



حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية



Wellcome



المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8



تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita) ويرمز إليه بالرمز F، ويصنف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F0 - F6 حسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار ، و طول مساره ، و عرضه ، و قدرته التدميرية ، و الفئة 6 - F هي فئة أشد الأعاصير تدميراً .

حل المعادلات اللوغاريتمية :

تحتوي المعادلات اللوغاريتمية على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.



مثال 1

حل معادلات باستخدام تعريف اللوغاريتم

$$\log_{36} x = \frac{3}{2} \quad \text{حل المعادلة}$$

المعادلة الأصلية

$$\log_{36} x = \frac{3}{2}$$

تعريف اللوغاريتم

$$x = 36^{\frac{3}{2}}$$

$$36 = 6^2$$

$$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$$

خاصية قوة القوة

$$x = 6^3 = 216$$

التحقق:

عوض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .



المعادلة الأصلية

$$\log_{36} x = \frac{3}{2}$$

بتعويض 216 بدلاً من x

$$\log_{36} 216 = \frac{3}{2}$$

بالتحليل

$$\log_{36} (36)(6) = \frac{3}{2}$$

خاصيتي ضرب اللوغاريتمات و لوغاريتم القوة

$$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

بالتبسيط

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

الحل صحيح

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$



تحقق من فهمك

27

$$\log_9 x = \frac{3}{2} \quad (1A)$$

1024

$$\log_{16} x = \frac{5}{2} \quad (1B)$$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كل الطرفين.



مثال 2 علي اختبار

$$\text{حل المعادلة } \log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$$

4 D 2 C -1 B -2 A

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

المعادلة الأصلية

$$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$$

حل فقرة الاختبار:

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$$x^2 - 4 = 3x$$

ب طرح $3x$ من كلا الطرفين

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

بالتحليل إلي العوامل

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x - 4 = 0 \quad , \quad x + 1 = 0$$

يحل كل معادلة

$$x = 4 \quad , \quad x = 1$$

تحقق: عوّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$x = 4$$

$$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$$

$$\log_2 12 = \log_2 12 \quad \checkmark$$

$\log_2 (-3)$ غير معرفة و الإجابة 1- مرفوضة

$$x = -1$$

$$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$$

$$\log_2 (-3) = \log_2 (-3) \quad \times$$

بما أن (-3) لا تنتمي لمجال الدالة ، لذا فإن

و الإجابة الصحيحة هي D .

تحقق من فهمك

(2) حل المعادلة $\log_3(x^2 - 15) = \log_3 2x$

15 D

5 C

-1 B

-3 A

ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة .



حل معادلات باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حل المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ثم تحقق من صحة حلّك.

المعادلة الأصلية

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$\log_6 x (x - 9) = 2$$

تعريف اللوغاريتم

$$x (x - 9) = 6^2$$

بالتبسيط ثم طرح 36 من كلا الطرفين

$$x^2 - 9x - 36 = 0$$

بالتحليل

$$(x - 12)(x + 3) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x - 12 = 0 \quad , \quad x + 3 = 0$$

يحل كل معادلة

$$x = 12 \quad , \quad x = -3$$

تحقق:

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

$$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) = 2$$

$$\log_6 12 + \log_6 3 = 2$$

$$\log_6 (12 \cdot 3) = 2$$

$$\log_6 36 = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

$$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) = 2$$

$$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) = 2$$

و بما إن $\log_6 (-12), \log_6 (-3)$

غير معرفين فإن 3- حل مرفوض .

و بذلك يكون الحل هو $x = 12$



تحقق من فهمك

$$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3 \quad (3A)$$

9

$$2\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2 \quad (3B)$$

4



حل المتباينات اللوغاريتمية:

المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$

إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$



حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

حل المتباينة $\log_3 x > 4$

المتباينة الأساسية

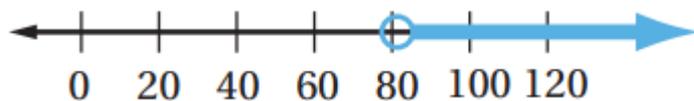
$$\log_3 x > 4$$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$$x > 3^4$$

بالتبسيط

$$x > 81$$

إذن مجموعة الحل هي $\{x | x > 81, x \in \mathbb{R}\}$ 

التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$$x = 243$$

$$\log_3 243 \stackrel{?}{>} 4$$

$$5 > 4 \quad \checkmark$$

$$x = 9$$

$$\log_3 9 \stackrel{?}{>} 4$$

$$2 > 4 \quad \times$$

إذن الحل صحيح.



تحقق من فهمك

$$\log_4 x \geq 3 \quad (4A)$$

$$\{x \mid x \geq 64\}$$

$$\log_2 x < 4 \quad (4B)$$

$$\{x \mid 0 < x < 16\}$$



يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين، استثن من حلك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

الرموز:

إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا و فقط إذا كان $x > y$

و $\log_b x < \log_b y$ إذا و فقط إذا كان $x < y$

مثال:

إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$



حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما أساس واحدة

$$\text{حل المتباينة } \log_4(x + 3) > \log_4(2x + 1)$$

المتباينة الأساسية

$$\log_4(x + 3) > \log_4(2x + 1)$$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$$x + 3 > 2x + 1$$

ب طرح $x + 1$ من كلا الطرفين

$$2 > x$$

استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 \right\} \text{ إذن مجموعة الحل هي}$$



تحقق من نفسك

(5) حل المتباينة $\log_5(2x + 1) \leq \log_5(x + 4)$

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3 \right\}$$



حُلّ كل معادلة مما يأتي:

$$8 \quad \log_{16} x = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$16 \quad \log_8 x = \frac{4}{3} \quad (1)$$

$$3125 \quad \log_{25} x = \frac{5}{2} \quad (4)$$

$$27 \quad \log_{81} x = \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-2 \quad \log_6 \frac{1}{36} = x \quad (6)$$

$$-\frac{1}{3} \quad \log_8 \frac{1}{2} = x \quad (5)$$

$$9 \quad \log_x 27 = \frac{3}{2} \quad (8)$$

$$4 \quad \log_x 32 = \frac{5}{2} \quad (7)$$



حلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

$$2 \quad 5 \log_2 x = \log_2 32 \quad (9)$$

$$2 \quad 3 \log_2 x = \log_2 8 \quad (10)$$

$$8 \quad \log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6 \quad (11)$$

$$2 \quad \log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28 \quad (12)$$

$$2 \quad \log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40 \quad (13)$$

$$9 \quad \log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24) \quad (14)$$

$$108 \quad \log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36 \quad (15)$$

$$85 \frac{1}{3} \quad 3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x \quad (16)$$



حُلّ كل متباينة مما يأتي:

$$\left\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{64}\right\} \log_8 x \leq -2 \quad (18) \quad \{x \mid x > 125\} \log_5 x > 3 \quad (17)$$

$$\{x \mid x \geq 256\} \log_4 x \geq 4 \quad (20) \quad \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\right\} \log_6 x < -3 \quad (19)$$

$$\left\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4}\right\} \log_2 x \leq -2 \quad (22) \quad \left\{x \mid x \geq \frac{1}{81}\right\} \log_3 x \geq -4 \quad (21)$$



حل كل متباينة مما يأتي:

$$\{x \mid x \geq 4\} \quad \log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3) \quad (23)$$

$$\left\{x \mid 2 > x > \frac{4}{3}\right\} \quad \log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8) \quad (24)$$

$$\{x \mid x > 71\} \quad \log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8) \quad (25)$$

$$\{x \mid 0.5 < x \leq 1\} \quad \log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3) \quad (26)$$

(27) صوت: يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث R

هي الشدة النسبية للصوت. احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع

صوته 80 ديسبل.

10^8



(28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = \log_{10} x$ ، حيث x سعة الموجة المسببة للحركة الأرضية.

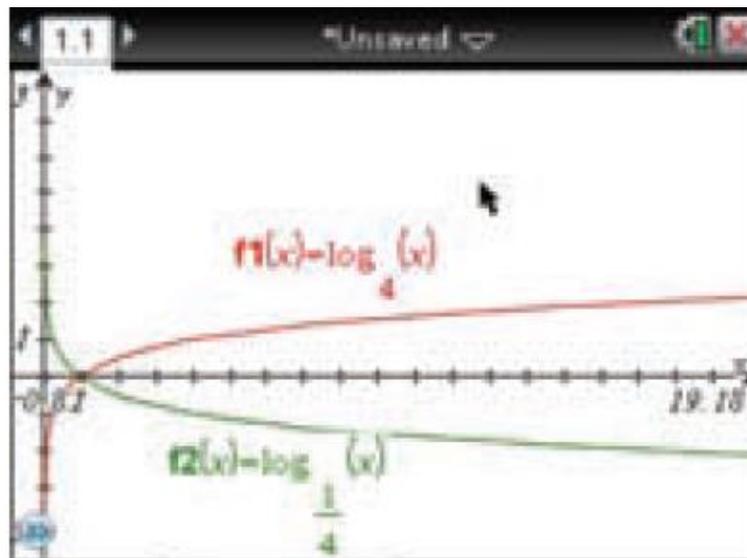
(a) كم تبلغ سعة موجة هزة أرضية سجلت 6 درجات على مقياس ريختر؟
 10^6 أو 1000000

(b) كم مرة تبلغ سعة موجة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بسعة موجة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

10^3 أو 1000 مرة أكبر



(29) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة التمثيل البياني للدالتين $y = \log_4 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



(a) تحليلياً: قارن بين منحنىي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x ؟



(b) **لفظياً:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x .

(c) **بيانياً:** استعمل ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية لمقارنة التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي بالتمثيل البياني للدالة $y = \log_4 x$ وذلك بعد تمثيل كل منها بيانياً:

$$y = \log_4 x + 2 \quad (1)$$

$$y = \log_4 (x + 2) \quad (2)$$

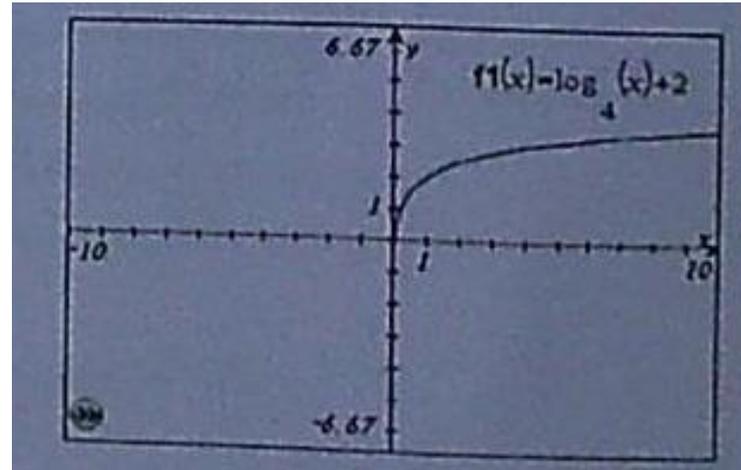
$$y = 3 \log_4 x \quad (3)$$

التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x ؛
المجال = $\{x|x>0\}$ ، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية.



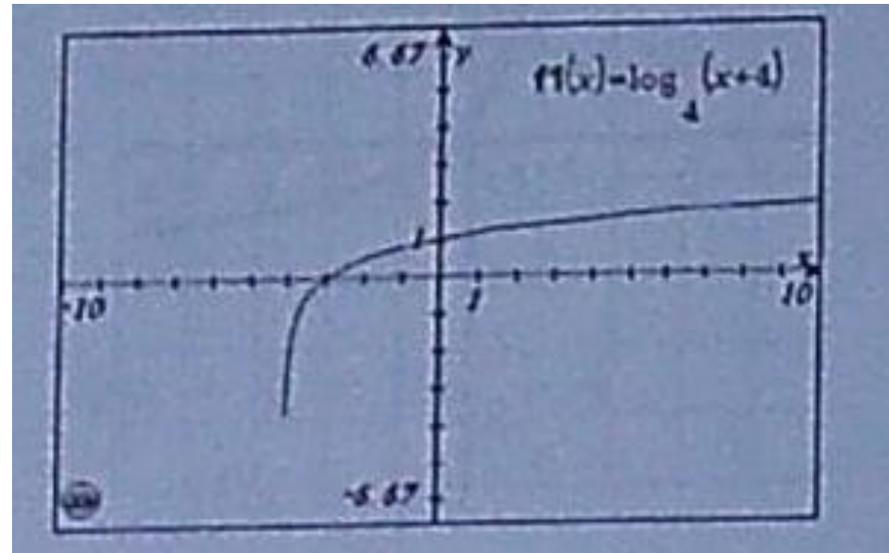
$$y = \log_4 x + 2 \quad (1)$$

التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة إلى الأعلى وحدتين.



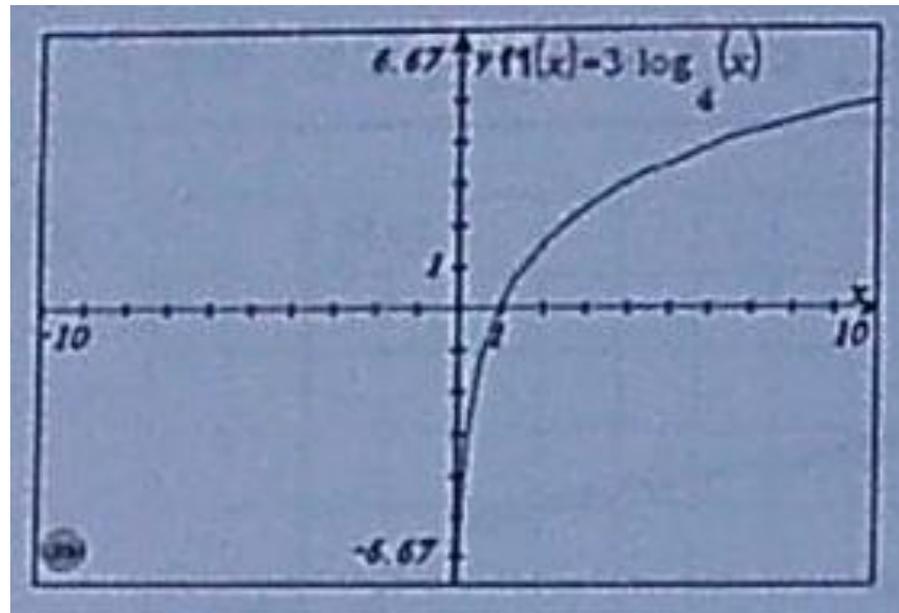
$$y = \log_4 (x + 2) \quad (2)$$

التمثيل البياني الثاني مشابه للتمثيل البياني الأول مع إزاحة أفقية بمقدار وحدتين.



$$y = 3 \log_4 x \quad (3)$$

الإحداثي y لكل نقطة على التمثيل البياني الثاني يساوي 3 أمثال الإحداثي المناظر له على التمثيل البياني الأول.



(d) **تحليلياً:** صف العلاقة بين كل من الدالتين

$$y = \log_4 x \text{ و } y = -1(\log_4 x)$$

وما مجال ومدى كل منهما؟

التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا في المحور x ؛
المجال = $\{x|x>0\}$ ، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية.

(e) **تحليلياً:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل

البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار
ووحدة إلى الأعلى.

$$y = \log_3 (x + 4) + 1$$



(30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

(a) اكتب المعادلة بصورة أسية.

$$d = 10^{\frac{w - 65}{93}}$$

(b) ما سرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلاً؟

$$317.975 \text{ mi/h}$$



(31) صوت: تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$.

الصوت	شدة الصوت	الديسبل
سقوط قطرة ماء	10^0	0
التنفس الطبيعي	10^1	1
مجففة الملابس	10^6	6
القطار	10^{10}	10
الإطفائية	10^{12}	12



(a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

100,120

(b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة صوت تساوي 10^{-2} واط لكل متر مربع. فلماذا لا يساوي عدد وحدات الديسبل 100 مرة من 10^{-2} واط لكل متر مربع؟

إجابة ممكنة: من الفرع a أعلاه، عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع هو 120، وعدد وحدات الديسبل لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع هو 100؛ لذا فإن عدد وحدات الديسبل يزداد بمقدار 20 وحدة فقط.

