cases}$$

$V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln U_n$

$\boxed{1}$ نوجد V_{n+1} :

$V_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(U_{n+1})$

$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{U_n}{e}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{U_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{U_n}{e}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [\ln(U_n) - \ln(e)]$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [\ln(U_n) - 1]$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(U_n) - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln(U_n)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(U_n)\right) = \frac{1}{2}V_n$$

$\Leftarrow$ $(V_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

$$V_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(U_1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2}\ln(e)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\boxed{2}$ لنوجد V_n بدلالة n:

$$V_n = V_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\boxed{V_n = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ولنوجد U_n بدلالة n:

$$V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(U_n)$$

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(U_n) \quad \times 2$$

$$\Rightarrow \ln(U_n) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

نرفع e للطرفين

$$\Rightarrow \boxed{U_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$

$$U_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$\boxed{3}$ بما أن

$$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$$

قاعدة: اذا كان $-1<q<1$
$\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = 0$$

فالمتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متقاربة..

*أضافي أحسب نهاية المتتالية $\{U_n\}$

الحل:

$$U_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = e^{6(0)-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

اذا U_n متقاربة

التمرين الثاني:

$Z_3 = 1$, $Z_2 = \sqrt{3} + i$, $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1 من أجل $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

من أجل $Z_2 = \sqrt{3} + i$ نجد:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

2 لحل المعادلة: $Z^3 = 1$

$$\Rightarrow Z^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (Z-1)(Z^2+Z+1) = 0$$

إما $Z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z = 1}$

أو $Z^2 + Z + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1) = -3 = i^2 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3i$$

$$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}$$

$$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

ومنه حلول المعادلة في ① هي

$$\left\{1 ,\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i ,\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right\}$$

فائدة: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

3

$$\left(\frac{Z_1}{\sqrt{2}}\right)^{12} + (Z_3)^{12}$$

$$= (1+i)^{12} + 1^{12}$$

أن العدد العقدي $1+i$ له

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

ومنه:

$$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} + 1$$

$$= 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) + 1$$

$$\boxed{3\pi = \pi + 2\pi}$$

$$= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) + 1$$

$$= 2^6(-1 + 0) + 1$$

$$= -64 + 1 = -63$$

وهو عدد حقيقي

4

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$$

نضرب ونقسم على مرافق المقام

$$\Rightarrow Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i-i^2\sqrt{2}}{3+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

$$\Rightarrow Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

وبالمقارنة نجد :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث :

نصطنع تابع معدل التغير للتابع f عند (0)

وهو :

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

عند 0 وهو :

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x}$$

$$= \frac{x+2-2|x|-2}{x(|x|+1)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x-2|x|}{x(|x|+1)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{x-2(-x)}{x(-x+1)} & : x<0 \\ \frac{x-2x}{x(x+1)} & : x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x(-x+1)} & : x<0 \\ \frac{-x}{x(x+1)} & : x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{3}{-x+1} & : x<0 \\ \frac{-1}{x+1} & : x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{-x+1} = 3 = f'(0^-)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1 = f'(0^+)$$

نلاحظ أنه:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

ومنه f ليس اشتقاقي عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

معادلة نصف المماس من اليمين للخط c عند $x=0$:

$$y - f(0) = f'(0^+)(x-0)$$

$$y - 2 = -1(x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -x+2}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & : x>0 \\ \dfrac{x+2}{-x+1} & : x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

$D : y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -1$$

$D : y=-1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

التمرين الرابع.

$\boxed{1}$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+4i-(-1+i)}{2-i-(-1+i)} = \frac{2+3i}{3-2i}$$

$$= \frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i+9i+6i^2}{9+4}$$

$$= \frac{13i}{13} = \boxed{i}$$

الشكل الجبري لـ $\frac{c-a}{b-a}$ هو i

أما الشكل الأسي له:

$$\frac{c-a}{b-a} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

نلاحظ أنه:

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1$$

$$\Rightarrow |c-a| = |b-a| \Rightarrow AC = AB$$

وأنه:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فالمثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$\boxed{2}$ أنه $\frac{c-m}{b-m}$ عدد تخيلياً بحتاً $\Leftarrow$ BMC مثلث قائم في M وبالتالي M تقع على دائرة قطرها BC فمجموعة النقاط $M(z)$ هي دائرة قطرها BC محذوف منها النقطة B

$\boxed{3}$ أنه $\frac{c-m}{b-m}$ حقيقياً $\Leftarrow$ النقاط B, C, M تقع على استقامة واحدة أي M تنتمي للمستقيم BC فالمجموعة $M(z)$ هي المستقيم BC محذوف منه النقطة B

* ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: ١٠٠د

1 a) أثبت أن النقاط B, C, D تمثل مستوي

الحل: $B(-1,0,2)$, $C(2,1,1)$, $D(-3,3,-1)$

* نشكل شعاعين وندرس ارتباطهما خطياً

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}(3,1,-1)\\ \overrightarrow{BD}(-2,3,-3)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{-2} \neq \frac{1}{3}$$

إذاً شعاعين غير مرتبطان خطياً

والنقاط ليست على استقامة واحدة

فهي تشكل مستوي

b) نوع المثلث BDC حسب أطوال:

الأضلاع:

$[BC] = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

$[BD] = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

$[DC] = \sqrt{25+4+4} = \sqrt{33}$

* نطبق عكس فيثاغورس

$(BD)^2 + (BC)^2 = (DC)^2$

$11 + 22 = 33$

$\rightarrow \boxed{33 = 33}$ المثلث قائم في B

$S_{BDC} = \frac{\text{جداء قائمتين}}{2} = \frac{BC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{22}}{2} = \frac{\sqrt{242}}{2}$

* معادلة المستوي (BDC)

$\overrightarrow{BC}(3,1,-1)$ أشعة التوجيه

$\overrightarrow{BD}(-2,3,-3)$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$a = (-3) - (-3) = 0$

$b = -[(-9) - (2)] = +11$

$c = (9) - (-2) = +11 \rightarrow \vec{n}(0,11,11)$

$\rightarrow \vec{n}(0,1,1)$ (نقسم على 11)

مستوي (BCD)

$\vec{n}(0,1,1)$, $B(-1,0,2)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$0 + 0 + 2 + d = 0 \rightarrow d = -2$

$$\boxed{P: y + z - 2 = 0}$$

2 a) نعوض $A(-\frac{1}{2},3,1)$ بالمستوي (BDC)

$3 + 1 - 2 = 0 \rightarrow 2 \neq 0$

إذاً $A \notin (BDC)$ لا تنتمي إلى المستوي

b) $d[A;(BDC)] = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3 نحسب الحجم لرباعي الوجوه A ,(BCD)

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{242}}{2}\right] \cdot \left[\sqrt{2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}\right]$$

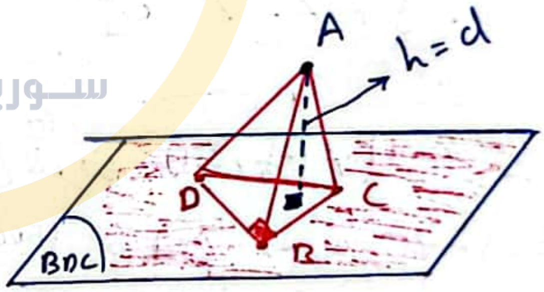
$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{242}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{121} = \frac{11}{3}$$

* ملاحظات:

S_p = مساحة المثلث القائم BCD

h بعد رأس الرباعي A عن مستوي القاعدة (BCD)

$$h = d[A, BCD]$$



4 نحسب المسافة:

$$AD = \sqrt{\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2+0+(-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+4} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(\cdots)^2+1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+10} = \sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)+4+0} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

A

$$\rightarrow [AB] = [AC] = [AD] = r$$

* إذاً A مركز الكرة S نصف قطرها $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$ والنقاط B ، C ، D تقع على محيطها

الكرة S

$$A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right) \qquad r = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$S: \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 = \frac{41}{4}$$

* المسألة الثانية: 100د

1 $D_f = \mathbb{R}/\{-4\} \rightarrow g(x) = \frac{-x}{x+4}$

$$\left.\begin{array}{l} * \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1 \\ * \lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\frac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to+\infty} g[g(x)] = \frac{1}{3}$$

2 $I =]-1,2 , -0,8[$

$$r = \frac{-0,8+1,2}{2} = 0,2 \quad / c = -1$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left|\frac{-x}{x+4} + 1\right| < 0,2$$

$$A'(x) = \frac{+4\sin(x)}{[\cos(x)+4]^2}$$

$$* f(x) = \ln\left[\frac{-x}{x+4}\right]$$ 4

* تابع لوغارتمي معرف عندما $\frac{-x}{x+4} > 0$

ندرس إشارة

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-x$		+		+	0	−	
$x+4$		−	0	+		+	
كسر		−	‖	+	0	−	
تراجع		✗		✓		✗	

$D_f =]-4, 0[$

$$* f'(x) = \frac{\left[\frac{-x}{x+4}\right]'}{\frac{-x}{x+4}} = \frac{\frac{-4}{(x+4)^2}}{\frac{-x}{x+4}}$$

$$= \frac{-4}{-x(x+4)} = \frac{4}{x^2+4x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{+4}{x^2+4x}$$

$$\left|\frac{-x+x+4}{x+4}\right| < \frac{2}{10}$$

$$\rightarrow \left|\frac{4}{x+4}\right| < \frac{1}{5} \rightarrow \frac{4}{x+4} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{x+4}{4} > 5 \rightarrow x > 16$$

علماً أن $x \to +\infty$ فإن $|x+4| = x+4$

$$\boxed{A = 16}$$

$$g'(x) = \frac{-x-4+x}{(x+4)^2} = \frac{-4}{(x+4)^2}$$ 3

* نلاحظ أن

$$h(x) = g[\sqrt{x}]$$

$$\rightarrow h'(x) = (\sqrt{x})' \cdot g'(\sqrt{x})$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{-4}{(\sqrt{x}+4)^2}\right]$$

$$h'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+4)^2}$$

* نلاحظ أن

$$A(x) = g[\cos(x)]$$

$$A'(x) = [\cos(x)]' \cdot g'(\cos(x))$$

$$= -\sin(x) \cdot \left[\frac{-4}{[\cos(x)+4]^2}\right]$$

نهايـــة متتاليـــة

MOATAZ SHEHADEH · MANAL · ALBABA · 23 · 24 · Manal & Moataz

سوريانا التعليمية

$\boxed{5}$ $A(x_0,y_0) \leftarrow A(-2,0)$

* لإثبات أن A مركز تناظر
* نحسب $\{2x_0-x\}$
* شرط أول:

$\forall x\in D_f \rightarrow 2x_0-x\in D_f$

* شرط ثاني:

$2y_0=f(x)+f(2x_0-x)$

{قاعدة}

$\boxed{1}$ $2x_0-x=2(-2)-x=-4-x$

$\forall x\in]-4,0[\rightarrow -x\in]0,4[$

$-4-x\in]-4,0[=D_f$

شرط الأول محقق

$\boxed{2}$ $f(x)+f(-4-x)$

$=\ln\left[\frac{-x}{x+4}\right]+\ln\left[\frac{-(-4-x)}{-4-x+4}\right]$

$=\ln\left[\frac{-x}{x+4}\right]+\ln\left[\frac{4+x}{-x}\right]$

$=\ln\left[\frac{-x}{x+4}\times\frac{4+x}{-x}\right]=\ln(1)=0$

$=2(0)=2y_0$ شرط الثاني محقق

$f(x)+f(-4-x)=2(0)$

$f(x)+f(2x_0-x)=2y_0$

اذاً C_f متناظر بالنسبة للنقطة $A(-2,0)$

$\boxed{6}$ $\Delta: y=1x-e \rightarrow m_\Delta=1$

* نعلم أن المستقيمات المتوازية لها ذات الميل اذاً ميل المماس d هو (1)

$m=f'(x)=\frac{4}{x^2+4x}$

$1=\frac{4}{x^2+4x} \rightarrow x^2+4x=4$

$x^2+4x-4=0$

$\Delta=16-4(1)(-4)=32 \rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{32}$

$=4\sqrt{2}$

$x_1=\frac{-4+4\sqrt{2}}{2}=-2+2\sqrt{2}\notin D_f$

$x_2=\frac{-4-4\sqrt{2}}{2}=-2-2\sqrt{2}\notin D_f$

اذاً C_f لا يقبل اي مماس يوازي Δ

أ. معتز شحادة

$\boxed{7}$ دراسة تغيرات التابع f

$$f(x) = \ln\left[\frac{-x}{x+4}\right]$$

$$D_f =]-4, 0[$$

* $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \ln\left[\frac{+4}{0^+}\right] = \ln(+\infty) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \ln\left[\frac{0}{4}\right] = \ln(0) = -\infty$

* $f'(x) = \dfrac{+4}{x^2+4x} < 0$

نلاحظ البسط $(+4)$ موجب والمقام سالب على D_f

x	-4		0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

* الرسم : نقاط مساعدة

∩ مع yy' ← $x=0 \notin D_f$

∩ مع xx' ← $f(x) = y = 0$

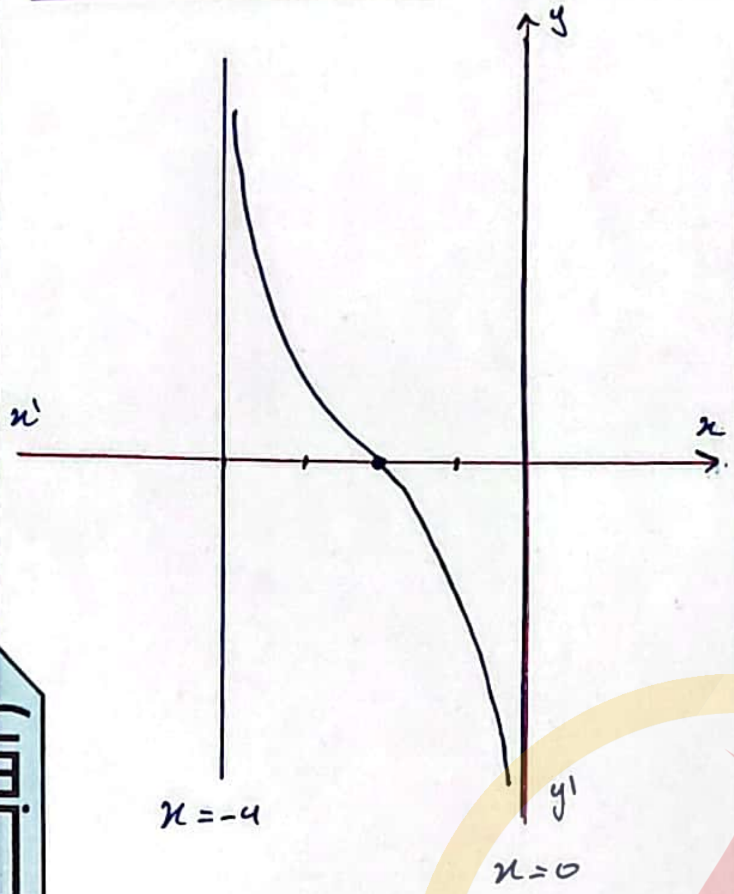
$0 = \ln\left[\frac{-x}{x+4}\right] \rightarrow \frac{-x}{x+4} = 1$

$-x = x+4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$

$(-2, 0)$

$x = -4$ مقارب شاقولي

$x = 0$ مقارب شاقولي



مع التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

أ. معتز شحادة