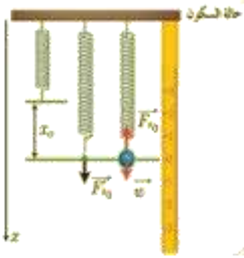
النواس المرن

تعريفه: نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K يتصل به جسم صلب كتلته m يقوم بحركة اهتزازية على جانبي نقطة ثابتة تدعى مركز الاهتزاز .

- عند وصل النهاية السفلية للنابض بجسم صلب نلاحظ أن النابض يستطيل بمقدار x_0 ومن ثم يصبح مركز العطالة c ساكناً في **مركز الاهتزاز (التوازن) o**.
- **x_0 استطالة سكونية :** وهي بعد مركز عطالة الجسم الصلب عن مركز الاهتزاز (التوازن) عند سكون مركز العطالة .
- نوثر على النهاية السفلية للنابض بقوة شد وضمن حدود مرونة النابض بحيث يستطيل النابض مسافة $\bar{x}$ (المطال) ثم نترك النابض يهتز فنلاحظ أن النابض يهتز على جانبي مركز التوازن لهذا نقول ان حركة الجسم الصلب حركة اهتزازية .
- **المطال $\bar{x}$:** هو البعد الجبري لمركز عطالة الجسم الصلب عن مركز التوازن .

دراسة تحريكية : برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة $F=-KX$.

1) **حالة السكون:** يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه ثم **يتوازن الجسم** بتأثير قوتين :



قوة ثقله $\vec{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_{S_0}$،

وبما أن **الجسم ساكن:**

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{S_0} = 0$$

$$W = F_{S_0} \quad ❶$$

تؤثر في **النابض** قوة شد $\vec{F}'_{S_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

$$F'_{S_0} = k x_0$$

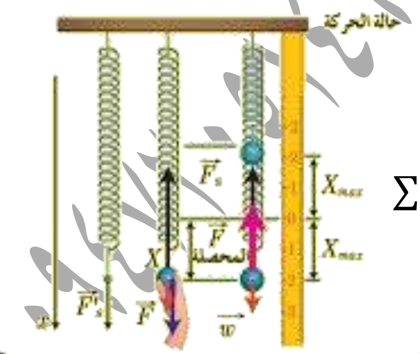
لكن $F_{S_0} = F'_{S_0}$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❶ نجد أن: $W = k x_0$

حيث x_0 الاستطالة السكونية للنابض .

2) **حالة الحركة:** القوى الخارجيّة المؤثّرة في مركز عطالة الجسم: قوة الثقل $\vec{W}$ و قوّة توتّر النابض $\vec{F}_S$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_S = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل:

$$\sum F = W - F_S = ma \quad ❷$$

0988440574
0947205146

تؤثر في النابض قوة شد $\overrightarrow{F'_S}$ التي تسبب له الاستطالة $x_0 + \bar{x}$ إذاً:

$$F'_S = k(x_0 + \bar{x})$$

لكن $F_S = F'_S$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❷ نجد: $\sum F = kx_0 - k(x_0 + \bar{x}) = m\bar{a}$

$$\sum F = kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\bar{a}$$

$$F = -k\bar{x} = m\bar{a}$$

نتيجة: إنّ محصّلة القوى الخارجيّة المؤثّرة في مركز عطالة الجسم في كلّ لحظة هي **قوّة إرجاع** لأنّها **تُعيد** الجسمَ إلى **مركز الاهتزاز** دوماً، وهي تتناسب **طرداً** مع المطال x و**تعاكسه** بالإشارة.

استنتاج طبيعة حركة النوّاس المرن:

برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النواس المرن غير المتخامد حركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة ثم استنتج الدور الخاص لهذا النواس.

البرهان: إنّ محصّلةَ القوى الخارجيّة التي يخضعُ لها مركزُ عطالة الجسم تعطى بالعلاقة:

$$\bar{F} = m\bar{a} = -K\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

وهي $(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}$ .... ❶

معادلةٌ تفاضليّة من **المرتبة الثانية** تقبل **حلاً جيبياً** من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad ......❷$$

وهو الشكل العام للتّابع الزمنيّ للمطال (الموضع) حيث:

$\bar{x}$ المطال أو موضعُ الجسم في اللحظة t ويقدر بالمتر m.

X_{max} سعة الحركة وتقدّرُ بالمتر m مقدار **ثابت وموجب**.

ω_0 النبض الخاص للحركة ويقدر بالـ rad.s^{-1} مقدار **ثابت وموجب**

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ طورُ الحركةَ في اللحظة t.

$\bar{\varphi}$ الطورُ الابتدائيّ في اللحظة t=0 ويقدّرُ بالـ rad وهو **مقدار ثابت**

للتحقّق من صحّة الحلّ **نشتقّ** تابع المطال **مرّتين** بالنسبة للزّمن

$$(x)'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2\bar{x} \quad .... ❸$$

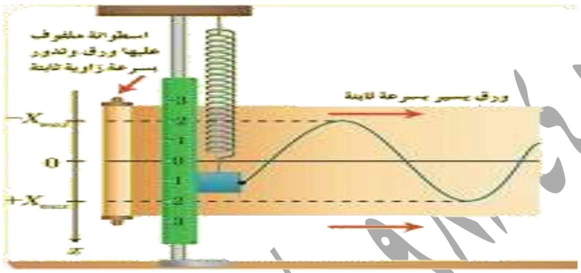
بالمقارنة بين (❶) و (❸) نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقّقٌ لأنّ k,m موجبان.

نتيجة: إنّ حركةَ النوّاس المرن هي هزازة جيبيّة توافقيّة انسحابيه بسيطة.



استنتاجُ علاقةِ الدّورِ الخاصِّ للنوّاس المرن:

بما أنّ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواةِ نجدُ: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتالي:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهي علاقةُ الدّور الخاصّ للنوّاس المرن غيرِ المتخامدِ.

من العلاقةِ السّابقةِ أستنتجُ أنّ الدورَ الخاصّ:

1) **لا يتعلّقُ** بسعةِ الاهتزاز X_{max}.

2) يتناسبُ **طرداً** مع الجذرِ التربيعيّ لكتلةِ الجسمِ المهتزّ m.

3) يتناسبُ **عكساً** مع الجذرِ التربيعيّ لثابتِ صلابةِ النابض k.

توابعُ حركةِ النوّاس المرِن:

1) تابعُ المطال: الشكل العام لتابع المطال

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن بفرض أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $x=+X_{max}$ في اللحظة t=0 بالتالي:

$$X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$

$$\cos(\bar{\varphi}) = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$$

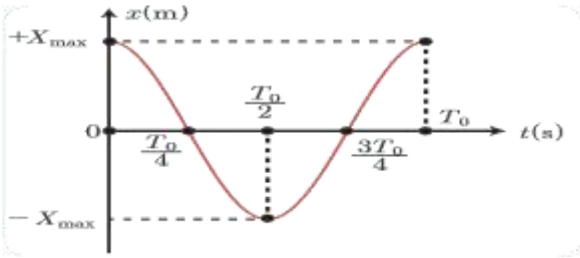
بالتالي:

$$\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t)}$$

- أكمل الجدول التالي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

- ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور.



- أحدّدُ مطالَ الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t = X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{3T_0}{2}$$

$$x = X_{max}\cos 3\pi = -X_{max}$$

أستنتج: المطالُ أعظميّ (طويلة) في الموضعين الطرفيّين $x = |\pm X_{max}|$.

المطالُ معدومٌ في مركز الاهتزاز $x = 0$.

2) تابعُ السرعة:

إنّ تابعَ السرعةِ هو المشتقُّ الأوّلُ لتابع المطال بالنسبة للزمن.

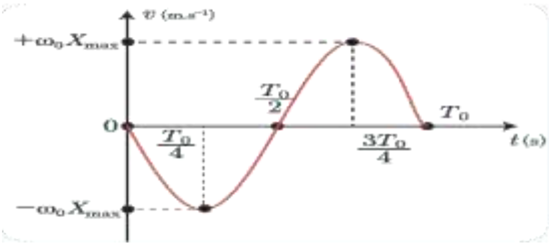
$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$\boxed{\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)}$$

- أكمل الجدول الآتي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

- ارسم المنحني البياني لتغيّرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور.



- أحدّدُ قيمةَ سرعة الجسم، وجهةَ حركتِهِ في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$.

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t) = -\omega_0 X_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{5T_0}{4}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\omega_0 X_{max}$$

الجسم الصلب يتحرك بعكس الاتجاه الموجب للمحور الشاقولي الموجه نحو الأسفل

أستنتج: السرعةُ أعظميّةٌ (طويلة) $v = |\pm\omega_0 X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الاهتزاز.

- السرعةُ معدومةٌ $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيّين).

3) تابع التسارع:

إنّ تابعَ التسارعِ هو المشتقُّ الأوّلُ لتابع السرعةِ بالنسبة للزمن، وهو المشتقُّ الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن.

$$\bar{a} = (v)'_t = (x)''_t$$

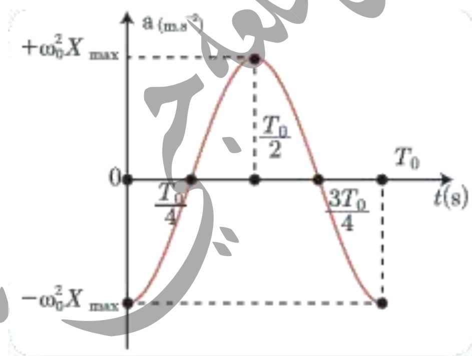
$$\bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

$$\boxed{\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}}$$

- أكمل الجدول التالي:

t	O	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

- ارسمُ المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور .



- أحدّدُ قيمةَ تسارعِ الجسمِ في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$:

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{2}\right)$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(5\pi) = +\omega_0^2 X_{max}$$

استنتج: التسارعُ أعظميٌّ (طويلة) $a_{max} = \left|\pm\omega_0^2 X_{max}\right|$

عند المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين) .

– التسارعُ معدوم $a = 0$ عند المرور في مركز الاهتزاز .

– التسارعُ غيرُ ثابتٍ تتغيّرُ قيمتُه بتغيّر المطال .

الطاقةُ في الحركةِ التوافقيّةِ البسيطة:

إنَّ الطاقةَ الميكانيكيّةَ للنوّاسِ المرنِ هي مجموعُ الطاقتين الكامنة والحركيّة:

$$E_{tot} = E_p + E_k \,........(1)$$

الطاقةُ الكامنةُ المرونيّةُ للنابضِ هي $E_P = \frac{1}{2}Kx^2$

نعوّض تابع المطال:

$$E_P = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الطاقةُ الحركيّةُ للجسمِ هي $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ نعوّض تابع السرعة:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض في (1) :

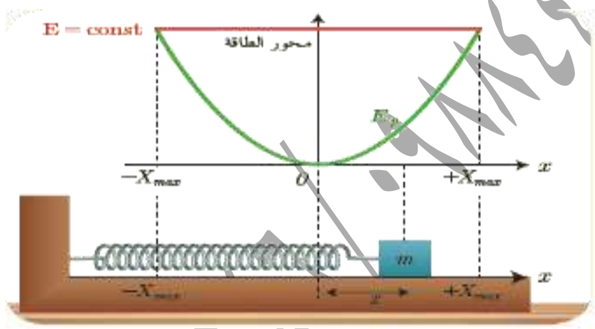
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن: $k = m\omega_0^2$

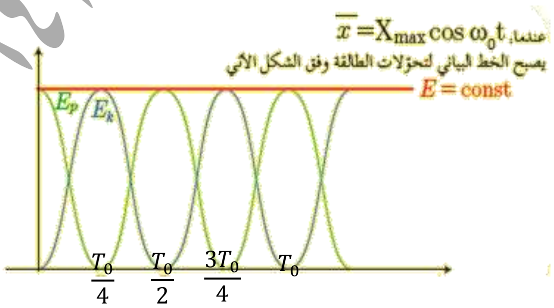
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}kX_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2[\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})]$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = const}$$



تمثل الطاقة الكامنة المرونية بقطع مكافئ ذروته O بينما تمثل الطاقة الميكانيكية بخط مستقيم يوازي محور المطالات.

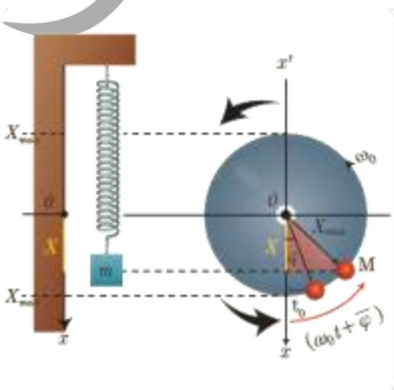


- أحدّدُ المواضعَ التي تكون فيها كلٌّ من الطاقتين الحركيّة والكامنة المرونية: عظمى ومعدومة.

الجواب: تنعدم الطاقة الحركية في الوضعين الطرفيين بسبب انعدام السرعة وتكون عظمى في مركز الاهتزاز وذلك لأن السرعة عظمى عندئذ .

كما تنعدم الطاقة الكامنة المرونية في وضع التوازن بسبب انعدام المطال وتكون عظمى في الوضعين المتطرفين وذلك لأن المطال أعظمي عندئذ .

العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل):



مَثّل فرينل الحركة الجيبية التوافقية البسيطة بشعاع:

- الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة $t = 0$

- طور الحركة $(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t .

- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة M .

- سعة الحركة X_{max} هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران .

- مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x'x}$ وهو متغير بتغير الزمن .

- النسبة $\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$

- التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل
$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
لذلك تُسمّى الحركة جَيبيّة انسحابيّة (توافقيّة بسيطة) .

تطبيق: نوّاس مرنٌ أفقيٌّ مؤلّفٌ من جسمٍ ونابضٍ مرنٍ تابعُه الزمنيُّ $x = 0.1\cos(\pi t+\pi)$،

المطلوب:

1) حدّدْ ثوابتَ الحركة لهذا النوّاس .

2) احسبْ دورهُ T_0

3) حدد موضع المتحرّك (الجسم) وجهة حركته في لحظة بدء الزمن .

الحل: 1) نكتبُ التابع الزمنيَّ للنوّاس المرن

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$\bar{x} = 0.1\cos(\pi t+\pi)$$

بالمقارنة نجدُ: المطالُ الأعظميُّ: $X_{max} = 0.1m$

النبضُ $\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$ و الطورُ الابتدائيُّ للحركة (عند اللحظة $t = 0$) هو $\bar{\varphi} = +\pi\ rad$

2) حسابُ الدور الخاص: من العلاقة:
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

3) $t = 0 \Rightarrow x = 0.1\cos\pi = -0.1m$

أي المتحرك في مطاله الأعظمي السالب في لحظة بدء الزمن.

ـ لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{2}S$

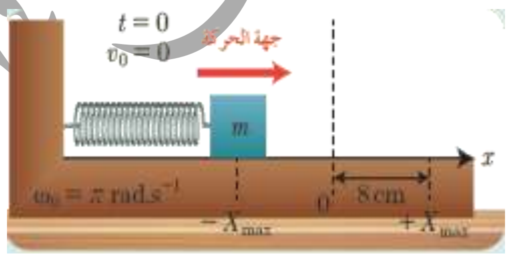
$$\bar{x} = 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) = 0.1\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0m$$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من المطال الأعظمي السالب إلى وضع التوازن.

اختبر نفسي:

أولًا – اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1. تابعُ المطال الذي يصفُ حركة الهزازة الجيبيّة في الشكل المجاور هو:



A. $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

B. $\bar{x} = 8\cos(\pi t + \pi)$

C. $\bar{x} = 0.008\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

D. $\bar{x} = 0.8\cos(\pi t)$

الإجابة الصحيحة: A) $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

توضيح اختيار الإجابة: شروط البدء:

$$v_0 = 0\ ,\ x = -X_{max}\ ,\ t = o$$

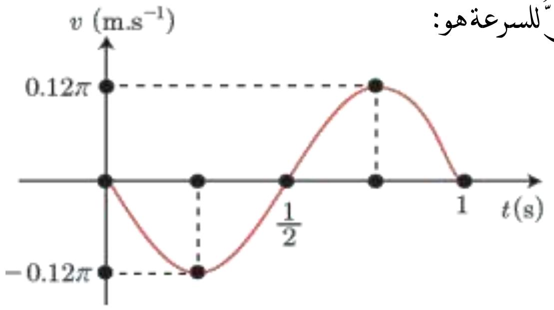
نبدل في التابع الزمني للمطال:

$$-0.08 = 0.08\cos\bar{\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \bar{\varphi} = \pi\ rad$$

$$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$$

2. الرسمُ البياني جانبًا يمثّل تغيّرات السرعة مع الزمن لجسمٍ مرتبطٍ بنابضٍ مرنٍ يتحرّك بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



A. $\bar{v} = 0.06\pi\cos\pi t$

B. $\bar{v} = -0.06\pi\cos 2\pi t$

C. $\bar{v} = -0.12\pi\sin 2\pi t$

D. $\bar{v} = 0.12\pi\sin\pi t$

الإجابة الصحيحة: c) $\bar{v} = -0.12\pi\sin 2\pi t$

- $T_0 = 1s\ ,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad\ s^{-1}$
- $v_{max} = \omega_0 X_{max} \Rightarrow$
  $X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06m$
- نبدل في التابع الزمني للسرعة $(t = 0\ ,\ v = 0)$

فنجد: $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$0 = -2\pi \times 0.06\ \sin(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow$$
$$-0.12\pi\sin(\bar{\varphi}) = 0$$

إما: $\bar{\varphi} = 0\ rad$ الحل **مقبول** لأنه **يحقق السرعة سالبة**

في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Rightarrow$$
$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06\sin\left(2\pi\frac{1}{4} + 0\right) = -0.12\pi\ m.s^{-1}$$

أو: $\bar{\varphi} = \pi\ rad$ الحل **مرفوض** لأنه **يحقق السرعة موجبة**

في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi\frac{1}{4}+\pi\right) = -0.12\pi\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= +0.12\pi \quad m.s^{-1}$$

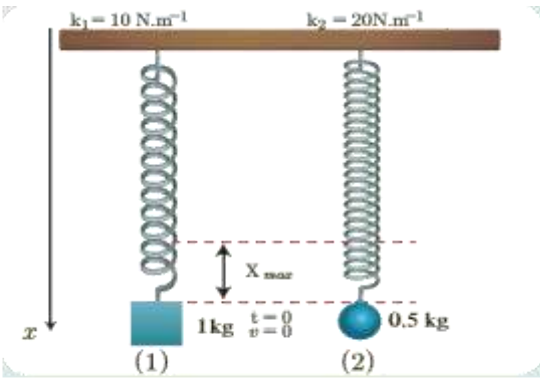
3. يمثّل الشكل ❶ هزّازتان توافقيّتان (1) و (2) تنطلقان من الموضع نفسِه وفي اللحظة نفسها، فإنّهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:

A. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

B. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

C. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$.

D. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$.



الشكل ❶

الإجابة الصحيحة: D)

للهزازتين $(x=\pm X_{max} \quad v=0 \quad t=0)$ بالتالي فإن $\varphi=0$

$$\omega_{01}=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{10}{1}}=\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_{02}=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}=\sqrt{\frac{20}{0.5}}=\sqrt{40}=2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

1) $x_1=X_{max}\cos\omega_{01}t \Rightarrow x_1=X_{max}\cos 3\pi=-X_{max}$

2) $x_2=X_{max}\cos\omega_{02}t \Rightarrow x_2=X_{max}\cos 6\pi=+X_{max}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

1) أثبت صحّة العلاقة $v=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$ في الحركة التوافقيّة البسيطة.

البرهان: $E_K = E - E_P$

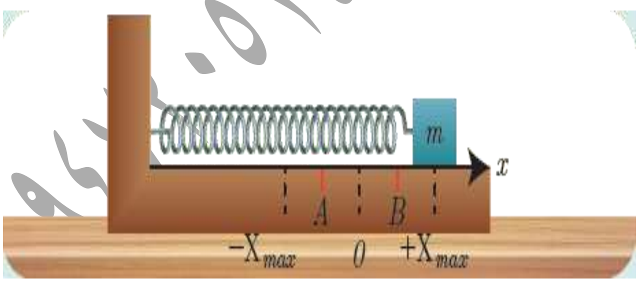
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2-x^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{(X_{max}^2-x^2)}$$

$$v=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$$

2) نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه، ويُربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرّك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل المجاور

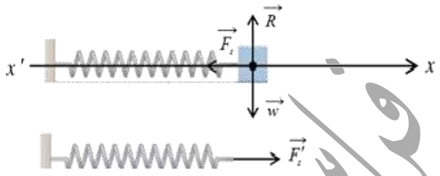


نشدّ الجسم مسافة أفقيّة مناسبة، ونتركه دون سرعة ابتدائيّة. المطلوب:

a. ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

b. استنتجْ علاقةَ الطاقة الحركيّة للجسم بدلالة X_{max} في كلٍ من الموضعين A وB

$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ و $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$.



a. القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة الثقل: $\vec{W}$ – قوة رد فعل السطح: $\vec{R}$ – قوة توتر النابض: $\vec{F_s}$ ،

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجّه كما في الشكل:

$$-F_s = ma$$

تؤثر على النابض قوة شد $\vec{F'_s}$ التي تسبّب له الاستطالة x

حيثُ: $F'_s = F_s = k\bar{x}$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض نجد: $-k\bar{x} = m(\bar{x})''_t$

$$x''_t = -\frac{k}{m}(\bar{x}) \quad ..... (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \quad .....(2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأنّ k,m موجبان.

حركة الجسم هي حركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b. استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max}:

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$$

عندما : $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ فإن:

$$E_{k_a} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}kX_{max}^2\right) = \frac{3}{8}kX_{max}^2$$

أي: $E_{k_a} = \frac{3}{4}E_{tot}$

عندما : $\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ فإن:

$$E_{k_B} = \frac{1}{2}K(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kX_{max}^2\right) = \frac{1}{4}kX_{max}^2$$

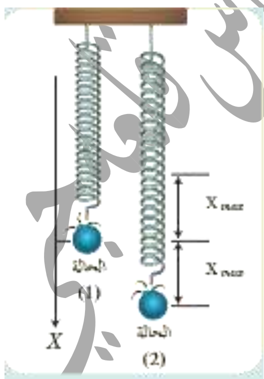
أي: $E_{k_B} = \frac{1}{2}E_{tot}$

النتيجة: بزيادة القيمة المطلقة للمطال **تزداد الطاقة الكامنة المرونية وتقل الطاقة الحركية**.

3) جسمٌ معلّقٌ بنابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهمل الكتلة حلقاتُه متباعدةٌ يهتزُّ بدوره الخاصِّ، ما نوعُ حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كلٍّ من الموضعين الآتيين، ولماذا؟

a- مركز الاهتزاز، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب؟

b- المطال الأعظميّ الموجب؟



لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = const$$

- الانفصال في مركز الاهتزاز: قذف شاقولي نحو الأعلى
لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية شاقولية للأعلى والحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ولهذه الحركة طوران: طور صعود متباطئة بانتظام وطور هبوط متسارعة بانتظام.

- الانفصال في المطال الأعظمي الموجب: سقوط حر
لأن السرعة الابتدائية للجسم معدومة والحركة مستقيمة متسارعة بانتظام.

ثالثاً: حُلَّ المسائلَ الآتية:

في جميع المسائل: ($4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10m.s^{-1}$)

المسألة الأولى: تتألّف هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابيةٌ من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُه متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10N.m^{-1}$، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m،

ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة:

$\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$.

المطلوب: 1) أوجد قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.

2) احسب كتلة الجسم m.

3) احسب قيمة السّرعة في موضع مطاله $x = 6cm$ ، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجب للمحور.

4) حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.

الحل: 1) $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

بالمطابقة مع الشكل العام: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نجد: $X_{max} = 0.1m$, $\omega_0 = \pi\ rad\ s^{-1}$, $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} rad$

حساب T_0: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2S$

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10}$

$\Rightarrow m = 1\ kg$

3) $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$v = \pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.06)^2} = \pi\sqrt{10^{-2} - 36 \times 10^{-4}}$$

$$= \pi\sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}} = \pi\sqrt{64 \times 10^{-4}}$$

$$v = 8\pi \times 10^{-2} = 0.25m.s^{-1}$$

4) لحظة بدء الزمن t=0 وبالتالي:

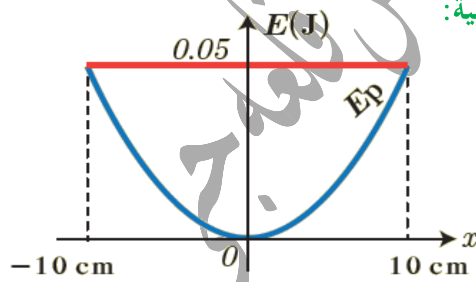
$\bar{x} = 0.1\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

ـ لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t=\frac{T_0}{4}=\frac{1}{2}S$

$$\bar{x} = 0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 0.1\cos(\pi) = -0.1m$$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من وضع التوازن إلى المطال الأعظمي السالب.

المسألة الثانية:



يوضّحُ الرسمُ البياني تغيّراتِ الطاقةِ الكامنة المرونية بتغيّرِ الموضع لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلفةٍ من نابضٍ مرنٍ مهمل الكتلة حلقاتُهُ متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته 0.4 kg

1) استنتجْ قيمةَ ثابت صلابة النابض .

2) احسبْ الدورَ الخاصّ للحركة .

3) احسبْ قيمةَ السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز .

الحل: 1)

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX^2_{max} \Rightarrow k = \frac{2E}{X^2_{max}}$$

$$k = \frac{2(0.05)}{(10\times10^{-2})^2} \Rightarrow k = 10N.m^{-1}$$

2)

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = \frac{4\pi}{10} = 0.4\pi$$

$$T_o = \frac{12.5}{10} = 1.25\ S$$

3) في مركز الاهتزاز ينعدم المطال x=0 بالتالي:

$$v = \omega_0\sqrt{X^2_{max} - x^2} = \omega_0 X_{max}$$

لكن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1.25} = \frac{8\pi}{5} = \frac{25}{5} = 5\ rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow v = 5\times 0.1 = 0.5\ m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: تشكّل هزّازةً توافقيّةً بسيطةً من جسمٍ كتلتُهُ $m = 1\ kg$ معلّقٍ بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاتُه متباعدةٌ فينجزُ 10 هزات في $10s$ ، ويرسمُ في أثناء حركته قطعةً مستقيمةً طولها $16\ cm$. المطلوب:

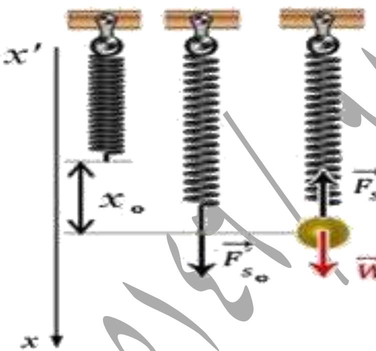
1) استنتجْ قيمةَ الاستطالة السكونيّة لهذا النابض، ثمّ احسبْ قيمتها .

2) احسبْ قيمةَ السرعة العظمى (طويلة) .

3) احسبْ قيمةَ التسارع في مطال $x = 6cm$.

4) احسب الطاقةَ الكامنةَ المرونيّة في موضع مطاله $x = -4cm$ واحسب الطاقةَ الحركيّة عندئذٍ .

الحل:



1) القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في حالة السكون: قوة الثقل: $\vec{W}$ و قوة توتر النابض: $\vec{F}_{s_0}$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحو الأسفل كما في الشكل:

$$W - F_{S0} = 0$$

$$W = F_{s0}\ \ldots\ldots\ldots (1)$$

تؤثر على النابض القوة $\overrightarrow{F'}_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0 حيث:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$$

بالتعويض في (1) نجد: $mg = kx_0$

$$\boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$$

لنحسب T_0: $\boxed{T_0 = \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}}} = \frac{10}{10} \Rightarrow T_0 = 1\ s$

حساب k: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{(T_0)^2} = \frac{40\times1}{1} = 40\ N.m^{-1}$

تنويه: يمكن حساب k من القانون: $\boxed{k=\omega_0^2\, m}$

نعوّض: $x_0 = \frac{1\times10}{40} = 0.25\ m$

2) حساب قيمة السرعة العظمى (طويلة):

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

$$\boxed{X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الصلب}}{2}}$$

$$= \frac{0.16}{2} = 0.08\ m$$

$$v_{max} = 2\pi \times 0.08 = 0.16\pi = 0.5\ m.s^{-1}$$

3) قيمة التسارع في مطال $\bar{x} = +6\ cm$:

$$\bar{a} = -\omega_0^2\bar{x} = -(2\pi)^2 \times 6 \times 10^{-2} = -2.4\ m.s^{-2}$$

4) $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times (-0.04)^2 = 0.032J$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}(40)(0.08)^2 = 0.128J$$

$$E = E_P + E_K \Rightarrow E_K = E - E_P = 0.128 - 0.032 = 0.096\ J$$

المسألة الرابعة: تهتزّ كرةٌ معدنيّة كتلتها m بمرونةِ نابضٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 16\ N.m^{-1}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورُها الخاصّ $1s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1\ m$، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب. المطلوب:

1) استنتجِ التابعَ الزمنيّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العامّ.

2) عيّنْ لحظتَي المرور الأوّلِ والثالثِ للكرة في موضع التوازن، ثم احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$

3) احسبْ كتلة الكرة.

الحل: 1) $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$, X_{max} = 0.1\ m$$

نعوض شروط البدء $(x = \frac{X_{max}}{2},\ t = 0)$ في التابع الزمني:

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3}rad \text{ أو } \bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}rad$$

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $(t=0)$ السرعة:

$$\bar{v}_0 = -\omega_0 X_{max}\, sin(\bar{\varphi})$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{3}rad:\ v_0 = -\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{3}) < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالب

$\varphi = -\frac{\pi}{3}rad : v_0 = +\omega_0 X_{max} \sin(\frac{\pi}{3}) > 0$

الحل مرفوض يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني:

$$\bar{x} = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$$

2) في موضع التوازن x=0 :

$$0 = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow \left(2t + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = \frac{1}{6} + k \Rightarrow t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}$$

المرور الأول: $k = 0$ بالتالي: $t = \frac{1}{12}s$

المرور الثالث: $k = 2$ بالتالي: $t = \frac{13}{12}s$

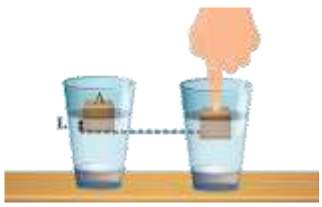
شدّة قوة الارجاع: $F = -kx = -16 \times 0.1 = -1.6\ N$

وشدتها : F=1.6N

3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40}$

$$\Rightarrow m = 0.4\ kg$$

التفكير الناقد:



لدينا كأس فيه ماء كتلته الحجمية ρ_{H2O} يوضع فيه مكعب خشبي كتلة m_{wood} وكتلته الحجمية ρ_{wood} حيث $\rho_{H2O} > \rho_{wood}$ ومساحة سطحه A فيطفو وهو بحالة توازن وقد برز جزء منه فوق سطح الماء. عند التأثير بقوة شاقولية على المكعب الخشبي ليغمر كلياً بالماء ثمّ يترك فجأة. ما نوع حركة المكعب الخشبي؟

الجواب: في حالة السكون تتساوى شدّة قوة ثقل المكعّب الخشبي مع شدّة دافعة أرخميدس المؤثرة عليه فتكون محصلة القوى المؤثرة معدومة. وعند التأثير على المكعب الخشبي بقوة شاقولية جهتها نحو الأسفل يتغير الحجم المغمور من المكعب الخشبي فتتغير شدة دافعة أرخميدس لتصبح محصلة القوى متناسبة مع الإزاحة X ومعاكسة لها بالجهة وهي ما تسمّى قوة الإرجاع فتكون الحركة : حركة جيبية انسحابية.

____انتهى البحث____

ندعوكم للانضمام لقناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء

نوّاس الفتلِ غيرُ المُتخامد

تعريفه: جسم صلب متجانس (ساق أو قرص) معلق من مركزه يهتز في مستوٍ أفقي حول سلك فتل شاقولي ثابت فتله k بتأثير عزم مزدوجة الفتل.

دراسة حركةِ نوّاس الفتل:

القوى الخارجيّة المؤثّرة في الساق: قوّة الثقل $\vec{w}$، قوّة التوتر $\vec{T}$.

عندما نُدير الساق زاوية θ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقيّ تنشأ في السلك مزدوجة فتل $\vec{\eta}$ تقاوم عمليّة الفتل تعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها عزمُها هو عزم إرجاع يتناسب طرداً مع زاوية الفتل θ ويعاكسها بالإشارة

$$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\theta$$

ملاحظة: يُعطى ثابتُ فتل السلك بالعلاقة: $K=K'\frac{(2r)^4}{l}$

k' ثابت يتعلّق بنوع مادّة السلك، $2r$ قطر السلك، l طول السلك.

حيث k ثابت فتل السلك تقاس بـ: $m.N.rad^{-1}$

بتطبيق العلاقة الأساسيّة في التحريك الدورانيّ حول محور Δ منطبق على سلك الفتل الشاقوليّ:

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta}\bar{\alpha}$$

حيثُ I_{Δ} عزمُ عطالة الساقِ حول محور الدوران Δ (السلك)

$\bar{\alpha}$ التسارع الزاويّ

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_{\Delta}\alpha \;\dots\dots\dots (1)$$

إنّ عزمَ كلٍّ من قوّة الثقل $\vec{w}$ وقوّة التوتّر $\vec{T}$ معدوم لأنّ: حامل كلٍّ منهما منطبقٌ على محور الدوران Δ.

عزمُ مزدوجة الفتل: $\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -K\bar{\theta}$.

$$0 + 0 = -k\bar{\theta} = I_{\Delta}\bar{\alpha}$$

$$-k\bar{\theta} = I_{\Delta}(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_{\Delta}}\bar{\theta} \;\dots\dots\dots (2)$$

المعادلةُ (2) هي معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقّق من صحة الحلّ نشتقّ مرّتين بالنسبة بالزمن:

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\alpha = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \;\dots\dots (3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}} \;\dots\dots\dots (4)$$

بموازنة العلاقتين (2) و (3) نجد: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$

وهذا ممكن لأنّ: I_{Δ}، k موجبان أي أنّ حركة نوّاس الفتل جيبيّة دورانيّة توافقيّة بسيطة تابعها الزمنيّ من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{\theta}$: المطال الزاويّ في اللحظة t واحدته rad.

θ_{max}: المطال الزاويّ الأعظميّ (السعة الزاويّة) واحدته rad.

ω_0: النبض الخاصّ بالحركة واحدتهُ $rad.s^{-1}$.

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائيّ للحركة واحدتهُ rad.

دورُ نوّاس الفتل:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$$

استنتج دور نواس الفتل :

- لا يتعلّقُ بالسعة الزاويّة للحركة θ_{max} .
- يتناسبُ طرداً مع الجذر التربيعيّ لعزم عطالة جملة النوّاس حول محور الدوران (سلك الفتل) .
- يتناسبُ عكساً مع الجذر التربيعيّ لثابت فتل السلك .

أجرّب وأستنتج:

- لا تتغيّرُ قيمةُ الدّورِ الخاصّ لنوّاس الفتل بتغيّرِ السعةِ الزاويّة للحركة .
- يزدادُ الدورُ الخاصُّ لنوّاس الفتل بزيادة عزم عطالة الجملة .
- ينقصُ الدورُ الخاصُّ لنوّاس الفتل بنقصان طول سلك الفتل .

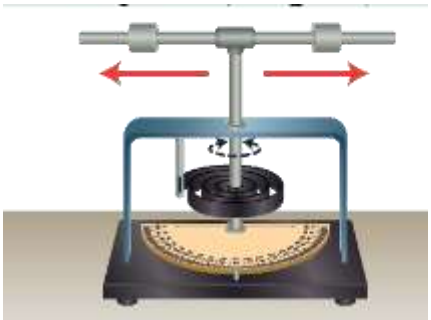
التشابهُ الشكليُّ بين النوّاس المرن ونوّاس الفتل:

نواس مرن	نواس فتل
حركة جيبية انسحابية	حركة جيبية دورانية
المطال $\bar{x}$	مطال زاوي $\bar{\theta}$
السرعة $\bar{v} = (\bar{x})'_t$	السرعة الزاوية: $\omega = (\bar{\theta})'_t$
التسارع $\bar{a} = (\bar{x})''_t$	التسارع الزاوي: $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$
ثابت الصلابة k	ثابت الفتل k
قوة الإرجاع F	عزم الإرجاع Γ
الطاقة الكامنة المرونية: $E_P = \frac{1}{2}kX^2$	الطاقة الكامنة المرونية: $E_P = \frac{1}{2}k\theta^2$
الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$
الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}kX^2_{max}$	الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}k\theta^2_{max}$

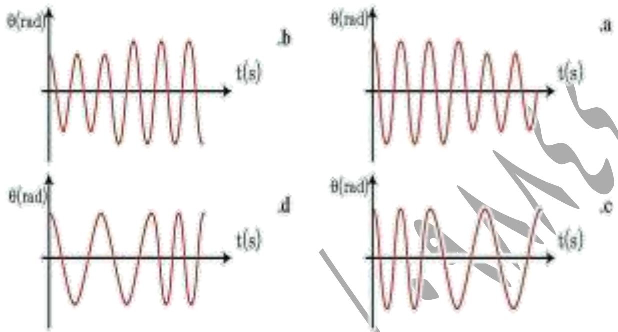
اختبر نفسي:

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1- يهتزُّ نوّاس فتل بدور خاصّ T_0 في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسِه كما هو موضّحٌ بالشكل



فالرسمُ البيانيُّ الذي يعبّرُ عن تغيّر المطال مع الزمن



في هذه الحالة هو: الإجابة الصحيحة: (c)

التوضيح: بازدياد البعد بين الكتلتين يزداد عزم عطالة جملة النواس وبالتالي سيزداد الدور (أي ينقص التواتر) .

2- ميقاتيّة تعتمدُ في عملها على نوّاس فتل كما في الشكل

ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدّم الطلّاب مقترحاتِهم، فإنّ الاقتراح الصحيح هو:

a. زيادةُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

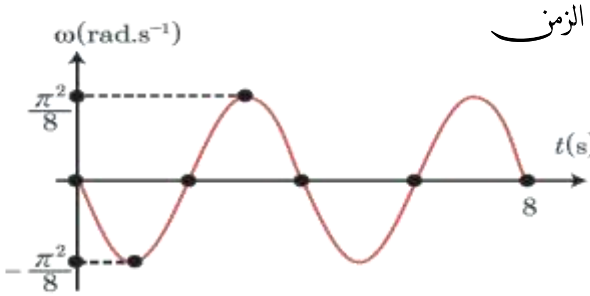
c. إنقاصُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d. زيادةُ قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

الإجابة الصحيحة: (C) إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

التوضيح: التأخير بالوقت يعني الدور أكبر من 2s ويجب إنقاصه لذا يجب إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

3– يمثّلُ الرسمُ البيانيّ المجاورُ تغيّراتِ السرعة الزاويّة لنوّاس فتل بتغيّر الزمن



فإنّ تابع السرعة الزاويّة الذي يمثّله هذا المنحني هو:

a. $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8}\sin 3\pi t$

b. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin 2\pi t$

c. $\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

d. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

الإجابة الصحيحة: (d)

التوضيح: من الشكل نجد: $\omega_{max} = \frac{\pi^2}{8}\,\text{rad.s}^{-1}$

$$2T_0 = 8 \Rightarrow T_0 = 4\,\text{s}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad.s}^{-1}$$

نعوض شروط البدء $(t = 0 \text{ ، } \omega = 0)$ في التابع الزمني للسرعة الزاويّة:

$$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega t + \bar{\varphi})$$

$$0 = -\omega_0 \theta_{max} \sin(0 + \bar{\varphi})$$

$$\sin(\bar{\varphi}) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ أو } \pi\,\text{rad}$$

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة من أجل زمن $t=\frac{T_0}{4}$

إما: الحل $\bar{\varphi} = 0\,rad$ مقبول لأنه يحقق السرعة سالبة في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = 1s$

$$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Rightarrow$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}.1 + 0\right) = -\frac{\pi^2}{8}\,rad.s^{-1}$$

أو: الحل $\bar{\varphi} = \pi\,rad$ مرفوض لأنه يحقق السرعة موجبة في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = 1s$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}.1 + \pi\right) = +\frac{\pi^2}{8}\,rad.s^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{2}t}$$

ثانياً) أجبْ عن الأسئلةِ الآتيةِ:

1_ انطلاقاً من مصونيّة الطاقة الميكانيكيّة برهن أنّ حركة نوّاس الفتل حركةٌ جيبيّةٌ دورانيّة.

$$E_{tot} = E_p + E_k = const$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن:

$$0 = \frac{1}{2}k\,2(\bar{\theta}.\bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_\Delta 2(\bar{\omega}.\bar{\alpha})$$

$0=\omega\,(k\theta + I_\Delta\bar{\alpha})$ لكن $\omega \neq 0$

$$0 = k(\bar{\theta}) + I_\Delta(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta}(\bar{\theta}) \;\dots\dots\dots (1)$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \quad \dots\dots\dots(2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$

ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$ وهذا محقق لأن k, I_Δ موجبان

ودوره $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ وبالتالي حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية توافقية بسيطة.

2- نعلّق ساقين متماثلتين بسلكي فتلٍ متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أنّ: $T_{0_1} = 2T_{0_2}$، أوجدِ العلاقة بين طولَي السلكين.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta\, l}{k'(2r)^4}}$$

$$T_0 = const\sqrt{l}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{const\sqrt{l_1}}{const\sqrt{l_2}}$$

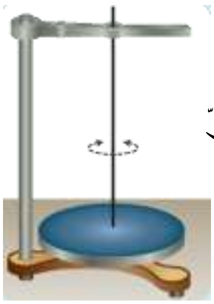
$$\frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\ (\text{بالتربيع}) \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow l_1 = 4l_2$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: يتألّفُ نوّاس فتل من قرصٍ متجانسٍ كتلتُه $m = 2\ kg$، نصفُ قطره $r = 4\ cm$ معلّقٍ من مركزه إلى سلك فتل شاقولي ثابتُ فتله $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$

ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنِه، ونتركُه دون سرعةٍ ابتدائيّةٍ في اللحظة $t = 0$.

المطلوب:



1) احسب الدورَ الخاصّ للنوّاس.

2) استنتج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العام.

3) احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاويّ $\theta = \frac{\pi}{8} rad$، ثم احسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ.

(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومارٍ من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$)

الحل: 1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 2(4 \times 10^{-2})^2$$

$$= 16 \times 10^{-4}\ Kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}}} \Rightarrow T_0 = 2s$$

2) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام: إيجاد ثوابت الحركة (ω_0، θ_{max}، $\bar{\varphi}$):

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$ لأن القرص تُرك دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع الزمني: ($\theta = +\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$ ، $t = 0$):

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cos(0+\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\,\mathrm{rad}$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)$$

2) حساب الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في وضع مطاله الزاوي: $\theta = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{rad}$:

$$E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}\times 16\times 10^{-3}\times\left(\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{8}\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 = \frac{1}{2}\times 16\times 10^{-3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\times 10^{-2} - \frac{1}{8}\times 10^{-2} = \frac{3}{8}\times 10^{-2}$$

$$E_k = 375\times 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

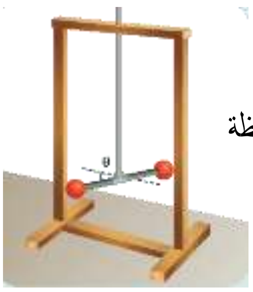
المسألة الثانية: ساقٌ مهملة الكتلة طولها l، تثبّتُ في كلٍّ من طرفيها كتلة نقطيّة $125\,\mathrm{g}$، ونعلق الجملة من منتصفها إلى سلكِ فتل شاقولي ثابتُ فتله $16\times 10^{-3}\,\mathrm{m.N.rad^{-1}}$ لتؤلفَ الجملة نوّاس فتل، نزيحُ الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ وتُترك دون سرعةٍ ابتدائيةٍ لحظة بدء الزمن، فتهتزُّ بحركةٍ جيبيّة دورانيّة، دورُها الخاص $2.5\,\mathrm{s}$.

المطلوب:

1) استنتجِ التابعَ الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام

2) احسبْ قيمة السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورها الأوّل بوضع التوازن.

3) احسبْ طول الساق.



الحل: 1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام: إيجاد ثوابت الحركة (ω_0، θ_{max}، $\bar{\varphi}$):

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ لأن الساق تُركت دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5}\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع الزمني: ($\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ ، $t = 0$):

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cos(0+\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\,\mathrm{rad}$$

بالتالي:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

2) حساب قيمة السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِه الأول بوضع التوازن:

$$\bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = -\frac{4\pi}{5}\times\frac{\pi}{3}\sin(\frac{4\pi}{5}t)$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3}\sin(\frac{4\pi}{5}t)$$

لحظة المرور الأول بوضع التوازن يوافق ربع هزة أي:

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{2.5}{4} = \frac{5}{8}\,s$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3}\sin(\frac{4\pi}{5}\times\frac{5}{8}) = -\frac{8}{3}\sin(\frac{\pi}{2})$$

$$= -\frac{8}{3}\,rad.s^{-1}$$

3) حساب طول الساق:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m_1r_1^2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m_1(\frac{\ell}{2})^2}{k}}$$

$$2.5 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times125\times10^{-3}\times\frac{\ell^2}{4}}{16\times10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow 6.25 = 40\times\frac{2\times125\times10^{-3}\times\frac{\ell^2}{4}}{16\times10^{-3}}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{4\times6.25\times16}{40\times2\times125}} \Rightarrow \ell = 0.2\ m$$

المسألة الثالثة: ساقٌ أفقيّةٌ متجانسةٌ طولها $\ell = ab = 40cm$ معلّقةٌ بسلك فتلٍ شاقوليّ يمرُّ من منتصفها

a) نديرُ الساقَ في مستوٍ أفقيّ بزاوية $\theta = 60^\circ$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t=0$، فتهتزّ بحركة جيبيّة دورانيّة دورُها الخاصّ $T_0 = 1S$

فإذا علمتَ أنّ عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك

$$I_{\Delta/C} = 2\times10^{-3}Kg.m^2$$

1) استنتجِ التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.

2) احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.

3) احسبْ قيمةَ التسارع الزاويّ للساق عندما تصنع زاوية -30° مع وضع توازنها.

b) نثبّت بالطرفين a, b كتلتين نقطيّتين $m_1 = m_2 = 75\ g$، استنتجْ قيمةَ الدورِ الخاصّ الجديد للجملة المهتزّة، ثم احسب قيمةَ ثابت فتل السلك.

C) نقسّمُ سلكَ الفتل قسمين متساويين، ونعلّقُ الساقَ بعدئذٍ بنصفَي السلك معاً؛ أحدُهما من الأعلى، والآخرُ من الأسفل ومن منتصفها، ويثبّت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقوليّاً. استنتجْ قيمةَ الدور الخاصّ الجديد للساق(دون وجود كتل نقطية).

الحل: 1- استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام: إيجاد ثوابت الحركة (ω_0، θ_{max}، $\bar{\varphi}$):

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$ لأن الساق تركت دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$

النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$

لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع الزمني: ($\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$، $t = 0$):

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cos(0+\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t)$$

2-حساب قيمة السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن:

$$\bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = -2\pi \times \frac{\pi}{3}\sin(2\pi t) = -\frac{20}{3}\sin(2\pi t)$$

لحظة المرور الثاني بوضع التوازن يوافق ثلاث أرباع هزة

أي: $t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3\times1}{4} = \frac{3}{4}$ s

$$\bar{\omega} = -\frac{20}{3}\sin(2\pi\frac{3}{4}) = +\frac{20}{3} \text{ rad.s}^{-1}$$

-3 $\alpha = -\omega_0^2\,\theta$

$$\bar{\alpha} = -40 \times (\frac{-\pi}{6}) \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{20\pi}{3} \text{ rad.s}^{-2}$$

b) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$ $\qquad T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}}$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{\sqrt{I_\Delta + 2m_1r_1^2}}{\sqrt{I_\Delta}} = \frac{\sqrt{I_\Delta + 2m_1(\frac{\ell}{2})^2}}{\sqrt{I_\Delta}}$$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{\sqrt{2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}\times400\times10^{-4}}}{\sqrt{2\times10^{-3}}}$$

$$\frac{T'_0}{1} = \sqrt{\frac{8\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}} = 2 \Rightarrow T'_0 = 2 \text{ S}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow k = \omega_0^2 I_\Delta = 40 \times 2 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow k = 8\times10^{-2} \text{ m.N.rad}^{-1}$$

C) $k_1 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{1}{2}l'} = 2k'\frac{(2r)^4}{l'} \Rightarrow k_1 = 2k$

$k_2 = k'\frac{(2r)^4}{\frac{1}{2}l'} = 2k'\frac{(2r)^4}{l'} \Rightarrow k_2 = 2k$

K*=2K+2K=4K

$$T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4k}} = \frac{1}{2}\times 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$T'_o = \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}\times 1 \Rightarrow T'_0 = \frac{1}{2}\ S$$

التفكير الناقد:

نواس فتل مؤلف من سلك فتل ثابت فتله k وقرص معدني عزم عطالته $I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$ وقد ثبت على محيطه كأسان متماثلان يحويان نفس الكمّية من الماء وقد جهز كل منهما بصمّام يتجه نحو مركز القرص. تُزاح الجملة عن موضع توازنها زاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ rad وتُترك دون سرعة ابتدائية في اللحظة t = 0 ، وفي إحدى النوسات تمّ فتح الصمامين هل تزداد السرعة الزاوية أم تنقص ولماذا ؟ الجواب:

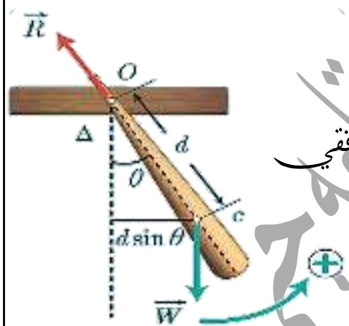
سوف ينقص عزم عطالة الجملة فينقص الدور ويزداد النبض الخاص فتزداد السرعة الزاوية العظمى.

انتهى البحث

النواس الثقلي المركب

تعريفه: هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله في مستوٍ شاقولي حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه، ولا يمر من مركز عطالته.

الدراسة التحريكية للنواس الثقلي:



نعلق جسماً صلباً كتلته m، مركز عطالته c إلى محور دوران أفقي Δ، مار من النقطة O من الجسم حيث البعد $d = Oc$

نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوٍ شاقولي.

تؤثر في الجسم قوتان هما:

قوة ثقله $\vec{W}$ و قوة رد فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$.

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي):

$$\sum \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

وباختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد:

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$: لأن حامل القوة يمر من محور الدوران.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -(d\sin\theta)\,W$$

بالتعويض نجد: $-(d\sin\theta)\,W + 0 = I_\Delta \bar{\alpha}$

$$-mgd\sin\theta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

لكن: $\bar{\alpha} = (\theta)''_t$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\bar{\theta} \dots\dots\dots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\bar{\theta}$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً، ومن ذلك فإن حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية.

و من أجل السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24\ rad = 14^0)$

في هذه الحالة يكون $\sin\bar{\theta} \approx \theta$.

نعوض في العلاقة (1) فنجد:

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\bar{\theta} \dots\dots\dots (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً

من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \dots\dots\dots (3)$$

بالمطابقة بين (2) و (3) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن المقادير (m, g, d, I_Δ) موجبة، فحركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية توافقية بسيطة.

استنتاجُ علاقة الدّور الخاصّ للنواس:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \Rightarrow T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

وهي العلاقةُ العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثّقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السّعة.

T_0 دورُ النوّاس الثّقلي الخاص بسعة زاويّة صغيرة، واحدتُه s

I_Δ عزمُ عطالة الجسم الصُلب، واحدتُه $Kg.m^2$

d بعدُ محور الدوران عن مركزِ عطالة الجسم الصُلب واحدته m

ويمكن حسابها:

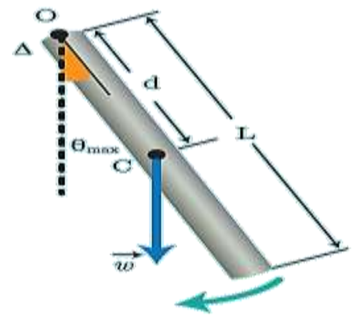
$$d = OC = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 \ldots\ldots\ldots + m_i\bar{r}_i}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}$$

$\bar{r}$ مقدارٌ جبريٌّ نعدُّه موجباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة تحت محور الدوران، وسالباً إذا كان مركزُ عطالة الكتلة المهتزّة فوق محور الدوران.

تطبيق: نوّاسٌ ثقليٌّ مؤلّفٌ من ساقٍ متجانسةٍ طولها L= 0.375m وكتلتُها M معلّقة من طرفها العلويّ بمحور أفقيّ عموديّ على مستويها الشاقوليّ، نزيحُ الساق عن موضع توازنها الشاقوليّ زاويةً صغيرةً ($\theta \le 14^\circ$) ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة. استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة للدّور الخاصّ انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقليّ المركّب ثمّ احسب قيمتَها.

علما أنّ عزمَ عطالة السّاق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها ($I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}M.L^2$).

الحل:



يُعطى دورُ النوّاس الثّقلي بالعلاقة: $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

لإيجاد عزم عطالة السّاق حول المحور المارّ من O نطبّقُ نظرية هايغنز:

$$d = \frac{L}{2} \qquad I_{\Delta/O} = I_{\Delta/c} + Md^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

نعوّضُ في علاقة الدّور:

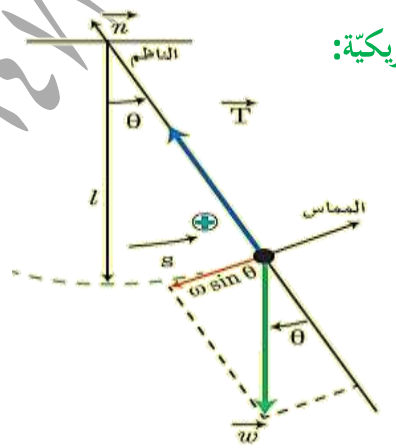
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M.L^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.375}{3\times 10}} = 1\ S$$

النوّاس الثقليّ البسيط:

نظريّاً: نقطة ماديّة تهتزّ بتأثير ثقلها على بُعد ثابت من محور أفقيّ ثابت.

عمليّاً: كرةٌ صغيرةٌ كتلتُها m كثافتُها النسبيّة كبيرةٌ معلّقةٌ بخيطٍ مهملِ الكتلة لا يمتط طولُه كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

الدراسة التحريكيّة:



الدراسة التحريكيّة:

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{W} = m\vec{g}$ ثقل الكرة.

$\vec{T}$ توتّر الخيط.

لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\Sigma \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = 0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يمرّ من محور الدوران Δ.

$$0 - m g \ell \sin\bar\theta = m\ell^2 (\bar\theta)''_t$$

$$-g\sin\bar\theta = \ell(\bar\theta)''_t$$

$$(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{\ell}\sin\bar\theta$$

نعوّض في العلاقة السابقة: $(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وفي حالة السّعات الزاويّة الصغيرة: $\theta \le 0.24\ \text{rad}$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

$$(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{l}\bar\theta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar\varphi)$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرّتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar\theta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقّقٌ لأنّ l, g مقداران موجبان، فحركة النوّاس الثقليّ البسيط من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ انسحابية (دائرية) توافقية بسيطة .

طريقة ثانية: القوى الخارجيّة المؤثّرة في الكرة:

ثقل الكرة $\vec{w} = m\vec{g}$ و توتّر الخيط $\vec{T}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور المَماسّ الموجّه بجهة إزاحة الكرة:

$$-mg\sin\theta + 0 = ma_t$$

$$a_t = -g\sin\theta$$

لكن $\bar{a}_t = r\bar\alpha = l\bar\alpha = l(\bar\theta)''_t$

نعوّض في العلاقة السابقة فنجد: $(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وفي حالة السّعات الزاويّة الصغيرة: $\theta \le 0.24\ \text{rad}$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

$$(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{l}\bar\theta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

معادلةٌ تفاضليّةٌ من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar\varphi)$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرّتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar\theta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقّقٌ لأنّ l, g مقداران موجبان، فحركة النوّاس الثقليّ البسيط من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ توافقية بسيطة .

استنتاجُ علاقة الدّور الخاصّ للاهتزاز:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

وهي علاقةُ الدّور الخاصّ للنوّاس الثّقلي البسيط في السعات الزاويّة الصغيرة.

ملاحظة: يمكنُ الوصول لعلاقةِ الدّور الخاصّ للنوّاس البسيط انطلاقاً من العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي المركّب في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة، وذلك بتعويض كلٍ من:

$$d = l \,,\quad I_\Delta = mr^2 = ml^2$$

في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

استنتج:

1- لا يتعلّقُ دورُ النوّاس البسيط بكتلته، ولا بنوعِ مادّة كرته.

2- النوسات صغيرة السّعة لها الدورُ نفسُه (متواقتة فيما بينها).

3- يتناسبُ دورُ النوّاس البسيط من أجل السعات الزاويّة الصغيرة:

طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط.

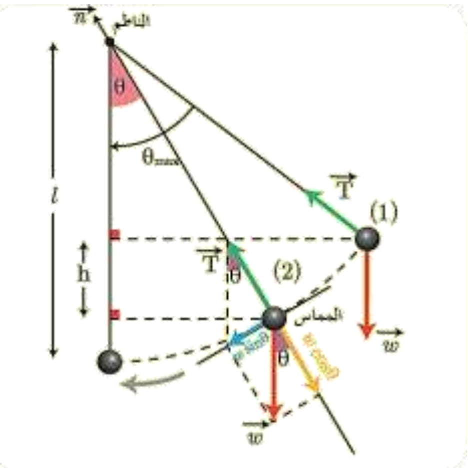
عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبيّة الأرضية.

يعطى دورُ النوّاس الثّقلي في حال السّعات الزاويّة الكبيرة بالعلاقة:

$$\boxed{T_0' \approx T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]}$$

استنتاجُ العلاقة المحدّدة لسرعة كرة النوّاس وعلاقة توتّر خيط التعليق في نقطة من مسارها:

نزيحُ كرة النوّاس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة: لإيجاد العلاقة المحدّدة لسرعة الكرة في الوضع (2)



القوى الخارجيّة المؤثّرة:

ثقل الكرة $\vec{w}$، توتر الخيط $\vec{T}$.

نطبّق نظريّة الطاقة الحركيّة بين وضعين:

الأوّل: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max} ويترك بدون سرعة ابتدائية.

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ.

$$\Delta \bar{E}_{K(1\to2)} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\bar{W}_{\vec{W}} = mgh$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأنّ حامل $\vec{T}$ يعامدُ الانتقال في كلّ لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

وبملاحظة الشكل نجدُ:

$$h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max}$$

$$h = l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

نعوّضُ: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$$v^2 = 2gl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالةٌ خاصّة: عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$ تصبحُ:

$$v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\theta_{max})}$$

لإيجاد العلاقة المحدّدة لقوّة توتّر الخيط في الوضع (2) نطبّق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W\cos\theta + T = ma_c$$

لكنّ التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$

$$T = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + mg\cos\theta$$

$$T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$

$$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

حالةٌ خاصّة: عند المرور بالشاقول

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

الطاقةُ الميكانيكيّةُ للنوّاس الثقليّ البسيط:

إنّ الطاقة الميكانيكيّة للنوّاس الثقليّ البسيط ثابتة بإهمال القوى المبدّدة للطاقة، إذْ يهتزُّ بسعة زاويّة ثابتة θ_{max} إلى جانبَي موضع توازنه الشاقولي.

إنّ الطاقة الميكانيكيّة هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقاليّة والحركيّة حيث أنّ مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقاليّة هو المستوي الأفقي المارّ من مركز عطالة الكرة عند مرور النوّاس في وضع توازنه الشاقولي.

اختبر نفسي:

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1- قمتَ بزيارة بيتِ جدّك، وطلبتْ إليك جدّتك تصحيحَ الميقاتيّة المعلّقة على الجدار، وهي مؤلفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً، فاتّصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماما عندما كانت الميقاتيّة تشيرُ إلى السادسة وخمس دقائق، ولتصحيح الوقت يجبُ:

a) إيقافُ الميقاتيّة، وخفضُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها

b) إيقافُ الميقاتيّة، ورفعُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها

c) تصحيحُ عقرب الدقائق، وإعادته ليشيرَ الوقتُ إلى السادسة تماما.

d) إيقافُ الميقاتيّة مدّة خمس دقائق، ثمّ إعادةُ تشغيلها مرّة أخرى.

الإجابة الصحيحة: (a)

التوضيح: الميقاتية تقدم لذا يجب إبطاؤها بتكبير دورها

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$ لتصبح حركة القرص أبطأ وانخفاض القرص يؤدي لزيادة عزم العطالة وتكبير الدور.

2- ميقاتيان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلّي، نضع الأولى بالطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة.

a) تشيران إلى التوقيت نفسه.

b) تقدّمُ الثانية، ويجب تعديلها.

c) تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلها.

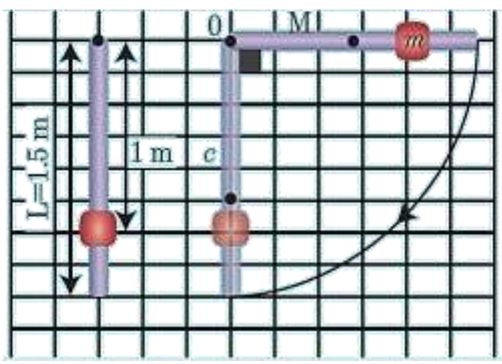
d) تؤخرُ الأولى، ويجبُ تعديلها.

الإجابة الصحيحة: تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلها.

التوضيح: في الطابق الأخير تنقص قيمة الجاذبية الأرضية وبالتالي تزداد قيمة الدور.

ثانياً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: يتألفُ نوّاسٌ ثقليٌّ مركّبٌ من ساقٍ شاقوليّةٍ متجانسةٍ كتلتُها M = 0.5 kg، طولُها 1.5m، يمكنُها أن تنوسَ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من طرفها العلوي، ومثبّت عليها كتلةٌ نقطيّةٌ $m' = 0.5kg$ على بعد 1m من هذا الطرف العلوي كما في الشكل المجاور



1- احسبْ دورَ هذا النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

2- نزيحُ جملة النوّاس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{\pi}{2} rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية احسب الطاقة الحركيّة للنوّاس لحظة مروره بالشاقول، ثمّ احسب السرعة الخطيّة للكتلة النقطيّة m' عندئذٍ.

(عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}ML^2$)

الحل: 1) حساب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس:

- عزم عطالة الساق: حسب نظرية هايغنز:

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + Md^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{3} \times 0.5 \times (1.5)^2 = \frac{3}{8} Kg.m^2$$

- عزم عطالة الكتلة النقطية:

$$I_{\Delta/m'} = m'r'^2 = 0.5 \times (1)^2 = \frac{1}{2}\ Kg.m^2$$

- عزم عطالة جملة النواس: $I_{\Delta/جملة} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}\ Kg.m^2$

حساب d: $d = \frac{M\bar{r}_1 + m'\bar{r}_2}{M+m'}$

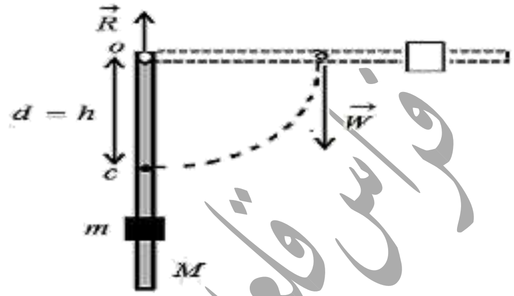
$$d = \frac{M\frac{L}{2} + mr'}{M+m} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times 1}{0.5+0.5} = \frac{7}{8}\ m$$

$$m_{جملة} = (m' + M) = 0.5+0.5=1kg$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times10\times\frac{7}{8}}} = 2\ S$$

2) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$ وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$



$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$E_k - 0 = (M + m')gh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_k = (M + m')gh$$

$$h = d \Rightarrow E_k = (M + m')gd$$

$$E_k = (0.5 + 0.5) \times 10 \times \frac{7}{8} = \frac{70}{8} \text{ J}$$

- السرعة الزاوية عند المرور بالشاقول:

$$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}}$$

$$\omega = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ rad.s}^{-1}$$

- السرعة الخطية عند المرور بالشاقول:

$$v = \omega r = 2\sqrt{5} \times 1 = 2\sqrt{5}\ m.s^{-1}$$

المسألة الثانية: خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40\ cm$، نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 100\ g$،

المطلوب:

1_ يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية θ_{max}، ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2 m.s^{-1}$ استنتج قيمة الزاوية θ_{max} .

2_ استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمتها .

الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$

وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$$h = l(1 - \cos\theta_{max})$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gl(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{(2)^2}{2(10)(0.4)}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

2) طريقة أولى للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1 - \cos\theta_{max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg\cos\theta_{max} + mg$$

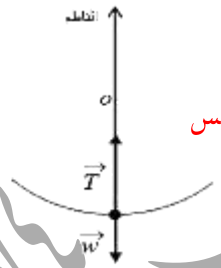
$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = 0.1\times10(3 - 2\times0.5) = 2N$$

طريقة ثانية للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$



بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = mg + m\frac{v^2}{l} = m(g + \frac{v^2}{l})$$

$$T = 0.1(10 + \frac{4}{0.4}) \Rightarrow T = 2N$$

المسألة الثالثة: نعلّق كرةً صغيرةً نعدّها نقطةً ماديّةً، كتلتها m=0.5kg، بخيطٍ مهمل الكتلة، لا يمطّ، طوله $l = 1.6\ m$، لتؤلّف نوّاساً ثقليّاً بسيطاً، ثمّ نزيح الكرة إلى مستوٍ أفقيٍّ يرتفع h = 0.8m عن المستوي الأفقيّ المارّ منها وهي في موضع توازنها الشاقوليّ، ليصنع خيط النوّاس مع الشاقول زاوية θ_{max}، ونتركها دون سرعة ابتدائيّة و المطلوب:

1- استنتج بالرموز العلاقة المحدّدة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثمّ احسبْ قيمتها موضّحاً بالرسم.

2- استنتجْ قيمة الزاوية θ_{max} ثمّ احسبْ قيمتها.

3- احسبْ دورَ هذا النوّاس.

4- استنتجْ بالرموز العلاقة المحدّدة لشدّة قوّة توتّر الخيط عند المرور بالشاقول، ثمّ احسب قيمته

الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$ وبدون

سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times0.8}$$

$$v = 4\ m.s^{-1}$$

2) $h = l(1 - \cos\theta_{max})$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{0.8}{1.6}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

3) حساب دور النواس: $T_0' \approx T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$

$$T_0' \approx T_0\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right] \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right] \Rightarrow$$

0947205146
0988440574

$$\Rightarrow T'_0 \approx 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}}\left[1+\frac{(\frac{\pi}{3})^2}{16}\right] \approx 0.8\pi\left[1+\frac{(\frac{10}{9})}{16}\right]$$

$$T'_0 \approx 2.5\left[1+\frac{10}{144}\right] \approx 2.5(\frac{154}{144}) \approx 2.67\ S$$

4) طريقة أولى للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظمي الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1-\cos\theta_{max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg\cos\theta_{max} + mg$$

$$T = 3mg - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

$$T = 0.5\times10(3-2\times0.5) = 10N$$

طريقة ثانية للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظمي الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = mg + m\frac{v^2}{l} = m(g+\frac{v^2}{l})$$

$$T = 0.5(10+\frac{16}{1.6}) \Rightarrow T = 10N$$

المسألة الرابعة: نثبت ساقٌ شاقوليّةٌ، مهملة الكتلة، طولها $l = 1\text{m}$

نثبت في منتصفها كتلةً نقطيّة $m_1 = 0.4\ kg$ ونثبتُ في طرفها السفلي كتلة نقطيّة $m_2 = 0.2\ kg$ لتؤلفَ الجملةُ نوّاساً ثقليّاً مركباً يمكنُه أن ينوسَ في مستوٍ شاقوليٍ حول محورٍ أفقيٍ مارٍ من الطرف العلوي.

والمطلوب: 1- احسبْ دورَ نوساتِها صغيرةِ السّعة.

2_ نزيحُ الجملةَ عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\ rad$ ونتركُها دون سرعة ابتدائية، فتكونُ السرعةُ الخطيّةُ لمركز عطالة جملة النوّاس لحظةَ مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$

المطلوب: a- احسب السرعة الخطيّة للكتلة النقطية m_2

b- استنتجْ قيمة الزاويةَ θ_{max} .

الحل: 1) حساب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس: (الساق مهملة الكتلة)

$$I_{\Delta/0} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2L^2$$

$$= 0.4\times(\frac{1}{2})^2 + 0.2(1)^2 = 0.3Kg.m^2$$

حساب d: $d = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2}$

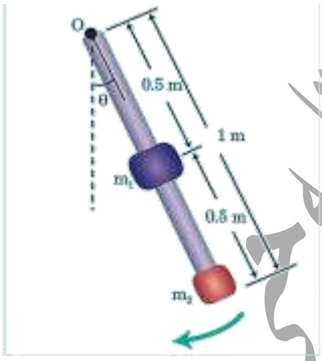
$$d = \frac{m_1(\frac{L}{2}) + m_2L}{m_1+m_2} = \frac{0.4\times\frac{1}{2}+0.2\times1}{0.4+0.2} = \frac{2}{3}\ \text{m}$$

$m_{جملة} = (m_1+m_2) = 0.4+0.2 = 0.6\text{kg}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{(0.6)\times 10\times\frac{2}{3}}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{3}\ s$$

$$v_c = \omega r_c \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{r_c} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad.s^{-1}\ (a$$

$$v_{m2} = \omega r_{m2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m.s^{-1}$$



b) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\bar{\theta}_1 = \theta_{max}$ وبدون سرعة ابتدائية.

الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$E_k - 0 = (m_1 + m_2)gh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = (m_1 + m_2)gd(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{(m_1+m_2)gd} =$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{0.5\times 0.3\times(\frac{2\pi}{\sqrt{3}})^2}{0.6\times 10\times\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

المسألة الخامسة: يتألف نوّاس ثقلي من ساقٍ شاقوليّةٍ، مهملة الكتلة طولها L، تحمل في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطية m' نعلّق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد عن طرف الساق العلوي $\frac{L}{4}$، نزيحُ الجملة عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{1}{2\pi}$ rad ونتركها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ فتهتز بدور خاص $T_0 = 2.5\ s$. المطلوب:

1- استنتج التابعَ الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النوّاس انطلاقاً من شكله العام.

2- استنتجْ بالرموز العلاقة المحدّدة لطول الساق، ثمّ احسب قيمته.

3- احسبْ قيمة السرعة الزاويّة العُظمى للحركة (طويلة).

4- لنفرضْ أنّه في إحدى النّوسات انفصلتِ الكتلةُ السفليّة عن الساق، استنتج الدورَ الخاصّ الجديد للجملة في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

الحل: 1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام:

إيجاد ثوابت الحركة ω_0، θ_{max}، $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad.s^{-1}$

السعة الزاوية: $\theta_{max} = \frac{1}{2\pi} rad$ لأن الساق تركت دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الحركة.

حساب $\bar{\varphi}$: لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع الزمني: t=0 كان $\theta = \theta_{max}$

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 rad$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\cos(\frac{4\pi}{5}t)$$

2) يعطى دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس:

$$I_{\Delta/0} = m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}m'L^2$$

حساب d: $d = \frac{-m'\frac{L}{4}+m'\frac{3L}{4}}{m'+m'} = \frac{m'\frac{L}{2}}{2m'} = \frac{L}{4}\ m$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{8}m'L^2}{2m'g\frac{L}{4}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{T_0^2 g}{5\pi^2} = \frac{(2.5)^2\times 10}{5\times 10} = 1.25\ m$$

3) $\omega_{max} = |\pm\omega_0\theta_{max}| \Rightarrow \omega_{max} = \frac{4\pi}{5}\times\frac{1}{2\pi}$

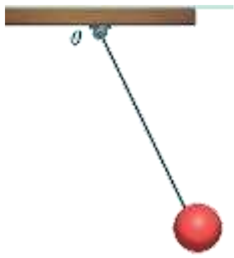
$$\omega_{max} = 0.4 rad.s^{-1}$$

4) بعد انفصال الكتلة السفلية يصبح النواس في حالة توازن قلق فيهتز ليصبح في حالة توازن مستقر وتصبح كتلة النواس

m′ عزم عطالة , $I_{\Delta/c} = m'(\frac{L}{4})^2$, $d = \frac{L}{4}$

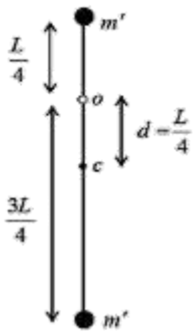
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m'gd}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{m'(\frac{L}{4})^2}{m'g\frac{L}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.25}{4\times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ s$$



التفكير الناقد: عند انعدام الثقل الظاهري ضمن المحطة الفضائية:

1_ لدينا كرة كتلتها m معلقة بخيط مهمل الكتلة طوله l كما هو موضح بالشكل جانباً لتشكل نواساً بسيطاً عند سطح الأرض ما قيمة الدور على متن المحطة الفضائية مع التعليل.



2_ كيف يمكن جعله يهتز بحركة جيبية توافقية بسيطة؟

الجواب: 1- في محطة الفضاء تكون قوة الثقل مساوية بالقيمة ومعاكسة بالجهة قوّة العطالة النابذة الناتجة عن الدوران فيحدث ما يسمّى انعدام الثقل الظاهري فيصبح الدور لانهائي.

2- لجعل الكرة تهتز بحركة جيبية توافقية نصل الكرة بنابض مرن فتصبح الحركة انسحابية توافقية بسيطة.

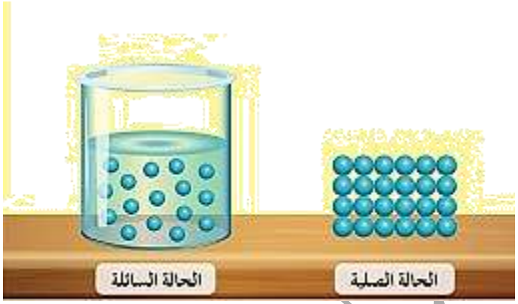
_ _ _ _ _ انتهى البحث _ _ _ _ _

ندعوكم للانضمام إلى قناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء

إعداد المدرس: فراس قلعه جي

ميكانيكُ السوائلِ المتحركة



تتميّزُ السوائلُ والغازاتُ **بقوى تماسك ضعيفة نسبيّاً** بينَ جزيئاتِها، فهيَ لا تحافظُ على شكلٍ معيّنٍ، وتتحرّكُ جزيئاتُها بحيث تأخذُ شكلَ الوعاء الذي توضع فيه، وهيَ تستجيبُ بسهولةٍ للقوى الخارجيّةِ التي تحاولُ تغييرَ شكلِها.

تعريف جسيمَ السائل: وهو جزءٌ منَ السائلِ أبعادُهُ صغيرةٌ جداً بالنسبةِ لأبعادِ السائلِ وكبيرةٌ بالنسبةِ لأبعادِ جزيئاتِ السائلِ.

تعاريفُ أساسيّةٌ:

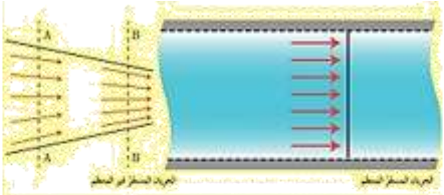
خط الانسياب (خطّ الجريان):

خطٌّ وهميٌّ يبيّنُ المسارَ الذي يسلكُهُ جسيمُ السائلِ أثناءَ جريانِه ويمسُّ في كلِّ نقطةٍ من نقاطه شعاعَ السرعةِ في تلكَ النقطةِ.

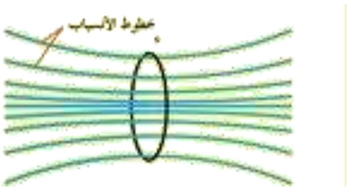
الجريانُ المستقرُّ: هو الجريانُ الذي تكونُ فيه سرعةُ جسيماتِ السائلِ ثابتةً مع مرورِ الزمنِ في النقطةِ نفسِها من خطِّ الانسيابِ.

وإذا كانت السرعةُ ثابتةً في جميعِ نقاطِ السائلِ بمرورِ الزمنِ فإنَّ الجريانَ المستقرَّ يكونُ منتظماً.

وإذا تغيّرتِ السرعةُ من نقطةٍ إلى أخرى بمرورِ الزمنِ كانَ الجريانُ المستقرُّ غيرَ منتظم.



انبوبُ التدفّق: إذا أخذنا مساحةً صغيرةً عموديّةً على اتّجاهِ جريانِ سائلٍ جريانه مستقرّ، ورسمنا على محيطِ هذه المساحة خطوطَ الانسيابِ نحصلُ على أنبوبٍ وهميٍّ يحتوي السائلَ يُدعى انبوبَ التّدفّق.



ميزات السائل المثالي:

1) غيرُ قابلٍ للانضغاط: كتلتُه الحجمية ثابتةٌ مع مرورِ الزمنِ.

2) عديمُ اللّزوجة: قوى الاحتكاكِ الداخليِّ بينَ مكوّناته مهملة عندما تتحرّكُ بالنسبةِ لبعضِها البعض، وبالتالي لا يوجد ضياع للطاقة.

3) جريانُه مستقرّ: أي أنَّ حركة جسيماته لها خطوطُ انسيابٍ محدّدة وسرعة جسيماته عند نقطة معيّنة تكونُ ثابتةً بمرورِ الزمنِ.

4) جريانُه غيرُ دورانيّ: لا تتحرّكُ جسيماتُ السائلِ حركة دورانيّة حول أيِّ نقطةٍ في الجريانِ.

0988440574
0947205146

معادلة الاستمراريّة:

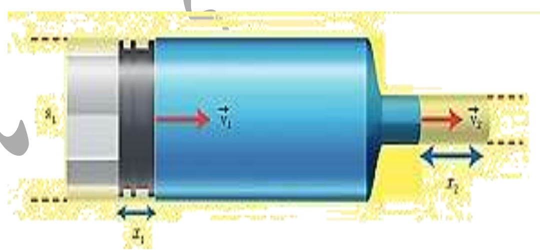
معدّلُ التدفّق الكلّي Q: هو كتلة كميّة السائل التي تعبُر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن.

ونعبّرُ عنه بالعلاقة: $Q = \frac{m}{\Delta t}$ ، وتُقدّرُ بواحدة $Kg.s^{-1}$

معدّلُ التدفّق الحجمي Q': هو حجم كميّة السائل التي تعبُر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن.

ونعبّرُ عنه بالعلاقة: $Q' = \frac{V}{\Delta t}$ ، وتُقدّرُ بواحدة $m^3.s^{-1}$.

الاستنتاجُ الرياضيّ لمعادلة الاستمراريّة:



لدينا سائل يتحرّك داخل أنبوبٍ مساحة كلٍّ من مقطعَي طرفيهِ تختلفُ عن الأخرى s_1, s_2 .

وبفرض أنّ: v_1 سرعةُ السائل عبر المقطع s_1

v_2 سرعةُ السائل عبر المقطع s_2

إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_1 لمسافة x_1 في الزمن Δt يكون: $V_1 = s_1 x_1$

لكنّ: $x_1 = v_1 \Delta t$ وبالتالي: $V_1 = s_1 v_1 \Delta t$

إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_2 لمسافة x_2 في الزمن Δt يكون: $V_2 = s_2 x_2$

لكنّ: $x_2 = v_2 \Delta t$ بالتالي: $V_2 = s_2 v_2 \Delta t$

وبما أنّ: **حجم كميّة السائل التي عبرت المقطع s_1 تساوي حجم كميّة السائل التي عبرت المقطع s_2 المدّة الزمنيّة نفسها**

فإنّ: $Q'_1 = Q'_2$

$$\frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t}$$

$$\frac{s_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 v_2 \Delta t}{\Delta t}$$

$$s_1 v_1 = s_2 v_2$$

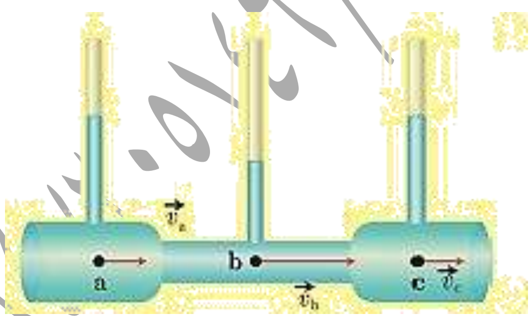
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1}{s_2}$$

أيْ أنّ: سرعة تدفّق السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفّق منه السائل.

نتيجة: تزدادُ سرعة تدفّق السائل في أنبوب بنقصان مساحة مقطع الأنبوب.

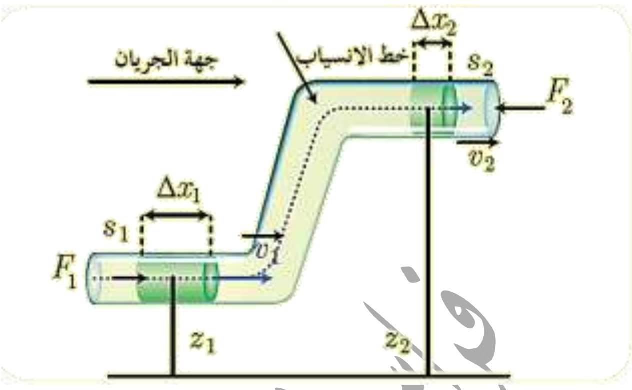
وبالتالي: $Q' = s_1 v_1 = s_2 v_2 = const$.

معادلةُ برنولي في الجريان المستقرّ:



في الشكل المجاور: سائلٌ جريانُه مستقرّ عبر انبوب أفقيّ ذي مقاطعَ مختلفة.

الاستنتاجُ الرياضيُّ لمعادلة برنولي:



عندما تمرُّ كميّةٌ صغيرةٌ من السائل بين مقطعين حيثُ مساحةُ المقطعِ الأوّل s_1 والضغطُ عنده p_1، وسرعةُ الجريان فيه v_1، والارتفاعُ عن مستوٍ مرجعيٍّ z_1 ومساحةُ المقطعِ الثاني s_2، والضغطُ عنده p_2، وسرعةُ الجريان فيه v_2، والارتفاعُ عن مستوٍ مرجعيٍّ z_2.

إنّ العملَ الكلّيَّ المبذول لتحريك كتلة السائل من المقطع الأوّل إلى المقطع الثاني يساوي مجموع عمل قوّة الثقل، وعمل قوّة ضغط السائل.

عملُ قوّة الثقل: $W_w = -mg(z_2 - z_1)$

عملُ قوّة ضغط السائل: يتأثّر سطحُ المقطع s_1 بقوة F_1 لها جهةُ الجريان، وتنتقلُ نقطةُ تأثيرها مسافة قدرُها Δx_1، في مدّةٍ زمنيّة Δt، فتقوم بعملٍ محرّكٍ (موجب).

$$W_1 = F_1 \Delta x_1$$

لكن: $F_1 = p_1 s_1 \Rightarrow W_1 = p_1 s_1 \Delta x_1$

لكن: $\Delta V = s_1 \Delta x_1 \Rightarrow W_1 = p_1 \Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبرُ المقطع s_1 في المدّة الزمنيّة Δt

يتأثّرُ سطح المقطع s_2 بقوة F_2 معيقة لجريان السائل، أي تعاكسُ جهةَ الجريان، وتنتقلُ نقطةُ تأثيرها مسافةً قدرُها Δx_2 في المدة الزمنيّة Δt (فتقوم بعملٍ مقاومٍ سالب).

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2$$

لكن: $F_2 = p_2 s_2 \Rightarrow W_2 = -p_2 s_2 \Delta x_2$

لكن: $\Delta V = s_2 \Delta x_2 \Rightarrow W_2 = -p_2 \Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبرُ المقطع s_2 في المدّة الزمنيّة Δt نفسها.

وهي تساوي حجم كميّة السائل التي تعبرُ المقطع s_1 في المدّة الزمنيّة Δt وذلك لأنّ السائلَ غيرُ قابلٍ للانضغاط.

ويصبح العمل الكلّيّ $W_T = W_w + W_1 + W_2$

$$W_T = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V - mg(z_2 - z_1)$$

وبحسب مصونيّة الطاقة (أو نظرية الطاقة الحركية) فإنّ:

$$W_T = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

بمساواة العلاقتين نجد:

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V - mg(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$p_1 \Delta V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = p_2 \Delta V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2$$

نقسم الطرفين على ΔV علماً أنّ: $\rho = \frac{m}{\Delta V}$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

معادلة برنولي: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = const$

وتنصُّ نظرية برنولي على ما يلي: إنّ مجموعَ الضغط والطاقة الحركيّة لواحدة الحجوم، والطاقة الكامنة الثقاليّة لواحدة الحجوم تساوي مقداراً ثابتاً عند أيّ نقطةٍ من نقاط خطّ الانسياب لسائل جريانُهُ مستقرٌّ.

فالمقدار $\rho g z$ يمثّل الطاقة الكامنة الثقاليّة لواحدة الحجوم من السائل

ويمثّل المقدار $\frac{1}{2}\rho v^2$ الطاقة الحركية لوحدة الحجوم من السائل.

والضغطُ p طاقة واحدة الحجوم ويمكنُ أنْ نتحقّق من ذلك لو كتبنا واحدات الضغط إذْ نجدُ:

$$1\ Pa = 1\frac{N}{m^2} = 1\frac{N.m}{m^3} = 1\frac{J}{m^3}$$

حالة خاصّة: إذا كان الأنبوبُ أفقيّاً:

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

ونستنتج: أنه ينقصُ ضغطُ السائل كلّما ازدادت سرعته.

تطبيقاتٌ على معادلةِ برنولي:

1) سكونُ السوائل ومعادلةُ المانومتر:

يمكنُ أنْ نحصلَ على معادلة المانومتر من معادلة برنولي بفرض أنّ المائعَ ساكنٌ في الأنبوب أيْ أنّ: $v_1 = v_2 = 0$

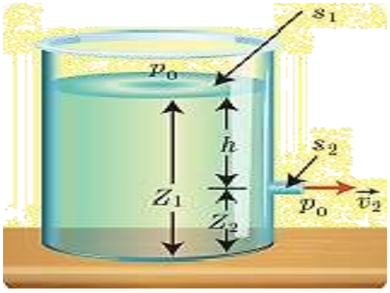
نعوّضُ في معادلة برنولي فنجدُ:

$$p_1 - p_2 = \rho g z_2 - \rho g z_1 = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g h$$

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

وهذه معادلةُ المانومتر: قانون الضغط في الموائع الساكنة.

2) نظريّة تورشيللي:



يحتوي خزّانٌ على سائل كتلته الحجميّة ρ مساحة سطح مقطعه s_1 كبيرة بالنسبة إلى فتحةٍ جانبيّةٍ مساحة مقطعها صغيرةٌ s_2 تقعُ قربَ قعره وعلى عمق $z_1 - z_2 = h$ من السطح الحرّ للسائل.

فما السرعةُ التي يخرجُ بها السائلُ من الفتحة الجانبيّة؟

نطبّقُ معادلة برنولي على جزءٍ صغيرٍ من السائل انتقل من سطح الخزّان بسرعة $v_1 \approx 0$ ليخرجَ من الفتحة s_2 إلى الوسط الخارجيّ بسرعة v_2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

إنّ السّطح المفتوح، والفتحة معرّضتان للضغط الجويّ النظاميّ، ولذلك $p_1 = p_2 = p_0$

$$\rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

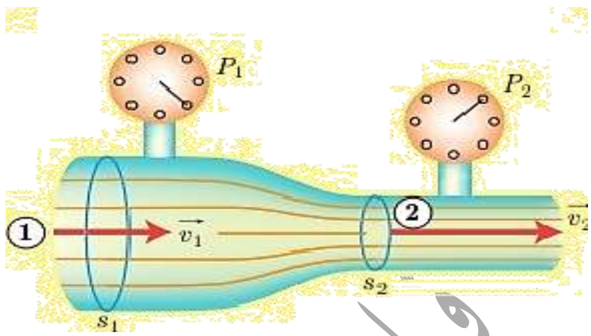
$$\frac{1}{2}v_2^2 = g z_1 - g z_2$$

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

إنّ سرعة خروج السائل تساوي السرعةَ التي يسقطُ بها جسمٌ مائع سقوطاً حرّاً من ارتفاع h.

تُدعى العلاقةُ السابقةُ بنظرية تورشيللي، وتنطبقُ على أيّ فتحةٍ في الوعاء، سواء في قعره كانت أم في جدارها الجانبيّ.

3) انبوب فنتوري:



يتألّف أنبوب فنتوري من أنبوب مساحة مقطعه s_1 يجري فيه سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1، فيصل لاختناق مساحته s_2، ولمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيس والاختناق نستعمل أنبوب فنتوري.

نطبّق معادلة برنولي بين النقطتين 1,2 اللتين تقعان في المستوي الأفقي نفسه.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[(\frac{v_2}{v_1})^2 - 1\right]v_1^2$$

لكن: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1}{s_2}$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[(\frac{s_1}{s_2})^2 - 1\right]v_1^2$$

ويُقاس فرق الضغط بين نقطتين باستخدام جهاز قياس الضغط

لدينا: $s_1 > s_2$ إذا: $P_1 > P_2$ أي أن الضغط في الاختناق أقلّ من الضغط في الجذع الرئيس للأنبوب. يُستفادُ من هذه الخاصية في الطّب، فقد تتناقص مساحة مقطع الشرايين في منطقةٍ ما نتيجة تراكم الدهون والشحوم، وهذا يعيق جريان الدّم في هذه الشرايين، ويتناقص ضغط الدّم في المقاطع المتضيّقة عن قيمتها الطبيعيّة اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجيّة.

ونستنتج: أنه ينقص ضغط السائل كلّما نقصت مساحة المقطع.

اختبر نفسي:

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ ممّا يأتي:

1) عندما تهبُّ رياحٌ أفقيّة عند فوّهة مدخنة شاقوليّة فإنّ سرعة خروج الدخان من فوّهة المدخنة:

a) تزداد. b) تنقص.

c) تبقى دون تغيّر. d) تنعدم.

ويمكن تفسير النّتيجة وفق:

a) مبدأ باسكال. b) مبدأ برنولي.

c) قاعدة أرخميدس. d) معادلة الاستمراريّة.

الإجابة الصحيحة: a) تزداد وفق b) مبدأ برنولي.

2) يتّصف السائل المثالي بأنّه:

a) قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

b) غيرُ قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

c) غيرُ قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

d) قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

الإجابة الصحيحة: c) غيرُ قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

3) خرطومٌ مساحة مقطعه عند فوّهة دخول الماء فيه s_1 وسرعة جريان الماء عند تلك الفوّهة v_1 فتكون سرعة خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم حيثُ أن $S_2 = \frac{1}{4} S_1$ مساوية:

a) v_1 b) $\frac{v_1}{4}$ c) $4v_1$ d) $16v_1$

الإجابة الصحيحة: c) $4v_1$

$$s_1v_1 = s_2v_2 \Rightarrow s_1v_1 = \frac{1}{4}s_1v_2 \Rightarrow v_2 = 4v_1$$

ثانياً: أعطِ تفسيراً علمياً باستخدام العلاقات الرياضيّة المناسبة لكلٍّ ممّا يأتي:

س1_ اختلاف سرعة جريان الماء عبر مقاطع مختلفة المساحة في مجرى نهر جريانه أفقي.

الجواب: حسب معادلة الاستمرارية $s_1v_1=s_2v_2$ السرعة تتناسب عكساً مع مساحة مقطع مجرى النهر , لذلك تزداد سرعة الماء عندما تنقص مساحة مقطع مجرى النهر وتنقص سرعة الماء عندما تزداد مساحة مقطع مجرى النهر .

س2_ عدم تقاطع خطوط الانسياب لسائل.

الجواب: خط الانسياب يمس في كل نقطة شعاع سرعة جسيم السائل في تلك النقطة وتقاطع خطوط الانسياب يعني وجود أكثر من سرعة للجسيم بالمكان نفسه وباتجاهات مختلفة وباللحظة ذاتها وهذا غير ممكن.

س3_ ينقص مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم عندما توجه فوهته للأسفل، ويزداد مقطعه عندما توجه فوهته رأسياً للأعلى.

الجواب: عندما توجه فوهة الخرطوم للأسفل تزداد سرعة جريان الماء كلما اقترب الماء من سطح الأرض فينقص سطح مقطع الماء المتدفق حسب معادلة الاستمرارية وعندما توجه فوهة الخرطوم للأعلى تنقص سرعة جريان الماء كلما ابتعد الماء عن سطح الأرض فيزداد سطح مقطع الماء المتدفق

س4_ يندفع الماء بسرعة كبيرة من ثقب صغير حدث في جدار خرطوم ينقل الماء.

الجواب: سرعة اندفاع الماء من ثقب صغير هي سرعة كبيرة حسب معادلة الاستمرارية $s_av_a = s_bv_b$ فإن:

. $s_b > s_a \Rightarrow v_b < v_a$

س5_ تستطيع خراطيم سيارات الإطفاء إيصال الماء لارتفاعات ومسافات كبيرة.

الجواب: فوهة الخرطوم ضيقة لذا تزداد سرعة اندفاع الماء فتزداد طاقته الحركية فيصل الماء إلى ارتفاعات أعلى ومسافات أطول.

س6_ تكون مساحة فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة؟

الجواب: لكي يندفع الغاز منها بسرعة كبيرة.

س7_ لجعل الماء المتدفق من فتحة خرطوم يصل إلى مسافات أبعد نغلق جزءاً من فتحة الخرطوم.

الجواب: نغلق جزءاً من فتحةِ الخرطوم لكي تزداد سرعة جريان الماء فتزداد طاقته الحركية لذا يصل إلى ارتفاعات أعلى ومسافات أطول.

حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: لِمِلء خزّانٍ حجمُه $600\ L$ بالماء استُعمِلَ خرطومٌ مساحة مقطعِه $5cm^2$ فاستغرقت العمليّة $300\ S$.

المطلوب: 1) احسبْ معدّلَ التدفّق الحجمي Q' .

2) احسبْ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم.

3) كمْ تصبحُ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم إذا نَقَص مقطعُها ليصبحَ ربُعَ ما كانَ عليه؟

الحل:

1) $Q' = \frac{V}{\Delta t} = \frac{0.6}{300} = 2 \times 10^{-3}\ m^3.s^{-1}$

2) $Q' = sv \Rightarrow v = \frac{Q'}{S} = \frac{2\times10^{-3}}{5\times10^{-4}} = 4m.s^{-1}$

3) $s_1v_1 = s_2v_2 \Rightarrow s_1v_1 = \frac{1}{4}s_1v_2 \Rightarrow$

$v_2 = 4v_1 = 4 \times 4 = 16\ m.s^{-1}$

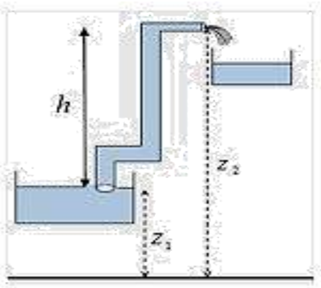
المسألة الثانية: ترفعُ مِضخّةٌ الماءَ من خزّانٍ أرضيٍّ عبرَ أنبوبٍ مساحة مقطعِه $S_1 = 10\ cm^2$ إلى خزّانٍ يقعُ على سطحِ بناء، فإذا علمتَ أنّ مساحة مقطعِ الأنبوب الذي يصبُّ في الخزّان العلويّ $S_2 = 5\ cm^2$ وأنّ معدّل الضخّ $Q' = 0.005\ m^3.s^{-1}$

المطلوب: 1) احسب سرعةَ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ وعند فتحةِ خروجِه من الأنبوب.

2) احسب قيمةِ ضغطِ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ علماً بأنّ الضغط الجويّ $1 \times 10^5\ Pa$ والارتفاع بين الفوهتين $20m$.

3) احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ $100\ L$ من الماء إلى الخزان العلوي.

الحل:



مستوى مرجعي لقياس الطاقة الكامنة الثقالية

1) $Q' = s_1v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{Q'}{S} = \frac{5\times10^{-3}}{10\times10^{-4}} = 5\ m.s^{-1}$

$Q' = s_2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{Q'}{S} = \frac{5\times10^{-3}}{5\times10^{-4}} = 10\ m.s^{-1}$

2) نطبق نظرية برنولي بين الوضعين:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1)$$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g h$$

$$p_1 = 10^5 + \frac{1}{2}1000(100 - 25) + 1000 \times 10 \times 20$$

$$p_1 = 100000 + 37500 + 200000 = 337500\ pa$$

3) $W = \Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) =$

$$W = \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2) =$$

$$w = \frac{1}{2}(1000)(100\times10^{-3})(100-25) = 3750\ J$$

0988440574
0947205146

المسألة الثالثة: ينتهي أنبوب ماء مساحة مقطعه $10cm^2$ إلى رشّاش الاستحمام فيه 25 ثقباً متماثلاً مساحة مقطع كل ثقب $0.1cm^2$ فإذا علمت أنّ سرعة تدفّق الماء عبر الأنبوب $50\ cm.s^{-1}$ المطلوب:

1) احسب معدّل التدفّق الحجمي للماء.

2) احسب سرعة تدفّق الماء من كل ثقب.

الحل:

1) $Q' = s_1 v_1 = 10 \times 10^{-4} \times 0.5 = 5 \times 10^{-4} m^3.s^{-1}$

2) $Q' = 25 s_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{Q'}{25\ S_1} = \frac{5\times10^{-4}}{25\times0.1\times10^{-4}}$

$\Rightarrow v_2 = 2m.s^{-1}$

المسألة الرابعة: محقن أسطواني الشكل مساحة مقطعه $1.25cm^2$ مركب عليه إبرة معدنية مساحة مقطعها $4 \times 10^{-4} cm^2$ المطلوب:

1) احسب سرعة تدفق المحلول عبر مقطع المحقن عندما يكون معدّل التدفق $5 \times 10^{-5} m^3 s^{-1}$.

2) احسب سرعة تدفق المحلول لحظة خروجه من فوهة الإبرة.

الحل:

1) $v_1 = \frac{Q'}{S_1} = \frac{5\times10^{-5}}{1.25\times10^{-4}} = 0.4m.s^{-1}$

2) $v_2 = \frac{Q'}{s_2} = \frac{5\times10^{-5}}{4\times10^{-8}} = 1250m.s^{-1}$

التفكير الناقد: أيهما أكثر تقوساً السطح العلوي أم السطح السفلي لجناح الطائرة؟

الجواب: السطح العلوي لجناح الطائرة أكثر تقوّسا من السطح السفلي ، فعندما تتحرك الطائرة بسرعة ما تكون سرعة جريان الهواء من الأعلى أكبر منها من الأسفل، وبالتالي يكون الضغط من الأعلى أقل منه من الأسفل فترتفع الطائرة.

_ _ _ _ _ انتهى البحث _ _ _ _ _

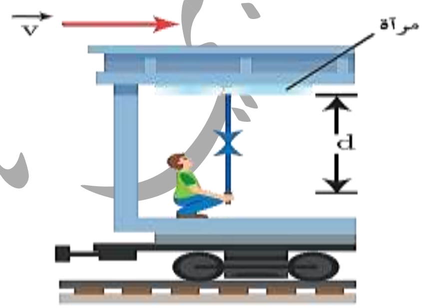
النسبيّةُ الخاصّة

- السرعة مفهوم نسبيّ يختلف باختلاف جملة المقارنة.
- سرعة انتشار الضوء ثابتة في الوسط نفسه مهما اختلفتْ سرعة المنبع الضوئيّ، أو سرعة المراقب.

فرضيّتا أينشتاين: الفرضيّة الأولى: سرعة انتشار الضوء في الخلاءِ هي نفسُها $C=3\times10^{8} m.s^{-1}$ في جميع جمل المقارنة.

الفرضيّة الثانية: القوانينُ الفيزيائيّة تبقى نفسَها في جميع جمل المقارنة العطاليّة.

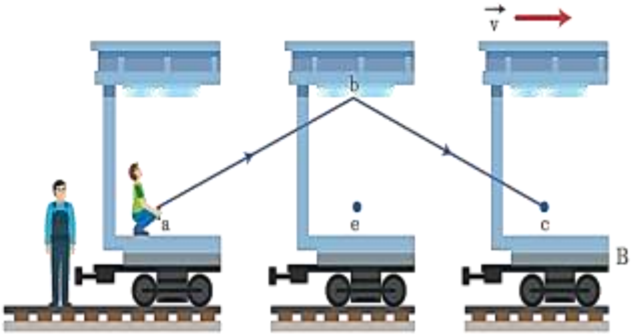
تمدد الزمن:



لدينا قطار يسير بسرعة ثابتة v_1، مثبت على سقفِ إحدى عرباتِه مرآة مستوية ترتفعُ مسافة d عن منبع ضوئيّ بيد مراقب يقف ساكناً في العربة ذاتِها، يرسل المراقب ومضة ضوئيّة باتّجاه المرآة، ويسجّل الزمن t_0 الذي تستغرقه الومضة الضوئيّة للعودة إلى المنبع بالتّالي يكون:

$$c=\frac{2d}{t_0}\Rightarrow d=\frac{ct_0}{2}\dots\dots(1)$$

أمّا بالنسبةِ لمراقب خارجيّ يقفُ ساكناً خارجَ القطار على استقامةٍ واحدةٍ مع المنبع الضوئيّ لحظةَ إصدار الومضة الضوئيّة فإنّ الزمن الذي تستغرقهُ الومضةُ الضوئيّة للعودة إلى المنبع هو t.



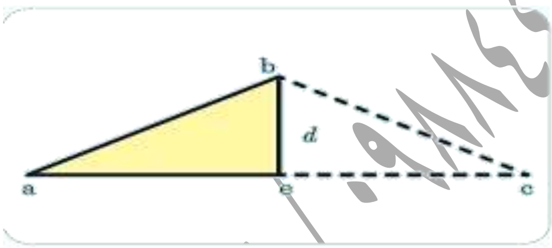
إنّ المسافة التي تقطعُها الومضةُ الضوئيّة للعودة إلى المنبع بالنسبة للمراقب الخارجيّ هي: ab+bc بالتّالي:

$$c=\frac{ab+bc}{t}=\frac{2ab}{t}\Rightarrow ab=\frac{ct}{2}\dots(2)$$

لكنّ المنبعُ انتقل من النقطة a إلى النقطة c:

$$v=\frac{ac}{t}=\frac{2ae}{t}\Rightarrow ae=\frac{vt}{2}\dots\dots(3)$$

بتطبيقِ نظريّة فيثاغورث في المثّلث القائم abe وباستخدام العلاقتين (2)(3) نجد:



$$(\frac{vt}{2})^2+d^2=(\frac{ct}{2})^2\Rightarrow(\frac{vt}{2})^2-(\frac{ct}{2})^2=d^2$$

$$\frac{1}{4}t^2(v^2-c^2)=d^2\Rightarrow t^2=\frac{4d^2}{c^2-v^2}\Rightarrow$$

$$t=\frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}}\dots\dots(4)$$

ومن العلاقة (1):

$$t_0=\frac{2d}{c}\dots\dots(5)$$

نسب العلاقتين (4)و(5):

$$\frac{t}{t_0}=\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}}$$

$$\frac{t}{t_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma$$

$$\boxed{\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \quad , \quad t=\gamma t_0$$

$$\gamma=\frac{t}{t_0}>1 \Rightarrow t>t_0$$

استنتج: يتمدّدُ (يتباطأ) الزمنُ عند الحركة نسبياً .

تطبيق (مفارقة التوأمان):

بفرض أنّ أخوين توأمين أحدُهما رائدُ فضاءٍ طار بسرعةٍ قريبةٍ من سرعة الضوء في الخلاء $v=\frac{\sqrt{899}}{30}c$ وبقي رائدُ الفضاء في رحلته سنةً واحدةً وفق ميقاتيّةٍ يحملها، فما الزمنُ الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض ليعود رائدُ الفضاء من رحلته؟

الحل: الزمنُ الذي سجّلته الميقاتيّةُ التي يحملُها رائدُ الفضاء:

الزمنُ الذي سجّله (المراقبُ الخارجيّ) $t_0=1year$

الأخ التوأم الذي بقي على الأرض t: حيث $t=\gamma t_0$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{(\frac{\sqrt{899}}{30}c)^2}{c^2})}}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{899}{900})}}=30$$

$$t=30\times 1=30\ year$$

أيّ أنّ الأخَ التوأمَ انتظرَ ثلاثينَ عاماً حتى انتهت رحلةُ أخيه التوأمِ التي استغرقتْ بالنسبة له عاماً واحداً .

تقلّص الأطوال:

تخيّل مراقبَين: الأوّلُ في محطّةِ إطلاقٍ على الأرض والثاني روبوت في مركبة فضاءٍ انطلقت من محطّةِ الفضاء نحو الشمس بسرعةٍ ثابتة بالنسبة للمراقب الأوّل.

تسجّلُ العدّاداتُ في المحطّة على الأرض الآتي:

المسافةُ بينَ الأرض والشمس L_0 والزمنُ الذي استغرقتْهُ مركبةُ الفضاء في رحلتها t وبالتالي: $L_0=vt$

وتسجّل عدّاداتُ مركبةِ الفضاء المعطياتِ الآتيةَ:

المسافةُ المقطوعةُ بينَ الأرض والشمس L، وزمن الرحلة t_0:

فيكون: $L=vt_0$

$$\frac{L_0}{L}=\frac{t}{t_0}=\frac{\gamma t_0}{t_0}$$

$$\boxed{L=\frac{L_0}{\gamma}} \Rightarrow L<L_0$$

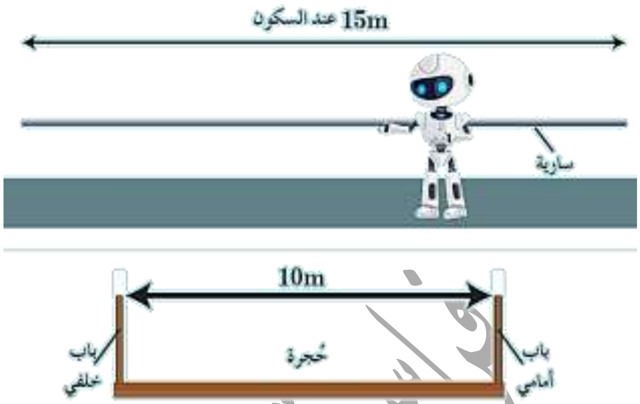
أمّا بالنسبةِ لطولِ المركبةِ الفضائيّة (وفق منحى سرعتها) فيعدُّ L بالنسبة للمراقب الأرضيّ لأنّ المركبةَ الفضائيّة متحرّكة بالنسبة له.

ويعتبر L_0 بالنسبة للمراقب في المركبة الفضائيّة .

فيكونُ طولُ المركبة بالنسبة للمراقب الأرضيّ أقصرَ ممّا هو عليه بالنسبة لمراقب في المركبة.

استنتج: يتقلّصُ (ينكمش) الطول عند الحركة نسبياً .

تطبيق (السارية والحُجرة):



لدينا روبوت رياضيّ يحمل ساريةً أفقيّةً طولها وهي ساكنة 15m يتحرّك بسرعةٍ أفقيّة 0.75 C وأمامه حُجرةٌ لها بابان أماميّ وخلفيّ البُعد بينهما 10m يمكن التحكّم بفتحهما وإغلاقهما آنيًا بالنسبة لمراقبٍ ساكن هل يمكن أن تعبرَ الساريةُ الحُجرةَ بأمانٍ إذا أغلقَ المراقبُ الساكن البابين وفتحَهما آنيًا (بالنسبة له) عند عبور الروبوت مع السارية للحُجرة؟ (نعد $\sqrt{0.4375} = 0.66$)

الحل: يعدُّ المراقبُ الساكن طولَ السارية المتحرّكة L وطولها وهي ساكنة L_0 فيكون:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad ...(1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{(0.75c)^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0.4375}} = \frac{1}{0.66}$$

نعوّضُ بـ (1) فنجد: $L = \frac{15}{\frac{1}{0.66}} = 9.9 < 10\ m$

لذلك يمكن أن تعبرَ الساريةُ بأمان.

الطاقةُ الكليّة في الميكانيك النسبيّ:

هي مجموع طاقتين حركية وسكونية.

$$E = E_0 + E_K$$

استنتج: إنّ الطاقة الكليّة في الميكانيك النسبيّ هي مجموعُ الطاقة السكونيّة والطاقة الحركيّة.

الطاقةُ السكونيّة	الطاقةُ الحركيّة	الطاقةُ الكليّة
$E_0 = m_0c^2$	$E_k = E - E_0$	$E = mc^2$

تكافؤُ الكتلة – الطاقة:

الكتلة ثابتةٌ في الميكانيك الكلاسيكي حيث السّرعات صغيرة أمامَ سرعة انتشار الضوء في الخلاء، أمّا وَفقَ الميكانيك النسبيّ فإنّ الكتلةَ تزدادُ بزيادة السّرعة حيث السرعات قريبة من سرعة الضوء وتُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{m = \gamma m_0}$$

حيث: m الكتلة عند الحركة، m_0 الكتلة عند السكون.

فمن أين أتتْ هذه الزيادةُ في الكتلة؟

$$E = E_0 + E_K \Rightarrow E_k = E - E_0$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta m = \frac{E_k}{c^2}}$$

استنتج: عندما يتحرّكُ الجسمُ تزدادُ كتلتُه بمقدارٍ يساوي طاقته الحركيّة مقسومةً على رقمٍ ثابت c^2 أي أنّ الكتلة تكافئ الطاقة.

إعداد المدرس: فراس قلعه جي

تطبيق: يتحرّك إلكترون في أنبوبةٍ تلفاز بطاقة حركيّة 27×10^{-16}J والمطلوب:

1) احسب النسبةَ المئويّة للزيادة في كتلةِ الإلكترون نتيجة طاقتهِ الحركيّة.

2) احسبْ طاقتهُ السكونيّة علماً أنّ:

$$m_e = 9\times10^{-31}\text{Kg}\ ,\ \ c = 3\times10^{8}\ \text{m}.s^{-1}$$

الحل:

1)
$$\Delta m = m - m_0 = \frac{E_k}{c^2} = \frac{27\times10^{-16}}{(3\times10^{8})^2}$$

$$\Delta m = 3\times10^{-32}kg$$

$$\text{النسبة المئوية للزيادة في الكتلة} = \frac{3\times10^{-32}}{9\times10^{-31}}\times100$$

$$= 3.33\%$$

2) طاقة الإلكترون السكونيّة:

$$E_o = m_0c^2 \Rightarrow E_o = 9\times10^{-31}\times(3\times10^{8})^2$$

$$= 81\times10^{-15}\text{J}$$

تنويه مهم: إنّ أثرَ النظريّة النسبيّة الخاصّة يُهمل من أجل السّرعات الصغيرة بالنسبة إلى سرعة انتشارِ الضوءِ في الخلاء، وتؤول عندها العلاقاتُ الفيزيائيّة إلى شكلها الكلاسيكي.

1) انطلاقاً من الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحدّدة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي.

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_k = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma-1)m_0c^2$$

لكن من أجل السّرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاء أي $v \ll c$ فإن: $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ومنه:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}}$$

وحسب دستور التقريب $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ بشرط $\varepsilon \ll 1$

ومن أجل السّرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاء أي $v \ll c$ فإن: $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ومنه:

يكون: $\gamma = 1+\frac{v^2}{2c^2}$ نعوّضُ عن γ فنجدُ:

$$E_k = (1+\frac{v^2}{2c^2}-1)m_0c^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$$

وهي علاقة الطاقةِ الحركيّة في الميكانيك الكلاسيكي.

2) انطلاقاً من الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحدّدة لكميّة الحركة في الميكانيك الكلاسيكي.

$$P = mv = \gamma\, m_0v = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] m_0v \quad ...(1)$$

لكن من أجل السّرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاء أي $v \ll c$ فإن: $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ومنه:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}}$$

وحسب دستور التقريب يكون: $\gamma = 1+\frac{v^2}{2c^2}$

نعوض بـ(1): $P = \left[1+\frac{v^2}{2c^2}\right] m_0v$

لكن $\frac{v^2}{2c^2} \lll 1$ فتهمل أمام الواحد بالتالي:

$$P_0 = m_0v$$

0988440574

0947205146

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) افترضْ أنّ صاروخين في الخلاء يتحرّكُ كلٌّ منهما نحوَ الآخر بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء وفي لحظةٍ ما أضاء الصاروخُ الأوّلُ مصابيحَه إنّ سرعةَ ضوءِ الصاروخِ الأولِ بالنسبةِ للصاروخِ الثاني هي:

a) تساوي C
b) أكبر من C .
c) أصغر من C .
d) معدومة .

الإجابة الصحيحة: a) تساوي C .

توضيح الإجابة: سرعة انتشار الضوء ثابتة في الوسط نفسه لا تتغير عند حركة المنبع الضوئي أو حركة المراقب .

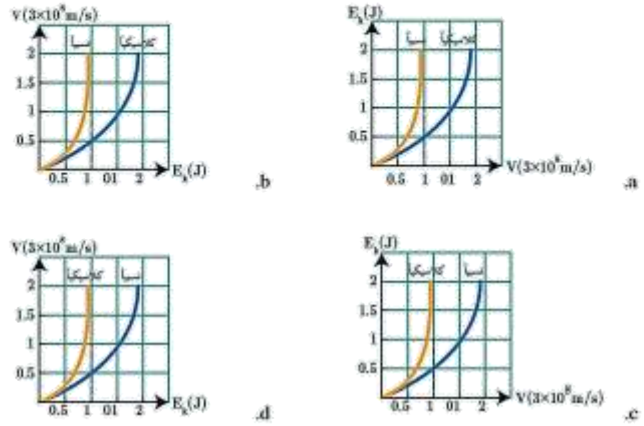
2) افترضْ أنّ طاقمَ سفينةِ فضاءٍ تطيرُ بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء يشاهدون تسجيلاً لمباراةِ كرة قدمٍ مدّتُها ساعةٌ ونصفٌ، ويتابعُهم مراقبٌ أرضيٌّ بتلسكوبٍ دقيقٍ جدّاً، فيرى مدّةَ المباراة:

a) هي نفسها
b) أكبر
c) أصغر
d) معدومة

الإجابة الصحيحة: b) أكبر .

توضيح الإجابة: بسبب تمدد الزمن عند الحركة .

3) المنحني البياني الذي يمثّل العلاقة بين الطاقة الحركيّة لجسمٍ ما ، وسرعته هو:



الإجابة الصحيحة: a

توضيح الإجابة: نختار الشكل الذي لا تتجاوز السرعة فيه نسبياً سرعة الضوء في الخلاء وتكون السرعة على المحور الأفقي .

ثانيّاً: أجبْ عن السؤالين الآتيين:

1) يحاولُ العلماء عندَ دراستهم خصائصَ الجسيماتِ تحريكَها بسُرعاتٍ كبيرةٍ جدّاً باستخدام المسرّعات، هل يمكنُ أنْ تصلَ سرعةُ هذه الجسيمات إلى سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء تماماً ؟ لماذا ؟

الحل: لا ، بما أن الجسيم يمتلك كتلة سكونية فكلما اقتربت سرعته من سرعة الضوء في الخلاء زادت كتلته فإذا تناهت سرعته إلى سرعة الضوء في الخلاء يحتاج إلى إعطاءه قوة لانهائية لدفعه وهذا غير ممكن .

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

وعندما تصبح سرعة الجسيم مساوية لسرعة الضوء $v=C$ بالتالي:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

لكن: $F = ma = \gamma m_0 a = \infty$

2) يقفُ جسمٌ ساكنٌ عند مستوٍ مرجعيٍّ (سطح الأرض) ما قيمةُ طاقتِه الحركيّة عندئذٍ وما قيمة طاقتِه الكامنة الثقاليّة بالنسبة للمستوي المرجعيّ وهل طاقتُه الكليّة النسبيّة معدومة ولماذا ؟

الحل: طاقته الحركية معدومة لانعدام سرعته (ساكن) .

طاقته الكامنة الثقالية معدومة بالنسبة للمستوى المرجعي (الأرض) لأنّ ارتفاع الجسم عن الأرض معدوم .

طاقته الكلية النسبية غير معدومة لأنها مجموع الطاقة الحركية والطاقة السكونية ، و طاقته السكونية غير معدومة فما يزال يمتلك كتلة سكونية .

$$E = E_0 + E_k = m_0c^2 + 0 = m_0c^2$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: جسمٌ مستطيل الشكلِ طولُه وهو ساكن b_0 يساوي ضعفي عرضه a يتحرّك هذا الجسمُ بحيث يكونُ طولُه موازياً لشعاع سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لمراقبٍ في الجملة الساكنة، فيبدو له مربّعاً، احسبْ قيمةَ سرعة الجسم.

الحل: طول الجسم وهو ساكن: $b_0 = 2a$

طول الجسم وهو متحرك: $b = a$

$$b = \frac{b_0}{\gamma} \Rightarrow a = \frac{2a}{\gamma} \Rightarrow \gamma = 2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$4 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\times 10^8$$

$$v = 1.5\sqrt{3}\times 10^8 m.s^{-1}$$

المسألة الثانية: يتحرّك إلكترونٌ بسرعة $\frac{2\sqrt{2}}{3}c$ المطلوب: احسب كميّة حركةِ الإلكترون وفقَ قوانين الميكانيك الكلاسيكيّ، ثمّ وفقَ الميكانيك النسبيّ.

$(m_e = 9\times 10^{-31}kg)$

الحل: كلاسيكياً: لا تتغير الكتلة بين حالتي السكون والحركة أي: $\boxed{p_0 = m_0 v}$

$$p_0 = 9\times 10^{-31}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 3\times 10^8$$
$$= 18\sqrt{2}\times 10^{-23}Kg.m.s^{-1}$$

نسبياً: تزداد كتلة الإلكترون عند تحركه وتصبح: γm_0

فتكون كمية حركته: $\boxed{p = \gamma m_0 v = \gamma p_0}$

حساب γ: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}c\right)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}}$$

$$\Rightarrow \gamma = 3$$

$$p = 3\times 18\sqrt{2}\times 10^{-23} = 54\sqrt{2}\times 10^{-23}Kg.m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة: تبلغ الكتلة السكونيّة لبروتون $m_p = 1.67\times 10^{-27}$ kg وطاقتُه الكليّة تساوي ثلاثة أضعافِ طاقتِه السكونيّة والمطلوب:

1) احسب طاقته السكونيّة.

2) احسب طاقته الحركيّة في الميكانيك النسبيّ.

3) احسب كتلته في الميكانيك النسبيّ.

الحل:1)
$$E_o = m_0c^2 = m_pc^2$$

$$E_o = 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}$$
$$E_o = 15.03 \times 10^{-11}\, J$$

2)
$$E_k = E - E_0 = 3E_0 - E_0 = 2E_0$$

$$E_k = 2 \times 15.03 \times 10^{-11} = 30.06 \times 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

3)
$$E = \mathrm{m}c^2 = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow$$

$$E = \gamma E_0 = 3E_0 \Rightarrow \gamma = 3$$

$$m = \gamma m_0 = 3(1.67 \times 10^{-27})$$

$$m = 5.01 \times 10^{-27} Kg$$

التفكير الناقد:

في الميكانيك الكلاسيكي إذا تضاعفت كمية حركة جسيم ما فإنّ طاقته الحركية تزداد أربعةأضعاف، فهل يتحقق ذلك في الميكانيك النسبي؟ وضّح ذلك.

الجواب: في الميكانيك الكلاسيكي تضاعف كمّية حركة جسيم ما مرتين يعني بالضرورة تضاعف سرعته مرتين لأنّ كتلته ثابتة فتزداد عندئذٍ طاقته الحركية أربعة أضعاف أمّا في الميكانيك النسبي فهذا غير محقق لأنّ الكتلة تزداد بزيادة السرعة.

ـــــ انتهى البحث ـــــ