جامعة البعث - كلية العلوم

قسم الإحصاء الرياضي

مقرر

الإحصاء (4)

السنة الرابعة

الفصل الثاني للعام الدراسي 2013 - 2014

د. سلطان محمد الصلخدي

التحليل متعدد المتغيرات (Multivariate analysis)

دراسة متغير واحد : Matrices and Random vectors :

إذا كان لدينا عدة ظواهر :

	(1) سن الشخص	(2) سنة التعليم	(3) ذكر أو أنثى	…	(K) الوضع الاجتماعي مع الأخذ بعين الاعتبار تعلم الوالدين
No. 1	33	20	0	…	25
No. 2	25	19	1	…	22
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
No. n	35	22	1	…	50

وهذه الظواهر أو المتغيرات مرتبطة مع بعضها البعض , فيلزم لدراسة تحليل متعدد المتغيرات مبادئ الجبر الخطي Linear Algebra وسندرس في البداية المتجهات Vectors .

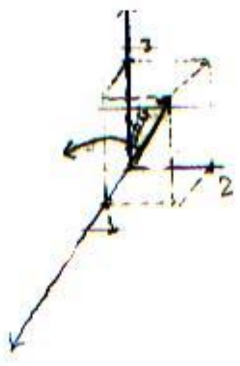
المتجهات Vectors:

تعريف : المتجه هو أية مجموعة من الأعداد الحقيقية وتكتب على الشكل التالي :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

إن للمتجه تفسير هندسي تربطه بالهندسة الإقليدية Geometrical Meaning of vectors

فمثلاً إذا أخذنا المتجه $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ نستطيع أن نمثله على الشكل التالي بترتيب على شكل صندوق (box) من هذه النقاط.



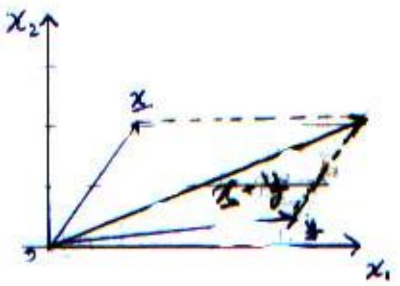
وهنالك متجهات لها أكثر من ثلاث متغيرات .

العمليات على المتجهات:

1 – جمع متجهين: إذا كان لدينا متجهين $\underline{y}$, $\underline{x}$ عندئذٍ يكون الجمع بينهما هو :

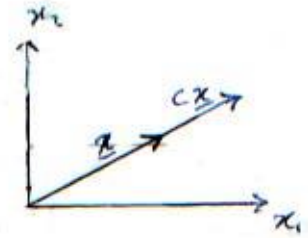
$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix}$$

وللجمع معنى هندسي هو :



2 – ضرب متجه بمقدار سلمي: لضرب متجه بمقدار سلمي نضرب كل مركبة من مركباته بهذا المقدار السلمي أي:

$$c\,\underline{x} = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x_1 \\ c\,x_2 \\ \vdots \\ c\,x_n \end{pmatrix}$$



3 – طويلة متجه: إذا كان لدينا : $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ فإن طول المتجه يعطى بالصيغة: $L(\underline{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_1^2}$

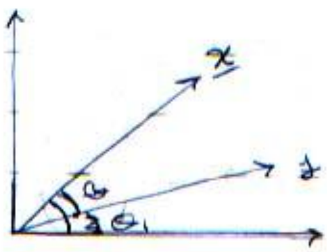
4 – ضرب متجهين: إذا كان لدينا متجهين $\underline{x}, \underline{y}$ بحيث إن :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

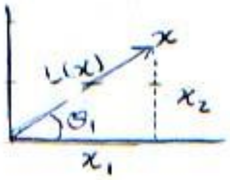
فإن جداء المتجهين يعطى بالصيغة الآتية : $\underline{x}\,\underline{y} = \Sigma\, x_i\, y_i = \underline{y} \,.\, \underline{x}'$

إذاَ نستطيع أن نكتب طول أي متجه بالشكل: $L(\underline{x}) = \sqrt{\underline{x}'\,\underline{x}}$

5 – الزوية بين متجهين:



لحساب الزاوية بين متجهين نتبع الطريقة الآتية : $\cos\theta = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ولكن نجد من الشكل أن :

$$\sin\theta_1 = \frac{x_2}{L(x)} \quad , \quad \cos\theta_2 = \frac{y_1}{L(y)}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{L(\underline{x})} \cdot \frac{y_1}{L(\underline{y})} + \frac{x_2}{L(\underline{x})} \cdot \frac{y_2}{L(\underline{y})} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{L(\underline{x}) \cdot L(\underline{y})} = \frac{\underline{x}' \underline{y}}{\sqrt{\underline{x}'\underline{x}}\ \sqrt{\underline{y}'\underline{y}}}$$

وهو يسمى عامل بيرسون أو عامل الارتباط $\cos\theta = \dfrac{\underline{x}'\ \underline{y}}{L(\underline{x})\ L(\underline{y})}$

مثال : احسب الزاوية بين المتجهين :

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{-5 + 3 + 3}{(25+1+4)^{1/2}\ (1+4+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{35 \times 11}} = \frac{1}{\sqrt{385}}$$

تعاريف :

If $\underline{x}$ and $\underline{y}$ two vectors , they are linearly independent provided that $c_1 \underline{x} + c_2 \underline{y} = 0$ then c_1 and c_2 are zeros .

نقول عن $\underline{x}$ و $\underline{y}$ إنهما مستقلين خطياً إذا كان معامل الارتباط يساوي الصفر .

مثال: هل هذا المتجهات الثلاثة مستقلة عن بعضها البعض:

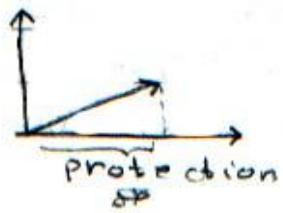
$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الحل: لدينا $c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + c_3 \underline{x}_3 = 0$, نعوض بشرط :

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 \qquad - 2c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

إذاً فالمتجهات مستقلة عن بعضها البعض .

Def : the protection (shade) of vector $\underline{x}$ is $L(\underline{x})\cos\theta = L(\underline{x}) . \dfrac{|\underline{x}'\underline{y}|}{L(\underline{x})\,L(\underline{y})} = \dfrac{|\underline{x}'\underline{y}|}{L(\underline{y})}$



ما أهمية الاستقلال الخطي: إذا كان لديك مجموعة من المتجهات المستقلة عندئذ يمكننا تحويلها إلى مجموعة من المتجهات المتعامدة المتكافئة فيما بينها .

let $x_1, \ldots, x_n$ be a set of linearly independent vector , then there is a set of perpendicular , vectors $u_1 \ldots u_n$ such that

$$\underline{u}_1 = \underline{x}_1$$

$$\underline{u}_2 = \underline{x}_2 - \frac{\underline{x}_2' \cdot \underline{u}_1}{L(\underline{u}_1)} \cdot \underline{u}_1$$

$$\vdots$$

$$\underline{u}_n = \underline{x}_n - \frac{\underline{x}_n' \, \underline{u}_1}{L(\underline{u}_1)} \underline{u}_1 - \ldots - \frac{\underline{x}_n' \cdot \underline{u}_{n-1}}{L(\underline{u}_{n-1})} \underline{u}_{n-1}$$

مثال: ليكن لدينا المتجهين المستقلين

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

فالتحويلات هي :

$$u_1 = \underline{x}_1$$

$$L(\underline{u}_1) = 20$$

$$\underline{x}_2' \, \underline{u}_1 = 10$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{10}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

تعريف المتجه العشوائي: هو مجموعة من المتغيرات العشوائية التي يصعب الفصل بينها ، وهو تركيب من المتجهات وتسمى المصفوفات matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

أو نعرّف المصفوفة كما يلي :

<u>Def</u> : A matrices is arrangement of a set vectors in rows or columns .

$$A = (\underline{a}_1 , \underline{a}_2 , \ldots, \underline{a}_k) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1' \\ \underline{a}_2' \\ \vdots \\ \underline{a}_k' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2P} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}_{(n \times P)} = \{a_{ij}\}_{(n \times P)}$$

وهي مكونة من أعداد حقيقية .

العمليات على المصفوفات(Operations of matrices):

1 – جمع المصفوفات (Addition):

لتكن لدينا المصفوفتين $B_{(n\times P)}$ and $A_{(n\times P)}$ المتشابهتان عندها يكون حاصل جمع المصفوفتين معرف بالشكل:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1P} \pm b_{1P} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \cdots & a_{nP} \pm b_{nP} \end{bmatrix}$$

2 – ضرب المصفوفات (Scalar Multiplication):

Let A and B be two matrices such that the number of columns in A its equal to the number of rows in B :

$$A_{(n\times P)} \, . \, B_{(P\times r)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1P} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nP} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{P1} & \cdots & b_{Pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{b} a_{i1} \, b_{i1} & \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{b} a_{1i} \, b_{ir} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \sum a_{ni} \, b_{i1} & \cdots\cdots & \sum a_{ni} \, b_{ir} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B = \left\{ \sum_{\ell=1}^{P} a_{i\ell} \, b_{\ell j} \right\}_{(n\times r)}$$

خواص ضرب المصفوفات:

1) $A.\,B \neq B.A$ قانون التبديل

2) $A\,(\,B + C\,) = A\,.\,B + A\,.\,C$ قانون التوزيع

منقول مصفوفة (transpose of A): إذا بدلنا أسطر مصفوفة بأعمدتها وأعمدتها بأسطرها , فإننا ندعو المصفوفة الجديدة بمنقول المصفوفة الأصلية ونكتب : A' = transpose of A

مقلوب مصفوفة (Inverse Matrix):

Let A be as square matrix , if there is an ather matrix B such that :

$$A B = B.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

We say that B is the inverse of A . . A^{-1} ونرمز لها بالرمز

خواص المقلوب:

1) $\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1}$

2) $\left(A.B\right)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

حساب مقلوب مصفوفة : إن مقلوب مصفوفة يعطى بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

محدد مصفوفة :

The determinant of a square matrix A is : $|A| = \sum_{i=1}^{P} a_{1i}\,(-1)^{i+1}\,|A_{1i}|$

إذا كان : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن : $|A| = a_{11}a_{22} + a_{12}(-1)a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

خواص المحددات :

1) $|AB| = |A|.|B|$

2) $|CA| = C^P|A|$

طريقة حديثة لحساب المحددات :

Eigen values and Eigen vectors :

Let A be a square matrix $(P\times P)$, a number λ is called an eigen value of A if $A\underline{X} = \lambda\underline{X}$ any vector $\underline{X}$. and the vector $\underline{X}$ is called eigen vector .

السؤال: كيف نجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة: القيم الذاتية للمصفوفة **A** هي حلول المعادلة:

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2P} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & a_{pp}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

مثال : أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة الأتية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-\lambda I| = (1-\lambda)(3-\lambda) - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 = 1\times 3 = 3 = |A|$$

ولإيجاد المتجهات الذاتية للمصفوفة نطبق المعادلة : $A\underline{X} = \lambda\underline{X}$:

من أجل $\lambda_1 = 1$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_1 \Rightarrow$ أي x_1 اختيارية

$$x_1 + 3x_2 = x_2 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{x_1}{2}$$

بأخذ $x_1 = a$ أي عنصر $\Leftarrow$ من أجل $\lambda_1 = 1$ $\Leftarrow$ $\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$

من أجل : $\lambda_2 = 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

لا يتحقق إلا إذا كان $x_1 = 0$ $\quad \Rightarrow x_1 = 3x_1$

إي x_2 اختيارية $x_2 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3x_2 = 3x_2 \quad \Rightarrow$

بأخذ $a = 1$ نجد أن المتجهتان هما :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

والمتجهات المميزة هي : $\underline{e}_i = \underline{x}_i / \sqrt{\underline{x}_i' \underline{x}_i}$ أي أن المتجهين المميزين لهذه المصفوفة ، هما :

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5/4}} \\ -\frac{1/2}{\sqrt{5/4}} \end{pmatrix} , \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نظرية: يمكن أن نأخذ أي مصفوفة ونمثلها جبرياً بحيث تربطها علاقة خطية مع الجذور المميزة والمتجهات المميزة .

نظرية التمثيل: (Representation theorem)

أي مصفوفة مربعة لها تغير يربط جذورها المميزة .

Any square matrix a with eigen values $\lambda_1 , \ldots, \lambda_P$ and eigen vact ors $\underline{e}_1 , \ldots, \underline{e}_P$

can be represent A as : $A = \lambda_1 \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1' + \lambda_2 \cdot \underline{e}_2 \underline{e}_2' + \ldots + \lambda_P \underline{e}_P \underline{e}_P'$ $\quad$ (*)

ولنطبق نفس المثال في النظرية :

$$A = 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5/4}} \\ \frac{-1/2}{\sqrt{5/4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5/4}} & -\frac{1/2}{\sqrt{5/4}} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال : أوجد القيم لذاتية والمتجهات الذاتية المميزة للمصفوفة: $\begin{bmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 9 \ , \quad \lambda_2 = 9 \ , \quad \lambda_3 = 18$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{4}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} , \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

يمكن كتابة (*) على الشكل $A = E \Lambda E'$ ، $E = \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \\ \vdots \\ \underline{e}_p' \end{pmatrix}$ ، حيث : $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$

مصفوفة الجذر التربيعي (Square Root Matrix):

لتكن لدينا مصفوفة A متناظرة و محدودة موجبة

Let A be matrix which is Symmetric and Positive definite

عندها نضع : $A = P \Lambda P'$ حيث P هي مصفوفة متعامدة (P is orthogonal)

$$\Rightarrow A^{-1} = P'\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)P$$

من هذا التعريف يمكن أن نعرف مصفوفة $A = \sum \lambda_i \underline{e}_i \underline{e}_i' \leftarrow A^{-1} = \sum \frac{1}{\lambda_i}\underline{e}_i \underline{e}_i'$

تعريف : مصفوفة الجذر التربيعي لـ A هي $A^{\frac{1}{2}} = \sum \sqrt{\lambda_i}\ e_i\ e_i'$.

Def : The square Root matrix of A is $A^{1/2} = \sum \sqrt{\lambda_i}\ \underline{e}_i\ \underline{e}_i'$

إن مصفوفة الجذر التربيعي تحقق الخواص الآتية :

1) $A^{\frac{1}{2}} . A^{\frac{1}{2}} = A$

2) $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

3) $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\left(A^{-\frac{1}{2}}\right) = I$

المصفوفات غير المتكافئة : Matrix inequivalent , cauchy وهي هامة في الإحصاء

سنستخدم متراجحة كوشي لاحقاً وهي:

$$|\operatorname{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\ \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}$$

$\left(\operatorname{Cov}(x,Y)\right)^2 \le \operatorname{Var}(x) . \operatorname{Var}(Y)$ أو $\rho^2 \le 1$

ليكن $a_{(P\times1)}$, $b_{(P\times1)}$ أي متجهين ولتكن $C_{(P\times P)}$ مصفوفة مربعة من المرتبة $(P\times P)$ فإن :

$$1 - (a'b)^2 \le (a'a)(b'b)$$

وبصورة عامة:

$$2 - (a'b)^2 \le (a'Ca)(b'C^{-1}b)$$

وتكون المساواة محققة إذا وفقط إذا $a = mC^{-1}b$ أو $b = mCa$ من أجل ثابت m .

الإثبات :

1 – نلاحظ أن المتراجحة محققة من أجل $a = 0$ أو $b = 0$.

2 – ليكن x أي عدد نعرف المتجه $(a - xb)$ عندها :

$$(a-xb)'(a-xb) = a'a - 2xa'b + x^2 b'b = \psi(x)$$

$$\psi'(x) = -2a'\underline{b} + 2xb'b = 0 \Rightarrow x = \frac{a'b}{b'b}$$

إن أصغر قيمة لـ ψ تكون :

$$a'a - \frac{(a'b)^2}{b'b} > 0$$

وبالتالي : $(a'b)^2 < (a'a)(b'b)$

3 – لنفرض أن مصفوفة الجذر التربيعي $C^{\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{P} \sqrt{\lambda_i}\ e_i e_i'$ حيث e_i المتجهات الذاتية و λ_i القيم الذاتية

عندها يكون : $C^{-\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{P} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\ e_i e_i'$

ينتج من ذلك $a'b = a'Ib = a'C^{\frac{1}{2}} C^{-\frac{1}{2}} b = \left(C^{\frac{1}{2}} a\right)' \left(C^{-\frac{1}{2}} b\right)$

وبالتالي فإن (*) تكون محققة من أجل المتجهين $\left(C^{\frac{1}{2}} a\right)'$ و $\left(C^{-\frac{1}{2}} b\right)$.

إذا كان لدينا متغير عشوائي X فهو يعرف عن طريق دالتين هما :

1) $F(x) = P(X \le x)$

2) If X is discrete $\Rightarrow f(x) = P(X = x)$

3) If X is continuous $\Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta}$

والمشكلة تظهر عندما يكون المتغير المدروس منقطع في قسم ومستمر في قسم آخر وبين المنقطع والمستمر في قسم ثالث عندئذ ما الحل ؟ ، لذلك سندرس النظرية الآتية (نظرية كرامير) **Cramer's theorem** :

إذا أخذنا دالة توزيع لأي متغير عشوائي هي :

$$F(x) = C_1 F_a(x) + C_2 F_s(x) + C_3 F_{as}(x)$$

مستمر منقطع بين وبين

وبالتالي يمكن أن تأخذ الثوابت $c_3 = 0,\ c_2 = 0, c_3 = 0$ أو إثنان أو واحدة معدومة حسب تابع التوزيع الذي لدينا .

تحويل المتغيرات :

إذا كان لدينا متغير X له دالة توزيع F ودالة كثافة f ولدينا $Y = g(X)$ ونريد دالة توزيع أو الكثافة فإننا نوجد ذلك من أجل التحويلات التفاضلية أو التكاملية . أي :

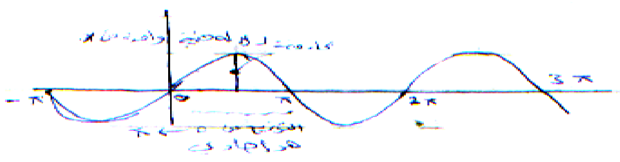
$$\begin{aligned} G(y) &= P(y \le y) = P\left(g(X) \le y\right) \\ &= \left(X \le g^{-1}(y)\right) = F\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

مثلاً تحويل التربيع لـ $Y = X^2$:

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right) &= P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) \\ &= F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right) \end{aligned}$$

والتوزيعات غير التقابلية (الأحادية) الهندسية مثلاً $g = \sin X$ من $[0, 2\pi]$ تتكرر ولو أخذنا موجة واحدة لتصبح دالة أحادية في $[0, 2\pi]$ ولن نهتم بمثل هذه التوزيعات .

إنه ليس أحادياً لأن هناك قيمتين لِـ x . ونعني بالدالة الأحادية ، إذا كان الخط الثاني لها له موجة واحدة ويقابل كل قيمة لـ y قيمة واحدة x ومثال ذلك :



أما في المجال $[0, 3\pi]$ نجد أنه ليس أحادياً لأن لكل y قيمتين لِـ x .

المتجهات العشوائية والمصفوفات العشوائية :

وهي وضع مجموعة من المتغيرات العشوائية في متجه أو مصفوفة.

تعريف : لتكن $\{X_{ij}\}$ متجهات عشوائية عندئذٍ تسمى المصفوفة التالية بالمصفوفة العشوائية:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{P1} & X_{P2} & \cdots & X_{Pn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \vdots \\ \underline{X}_p \end{pmatrix} = \left(\underline{X}_1 , \underline{X}_1 , \ldots , \underline{X}_p \right)'$$

ويكون حساب العزوم على الشكل :

$$E\,\underline{X} = \begin{bmatrix} E\,X_{11} & E\,X_{12} & \cdots & E\,X_{1n} \\ E\,X_{21} & E\,X_{22} & \cdots & E\,X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E\,X_{P1} & E\,X_{P2} & \cdots & E\,X_{Pn} \end{bmatrix}$$

أي أنه لحساب توقع مصفوفة متغيرات عشوائية يجب حساب توقع كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة .

خواص التوقع الرياضي للمتجهات أو للمصفوفات العشوائية:

إذا كان لدينا مصفوفتين عشوائيتين $\underline{X}$و $\underline{Y}$ وكانت A و B مصفوفتي ثوابت , فإنه يكون :

1) $E\left(\underline{X} + \underline{Y} \right) = E\,\underline{X} + E\,\underline{Y}$

2) $E\left(A\,\underline{X}\,B \right) = A\left(E\,\underline{X} \right)B$

سنقوم بالدراسة التفصيلية على المتجهات العشوائية:

ليكن $\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \vdots \\ \underline{X}_P \end{pmatrix}$ متجه عشوائي تابع توزيعه : $F\left(\underline{x} \right) = P\left(X_1 \le x_1 , X_2 \le x_2 , \ldots , X_P \le x_P \right)$

فإذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots , X_P$ متغيرات عشوائية مستقلة عندئذٍ : $F\left(\underline{x} \right) = \prod_{i=1}^{P} P\left(X_i \le x_i \right) = \prod_{i=1}^{P} F_i\left(x_i \right)$

لن نقوم بدراسة الحالة التي يكون من أجلها المتغيرات العشوائية $X_1 , X_2 , \ldots , X_P$ بعضها منقطع وبعضها مستمر، ولكن سندرسها عندما تكون جميعها منقطعة أو جميعها مستمرة .

(1) إذا كانت $\underline{X}$ منقطع فإن : $f\left(\underline{x} \right) = P\left(X_1 = x_1 , \ldots , X_P = x_P \right)$

(2) إذا كانت $\underline{X}$ مستمر فإن : $f\left(\underline{x} \right) = \dfrac{\partial^p}{\partial x_1 , \ldots , \partial x_P} F\left(\underline{x} \right)$

تعاريف : العزم الأول لـ $\underline{X}$ حول المتجه الصفري هو $E\,\underline{X} = \begin{pmatrix} E\,X_1 \\ \vdots \\ E\,X_p \end{pmatrix} = \underline{\mu}$

التباين لمتغير واحد : $Var\left(X \right) = E\left(X - \mu \right)^2 = \sigma^2$ ويعطى التباين للمتجه $\underline{X}$ بالشكل :

$$\operatorname{Cov}(\underline{X}) = E(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})' = E\begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_P-\mu_P \end{pmatrix}(X_1-\mu_1 \quad X_2-\mu_2 \quad \dots \quad X_P-\mu_P)'$$

$$= \begin{bmatrix} E(\underline{X}_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_P-\mu_P) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_P-\mu_P) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E(X_P-\mu_P)(X_1-\mu_1) & & \cdots & E(X_P-\mu_P)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1P} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2P} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{P1} & \sigma_{P2} & \cdots & \sigma_{PP} \end{bmatrix} = \sum$$

تسمى المصفوفة $\sum$ بمصفوفة التباينات والتغايرات .

مثال: ليكن $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ متجه عشوائي منقطع قانون توزيعه الاحتمالي معرف بالجدول الأتي:

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	marginal X_2
0	0. 24	0. 16	0. 40	0. 80
1	0,06	0.14	0.00	0.20
marginal X_1	0.30	0.30	0.40	

إن مصفوفة التباينات والتغايرات هي المصفوفة: $\sum = \begin{pmatrix} 0.69 & -0.08 \\ -0.08 & 0.16 \end{pmatrix}$

مصفوفة الارتباط Correlation Matrix: هي المصفوفة ρ التي تحقق $\rho = V^{-\frac{1}{2}} \sum V^{-\frac{1}{2}}$ أو $\sum = V^{\frac{1}{2}} \rho V^{\frac{1}{2}}$ حيث:

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\sigma_{PP}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1P}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{PP}}} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{PP}}{\sqrt{\sigma_{PP}\sigma_{11}}} & & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1P} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2P} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1P} & \rho_{2P} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

في المثال السابق نعطي : $V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.69} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.16} \end{bmatrix}$ وبالتالي فإن: $\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-0.08}{\sqrt{0.69 \times 0.14}} \\ \frac{-0.08}{\sqrt{0.14 \times 0.69}} & 1 \end{bmatrix}$

نماذج عشوائية : لتكن $\underline{X}_1 , \underline{X}_2 , ..., \underline{X}_n$ عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من توزيع مشترك متجه متوسطاته $\underline{\mu}$ ومصفوفة تبايناته وتغايراته $\sum$ ، فإن $\overline{\underline{X}}$ مقدر غير منحاز لـ $\underline{\mu}$ ومصفوفة تبايناته وتغايراته $\frac{1}{n}\sum$.

أي أن: $E\,\overline{\underline{X}} = \underline{\mu}$

وأن مصفوفة تباينات وتغايرات $\overline{\underline{X}}$ هي مصفوفة تباينات وتغايرات المجتمع مقسومة على n.

أي أن: $Cov\left(\overline{\underline{X}}\right) = \frac{1}{n}\sum$.

أما بالنسبة لمصفوفة تباينات وتغايرات العينة S_n فإن: $E\left(S_n\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sum = \sum - \frac{1}{n}\sum$

أي أن $E\left(\frac{n}{n-1}S_n\right) = \sum$

وبالتالي فإن $\frac{n}{n-1}S_n$ مقدر غير منحاز بالنسبة للمصفوفة $\sum$, بينما S_n مقدر منحاز للمصفوفة $\sum$ ومقدار التحيز هو: $E\left(S_n\right) - \Sigma = -\frac{1}{n}\Sigma$

البرهان:

$$\begin{aligned}
E\left(\overline{\underline{X}}\right) &= E\left(\frac{1}{n}\underline{X}_1 + \frac{1}{n}\underline{X}_2 + ... + \frac{1}{n}\underline{X}_n\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\underline{X}_1\right) + E\left(\frac{1}{n}\underline{X}_2\right) + ... + E\left(\frac{1}{n}\underline{X}_n\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\underline{X}_1\right) + \frac{1}{n}E\left(\underline{X}_2\right) + ... + \frac{1}{n}E\left(\underline{X}_n\right) \\
&= \frac{1}{n}\underline{\mu} + \frac{1}{n}\underline{\mu} + ... + \frac{1}{n}\underline{\mu} = \underline{\mu}
\end{aligned}$$

لايجاد مصفوفة تباينات وتغايرات $\overline{\underline{X}}$

$$Cov\left(\overline{\underline{X}}\right) = E\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)'$$

وبالاعتماد على العلاقة:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)' &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{X}_j - \underline{\mu}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_j - \underline{\mu}\right)'
\end{aligned}$$

علماً أن:

$$\overline{\underline{X}} - \underline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i - \underline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)$$

نجد أن:

$$Cov\left(\overline{\underline{X}}\right) = E\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)' = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_j - \underline{\mu}\right)'\right)$$

ومن أجل $i \neq j$ نجد أن : $E\left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_j - \underline{\mu}\right)' = 0$

وذلك لأن التغاير بين عنصرين مختلفين من عناصر العينة المستقلة يساوي الصفر. وبالتالي نجد:

$$Cov\left(\underline{\bar{X}}\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)'\right)$$

وبما أن المصفوفة $\sum=E\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)'$ هي مصفوفة تباينات وتغايرات المجتمع من أجل المتجه $\underline{X}_i$ فإن:

$$Cov\left(\underline{\bar{X}}\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\mu}\right)'\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum+\sum+\ldots+\sum\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(n\sum\right)=\left(\frac{1}{n}\right)\sum$$

لنوجد الآن قيمة التوقع الرياضي لمصفوفة تباينات وتغايرات العينة S_n

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'=\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\underline{X}_i'+\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(-\underline{\bar{X}}'\right)=\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i\,\underline{X}_i'-n\,\underline{\bar{X}}\,\underline{\bar{X}}'$$

وذلك لأن: $\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)=0\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i'=n\underline{\bar{X}}'$

وبأخذ التوقع الرياضي للطرفين نجد:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left(\underline{X}_i\,\underline{X}_i'\right)-n\,E\left(\underline{\bar{X}}\,\underline{\bar{X}}'\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum+\underline{\mu}\,\underline{\mu}'\right)-n\left(\frac{1}{n}\sum+\underline{\mu}\,\underline{\mu}'\right)$$

$$=n\sum+n\,\underline{\mu}\,\underline{\mu}'-\sum-n\,\underline{\mu}\,\underline{\mu}'$$

$$=(n-1)\sum$$

وبملاحظة أن مصفوفة تباينات وتغايرات العينة تعطى بالشكل:

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i\,\underline{X}_i'-\underline{\bar{X}}\,\underline{\bar{X}}'$$

فإن التوقع الرياضي لهذه المصفوفة يصبح بالشكل: $E\left(S_n\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)\sum$

وبضرب الطرفين بالمقدار $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ فإننا نحصل على مقدّر غير منحاز بالنسبة لمصفوفة التباين ونكتب:

$$S=\left(\frac{n}{n-1}\right)S_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'$$

تعريف (1) : التباين الكلي هو قيمة محدد مصفوفة التباين S .

تعريف (2) : التباين الكلي هو حاصل مجموع التباينات فقط ، في S أي : $\det(S)=\sum_{i=1}^{P}S_{ii}$

نتائج :

1- إذا كانت $n\le P$ فإن $|S|=0$

2- إذا كانت $C'\underline{X}_i=k$ فإن $|S|=0$

3- إذا كان $Var\left(C'X_i\right)>0$ فإن $|S|>0$ وذلك $\forall C\ne 0\ ,\ P<n$

التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات

تعريف التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات:

لتكن لدينا دالة الكثافة لتوزيع طبيعي: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

يمكننا كتابة الأس بالشكل : $(x-\mu)\ \dfrac{1}{\sigma^2}\ (x-\mu)$

وبذلك نستطيع أن نكتب سياقاً على ذلك دالة الكثافة للمتجه $(\underline{X}_1, \underline{X}_1, ..., \underline{X}_p)$ بالشكل:

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{p} \frac{1}{|\sum|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)' \sum{}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)\right\}$$

ونقول أن توزيع المتجه $(\underline{X}_1, \underline{X}_1, ..., \underline{X}_p)$ هو توزيع طبيعي متعدد متوسطه $\underline{\mu}$ ومصفوفة تبايناته وتغايراته $\sum$.

حالة خاصة: التوزيع الطبيعي الثنائي:

ليكن لدينا: $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\,\sigma_1\,\sigma_2 \\ \rho\,\sigma_1\,\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$Q(x_1, x_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - \mu & x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 \\ -\rho\,\sigma_1\,\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \left\{ \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right) \left\{ \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}$$

يمكن كتابة القوس عن طريق إتمام مربعات على شكل مجموع حدين :

$$Q(x_1, x_2) = \left\{ \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right\}$$

$$= \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \rho^2 \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\ \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$= (1-\rho^2)\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\ \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right)\left\{(1-\rho^2)\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}}_{N(\mu_1,\sigma_1^2)}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[x_2-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)\right]^2\right\}}_{N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)\quad\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)}$$

$$=N(\mu,\sigma_1^2)\,.\,N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)\,,\,\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

أي نستطيع أن نكتب : $E(X_2|X_1)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1-\mu_1)=a+bX_1$

أي توقع المتغير الثاني بشرط الأول هو عبارة عن علاقة خطية في الأول .

نتيجة: ليكن Y_1 و Y_2 مجموعتين من المتغيرات الطبيعية: $X_1=a+bY_1+cY_2$, $X_2=d+eY_1+fY_2$

فإن $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ هي BVN متغيرات طبيعية ثنائية .

بناء المتغيرات الطبيعية المتعددة :

ليكن $\underline{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_P\end{pmatrix}$ متجه $N(0,1)$ وليكن $\underline{X}=A\begin{pmatrix}1\\\underline{Y}\end{pmatrix}$

عندئذٍ يتوزع $\underline{X}$ وفق $M\cup N(\underline{\mu},\sum)$ حيث $\underline{\mu}=\underline{a}$ و $\sum=A'A$ إذاً المتغير الطبيعي المتعدد المتغيرات ما هو إلا تحويله خطية على متغيرات معيارية طبيعية مستقلة .

خواص التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات $M\cup N$:

1 – إذا كان $\underline{X}\sim M\cup N(\underline{\mu},\sum)$ عندها $A\underline{X}\sim M\cup N\left(A\underline{\mu}\,,\underbrace{A\sum A'}\right)$.

البرهان:

$$E(A\underline{X})=AE(\underline{X})=A\underline{\mu}$$
$$Var(A\underline{X})=E[A\underline{X}-E(A\underline{\mu})][A\underline{X}-E(A\underline{\mu})]'$$
$$=E[A\underline{X}-AE(\underline{\mu})][A\underline{X}-AE(\underline{\mu})]'$$
$$=E\{A[\underline{X}-E(\underline{\mu})]\}\{A[\underline{X}-E(\underline{\mu})]\}'$$
$$=E\{A[\underline{X}-E(\underline{\mu})][\underline{X}-E(\underline{\mu})]'A'\}$$
$$=AE[\underline{X}-E(\underline{\mu})][\underline{X}-E(\underline{\mu})]'A'$$
$$=A\sum A'$$

2 – إذا كان $\underline{X}\sim M\cup N(\underline{\mu},\sum)$ عندها $\underline{X}+\underline{b}\sim M\cup N(\underline{\mu}+\underline{b},\sum)$.

مثال : لتكن : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ أوجد $A\underline{X}$ ثم أوجد وسيطاه ؟

الحل :

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$$

لنوجد الآن توقع $A\underline{X}$ حسب الخاصة (2) :

$$A\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}$$

ولنوجد التباين :

$$A\sum A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{13} + \sigma_{23} \\ \sigma_{21} - \sigma_{22} - \sigma_{31} + \sigma_{32} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

إذاً :

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix} \sim MUN\left(\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{13} + \sigma_{23} \\ \sigma_{21} - \sigma_{22} - \sigma_{31} + \sigma_{32} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{pmatrix}\right)$$

3 – إذا كان $\underline{X} \sim MUN(\underline{\mu}, \sum)$ وقسمنا $\underline{X}$ إلى $\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{pmatrix}$ عندئذٍ :

$$(i) \quad \underline{X}_1 \sim MUN(\underline{\mu}_1, \textstyle\sum_{11})$$

$$\underline{X}_2 \sim MUN(\underline{\mu}_2, \textstyle\sum_{22})$$

$$(ii) \quad \underline{X}_1 | \underline{X}_2 \sim MUN\left(\underline{\mu}_1 + \textstyle\sum_{12}\sum_{22}^{-1}(\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2), \sum_{11} - \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\right)$$

$$\underline{X}_2 | \underline{X}_1 \sim MUN\left(\underline{\mu}_2 + \textstyle\sum_{21}\sum_{11}^{-1}(\underline{X}_1 - \underline{\mu}_1), \sum_{22} - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\right)$$

البرهان :

برهان (i) يتم باستخدام الخاصة (2) حيث نأخذ $A = [\, I : 0 \,]$ عندئذٍ :

$$A\underline{X} = \underline{X}_1 \quad , \quad A\underline{\mu} = \underline{\mu}_1 \quad , \quad A\textstyle\sum A' = \sum_{11}$$

وبنفس الطريقة من أجل $\underline{X}_2$.

برهان (i i) يتم أيضاً باستخدام الخاصة (2) حيث نأخذ $A = \begin{pmatrix} I & -\sum_{12}\sum_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ عندها :

$$A(\underline{X} - \underline{\mu}) = A\begin{pmatrix} \underline{X}_1 - \underline{\mu}_1 \\ \underline{X}_2 - \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{X}_1 - \underline{\mu}_1 - \sum_{12}\sum_{22}^{-1}(\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2) \\ \underline{X}_2 - \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} \sim MUN(0, A\textstyle\sum A')$$

مع القيمة الوسطية $A\underline{\mu} = \underline{0}$ ومصفوفة التغاير :

$$A\sum A' = \begin{pmatrix} I & -\sum_{12}\sum_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\sum_{12}\sum_{22}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{11}-\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21} & 0 \\ 0 & \sum_{22} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن $\left(\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2\right)\sum_{12}\sum_{22}^{-1} - \underline{\mu}_1 - \underline{X}_1$, $\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2$ مستقلين وكل منهما $M\cup N$.

$$\left(\underline{X}_1 - \underline{\mu}_1 - \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\left(\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2\right) \sim M\cup N\left(0, \sum_{11} - \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\right)\right)$$

كما أن : $\underline{X}_2 - \underline{\mu}_2 \sim M\cup N\left(0, \sum_{22}\right)$

4 – إذا كانت $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ عندئذٍ X_1 , X_2 مستقلة إذا وفقط إذا كان : $\sum_{12} = 0$.

5 – ليكن $\underline{X}\ M\cup N\left(\underline{\mu}, \sum\right)$, $\left|\sum\right| > 0$ عندئذٍ :

(a) $\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right) \sim \chi^2(P)$

(b) $P\left\{\underline{X};\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right) \le \chi^2_\alpha(P)\right\} = 1-\alpha$

البرهان : لاحظ أن $Z_i \sim N(0,1)$ و $\chi^2(P) = \sum_{i=1}^{P} Z_i^2$.

ولكن : $\sum^{-1} = \sum_{i=1}^{P}\frac{1}{\lambda_i}e_i e_i'$ عند ذلك :

$$\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right) = \sum_{i=1}^{P}\frac{1}{\lambda_i}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)'e_i e_i'\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e_i'\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{P} Z_i^2$$

حيث : $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1' , \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}e_2' ,\ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_P}}e_P'\right)$ و $\underline{Z} = A\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)$

و $\underline{X}-\underline{\mu} \sim M\cup N\left(\underline{0}, \sum\right)$ وبالتالي : $\underline{Z} \sim M\cup N\left(\underline{0}, A\sum A'\right)$

ولكن :

$$A\sum A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_P}}e_P' \end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{P}\lambda_i\ e_i e_1'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1 \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda_P}}e_P\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_P}}e_P' \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1 \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\lambda_P}}e_P\right) = I$$

هذا يؤدي إلى أن : $\underline{Z} \sim MUN(\underline{0}, I)$ ومنه : $\sum_{i=1}^{P} Z_i^2 \sim \chi^2(P)$.

6 - لتكن $i = 1, \dots, n$ $X_i \sim MUN(\mu_i, \Sigma)$ عينة مستقلة ، عندئذٍ :

$$(\text{I}) \quad \underline{V}_1 = \sum_i C_i \underline{X}_i \sim MUN\left(\sum C_i \underline{\mu}_i , \left(\sum C_i^2\right) \Sigma\right)$$

$$(\text{II}) \quad \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} \sim MUN\left(\begin{pmatrix} \sum c_i \underline{\mu}_i \\ \sum d_i \underline{\mu}_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_i c_i^2 \Sigma & \left(\sum_i c_i d_i\right)\Sigma \\ \left(\sum_i c_i d_i\right)\Sigma & \left(\sum_i d_i^2\right)\Sigma \end{pmatrix} \right)$$

فإن $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ مستقلين إذا وفقط إذا $\sum c_i d_i = 0$.

البرهان : من الفرض :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim MUN\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & & & 0 \\ & \Sigma & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Sigma \end{pmatrix} \right)$$

سنختار A كما يأتي :

$$A = \begin{pmatrix} c_1 I & c_2 I & \cdots & c_n I \\ d_1 I & d_2 I & \cdots & d_n I \end{pmatrix}$$

عند ذلك :

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} \sum_i c_i X_i \\ \sum_i d_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} \sim MUN\left(A\underline{\mu} , A \Sigma_K A'\right)$$

حيث :

$$A\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \sum_i c_i \mu_i \\ \sum_i d_i \mu_i \end{pmatrix}$$

$$A' \Sigma_K A = \begin{pmatrix} c_1 I & d_1 I \\ c_2 I & d_2 I \\ \vdots & \vdots \\ c_n I & d_n I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & & & 0 \\ & \Sigma & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 I & c_2 I & \cdots & c_n I \\ d_1 I & d_2 I & \cdots & d_n I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_i c_i^2 \Sigma & \left(\sum_i c_i d_i\right)\Sigma \\ \left(\sum_i c_i d_i\right)\Sigma & \left(\sum_i d_i^2\right)\Sigma \end{pmatrix} = \Sigma^*$$

نلاحظ أنه عندما $\sum c_i\, d_i = 0$ فإن $\sum^*$ تصبح $\begin{pmatrix} \sum_i c_i^2 \sum & 0 \\ 0 & \sum_i d_i^2 \sum \end{pmatrix}$ وبالتالي $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ مستقلين .

وهو المطلوب .

إن أي علاقة خطية من توزيع طبيعي تبقى توزيعاً طبيعياً .

إن وسطاء توزيع طبيعي متعدد المتغيرات هي $\sum_{(P\times P)}$ و $\underline{\mu}_{(P\times 1)}$ وبالتالي يكون عدد المجاهيل في هذه الحالة :

$$P + \frac{P(P+1)}{2} = \frac{P(P+3)}{2}$$

لإيجاد مقدّرات لهذه المعالم عن طريق دالة الإمكانية الأعظمي حسب طريقة التفاضل يكون متعذراً .

ولذلك سنلجأ إلى :

إيجاد مقدّرات لوسطاء التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات:

إيجاد دالة الإحتمالية العظمى:

سوف نجد دالة الإحتمالية العظمى بطريقة خاصة لاتعتمد على التفاضل:

لتكن $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع إحصائي له التوزيع الطبيعي المتعدد أي من الشكل: $M \cup N(\underline{\mu}, \sum)$, عندئذٍ تعطى دالة الإحتمالية العظمى بالشكل :

$$L(X_1, \dots X_n, \underline{\mu}, \sum) = \prod_{i=1}^{n} f(\underline{X}_i, \underline{\mu}, \sum)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{P}{2}} \frac{1}{|\sum|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X}_i - \underline{\mu})' \sum^{-1} (\underline{X}_i - \underline{\mu})}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{|\sum|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X}_i - \underline{\mu})' \sum^{-1} (\underline{X}_i - \underline{\mu})}$$

أولاً نبحث عن مقدّر لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$:

نلاحظ أن $\underline{\mu}$ لا تدخل في L في الأس ونلاحظ أيضاً أن الأس سالبة . لذلك نبحث عن قيمة $\underline{\mu}$ التي تجعل المقدار التالي أصغر ما يمكن :

نضيف ونطرح $\overline{\underline{X}}$: **مقدّر**

$$\sum_{i=1}^{n} (\underline{X}_i - \underline{\mu})' \sum^{-1} (\underline{X}_i - \underline{\mu}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}) + (\overline{\underline{X}} - \underline{\mu})\right)' \sum^{-1} \left((\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}) + (\overline{\underline{X}} - \underline{\mu})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}) \sum^{-1} (\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}) + n\,(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu})' \sum^{-1} (\overline{\underline{X}} - \underline{\mu})$$

يكون هذا المقدار أصغر ما يمكن عندما يساوي الصفر وليكون هذا المقدار مساوياً الصفر يجب أن يكون كل من الحدين على طرفي إشارة + مساوياً إلى الصفر ومنه :

$$\left(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu}\right)' \sum \left(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{\underline{\mu}} = \underline{\bar{X}}} \qquad (1)$$

وبالتالي يصبح :

$$L\left(X_1,\dots,X_n,\sum\right) = A\,\frac{1}{\left|\sum\right|^{n/2}}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i-\underline{\bar{X}}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{x}_i-\underline{\bar{X}}\right)}$$

ثانياً – نبحث عن مقدّر مصفوفة التغاير $\sum$:

لقد أوجدنا مقدّر لمتجه المتوسط $\underline{\mu}$ والذي هو $\hat{\underline{\mu}} = \underline{\bar{X}}$ عندئذٍ تصبح دالة الاحتمالية العظمى بالشكل :

$$L\left(X_1,\dots,X_n,\sum\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\sum\right|^{n/2}}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i-\underline{\bar{X}}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{x}_i-\underline{\bar{X}}\right)}$$

الخطوة الأولى :

الآن لإيجاد مقدّر $\sum$ لنأخذ المجموع :

$$\sum_{i}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\sum^{-1}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right) = tr\left(\sum^{-1}\underbrace{\sum_{i}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'}_{\text{نفرض } B}\right)$$

الخطوة الثانية :

$$\frac{1}{\left|\sum\right|^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}tr\sum^{-1}B} \le \frac{1}{\left|B\right|^{\frac{n}{2}}}\, n^{\frac{nP}{2}}\, e^{-\frac{nP}{2}}$$

الخطوة الثالثة :

يحدث التساوي في العلاقة السابقة عند اختيار $\hat{\sum} = \frac{1}{n}B$

حيث : $B = \sum_{1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'$.

البرهان :

الخطوة الأولى : لاحظ أن :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right) &= tr\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} tr\left(X_i-\underline{\bar{X}}\right)'\sum^{-1}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} tr\left(\sum^{-1}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(X_i-\underline{\bar{X}}\right)'\right)
\end{aligned}$$

وحسب الخاصة $tr\,A\,B = tr\,B\,A$:

$$\begin{aligned}
&= tr\sum^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i-\underline{\bar{X}}\right)\left(X_i-\underline{\bar{X}}\right)'\right)\\
&= tr\sum^{-1}B
\end{aligned}$$

الخطوة الثانية : لنضع $b = \frac{n}{2}$ ولتكن $B^{\frac{1}{2}}$ هي مصفوفة الجذر التربيعي لـ B متناظرة .

عندئذٍ :

$$tr\left(\Sigma^{-1} B\right) = tr\left(\Sigma^{-1} B^{\frac{1}{2}}\right) B^{\frac{1}{2}} = tr B^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} B^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{P} \eta_i$$

ومنه يمكن أن نضع :

$$\left| B^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} B^{\frac{1}{2}} \right| = \prod_{i=1}^{P} \eta_i \qquad (1)$$

$$\left| B^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} B^{\frac{1}{2}} \right| = \left| B^{\frac{1}{2}} \right| \left| \Sigma^{-1} \right| \left| B^{\frac{1}{2}} \right| = \left| \Sigma^{-1} \right| \left| B^{\frac{1}{2}} \right| \left| B^{\frac{1}{2}} \right|$$

$$= \left| \Sigma^{-1} \right| \left| B \right| = \frac{|B|}{|\Sigma|} \qquad (2)$$

عندئذٍ من (1) و (2) نجد :

$$\frac{|B|}{|\Sigma|} = \prod_{i=1}^{P} \eta_i \Rightarrow \frac{1}{|\Sigma|} = \frac{\prod_{i=1}^{P} \eta_i}{|B|}$$

وبالتالي بالتعويض في :

$$\frac{1}{|\Sigma|^b} e^{-\frac{1}{2} tr\left(\Sigma^{-1} B\right)} = \left(\frac{\prod_{i=1}^{P} \eta_i}{|B|} \right)^b e^{-\sum_{i=1}^{P} \frac{\eta_i}{2}} = \frac{1}{|B|^b} = \prod_{i=1}^{P} \eta_i^b e^{-\frac{\eta_i}{2}}$$

وبالتالي يؤول إيجاد القيمة العظمى لِـ Σ إلى إيجاد القيمة العظمى لِـ

$$\varphi(\eta) = \eta^b e^{-\frac{\eta}{2}}$$

$$\varphi'(\eta) = b\eta^{b-1} e^{-\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}\eta^b e^{-\frac{\eta}{2}} = \underbrace{\left(\eta^{b-1} e^{\frac{\eta}{2}}\right)}_{\neq 0} \underbrace{\left(b - \frac{1}{2}\eta\right)}_{\| \atop 0} = 0$$

حسب ما افترض : $\Rightarrow \eta = 2b = n$

الخطوة الثالثة : بتعويض ما حصلنا عليه في الخطوة الأولى والثانية نجد :

$$L\left(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n, \hat{\underline{\mu}}, \Sigma\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{|\Sigma|^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} tr \Sigma^{-1} B} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{|B|^{\frac{n}{2}}} n^{\frac{nP}{2}} e^{-\frac{nP}{2}}$$

وهذان الطرفان يتساويان إذا وفقط إذا كان

$$\boxed{\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} B = \frac{n-1}{n} S} \qquad (2)$$

حيث : $B = \sum_{1}^{n} \left(\underline{X}_i - \underline{\bar{X}}\right)\left(\underline{X}_i - \underline{\bar{X}}\right)' = (n-1)S$.

وبذلك نكون قد أوجدنا مقدّر Σ بطريقة غير طريقة الاشتقاق المعروفة .

وبالتالي إن أكبر قيمة للتابع L هي :

$$L\left(\hat{\underline{\mu}}, \hat{\Sigma}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\hat{\Sigma}\right|^{n/2}} e^{-\frac{nP}{2}}$$

* لنبرهن الآن على استقلال $\overline{X}$ و S ويتم كالآتي :

$$L\left(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n, \underline{\mu}, \Sigma\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\Sigma\right|^{n/2}} e^{-\frac{n}{2}\operatorname{tr}\hat{\Sigma} - \frac{n}{2}(\overline{\underline{X}}-\underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\overline{\underline{X}}-\underline{\mu})}$$

$$= c_1 e^{-\frac{1}{2}(Y-\underline{\mu})' \Sigma^{*-1}(Y-\underline{\mu})} c_2 \frac{1}{\left|\Sigma^*\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Sigma^{*-1}\hat{\Sigma}^*}$$

أي دالتين يمكن فصلهما عن بعض فهما مستقلتين وبالتالي $\overline{\underline{X}}$ و $\hat{\Sigma}$ مستقلين .

و $\overline{\underline{X}} \sim MUN\left(\underline{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ $\hat{\Sigma} \sim W\left(\Sigma\right)$ توزيع ويشرت .

ويمكن استخدام التقديرات التي حصلنا عليها (1) و (2) لإيجاد مناطق الثقة لـ μ واختبار الفرضيات .

1 – اختيار الفرضيات المتعلقة بـ μ في MUN :

لتكن $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ عينة عشوائية من $MUN\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ وكلاهما غير معلوم وسوف نقوم باختبار الفرضية $H_o : \underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ مقابل $H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_o$.

إن ترتيب الأعداد هو ترتيب كامل

لذلك تكون المقارنة > أو < غير معرفة

لكن ترتيب المتجهات هو ترتيب غير كامل

في حالة بعد واحد : كنا نقوم بما يلي : من أجل $X_1, X_1, \dots, X_n \sim (\mu, \sigma^2)$ ونريد اختيار $H_o : \mu = \mu_o$ و $H_o : \mu \underset{<}{\overset{>}{\neq}} \mu_o$ نحسب المقدار $t = \frac{\overline{X} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$.

وبالتالي $\left(\frac{\overline{X} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}\right)^2 = t^2 \sim F(1, n-1)$ ومنه :

$$\frac{n\left(\overline{X} - \mu_o\right)^2}{S^2} = n\left(\overline{X} - \mu_o\right) S^{-2} \left(\overline{X} - \mu_o\right)$$

$$t^2 \sim F(1, n-1) \quad \text{أو} \quad t \sim t(n-1)$$

في حالة المتعدد المتغيرات : يكون : $T^2 = n\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}_o\right)' S^{-1} \left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}_o\right)$

حيث : $\overline{\underline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i$, $S = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}\right)\left(\underline{X}_i - \overline{\underline{X}}\right)'$

وبالتالي :

$$T^2 \sim F(P, n-P)\frac{(n-1)P}{n-P}$$

$$T^2 = n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_o\right)' S^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_o\right)$$

مثال :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	3.7	5.7	3.8	3.2	3.1	4.6	2.4	7.2	6.7	5.4
X_2	48.5	65.1	47.2	53.2	55.5	36.1	24.8	33.1	47.4	54.1
X_3	9.3	8.0	10.9	12.0	9.7	74.0	14.0	7.6	8.5	11.3

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_1	3.9	4.5	3.5	4.5	1.5	8.5	4.5	6.5	4.1	5.5
X_2	36.9	58.8	27.8	40.2	13.5	56.4	71.6	52.8	44.1	40.9
X_3	12.7	12.3	9.8	8.4	10.1	7.1	8.2	10.9	11.2	9.4

اختير الفرضية : $H_o : \underline{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ بمستوى أهمية $\alpha = 0.10$

الحل :

$$\underline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} 4.64 \\ 45.40 \\ 9.97 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.002 & -1.810 \\ 10.002 & 199.798 & -5.627 \\ -1.810 & -5.627 & 3.628 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ :

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ -0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 20\left[(4.640-4) \quad (45.40-50) \quad (9.94-10)\right]\begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ -0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix}.$$

$$.\begin{bmatrix} 4.640-4 \\ 45.40-50 \\ 9.94-10 \end{bmatrix} = 9.74$$

$$F_\alpha(P, n-P) = F_{0.10}(3,17) = 2.44$$

$$\frac{(n-1)P}{n-P} F_\alpha(P, n-P) = 8.18 < T^2$$

وبالتالي نرفض الفرضية H_o عند المستوى $\alpha = 0.10$.

نسبة الاحتمالية العظمى من أجل متغير واحد :

لتكن $X_1, X_1, \ldots, X_n \sim (\mu, \sigma^2)$ عينة عشوائية ونريد اختيار نسبة الاحتمالية العظمى :

$$\lambda = \frac{\max\limits_{H_o} L\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, \mu_o, \sigma_o^2\right)}{\max L\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, \mu, \sigma^2\right)}$$

وبالتالي دالة الاحتمالية العظمى:

$$L\left(X_1, X_1, \ldots, X_n, \mu, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\max_{H_o} L\left(X_1, X_1, \ldots, X_n, \mu_o, \hat{\sigma}_o^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}_o}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \;:\; \mu = \mu_o, \hat{\sigma}_o^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \mu)^2$$

ومقام λ هو :

$$\max L\left(X_1, X_1, \ldots, X_n, \mu, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \;:\; \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_1\left(X_i - \overline{X}\right),\; \mu = \overline{X}$$

ومنه :

$$\lambda = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_o^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}} = \left(\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum (X_i - \mu_o)^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu_o)^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

أي أن :

$$\lambda = \left(1 + \frac{n(\overline{X} - \mu_o)^2}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{n}{n+1} t^2\right)^{-\frac{n}{2}}$$

حيث إن الاختيار : $t^2 = \left[\lambda^{\frac{2}{n}} - 1\right]\frac{n-1}{n}$

نسبة الاحتمالية العظمى من أجل حالة متعدد المتغيرات :

في هذه الحالة سوف يكون لدينا المقدّرات النقطية هي $\underline{\mu} = \underline{X}$ و $\hat{\sum} = \frac{1}{n}\sum_i \left(X_i - \underline{X}\right)\left(\underline{X}_i - \overline{X}\right)'$ ويكون :

$$L\left(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n, \underline{\mu}, \sum\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\sum\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_1 (\underline{X}_i - \underline{\mu})\sum^{-1}(\underline{X}_i - \underline{\mu})}$$

$$\max L = (2\pi)^{-\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\sum\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{nP}{2}} \qquad (1)$$

$$\max L_o = (2\pi)^{-\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\sum\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum^n (\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)' \sum_o^{-1} (\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\Sigma\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma_o^{-1} \left(\sum_1^n (\underline{x}_i - \underline{\mu}_o)(\underline{x}_i - \underline{\mu}_o)'\right)}$$

نعوض الآن $\hat{\Sigma}_o$ حيث :

$$\hat{\Sigma}_o = \frac{1}{n} \sum_1^n (\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)(\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)'$$

$$\max L_o = (2\pi)^{-\frac{nP}{2}} \frac{1}{\left|\hat{\Sigma}_o\right|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{nP}{2}} \qquad (2)$$

بتعويض (1) و (2) في نسبة الاحتمالية العظمى Λ نجد :

$$\Lambda = \left(\frac{\left|\hat{\Sigma}_o\right|}{\left|\hat{\Sigma}\right|}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

لكن :

$$\hat{\Sigma}_o = \frac{1}{n} \sum_1^n (\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)(\underline{X}_i - \underline{\mu}_o)' = \hat{\Sigma} + n(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}_o)(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}_o)'$$

ومنه :

$$\Lambda^{-\frac{2}{n}} = \frac{\left|\hat{\Sigma}_o\right|}{\left|\hat{\Sigma}\right|} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right) = 1 + \frac{T^2}{n-1}$$

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{-1} \Rightarrow \Lambda = \left(\frac{\left|\hat{\Sigma}\right|}{\left|\hat{\Sigma}_o\right|}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{n}{n-1} T^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

مناطق الثقة :

إن العبارة الآتية :

$$P\left(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ليست مقبولة لأن ما بين القوسين ليس حدياً . وبالتالي نكتب:

$$P\left(\overline{X} \mp t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} \text{ وقوع } \mu \text{ في المجال} \right) = 1 - \alpha \; .$$

تعريف : لتكن $\underline{X}_1 .....\underline{X}_n$ عينة عشوائية من توزيع متعدد له شعاع المتوسط $\underline{\theta}$ ، عندئذٍ يقال عن المنطقة

$R(\underline{X}_1, ..., \underline{X}_n)$ إنها منطقة ثقة بمستوى $100(1-\alpha)\%$ إذاً :

$$P\left(R(\underline{X}_1, ..., \underline{X}_n) \text{ في المنطقة } \theta \text{ وقوع}\right) = 1-\alpha$$

وهكذا يكون :

$$P\left[n\left(\overline{\underline{X}}-\underline{\mu}\right)' S^{-1}\left(\overline{\underline{X}}-\underline{\mu}\right) \le \frac{(n-1)P}{n-P} F_\alpha(P, n-P) \right] = 1-\alpha$$

نتائـج : يمكن إنشاء منطقة ثقة لـ $\underline{\ell}'\underline{\mu}$ بطرائق .

1. Individual Inference

لتكن $\underline{X} \sim MUN(\underline{\mu}, \sum)$ ولتكن لدينا عينة عشوائية $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$ لها نفس التوزيع . وليكن $\underline{\ell}$ متجه ثابت معروف ، عندئذٍ نحصل على :

$$P\left[\underline{\ell}'\overline{\underline{X}} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}{n}} \le \underline{\ell}'\underline{\mu} \le \underline{\ell}'\overline{\underline{X}} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}{n}} \right] = 1-\alpha$$

وذلك من أجل $\underline{\ell}$ ثابت (مثبت) .

2. Suimultaneour Inference :

من أجل أي $\underline{\ell}$.

$$P\left[\underline{\ell}'\overline{\underline{X}} - \sqrt{\frac{P(n-1)}{n-P} F_\alpha(P,n-P)\underline{\ell}'S\underline{\ell}} \le \underline{\ell}'\underline{\mu} \le \underline{\ell}'\overline{\underline{X}} + \sqrt{\frac{P(n-1)}{n-P} F_\alpha(P,n-P)\underline{\ell}'S\underline{\ell}} \right] = 1-\alpha$$

3 – طريقة (Ben Ferronis Method)

$$P\left[\overline{X}_i - t_{\frac{\alpha}{2P}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \overline{X}_i + t_{\frac{\alpha}{2P}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \;, i=1...P \right] \ge 1-\alpha$$

البراهين لهذه الطرق :

برهان الطريقة (1) :

لنضع $Z_i = \underline{\ell}'\underline{X}_i$ عندئذٍ يكون $\overline{Z} = \underline{\ell}'\overline{\underline{X}} = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_i$ ، أيضاً يكون :

$$E Z_i = \underline{\ell}'\underline{\mu}$$

و

$$V(Z_i) = \underline{\ell}' \sum \underline{\ell}$$

عند ذلك $N\left(\underline{\ell}'\underline{\mu}, \underline{\ell}'\sum\underline{\ell}\right) \sim Z_1......Z_n$ ومنه :

$$\frac{\overline{Z}-\underline{\ell}'\underline{\mu}}{\sqrt{V(\overline{Z})}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{Z}-\underline{\ell}'\underline{\mu}\right)}{\sqrt{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}} \sim N(0,1)$$

وبالتالي :

$$t = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{Z}-\underline{\ell}'\underline{\mu}\right)}{\sqrt{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}} \sim t(n-1)$$

وبالتالي ينتج المطلوب (1) .

إثبات الطريقة (2) :

نتيجة :
$$t^2 = \frac{n\left(\underline{\ell}'\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)\right)^2}{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}$$

يمكن برهان أن $\max_{\ell} t^2 = T^2$ من أجل ذلك نأخذ :

توطئة : لتكن $B_{(P\times P)}$ معرفة موجبة $\underline{d}_{(p\times 1)}$ متجه عندئذٍ :

$$\max_{\underline{x}\neq 0} \frac{\left(\underline{X}'\underline{d}\right)^2}{\underline{X}'B\underline{X}} = \underline{d}\,B^{-1}\,\underline{d}$$

فإذا أخذنا $\underline{X} = \underline{\ell}$ و $\underline{d} = \underline{\overline{X}} - \underline{\mu}$ و $B = S$ نحصل على :

$$\max_{\underline{\ell}} = \frac{n\left[\underline{\ell}'\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)\right]^2}{\underline{\ell}'S\underline{\ell}} = n\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)' S^{-1}\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right) = T^2$$

بعد ذلك من أجل أي $\underline{\ell}$:

$$P\left[\frac{n\left[\underline{\ell}'\underline{\overline{X}}-\underline{\ell}'\underline{\mu}\right]^2}{\underline{\ell}'S\underline{\ell}} \leq c\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\underline{\ell}'\underline{\overline{X}} - c\sqrt{\frac{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}{n}} \leq \underline{\ell}'\underline{\mu} \leq \underline{\ell}'\underline{\overline{X}} + c\sqrt{\frac{\underline{\ell}'S\underline{\ell}}{n}}\right] = 1-\alpha$$

ولكن $F_\alpha(P, n-P)$ $c = \frac{(n-1)P}{n-P}$.

بالتعويض ينتج المطلوب (2) .

وبالتالي يمكن أن ينتج عن ذلك أن :

1) $$P\left[\overline{X}_i - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \overline{X}_i + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\right] = 1-\alpha$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, p$.

2) ومن أجل $i \neq j$ فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي متجهين تعطى بالشكل:

$$\left[\overline{X}_i - \overline{X}_j - \sqrt{\frac{S_{ii}-2S_{ij}+S_{jj}}{n}\,\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\,,\ \overline{X}_i - \overline{X}_j + \sqrt{\frac{S_{ii}-2S_{ij}+S_{jj}}{n}\,\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\right]$$

وهكذا ....

برهان الطريقة (3) : يعتمد برهان (3) على بديهية في الاحتمالات هي :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{P} c_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{P} c_i'\right) \geq 1 - \sum_{i}^{P} P\left(c_i'\right) = 1 - \sum_{1}^{P}\alpha_i$$

وبالتالي : $$P\left[\overline{X}_i - t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2P}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \overline{X}_i + t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2P}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\ ,\ i = 1 \dots P\right] \geq 1-\alpha$$

وهو المطلوب برهانه .

مقارنة الطرق الثلاثة: إذا كانت $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_P$ مستقلة عن بعضها أي $\sum = (T_i)$ قطرية . عندئذٍ :

$$1)\quad P\left[\bar{X}_i - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \bar{X}_i + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\ ,\ i=1\ldots.P\right] = (1-\alpha)^P$$

$$2)\quad P\left[\bar{X}_i - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\ \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \bar{X}_i + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)}\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$,i=1,2,\ldots,P$$

$$3)\qquad P\left[\bar{X}_i - t_{\frac{\alpha}{2P}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \bar{X}_i + t_{\frac{\alpha}{2P}}(n-1)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\ ,\ i=1\ldots.P\right] \ge 1-\alpha$$

أي إذا كانت الـ X مستقلة عن بعضها فإنها تعطي في الحالة الأولى $(1-\alpha)^P$ معامل وفي الحالة الثانية نحصل على معامل $\left(1-\frac{\alpha}{2P}\right)^P$ وبالتالي الثالثة أفضل من الأولى .

نتيجة: لتكن $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ عينة عشوائية من $MUN(\underline{\mu}, \sum)$ و $(n > 2)$ ونريد اختبار الفرضية: $H_o : \underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ ضد الفرضية: $H_1 : \underline{\mu} \ne \underline{\mu}_o$.

يمكننا القيام بذلك حسب C L T .

نتيجة : $\underline{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_1^n \underline{X}_i$ و $S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - \underline{\bar{X}})(\underline{X}_i - \underline{\bar{X}})'$

عندئذٍ : $\sqrt{n}(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}) \sim AMUN(0, \sum)$

من أجل $(n - P > 2)$: $n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu})' S^{-1}(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}) \sim A\chi^2_\alpha(P)$

فلاختبار الفرضية السابقة : $n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_o)' S^{-1}(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_o) > \chi^2_\alpha(P)$

(**لاحظ أن** : إذا كانت العينة كبيرة كفاية وبالتالي $n - P$ كبيرة فإن الاختبار يتم وفق T^2 أو ما تساويه $\frac{(n-1)P}{n-P}F_\alpha(P,n-P)$ وإذا كانت العينة غير معروف حجمها أو حجمها صغير فإننا نلجأ إلى $\chi^2_\alpha(P)$) .