أجب عن جميع الأسئلة القصيرة التالية بوضوحٍ واختصار (عشر درجات لكل سؤال):

1 في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$: عرِّف المجموعة المفتوحة، ثم أثبت أن كل مجموعة غير خالية ومفتوحة في $\mathbb{R}$ هي اجتماع لمجالات مفتوحة.

2 في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}^2$: عرِّف المجموعة المغلقة، ثم أثبت أن اجتماعَ عددٍ منتهٍ من المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}^2$ هو مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

3 في تبولوجيا زارسكي على $\mathbb{R}$، أوجد كلاً مما يلي :

$$\overline{\mathbb{N}}, \quad [4,5[^{\circ}, \quad \overline{[4,5[}, \quad [4,5[', \quad b([4,5[)$$

4 **أولاً:** بيِّن بمثال أن الاجتماع الكيفي لمجموعات مغلقة في فضاء تبولوجي ليس بالضرورة مجموعة مغلقة.

ثانياً: هات مثال على فضاء تبولوجي غير متور (مع التعليل لماذا غير متور).

5 في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}^2$: لتكن المجموعة $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$

ارسم المجموعة A بدقة في المستوي الديكارتي، هل A مفتوحة، مترابطة، متراصة؟ أوجد قطرها؟ (علِّل إجاباتك).

6 أثبت أن d المعرف كما يلي هو مسافة على $\mathbb{R}$: $\forall x,y \in \mathbb{R} : d(x,y) = |x-y|$

7 لتكن τ التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$، ولنزود المجموعة $A = [0,4[$ بـ τ_A التبولوجيا النسبية للتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$، والمطلوب : بيِّن (مع التعليل) أي المجموعات التالية مفتوحة أو مغلقة في الفضاء التبولوجي (A, τ_A) :

$$[0,1], \quad [0,1[, \quad]0,1], \quad]0,1[, \quad [1,4[$$

8 ليكن الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X = \{a,b,c,d\}$، $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c,d\}\}$ ، والمطلوب :

أوجد $\{a,b,c\}^{\circ}, \overline{\{a,b,c\}}, \{a\}^{\circ}, \overline{\{a\}}$. هل الفضاء التبولوجي (X,τ) مترابط؟ (علِّل إجاباتك).

9 عرِّف بدقة النظيم على فضاء شعاعي، ثم هات مثال على فضاء شعاعي منظم منته البعد وآخر غير منته البعد.

10 ناقش صحة أو خطأ كلٍ مما يلي : (لإثبات خطأ نص ما، يجب ذكر مثال معاكس)

1. في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}^2$ تكون المسافة بين مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}^2$ صفراً إذا وفقط إذا كانت هاتان المجموعتان منفصلتين.
2. كل مجموعة غير منتهية في فضاء متري ستكون غير مغلقة.
3. في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ كل مجموعة منتهية ستكون غير مفتوحة.
4. التقاطع الكيفي لمجموعات مفتوحة في فضاء تبولوجي هو مجموعة مفتوحة.
5. في أي فضاء متري كل مجموعة وحيدة العنصر لن تكون مفتوحة.

****

انتهت الأسئلة، مع تمنياتي لكم بالنجاح و التوفيق

مدرس المقرر : د. وسام طلب