سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي

القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: @BAK1117_bot

KHATIB Institute

الخطيب للغات والتعليم

الدورة المكثفة

الثالث الثانوي العلمي

التحليل

2023

الأستاذ : أحمد المصطفى

011 638 5555
095 666 2022
0932 465 404

khatibinstitute.com

دمشق / تضامن
شارع نسرين / مكتبة الخطيب

النهايات

حالات عدم التعيين:

1) $\infty - \infty$ { عامل مشترك / الضرب بالمرافق

2) $\frac{\infty}{\infty}$ ← عامل مشترك من البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض النهاية

3) $\frac{0}{0}$ ← تحليل البسط والمقام ثم الاختصار ثم النهاية
← الضرب بالمرافق (في حال وجود جذر)
← مبرهنات مثلثي - لوغاريتمي ....

4) $0 . \infty$

المقاربات:

1) المقارب الأفقي: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

$\boxed{y=a}$ مقارب أفقي يوازي $x'x$ في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ حسب النهاية.

2) المقارب الشاقولي: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

$\boxed{x=a}$ مقارب شاقولي يوازي $y'y$

3) المقارب المائل:

نقول عن $\Delta: y=ax+b$ إنه مقارب مائل لـ C عند $\pm\infty$ إذا حقق الشرط

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0}$$

* دراسة الوضع النسبي للخط البياني C مع المقارب: ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$

إذا كان:
- $f(x) - y_\Delta > 0$: C يقع فوق المقارب
- $f(x) - y_\Delta < 0$: C يقع تحت المقارب
- $f(x) - y_\Delta = 0$: نقاط مشتركة

تمرين: أوجد نهاية كل من:

① $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$ عند $-\infty$

الحل

$\frac{-\infty}{+\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$f(x) = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$, $x \to -\infty$, $|x| = -x$

$= \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1+0}{-\sqrt{1+0}} = -1$

② $f(x) = \sqrt{2x^2+3x-1} - 2x$ عند $+\infty$

الحل $\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$\sqrt{2x^2} \neq 2x$ عامل مشترك

$f(x) = |x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} - 2x$

$= x\left[\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} - 2\right]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(\sqrt{2} - 2) = -\infty$

③ $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ عند $+\infty$

الحل: حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$f(x) = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$

$= \frac{x-1-x}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-1}{\infty} = 0$

ملاحظة ① $f(x) = \sqrt{ax+\dots} - \sqrt{ax+\dots}$

لاحظ أن $\sqrt{ax} = \sqrt{ax}$

② $f(x) = \sqrt{a^2x^2+\dots} - ax$

لاحظ أن $\sqrt{a^2x^2} = ax$

في الحالتين تكون إزالة عدم التعيين بالضرب بالمرافق فيما عدا ذلك نخرج عامل مشترك بالبرهان.

④ مدرجة أولى

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$$

جد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم اكتب معادلة كل مقارب أفقي ، شاقولي أن وجدت

الحل

$$D =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-16}{+0} = -\infty$$

$$\begin{array}{ccccc} -\infty & -2 & 2 & +\infty \\ + & 0 \; - & 0 & + \end{array}$$

$\boxed{x=-2}$ مقارب شاقولي عند $-\infty, +\infty$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-16}{-0} = +\infty$$

$\lim_{x\to 2} f(x)$: حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^3-2^3}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$$

⑤ $f(x) = \cos^2\left[\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right]$ عند $+\infty$

الحل نفرض $t = \pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\lim_{x\to+\infty} t = \pi\sqrt{1} = \pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to\pi}\cos^2 t = \cos^2\pi = (-1)^2 = 1$$

⑥ $\frac{3x+\cos 4x}{x} \le f(x) \le \frac{3(x-1)(x+2)}{x^2+4}$

جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos 4x}{x}$

$$-1 \le \cos 4x \le 1$$

$$3x-1 \le 3x+\cos 4x \le 3x+1$$

$$\frac{3x-1}{x} \le \frac{3x+\cos 4x}{x} \le \frac{3x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3(x-1)(x+2)}{x^2+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3(x^2+x-2)}{x^2+4} = 3$$

الحل $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos 4x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3(x-1)(x+2)}{x^2+4} = 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ حسب مبرهنة الإحاطة

⑦ $|f(x)+2| \le \frac{3+5\cos 3x}{\sqrt{x}+1}$

جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل

نوجد النهاية لـ $\frac{3+5\cos 3x}{\sqrt{x}+1}$

$$-1 \le \cos 3x \le 1$$

$$-5 \le 5\cos 3x \le 5$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}+1} \le \frac{3+5\cos 3x}{\sqrt{x}+1} \le \frac{8}{\sqrt{x}+1}$$

نلاحظ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x}+1} = 0$

$$|f(x)-(-2)| \le \frac{3+5\cos 3x}{\sqrt{x}+1}$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+5\cos 3x}{\sqrt{x}+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$; حسب الإحاطة

تدريب اثبت أن $x^2-5\sin 2x \ge x^2-5$

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}(x^2-5\sin 2x)$

الحل نعلم أن: $-1 \le \sin 2x \le 1$

$$5 \ge -5\sin 2x \ge -5$$

$$x^2+5 \ge x^2-5\sin 2x \ge x^2-5$$

وبالتالي نلاحظ أن $x^2-5\sin 2x \ge x^2-5$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}(x^2-5) = +\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty}(x^2-5\sin 2x) = +\infty$

مبرهنات الإحاطة

① $h(x) \le f(x) \le g(x)$

إذا كان $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

حتى لو كانت النهاية عند $\pm\infty$ تبقى المبرهنة صحيحة

② $|f(x) - \ell| \le g(x)$

إذا كان $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

③ $f(x) \le g(x)$ الكبيرة

إذا كانت الكبيرة $-\infty$ فإن الصغيرة $-\infty$

أي: إذا كان $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) \ge g(x)$ الصغيرة

الصغيرة: إذا كانت الصغيرة $+\infty$ فإن التي هي أكبر منها ستكون $+\infty$

أي: إذا كان $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تمرين: ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ جد النهاية عند الصفر

الحل

لاحظ: عند تعويض الصفر وكانت $\sin 0$ أو $\cos 0$ نبحث عن تطبيق المبرهنة $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -(1)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

حيث أن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

فترة: $]a,b[$

$\epsilon = b - c$ ، $c = \frac{a+b}{2}$ حيث

تمرين: أولاً: ليكن $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

ثانياً: أعط عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9, 5.1[$

الحل: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$

بفرض $t = f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to 5} f(t) = \frac{5(5)-1}{5-1} = \frac{24}{4} = 6$$

ثانياً: نقول f في المجال إذا وفقط إذا كان

$$|f(x) - c| < \epsilon$$

حيث أن $c = 5$ و $\epsilon = 0.1$

$$|f(x) - 5| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1} - 5\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{|x-1|}{4} > 10$$

$$|x-1| > 40$$

$$x - 1 > 40$$

لأن $x \to +\infty$ ، $|x-1| = x-1$

$$x > 41$$

أي إذا كان $x > 41$ كان f في $]4.9, 5.1[$

يمكن أن نأخذ $A = 41$ أو أي عدد أكبر منه.

تمرين: جد النهاية عند $+\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - |x|$$

الحل: عند $+\infty$ يكون $|x| = x$

$f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - x$ حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2+2x-3} - x\right]\left[\sqrt{x^2+2x-3} + x\right]}{\sqrt{x^2+2x-3} + x}$$

$$= \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}$$

$$= \frac{x\left[2 - \frac{3}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right]}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2-0}{\sqrt{1}+1} = 1$$

أفكار المقارب المائل

① اذا كان التابع بعضي كسري حدودي درجة البسط أكبر من درجة المقام بواحد فإننا نجري القسمة الإقليدية نحصل على

$$f(x) = ax+b+g(x)$$

عندها يكون $\Delta: y = ax+b$ مقارب مائل ويجب ان نبرهن ذلك من خلال

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$$

② البحث عن المقارب المائل في التابع $f(x) = \sqrt{\quad}$ درجة ثانية

نأخذ الصيغة القانونية لما تحت الجذر (اتمام إلى مربع كامل)

$$f(x) = \sqrt{(ax+b)^2+c}$$

فيكون المقارب: $\Delta: y = |ax+b|$

هنا مقاربين عند $+\infty$ و $-\infty$

ويجب ان نبرهن ذلك من خلال

③ ايجاد المقارب المائل في الحالة العامة

اذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ نبحث عن المقارب المائل حيث $\Delta: y = ax+b$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right]$$

حيث أن $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ميل المقارب.

تمرين ① ليكن f تابع معرف على

$$D =]-\infty, 1[\cup]1, 2[$$

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$$

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف واستنتج المقارب الشاقولي لخطه البياني

② أثبت ان $\Delta: y = x+3$ مقارب لـ C عند $-\infty$ ثم ادرس وضع C_f مع المقارب

الحل

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-8}{+0} = -\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to2^-} f(x)$; $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-1)} = x^2+2x+4$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 12$$

المقارب الشاقولي $\boxed{x=1}$ عند $\pm\infty$

②
$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^3-8}{x^2-3x+2} - (x+3)$$

$$= \frac{7x-14}{x^2-3x+2}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = 0 \Rightarrow$ Δ مقارب مائل عند $-\infty$

الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=0$

$\frac{7x-14}{x^2-3x+2}=0 \Rightarrow x=2\notin D$

لا توجد نقاط مشتركة

x	$-\infty$	1	2
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$\|$	$+$
الوضع النسبي	C تحت المقارب	$\|$	C فوق المقارب

تمرين: ليكن f تابع معرف على R^* وفق: $f(x)=\frac{x^2+4+\sin x}{x}$

* اثبت ان الخط C يقبل مقاربا مائلا Δ في جوار $+\infty$ أوجده ثم ادرس وضع C بالنسبة لـ Δ.

الحل: يمكن كتابة f من الشكل:

$f(x)=x+\frac{4+\sin x}{x}$

لنبرهن $\Delta: y=x$ مقارب مائل

$[f(x)-y_\Delta]=\frac{4+\sin x}{x}$

لاحظ: $-1\le \sin x\le 1$

$3\le 4+\sin x\le 5$

$\frac{3}{x}\le\frac{4+\sin x}{x}\le\frac{5}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0 \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\sin x}{x}=0$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

ومنه $\Delta: y=x$ مقارب مائل لـ C

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\frac{4+\sin x}{x}$ لاحظ البسط دوما موجب.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$\|$	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت Δ	$\|$	C يقع فوق Δ

تمرين: $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-4|}$

① عين مجموعة تعريف f.

② اثبت ان المستقيم $\Delta: y=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي.

الحل ① $D_f=R$

② $f(x)-y_\Delta=\sqrt{|4x^2-4|}+2x$

سنتخلص من $|4x^2-4|$ في جوار $-\infty$:

$4x^2-4=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

لاحظ:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$	

$|4x^2-4|=4x^2-4$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{4x^2-4}+2x$ عدم تعيين $\infty-\infty$

$f(x)-y_\Delta=\frac{[\sqrt{4x^2-4}+2x][\sqrt{4x^2-4}-2x]}{\sqrt{4x^2-4}-2x}$

$=\frac{-4}{\sqrt{4x^2-4}-2x}$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0\Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ C

الوضع النسبي: ندرس اشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{|4x^2-4|}+2x$

$\sqrt{|4x^2-4|}+2x=0\Rightarrow\sqrt{|4x^2-4|}=-2x$ نربع بشرط $x\le0$

$|4x^2-4|=4x^2$

إما $4x^2-4=4x^2\Rightarrow -4=0$ مستحيل

أو $4x^2-4=-4x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$x=-\frac{1}{\sqrt2}$, $x=\frac{1}{\sqrt2}$ مرفوض لأن $x\le0$

$f(-\frac{1}{\sqrt2})=\frac{1}{\sqrt2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt2}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

النقطة $(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ هي نقطة مشتركة بين C و Δ

تمارين حول أشكال المقاربات :

① لتكن f تابع معرف على R وفق

$$f(x) = \frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$$

اثبت أن لـ C مقارب مائل عند $+\infty$ و $-\infty$.
يطلب ايجاده ودراسة الوضع النسبي.

الحل : لاحظ أن درجة البسط أكبر بدرجة من المقام
قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+2x-1 & x^2+1 \\ -3x^3 \mp 3x & 3x \\ \hline -x-1 & \end{array}$$

② $f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{x^2+1}$

$$f(x) = 3x + \frac{-x-1}{x^2+1}$$

لنبرهن أن $\Delta : y = 3x$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x-1}{x^2+1}\right] = 0$$

③ $$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$$

ومنه $\Delta : y = 3x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-x-1}{x^2+1}$$

(المقام) موجب

$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow -x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$$f(-1) = \frac{-3-2-1}{2} = -3$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ	-3	C تحت Δ	

والنقطة $(-1,-3)$ هي نقطة مشتركة.

④

② ايجاد المقارب المائل لتابع جذري بطريقة الاتمام إلى مربع كامل

تمرين) لتكن $f(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}$
معرف على R

① ادرس النهاية عند $\pm\infty$
② اكتب $4x^2-4x+3$ بالصيغة القانونية
③ استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين
يطلب ايجاد معادلتيهما

الحل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty , \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$4x^2-4x+3 = 4(x^2-x)+3$$
$$= 4\left(x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\right)+3$$
$$= 4\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right]+3$$
$$= 4\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-1+3$$
$$= (2x-1)^2+2$$

$$f(x) = \sqrt{(2x-1)^2+2}$$

$$\Delta : y = |2x-1|$$

لنبرهن أن $\Delta_1 : y = 2x-1$ مقارب عند $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(2x-1)^2+2} - (2x-1)$$
$$= \frac{\left[\sqrt{(2x-1)^2+2}+(2x-1)\right]\left[\sqrt{(2x-1)^2+2}-(2x-1)\right]}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+(2x-1)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+(2x-1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$$

ومنه Δ_1 مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

لنبرهن أن $\Delta_2 : y = -2x+1$ مقارب لـ C عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - y_{\Delta_2}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+(-2x+1)} = 0$$

مستخدماً أن

ومنه $\Delta_2 : y = -2x+1$ مقارب لـ C عند $-\infty$

③ الطريقة العامة في ايجاد المقارب

تمرين: ليكن f تابع معرف وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

① احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم جد عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

② جد العدد الحقيقي b الذي يحقق $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$

③ استنتج وجود مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

الحل ① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-1\Rightarrow a=-1$$

② $$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{x^2+2x+4}+x][\sqrt{x^2+2x+4}-x]}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{4}{x})}{-x[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1]}$$

$$=\frac{2}{-1}=-2\Rightarrow b=-2$$

③ المقارب المائل

$\Delta: y=ax+b$

$\boxed{\Delta: y=-x-2}$

هو مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

لاحظ: بالطريقة العامة ما في داعي اثبات انه Δ مقارب مائل

الاستمرار

اذا كان f تابع معرف على D وكانت $a\in D$ نقول ان f مستمر عند a اذا تحقق

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

يعني النهاية تساوي الصورة.

تمرين: ليكن f تابع معرف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & x\neq0\\ m & x=0\end{cases}$$

ما هي قيمة m التي تجعل f مستمر على R

الحل: بما أن f مستمر على R فهو مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

نوجد النهاية $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\frac{[1-\sqrt{x^2+1}][1+\sqrt{x^2+1}]}{x[1+\sqrt{x^2+1}]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-1}{x[1+\sqrt{x^2+1}]}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=0$$

$\lim_{x\to0} f(x)=0,\ f(0)=m$

وبالتالي $\boxed{m=0}$

$E(x)$ تابع الجزء الصحيح

تذكرة:

$E(1.3)=1$

$E(0.5)=0$

خاصة هامة

$$x-1<E(x)\le x$$

تفيد في ايجاد نهاية تابع فيه $E(x)$

تمرين يرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد x
f معرف على $[0,2]$ وفق:
$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$
1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$
2) اثبت ان f مستمر على $[0,2]$

الحل

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : [0,1[\\ 1 & : [1,2[\\ 2 & : x=2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x\in[0,1[\\ x^2-2x+2 & : x\in[1,2[\\ 2 & : x=2 \end{cases}$$

2) f كثير حدود مستمر على المجالين $]0,1[$ و $]1,2[$
ندرس الاستمرار عند 1 و 2 (عند الأطراف)
الاستمرار عند الواحد:
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1,\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=1,\quad f(1)=1$$
$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1) \Rightarrow$$ f مستمر عند 1
الاستمرار عند 2 من اليسار:
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2,\quad f(2)=2$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow$$ f مستمر عند 2
وبالتالي f مستمر على $[0,2]$

تمرين جد نهاية $f(x) = \dfrac{E(x)+2x}{\sqrt{x^2+1}}$ عند $+\infty$

الحل
$$x-1 < E(x) \le x$$
$$3x-1 \le E(x)+2x \le 3x$$
$$\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{E(x)+2x}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3-\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$$
حسب الإحاطة

(8)

$$\lim \frac{E(x)+2x}{\dots}$$

معلومة

التابع الزوجي: نقول عن f زوجي إذا تحقق شرطان
1) أياً كانت $x\in D$ فإن $-x\in D$
2) $f(-x) = f(x)$

وعندها نقول عن الخط البياني C متناظر بالنسبة للمحور yy'

التابع الفردي: يجب تحقق شرطين
1) أياً كانت $x\in D$ فإن $-x\in D$
2) $f(-x) = -f(x)$

وعندها الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

تمرين $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $D=\mathbb{R}$
1) اثبت أن C متناظر بالنسبة لـ yy'
2) اثبت أن $f(x) - x = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
واستنتج أن C_f يقبل مقارباً d في جوار $+\infty$
عين الوضع النسبي لـ C مع d

الحل
1) أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$
$$f(-x) = \sqrt{1+x^2} = f(x)$$
ومنه f تابع زوجي $\Leftarrow C_f$ متناظر بالنسبة لـ yy'

2)
$$f(x)-x = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{[\sqrt{1+x^2}-x][\sqrt{1+x^2}+x]}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0 \Rightarrow$$
$d: y=x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

الوضع النسبي:
نلاحظ أنه أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فإن
$$f(x) - y_d = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} > 0$$
[illegible]

تعريف: العدد المشتق/قابلية الاشتقاق

نقول عن f المعرف على I انه اشتقاقي عند a اذا وفقط اذا كان $x \in I\setminus\{a\}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$$

نسمي ℓ العدد المشتق

$= f'(a) = \ell$ ميل المماس عند a

تمرين: لتكن f دالة معرف على R وفقه

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

ادرس قابلية الاشتقاق لـ f عند الصفر ثم احسب $f'(x)$ على R^*

الحل: نشكل دالة التغير المتوسط

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad x\in R\setminus\{0\}$$

$$=\frac{x^2\cos(\frac{1}{x})}{x}=x\cos\frac{1}{x}$$

$$-1\le \cos\frac{1}{x}\le 1$$ ضرب $x>0$

$$-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=\lim_{x\to 0^+}(x)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\cos(\frac{1}{x})=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$$

بنفس الطريقة عند $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

ومنه f اشتقاقي عند الصفر

تمرين: $f(x)=\frac{x+3}{|x-1|+2}$; $D=R$

ادرس قابلية الاشتقاق لـ f عند (1) من اليمين ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخط البياني f في النقطة $(1,2)$

الحل: نشكل $g(x)$ على $R\setminus\{1\}$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\frac{x+3}{|x-1|+2}-2}{x-1}$$

تحديد $|x-1|=x-1$ عند $x>1$: الافق

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$

$$g(x)=\frac{\frac{x+3}{x-1+2}-2}{x-1}$$

$$=\frac{\frac{x+3-2x-2}{x+1}}{x-1}=\frac{-x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-1}{x+1} ,\quad \lim_{x\to 1^+} g(x)=-\frac{1}{2}$$

f اشتقاقي عند (1) من اليمين

معادلة نصف المماس عند $(1,2)$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$$

تمرين: باستخدام تعريف المشتق اوجد نهاية

① $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$, $a=1$

الحل: ناخذ $g(x)=\sqrt{x+1}$ المعرف على $[-1,+\infty[$

$$g(x)=\sqrt{x+1} \rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$g(1)=\sqrt{2} \Big\} \ g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تمرين: بالاعتماد على تعريف المشتقة جد نهاية

$f(x) = \dfrac{\tan^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad , a = \dfrac{\pi}{4}$

$g(x) = \tan^2 x \rightarrow g'(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$

$g(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad , g'(\frac{\pi}{4}) = 2(1)(1+1) = 4$

$\lim_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 4$

فكرة المماس:

معادلة المماس: $y - y_0 = m(x - x_0)$

لكتابة معادلة المماس يلزم ميل ونقطة من C

* اذا كان $m = 0$ فإن المماس افقي معادلته $\boxed{y = a}$

* اذا كان m غير معرف فإن المماس شاقولي يوازي yy' معادلته $\boxed{x = a}$

تذكر انه: لكتابة معادلة المماس يلزم الميل ونقطة

الميل هو قيمة المشتقة عند فاصلة نقطة التماس: الميل $m = f'(a)$

نقطة التماس: $(a, f(a))$

تمرين: لتكن f تابع معرف على $R \setminus \{-1\}$ وفق

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

اكتب معادلة كل مماس يوازي المستقيم $\Delta: y = -4x$

الحل: f اشتقاقي على $R \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$

بما أن المماس يوازي Δ فلهما نفس الميل

$f'(x) = -4 \quad , \dfrac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = -4$

$\Rightarrow 5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow 5x(x+2) = 0$

اما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \rightarrow A(0,1) \quad , m = -4$

المماس الاول: $y - 1 = -4(x - 0)$

او: $x = -2 \Rightarrow f(-2) = -11 \quad , B(-2, -11)$

المماس الثاني: $y + 11 = -4(x + 2)$

تمرين/ أوجد مشتقة كل من التوابع:

① $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} - 1$ (لاحظ $f'(x) < 0$)

② $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

③ $f(x) = x\cos x$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

تعيين الثوابت:

يجب الاستفادة من القيم (الحدية + المماس)

$\boxed{1}$ كيف نستفيد من القيمة الحدية في تعيين الثوابت:

اذا كان $f(a) = b$ قيمة حدية

المشتقة عندها معدوم اي $f'(a) = 0$

النقطة تحقق تعريف التابع اي $f(a) = b$

تمرين: a عدد حقيقي، f معرف على R

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يمكن تعيين a لتكون لـ f قيمة حدية عند $x = 1$

الحل: f اشتقاقي على R:

$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$

بما أن $f(1)$ قيمة حدية فإن

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 6 + 3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a = -3}$

تمرين 2) لتكن f تابعاً معرفاً على $R\setminus\{1\}$ وفق

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

احسب قيمة a ، b حتى يكون للتابع $f(-1)=0$ قيمة حدية محلياً.

الحل: القيمة الحدية

$f(-1) = 0$

$f'(-1) = 0$

$$f(-1)=0 \Rightarrow \frac{a-b+1}{-2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a-b+1=0} \quad (1)$$

f اشتقاقي على $R\setminus\{+1\}$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow \frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{4} = 0$$

$$\boxed{3a-b-1=0} \quad (2)$$

نطرح (1) من (2) نجد: $a=1$ ، $b=2$

---

2) كيف نستفيد من المماس في تعيين الثوابت.

(1) الميل هو قيمة المشتق عند فاصلة نقطة التماس $m = f'(a)$

(2) نجد تعويض نقطة التماس في التابع

(3) إذا كان المماس أفقي فإن الميل معدوم أي $f'(x) = 0$

تمرين 1)

$$f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عين a ، b لكي $y=4x+3$ مماس لـ C عند $x=0$ فقط.

الحل: نوجد نقطة التماس ولتكن هي نقطة مشتركة بين المماس والخط البياني

نعوض $x=0$ في معادلة المماس نجد $y=3$

نعوض نقطة التماس $(0,3)$ في التابع نجد

$$3 = \frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{b=3}$$

نستفيد من الميل:

$$f'(0) = m = 4$$

f اشتقاقي على R:

$$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$4 = \frac{(0+a)(1)-0}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=4}$$

تمرين 3)

$f(x) = ax^3+bx^2+1$ تابعاً معرفاً على R.

جد العددان الحقيقيان a ، b لكي يكون لـ C مماس أفقي عند $A(1,2)$

الحل: نعوض نقطة التماس في f ؛ المشتق عند نقطة التماس معدوم

$$(1,2) \in C \Rightarrow \boxed{a+b+1=2} \quad (1)$$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 3ax^2+2bx$$

$f'(1) = 0$ (مماس أفقي ميله معدوم)

$$\boxed{3a+2b=0} \quad (2)$$

بالحل المشترك لـ (1) و (2) نجد

$$a=-2 \quad , \quad b=3$$

تذكرة: قاعدة الاشتقاق لتابع مركب.

$f(x) = (g\circ u)(x)$

$f'(x) = u'(x)\cdot g'(u(x))$

تمرين

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

① احسب $f'(x)$

② استنتج مشتق: $g(x) = \frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

الحل: f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

② لاحظ: $g(x) = f(\sin x)$

$g'(x) = (\sin x)'\cdot f'(\sin x)$

$$= \cos x\cdot\frac{\sin^2 x-2\sin x-1}{(\sin x-1)^2}$$

تمرين: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$f(x) = \cos x$

① احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$

② اثبت بالتدريج ان $f^{(n)}(x) = \cos(\frac{n\pi}{2}+x)$ ، $n\geq 1$

الحل: f اشتقاقي n مرة على $\mathbb{R}$

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$

$f^{(3)}(x) = \sin x$

② نبرهن صحة العلاقة من اجل $n=1$

$f^{(1)}(x) = \cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$

محقق $f'(x) = -\sin x$

العلاقة صحيحة من اجل $n=1$

نفرض ان العلاقة صحيحة من اجل $n\geq 1$ اي

$f^{(n)}(x) = \cos(\frac{n\pi}{2}+x)$ صحيحة

لنبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$

البرهان: $f^{(n+1)}(x) = \cos((n+1)\frac{\pi}{2}+x)$

$L_1 = f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

$= [\cos(\frac{n\pi}{2}+x)]'$

$= -\sin(\frac{n\pi}{2}+x) = \cos[\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}+x]$

$= \cos(\frac{\pi}{2}(n+1)+x]$

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة ايا كان $n\in\mathbb{N}^*$

تذكرة: اذا كان $f(x) = \sqrt{u(x)}$

كيف نبرهن ان f اشتقاقي على I

يجب ان يتحقق شرطين:

① $u(x)$ يجب ان يكون اشتقاقي على I

② $u(x)$ موجب تماما على I

تمرين: لتكن $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

① تحقق ان f معرف على $[0,2]$

② اثبت ان f اشتقاقي على $]0,2[$

③ احسب $f'(x)$ هل f اشتقاقي عند $x=2$

الحل

① $x(2-x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

نستنتج: $D_f = [0,2]$

② التابع $u(x) = x(2-x)$ كثير حدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0,2[$

وان $u(x)$ موجب تماما في المجال $]0,2[$

ومنه f اشتقاقي على $]0,2[$

$f(x) = x\sqrt{2x-x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{2x-x^2}+\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot x$$

$$f'(x) = \sqrt{2x-x^2}+\frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x-x^2+x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+3x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

(٣) هل f اشتقاقي عند $x = 2$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)} - 0}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{-(2-x)} = \frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$$

f غير اشتقاقي عند 2

(معلومة) كيف نُثبت ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد (جذر وحيد) في I

يجب تحقق ثلاثة شروط :

① f مستمر في I ② f مطرد تماماً في I

③ $0 \in f(I)$ | نفس الطريقة لو كان العدد غير الصفر

(تمرين) : اثبت ان المعادلة $x^3+x+1=0$ لها حل وحيد α في R ثم بين ان $\alpha \in]-1,0[$

الحل : نأخذ الدالة : $f(x) = x^3+x+1$

معرفة على R ندرس تغيراتها

f مستمرة واشتقاقية على R

$f'(x) = 3x^2+1 > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

نلاحظ ان f مستمرة ومتزايدة تماماً في R

وانا : $0 \in f(R) =]-\infty,+\infty[$

وبالتالي $f(x)=0$ والتي $x^3+x+1=0$ لها حل وحيد في R وليكن α

$f(0) = 1$, $f(-1) = -1$

شرط انتماء الجذر للمجال : اي $f(0) \times f(-1) < 0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,-1[$

تمارين (تمرين ١) ليكن $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

المعرف على $]-\infty,-1[$ اوجد النهاية عند $-\infty$

ثم اوجد قيمة A التي تحقق الشرط :

اذا كان $x<A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]2.99,3.01[$

الحل $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$

$c = \frac{a+b}{2} = 3$, $|f(x) - c| < r$

$r = b - c = 0.01$

$$\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{|x+1|}{3} \geq 100$$ في المجال $]-\infty,1[$

$|x+1| = -x-1$

$\frac{-x-1}{3} > 100 \Rightarrow -x-1 > 300$

$-x > 301 \Rightarrow x < -301$

ومنه $A \leq -301$

تمرين 2 : $f(x) = \sqrt{x+1}$, $D = [-1,+\infty[$

① اوجد النهاية عند 3

② جد مجال I مركزه 3 يحقق الشرط

اذا كان $x \in I$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9,2.1[$

الحل

$1.9 < f(x) < 2.1$

$\Rightarrow 1.9 < \sqrt{x+1} < 2.1$

تربيع : $3.6 < x+1 < 4.4$

نطرح 1- : $2.6 < x < 3.4$

$\Rightarrow x \in]2.6, 3.4[$

$I =]2.6, 3.4[$

تمرين 3 اوجد نهاية $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ عند 1

ثم جد مجال I مركزه 1 يحقق الشرط

اذا كان $x \in I$ كان $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$

الحل

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

$|f(x) - 2| < 0.01$

$\left|\frac{x-1}{x+1} - 2\right| < 0.01$

$\left|\frac{-x+1}{x+1}\right| < 0.01 \Rightarrow$

$\frac{|x-1|}{|x+1|} < 0.01$

بما ان $x>0$ يكون $|x+1|>1 \Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < 1$

$\Rightarrow \frac{|x-1|}{|x+1|} < \frac{|x-1|}{1} < 0.01$

$|x-1| < 0.01$

$-0.01 < x-1 < 0.01$

$0.99 < x < 1.01$

$\Rightarrow x \in]0.99, 1.01[$

$I =]0.99, 1.01[$

تمرين 4) لتكن f دالة: $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

عين مجموعة التعريف ثم احسب النهاية عند الصفر.

الحل: $\sqrt{1+x}-1=0 \Rightarrow x=0$

$D=]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+1)\sin x}{[\sqrt{1+x}-1][\sqrt{1+x}+1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+1)\sin x}{x}$$

$$=2(1)=2$$

حيث $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

تمرين 5) لتكن f دالة معرفة على R وفق

$f(x)=2x-\sqrt{x^2+5}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α يقع في المجال $]1,2[$ ثم جده جبرياً.

3) استنتج مشتقة g المعرفة على R وفق

$g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$

الحل: f مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[2x-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty} x\left[2-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right]=+\infty$$

$$f'(x)=2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+5}-x=0$

$\sqrt{x^2+5}=x$ نربع $x\geq 0$

$x^2+5=x^2$ مستحيلة

وبالتالي f' لا يغير اشارته ضمن اشارة $f'(0)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) f مستمرة ومتزايدة تماماً على R

$0\in f(R)=]-\infty,+\infty[$

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في R

$f(1)=2-\sqrt{6}<0$

$f(2)=4-\sqrt{9}=1>0$

$f(1)\times f(2)<0$ ومنه $\alpha\in]1,2[$

الحل جبرياً: نربع $x>0$

$2x-\sqrt{x^2+5}=0 \Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+5}$

$4x^2=x^2+5 \Rightarrow 3x^2=5 \Rightarrow x^2=\frac{5}{3}$

لذا $x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ مرفوض ، $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$ مقبول

---

3) $g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$

$g(x)=f(\sin x)$ تركيب

$g'(x)=\cos x\, f'(\sin x)$

$$=\cos x\left[\frac{\sqrt{\sin^2 x+5}-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x+5}}\right]$$

مسألة (1) لتكن f معرفة على $R\setminus\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$$

1) اثبت ان المستقيم $d: y=x-2$ مقارب للخط C

2) اثبت ان النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

4) ارسم كل مقارب والخط C

5) ناقش بيانياً عدد حلول المعادلة

$x^2-mx-m=x-2$

6) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين C والمستقيم d والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

الحل: 1)

$$f(x)-y_d=\frac{x^2-x+2}{x+1}-x+2$$

$$=\frac{x^2-x+2-x^2+2x-x+2}{x+1}=\frac{4}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -\infty}[f(x)-y_d]=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-y_d]=0$$

ومنه d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وجوار $-\infty$

2) $I(-1,-3)$: $2x_0-x=-2-x$

اذا كانت $x\in R\setminus\{-1\}$

$\Rightarrow -x\in R\setminus\{1\}$

$\Rightarrow -2-x\in R\setminus\{-1\}$

الشرط الاول محقق

الشرط الثاني: $f(2x_0-x)=2y_0-f(x)$

$f(-2-x)=\ \ldots\ x^2+5x+8$

$m \in]-\infty,-7[$ ...

$m\in]-7,1[$ ليس للمعادلة $f(x)=m$ حلول

$m\in]1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان

$m=1$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد

$m=-7$ للمعادلة $f(m)=m$ حل وحيد

$+1$, -7, $-\infty$

$$S=\int_2^3 (f(x)-y_d)\,dx$$

$$S=\int_2^3 \frac{4}{x+1}\,dx=\left[4\ln|x+3|\right]_2^3$$

$$=4[\ln 4-\ln 3]=4\ln\frac{4}{3}$$

مسألة 2) لتكن C الخط البياني للتابع f
$f(x)=x\sqrt{3-x}$ والمعرف على $]-\infty,3]$

1) ادرس قابلية الاشتقاق لـ f عند (3) من اليسار،

2) ادرس تغيرات f ونظم جدول بها ثم عين القيم

3) ارسم C.

الحل:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{3-x}-0}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x}{-\sqrt{3-x}}=-\infty$$

f غير اشتقاقي عند (3) من اليسار

اضافي: افسر النتيجة هندسيا

بما أن f غير اشتقاقي عند (3) من اليسار

فإن حامل المماس عند (3) غير معروف ومعادلة نصف المماس هي $x=3$ (يكون المماس موازي لـ yy')

2) f مستمر على $]-\infty,3]$ واشتقاقي على $]-\infty,3[$

$f(3)=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+\frac{-1(x)}{2\sqrt{3-x}}$$

$$=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

$f'(x)=0\Rightarrow 6-3x=0\Rightarrow x=2$, $f(2)=2$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$L_2=2y_0-f(x)$$

$$=-6-\frac{x^2-x+2}{x+1}=\frac{-x^2-5x-8}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+5x+8}{-x-1}=L_2$$

والشرط تحقق ومنه I مركز تناظر

3) f مستمر واشتقاقي على $R\setminus\{-1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-1(x^2-x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

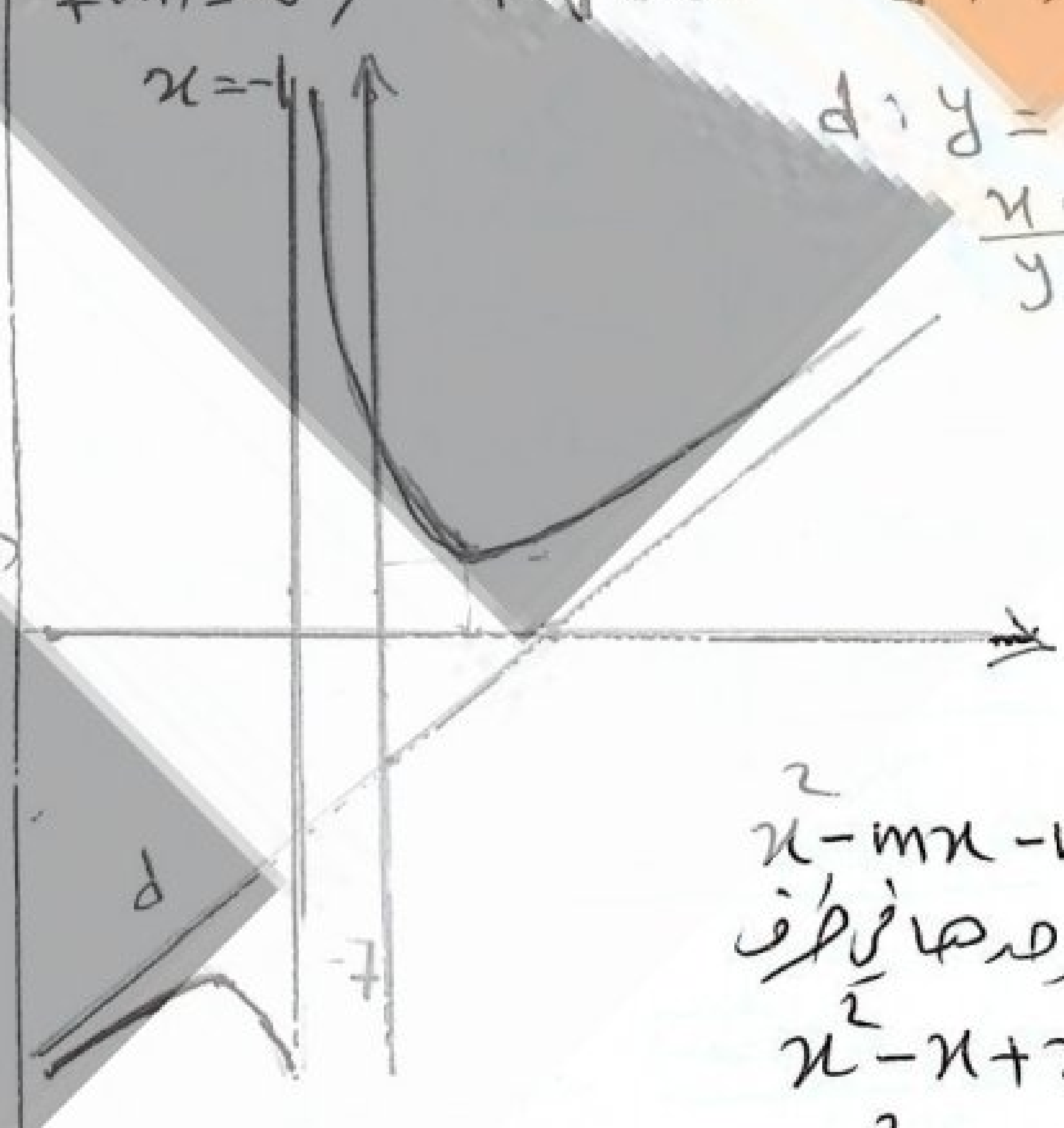
$f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0\Rightarrow$

$x=-3\rightarrow f(-3)=-7$

$x=1\rightarrow f(1)=1$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



4) $d: y=x-2$

x	0	2
y	-2	0

5) $x^2-mx-m=x-2$

نعزل m لوحدها في طرف

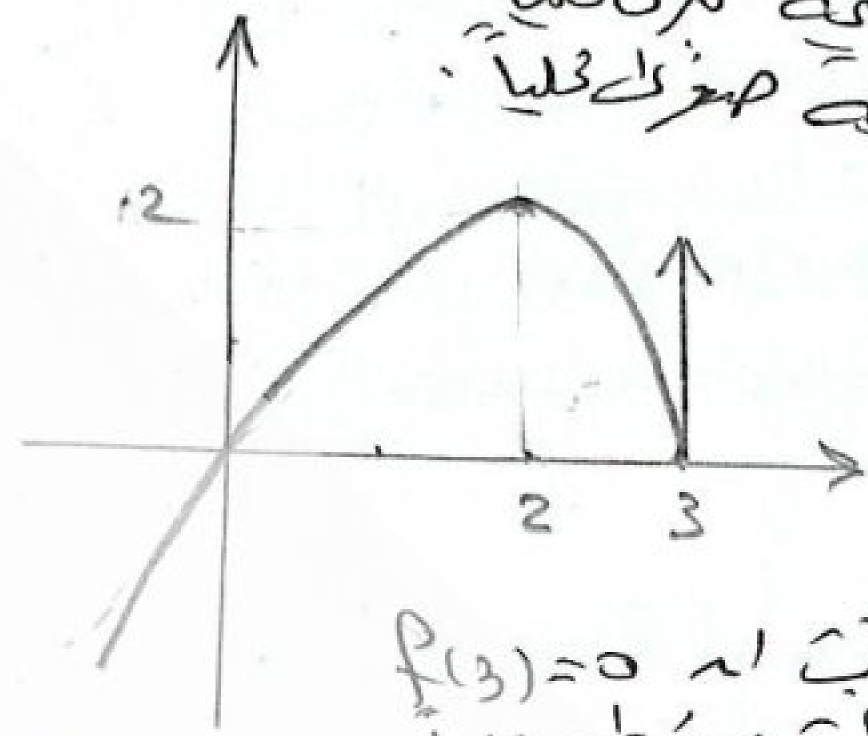
$x^2-x+2=mx+m$

$x^2-x+2=m(x+1)$

$$\frac{x^2-x+2}{x+1}=m$$

$f(x)=m$

$f(2)=2$ قيمة كبرى كليا
$f(3)=0$ قيمة صغرى كليا



طلب اضافي: اثبت ان $f(3)=0$ القيمة صغرى كليا

لدينا $I=]2,4[$

$I\cap D_f=]2,3[$

نلاحظ انه لأجل كل $x\in]2,3[$ لدينا:

$f(x)\geq f(3)\Rightarrow f(3)$ قيمة صغرى كليا

تمرين: لتكن f دالة معرفة على R وفق:

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$

① اثبت ان f دالة زوجية ثم اثبت انه دالة دورية دوره 2π

② تحقق ان $f'(x)=6\cos x\sin x(1-2\cos x)$

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$ ثم ارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi,2\pi]$

الحل ①

$x\in R\Rightarrow -x\in R$

$f(-x)=3[\sin(-x)]^2+4[\cos(-x)]^3$

$=3[-\sin x]^2+4[\cos x]^3$

$=3\sin^2 x+4\cos^3 x$

$=f(x)$

و الدالة f زوجية (متناظرة بالنسبة لـ yy')

الدالة الدورية:

$x\in R\Rightarrow x+2\pi\in R$

$f(x+2\pi)=3[\sin(x+2\pi)]^2+4[\cos(x+2\pi)]^3$

$=3\sin^2 x+4\cos^3 x=f(x)$

و الدالة دورية دورها 2π.

② f تقبل الاشتقاق على R

$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$

$f'(x)=6\sin x.\cos x+12\cos^2 x(-\sin x)$

$=6\sin x\cos x-12\cos^2 x\sin x$

$=6\sin x\cos x(1-2\cos x)$

③ التغيرات: على $[0,\pi]$

$f(0)=0+4=4,\ f(\pi)=-4$

$f'(x)=0\Rightarrow 6\sin x\cos x(1-2\cos x)=0$

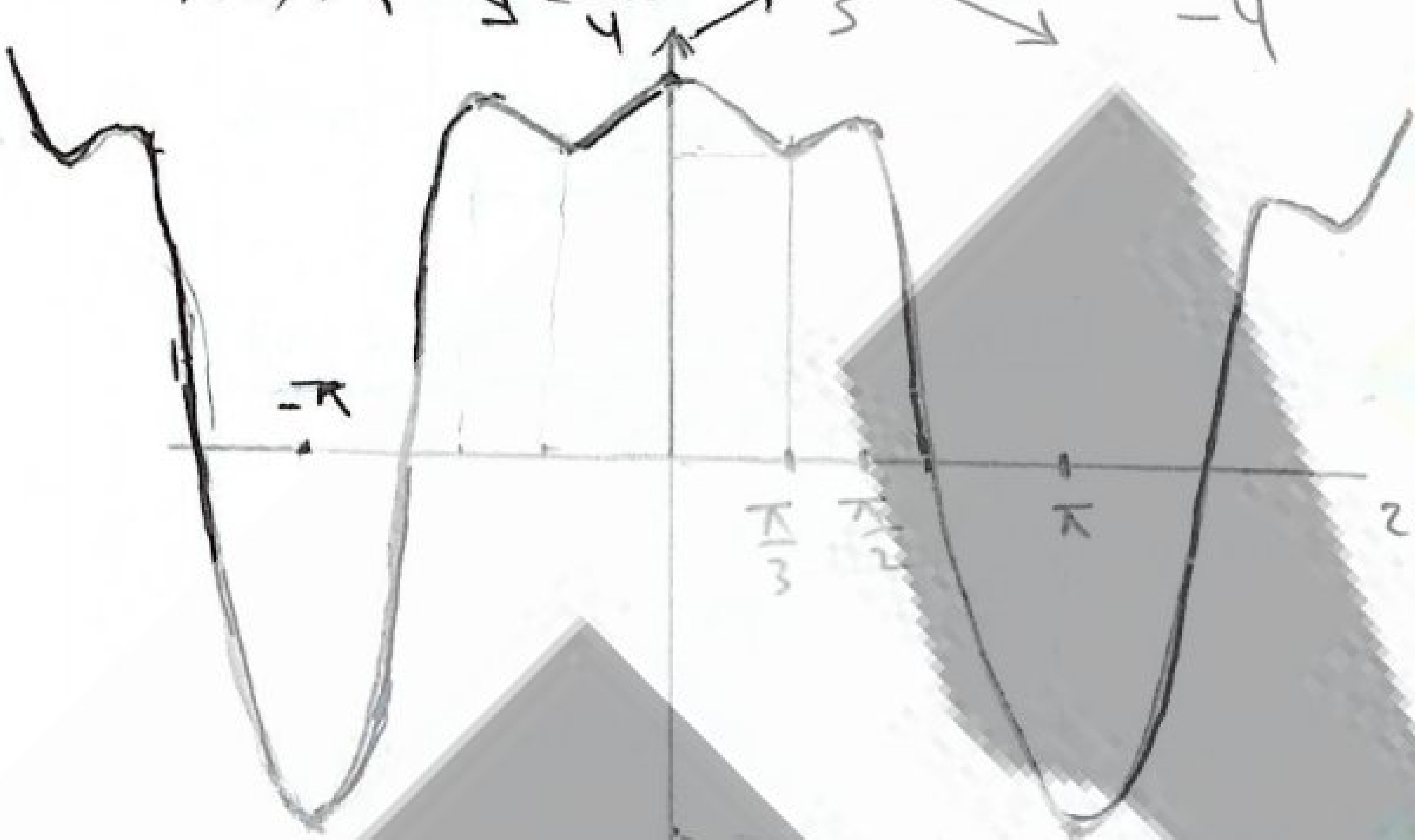
اما $\sin x=0\Rightarrow x=0,\ f(0)=-4$

أو $\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\ f(\frac{\pi}{2})=3$

أو $1-2\cos x=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3},\ f(\frac{\pi}{3})=\frac{11}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4



تمرين: لتكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-2\sqrt{x-1}$$

① ادرس قابلية الاشتقاق f عند $x=1$ من اليمين. استنتج معادلة لنصف المماس عند $x=1$

② جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

③ ادرس تغيرات f ونظم جدول التغيرات.

④ استنتج من جدول التغيرات ان للمعادلة $f(x)=3$ حل وحيد في $[1,+\infty[$

الحل ①:

$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\frac{x-2\sqrt{x-1}-1}{x-1}$

$g(x)=\frac{x-1\ \ -2\sqrt{x-1}}{x-1}=1-\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=1-\infty=-\infty$

f غير قابل للاشتقاق عند $x=1$ من اليمين

والخط البياني يقبل عندها معادلة نصف المماس $\boxed{x=1}$ يوازي yy'

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x) : \infty - \infty$

$f(x) = x - 2|x|\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$ $\quad x\to+\infty$

$f(x) = x\left[1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

③ f مستمر على $[1,+\infty[$ واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$f(1)=1 \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - 2\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x=2$

$f(2)=0$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

④ في المجال $[1,2]$ نجد أن $f(x)=3 \notin f[1,2]$

لا يوجد للمعادلة $f(x)=3$ حل في $[1,2]$

في المجال $]2,+\infty[$: f مستمر ومتزايد تماماً عليه

وأن $f(x)=3 \in f(]2,+\infty[) =]0,+\infty[$

يوجد للمعادلة $f(x)=3$ حل وحيد في $]2,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=3$ يوجد حل وحيد في $[1,+\infty[$

تمرين) ليكن f تابعاً معرفاً وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$

① ما مجموعة تعريف f ② أثبت أن f مستمر على مجموعة تعريفه ③ بيّن أن التابع f زوجي ويقبل 2π دوراً له.

④ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$ أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

⑤ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$ ما مجموعة تعريف f^{-1}

الحل ① نلاحظ $1-\cos x \geq 0$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow D_f=\mathbb{R}$

② التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مركب $1-\cos x$ مستمر على $\mathbb{R}$ وأن $\sqrt{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^+$

③ أياً كانت $x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x) = \sqrt{1-\cos(-x)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$

والتابع زوجي.

$f(x+2\pi) = \sqrt{1-\cos(x+2\pi)} = \sqrt{1-\cos x} = f(x)$

والتابع f دوري دوره 2π

④ $g(x)=\sqrt{1-\cos x}$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

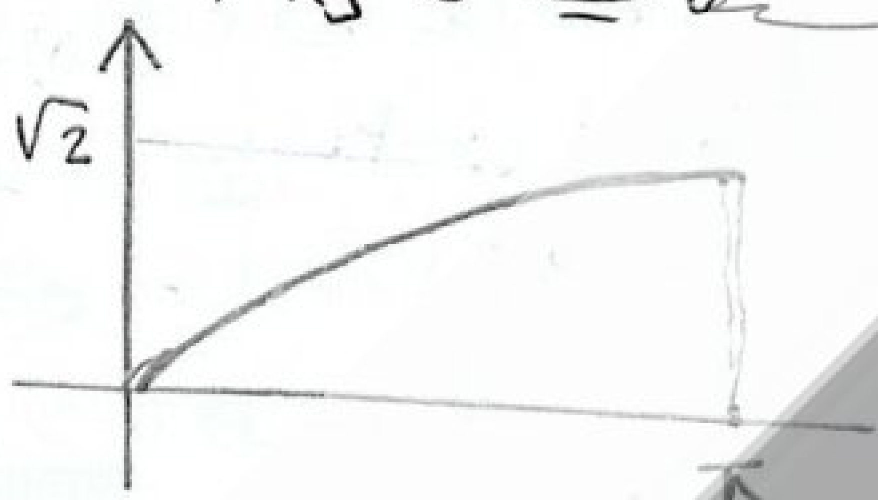
$g(x)=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$

في المجال $[0,\pi]$ يكون $\sin\frac{x}{2} \geq 0$

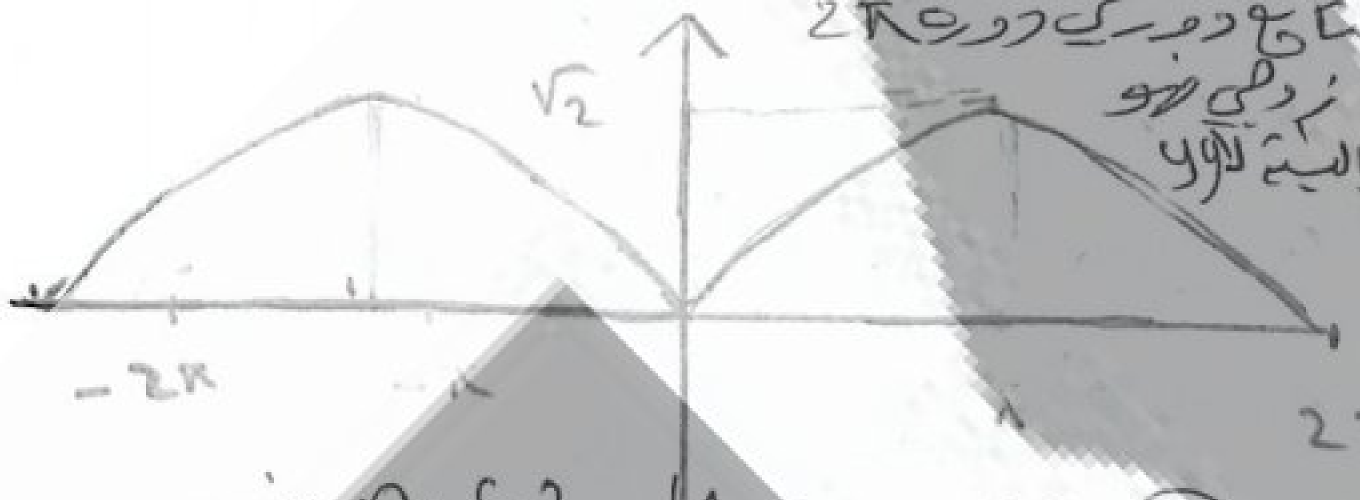
$g(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

$\sin\frac{x}{2}$ اشتقاقي على $[0,\pi]$

ومنه g اشتقاقي على $[0,\pi]$



⑤ إن التابع دوري دوره 2π وأنه زوجي فهو متناظر بالنسبة للمحور y



تمرين) ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$

أثبت أن $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{5\}$ تقابل ثم جد تقابله العكسي f^{-1}

الحل: أياً كانت $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ فإن $f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$

$y\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$

$y = \frac{5x-1}{x-1} \Rightarrow xy-y = 5x-1$

$xy-5x = y-1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{y-5}$

بالتالي للمعادلة $y=f(x)$ حل وحيد ومنه $f(x)$ تقابل وأن تقابله العكسي

$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{5\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-5}$

تمرين) f تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليه $f'(0)=1 \ , \ f(0)=0$ نفرض أن f متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$ ارسم خطاً بيانياً للتابع f.

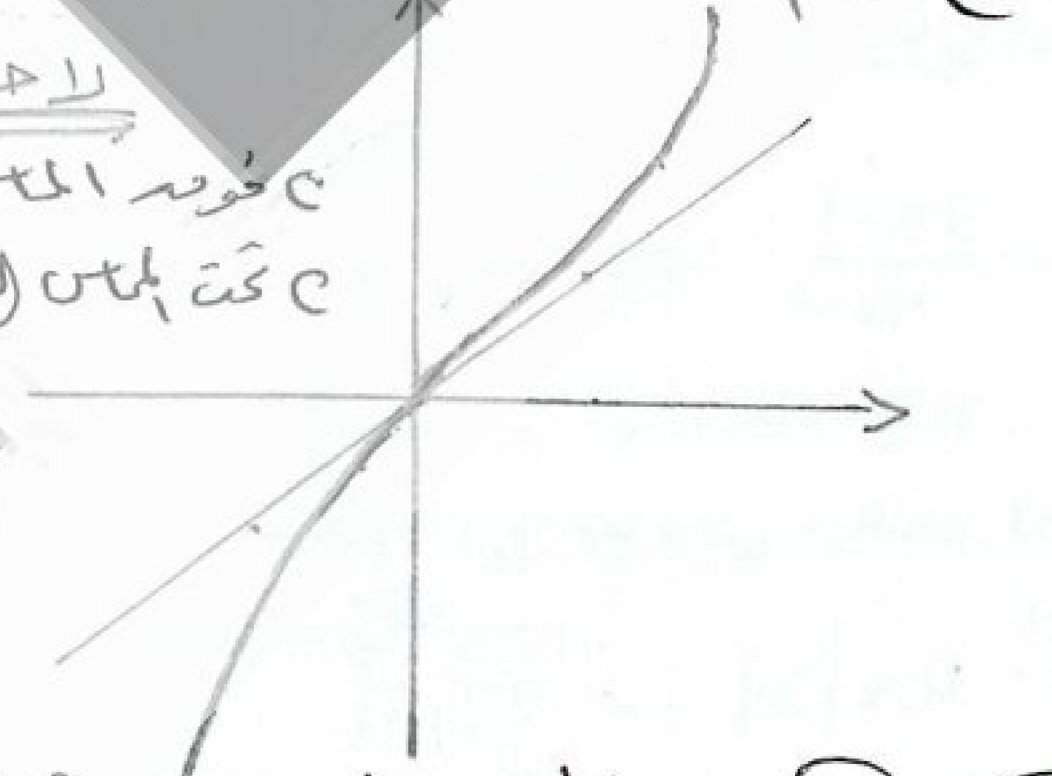
بما أن f معرف واشتقاقي على R
وأن f' متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$ وأن $f'(0)=1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

من الجدول نلاحظ أن $f'(x)\geq 1$ أي
$f'(x)>0$ وبالتالي f متزايد تماماً
من ناحية ثانية:
إن الخط C يمر بالمبدأ أي $f(0)=0$
وأن ميل المماس $m=f'(0)=1$
$\Leftarrow$ معادلة المماس: $y=x$
لندرس الوضع النسبي لـ C مع المماس
$$h(x)=f(x)-x$$
$$h'(x)=f'(x)-1$$
وبما أن $f'(x)\geq 1$ فإن $h'(x)\geq 0$
$$h'(0)=f'(0)-1=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
إشارة h	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت المماس		C يقع فوق المماس

ملاحظة
C فوق المماس التقعر للأعلى
C تحت المماس التقعر للأسفل



تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f=R\setminus\{-1,1\}$ وفق:
$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$
① اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة
في حالة $x>-1$ فإن $|x+1|=x+1$
في حالة $x<-1$ فإن $|x+1|=-x-1$

$$f(x)=\begin{cases}-x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x<-1\\[2mm] x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x>-1,\ x\neq 1\end{cases}$$

② ادرس النهايات لـ f عند أطراف D_f
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$

إشارة x^2-1

	-1		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

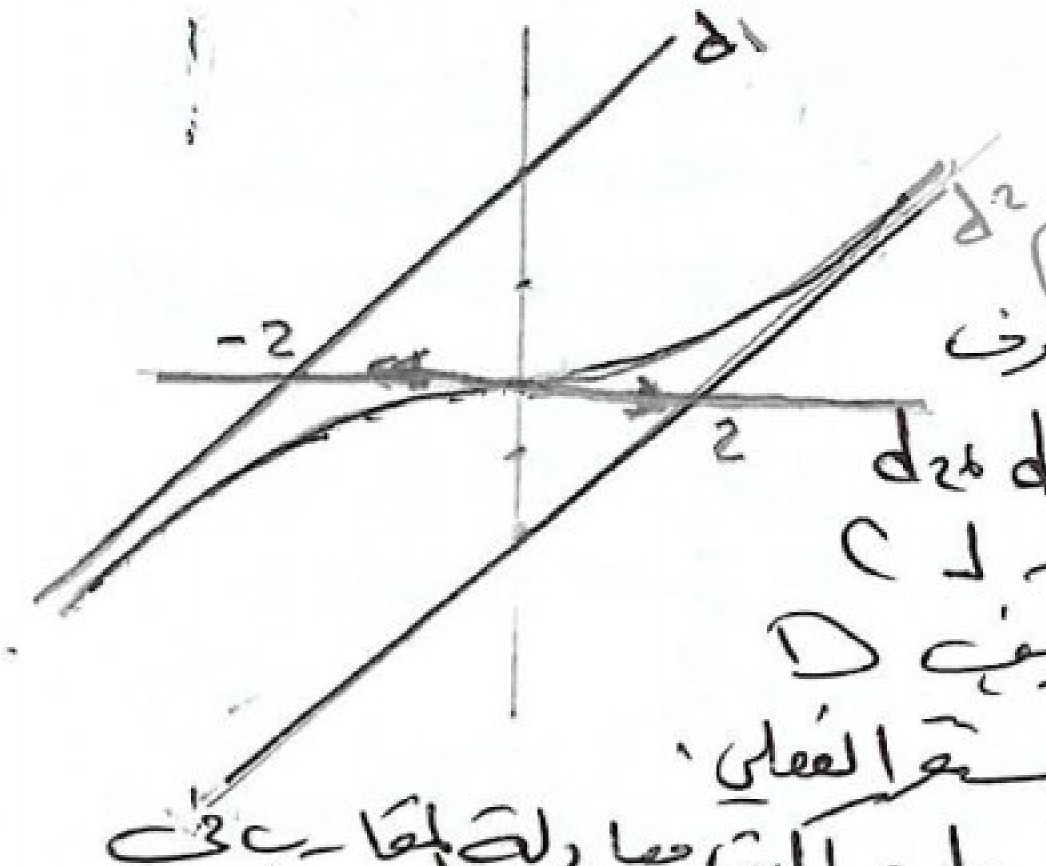
③ جد $f'(x)$ وادرس إشارته.
$$f'(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x<-1\\[2mm] \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} & : x>-1,\ x\neq1\end{cases}$$
نلاحظ أن الفرع الأول f' سالب تماماً على $]-\infty,-1[$
الفرع الثاني: إشارته من إشارة البسط
$$x^4-3x^2=x^2(x^2-3)$$

$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	
$+$ 0	$-$		$-$		$-$	0	$+$

في المجال $]-1,1[$ ← f' سالب تماماً
في المجال $]1,\sqrt{3}[$ ← f' سالب تماماً
في المجال $]\sqrt{3},+\infty[$ ← f' موجب تماماً.

④ نضع جدول تغيرات التابع f

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$ $-$	0 $-$	$\Vert$ $-$	0 $+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-\infty \Vert +\infty \searrow$	$1 \searrow$	$-\infty \Vert +\infty \searrow$	$f(\sqrt{3}) \nearrow$	$+\infty$



تمرين
الشكل المرسوم جانباً لتابع f معرف على D والمستقيمان d_1 و d_2 مقاربان مائلان لـ C
① جد مجموعة التعريف D
② جد $f(D)$ المستقر الفعلي
③ جد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ والتي معادلة المقارب في هذه الحالة
④ جد $f(0)$ ، $f'(0)$ ⑤ هل $f(0)=0$ قيمة حدية
⑥ هل التابع f فردي أم زوجي علل
⑦ $\lim f(x)$

$D_f =]-\infty, +\infty[$, $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

المقارب d_2 يمر بالنقطتين $(2,0)$ و $(0,-2)$

$d_2 : y = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{2} = 1$

طريقة 2: $m = 1$ ، $y - y_0 = m(x - x_0)$ ، $y - 0 = 1(x-2)$ ، $y = x - 2$

$y = x + c$ ، $(2,0) \in d_2 \Rightarrow c = -2$

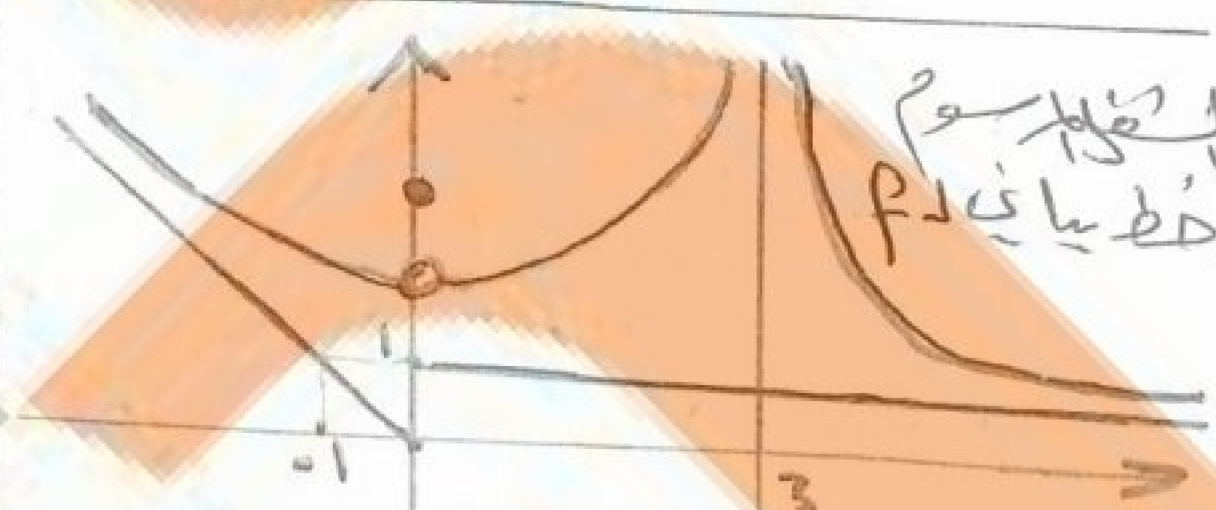
ومنه $d_2 : y = x - 2$

$f'(0) = 0$, $f(0) = 0$

$f(0)=0$ ليست قيمة حدية لان f' ينعدم عندها لكنه لا يغير اشارته عندها

[6] التابع زوجي لانه متناظر بالنسبة للمبدأ

[7] $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$



تمرين: في الشكل المرسوم جانبا خط بياني لـ f

1) عين D_f مجموعة تعريف التابع

2) اوجد $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الشاقولي

3) اوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الافقي

4) جد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $-\infty$ ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+x}$

5) هل f اشتقاقي عند (0) علل

6) استنتج حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

الحل:

1) $D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

2) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

$x = 3$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$y = 1$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

4) المقارب المائل يمر بالنقطتين $(0,0)$ ، $(-1,1)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{-1-0} = -1$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+x}$

نلاحظ أن: $y = -x$ مقارب لـ C عند $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = 0$

لمعرفة اشارة الصفر: نأخذ الوضع النسبي

C يقع فوق المقارب $\Leftarrow f(x) + x > 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

5) f غير اشتقاقي عند الصفر لانه غير مستمر عند الصفر

6) $f'(x) > 0$

حلول المتراجحة هي: $]0, 3[$

اضافي: كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$

عدد حلول المعادلة اربعة، لان $y=3$ يقطع C في اربعة نقاط

---

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	$\ln 2$

1) عين D_f مجموعة تعريف f

2) اوجد نهاية f عند اطراف مجموعة التعريف ثم استنتج معادلة كل مقارب افقي او شاقولي

3) اوجد مجموعة قيم التابع f (المستقر الفعلي)

4) اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ولنسميه α

5) استنتج مجموعة تعريف $g(x) = \ln[f(x)]$

6) هل يوجد مقارب مائل لـ C علل

الحل:

1) $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$

$y = \ln 2$ مقارب افقي في جوار $-\infty$ و $+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

3) $E_f =]-\infty, \ln 2[\cup]\ln 2, +\infty[$

4) $f(x) = 0$ حل وحيد:

في المجال $]-\infty, 0[$ f مستمر ومتناقص تماما

$0 \in f(]-\infty, 0[) =]-\infty, \ln 2[$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]-\infty, 0[$

في المجال $]1, +\infty[$ لا يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل لان $0 \notin f(]1, +\infty[)$

وبالتالي $f(x) = 0$ لها حل وحيد ولنسميه α.

مجموعة تعريف $g(x)=\ln(f(x))$

نأخذ المجالات الموجبة تماماً من f

$D_g =]-\infty,\alpha[\cup]1,+\infty[$

(6) لا يوجد مقارب مائل عند $-\infty$ ، $+\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 2, \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2$

وجود مقارب أفقي ينفي وجود مقارب مائل

تمرين

x	$-\infty$		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

فيما يلي جدول تغيرات f على $]-\infty,3]$

(1) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $f(2)$

(2) ما عدد القيم الحدية اذكرها

(3) ما عدد المماسات الأفقية اكتب معادلاتها

(4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

(5) ادرس اشارة f تبعاً لقيم x

(6) لتكن g معرف على $]-\infty,3]$ وتحقق $g'(x)=f(x)$ ، $g(1)=1$ ، $g(3)=2$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

نظم جدول تغيرات $g(x)$

(7) احسب $\int_1^2 f'(x)\,dx$

الحل (1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ، $f(2)=3$

(2) عدد المماسات الأفقية $=2$

$y=0$ ، $y=3$

(3) عدد القيم الحدية $=2$ هي : $f(2)=3$ ، $f(3)=1$

(4) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$: يوجد حل وحيد

(5) $f(x)<0$ في $x\in]-\infty,1[$

$f(x)>0$ في $x\in]1,3[$

وان $f(x)=0$ عندما $x=1$

(6)

x	$-\infty$		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

لاحظ ان اشارة g' هي نفس اشارة f

(7) $\int_1^2 f'(x)\,dx = [f(x)]_1^2 = f(2)-f(1) = 3-0=3$

تمرين: لتكن f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $I=[0,1]$ وتحقق الشرطين (1) اذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in I$

(2) اذا كان $x\in I$ فإن $f'(x)<1$

اثبت ان للمعادلة $f(x)=x$ حل وحيد في I

الحل نأخذ $g(x)=f(x)-x$

ولنبرهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في I

(1) بما ان f مستمر على I فإن g مجموع دالتين مستمرتين على I $\Leftarrow$ g مستمر على I.

(2) $g'(x)=f'(x)-1$

ولأن $f'(x)<1$ $\Leftarrow$ $g'(x)<0$ أي ان g متناقص تماماً على I.

(3) $g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$

لأن $f(x)\in I$ فرضاً

$g(1)=f(1)-1\leq 0$

لأن $0\leq f(1)\leq 1$

ومنه $g(0)\times g(1)\leq 0$ $\Leftarrow$ للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في I أي ان $f(x)=x$ حل وحيد في I

تمرين لتكن f تابع معرف على $I=]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

(1) ادرس تغيرات f على I

(2) استنتج ان للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α حيث $\alpha\in]1,2[$

الحل f مستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

(2): f مستمر على $]1,+\infty[$ ومتناقص تماماً عليه

$0\in f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $]1,+\infty[$

$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty>0$ ، $f(2)=1-\sqrt{2}<0$

$\lim_{x\to1} f(x)\times f(2)<0$ ومنه $1<\alpha<2$

تمرين: $f(x)=\sin x$ احسب القيمة التقريبية لـ $f(0.1)$

الحل $f(a+h)\simeq f(a)+hf'(a)$

f اشتقاقي على R ، $f'(x)=\cos x$ ، $a=0, h=0.1$

$f(0+0.1)\simeq f(0)+(0.1)f'(0)$

$f(0.1)\simeq 0+(0.1)(1)=0.1$

حيث $f'(x)=\cos x$

المتتاليات

المتتالية تُعطى بأشكال

1 متتالية صريحة معرفة بدلالة n

$$U_n = f(n)$$

مثلاً: $U_n=\sqrt{n+1}$ ، $U_n = \frac{n+3}{n-1}$

مثال ليكن $U_n = \frac{2n+1}{n+2}$

احسب U_1 ، U_{n+1}

الحل

$$U_1 = \frac{2(1)+1}{1+2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{2n+3}{n+3}$$

2 متتالية المجاميع:

مثال $U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

احسب U_1 ، U_2 ، U_{n+1}

الحل $U_1 = 1$, $U_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$U_{n+1} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{n+1}$$

الكتابة بهذا الشكل تفيد في الاطراد

3 متتالية تدريجية:

U_{n+1} معرفة بدلالة U_n

مثال $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$

احسب U_1 ، U_2 ، U_{n+2}

$n=0 \Rightarrow U_1 = U_0+5 = 2+5 = 7$

$n=1 \Rightarrow U_2 = U_1+5 = 7+5 = 12$

$n+1 \rightarrow U_{n+1+1} = U_{n+1}+5$

$U_{n+2} = U_{n+1}+5$

اطراد متتالية

اطراد متتالية يعني:

متزايدة (أو متزايدة تماماً) متناقصة (أو متناقصة تماماً) ثابتة

طرق دراسة اطراد متتالية:

① دراسة اشارة المقدار $U_{n+1}-U_n$ والمقارنة مع الصفر.

$U_{n+1}-U_n>0$ ← المتتالية U_n متزايدة تماماً

$U_{n+1}-U_n<0$ ← المتتالية U_n متناقصة تماماً

$U_{n+1}-U_n=0$ ← المتتالية U_n ثابتة.

② النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ومقارنتها مع الواحد

بشرط: جميع حدود المتتالية موجبة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$ ← المتتالية U_n متزايدة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$ ← المتتالية U_n متناقصة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$ ← المتتالية ثابتة

يفضل استخدام هذه الطريقة بوجود القوى والعاملي.

③ تشكيل تابع ودراسة اطراده.

هنا اطراد التابع يوافق اطراد المتتالية

شرط هذه الطريقة ان تكون المتتالية صريحة معرفة بدلالة n (ليست تدريجية)

ملاحظات هامة حول دراسة الاطراد

1 اذا كانت المتتالية هي متتالية مجاميع نستخدم شرط المقدار $U_{n+1}-U_n$ حصراً

2 اذا كانت المتتالية تحوي عاملي او قوى نستخدم شرط النسبة.

3 اذا كانت المتتالية تدريجية:

* كي نبرهن انها متزايدة نبرهن بالتدريج العلاقة $E(n): U_{n+1}>U_n$
* كي نبرهن انها متناقصة تماماً نبرهن بالتدريج العلاقة $E(n): U_{n+1}<U_n$
* كي نبرهن انها ثابتة نبرهن بالتدريج $E(n): U_{n+1}=U_n$

تمرين: ادرس اطراد كل من المتتاليات

① $U_n = \frac{2n-1}{n+4}$

الحل

$U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+4} = \frac{2n+1}{n+5}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4}$

$= \frac{(2n+1)(n+4)-(2n-1)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$

$= \frac{9}{(n+5)(n+4)} > 0$

والمتتالية متزايدة تماماً.

طريقة 2 : نشكل تابع:

$U_n = f(n)$

$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$

$f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x-1)}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ f متزايد تماماً

ومنه المتتالية U_n متزايدة تماماً

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

$U_n = f(n)$

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$

f متزايد تماماً $\Leftarrow$ U_n متزايدة تماماً

③ $U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

لتكن $V_n = U_{2n} - U_n$

اثبت ان V_n متزايدة تماماً.

الحل

نشكل المتتالية V_n

$U_{2n} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}_{U_n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$

$V_n = U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$

$V_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2(n+1)}$

$V_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

كي تصبح V_n ينقصها الحد $\frac{1}{n+1}$

لذلك نضيف ونطرح $\frac{1}{n+1}$

$= -\frac{1}{n+1}+\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}}_{V_n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

$V_{n+1} - V_n = -\underset{(2)}{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{2n+1}+\underset{(1)}{\frac{1}{2n+2}}$

$= \frac{-2+1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}$

$= \frac{-1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}$

$= \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$

$V_{n+1} - V_n > 0$

ومنه المتتالية V_n متزايدة تماماً

تمرين ④ $(U_n)_{n\geq 1}$

$U_n = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$

الحل

$U_{n+1} = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}_{U_n}+(n+1)^2$

$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 > 0$

ومنه U_n متزايدة تماماً

تمرين: ادرس اطراد المتتالية

$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n+2 \,,\ u_0 = 2$

الحل: المتتالية تدريجية لإثبات الاطراد نستخدم البرهان بالتدريج لكي نعرف اذا كانت متزايدة او متناقصة

$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{3}{4}u_0+2 = \frac{7}{2},\ u_2 = \frac{37}{8}$

نخمن اطراد المتتالية على انها متزايدة

لنبرهن بالتدريج ان

$E(n):\ U_{n+1} > U_n$

$E(0): U_1 > U_0$

$\frac{7}{2} > 2$ صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة

أي $U_{n+1} > U_n$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$ أي لنبرهن

$U_{n+2} > U_{n+1}$

البرهان: من الفرض:

$U_{n+1} > U_n$

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

والعلاقة صحيحة

$U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \frac{3}{4}x + 2$

$f'(x) = \frac{3}{4} > 0$

f متزايدة تماماً

من ① و② و③ المتتالية U_n متزايدة تماماً.

تذكرة: خطوات الإثبات بالتدريج:

لإثبات العلاقة $E(n)$

① نبرهن $E(n)$ من أجل أصغر قيمة لـ n ($n=1$ أو $n=0$)

② نفرض $E(n)$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$

فقرة

المتتاليات الحسابية

① شرط المتتالية الحسابية هو: $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$ حيث r أساس المتتالية

② العلاقة بين حدين في متتالية حسابية:

$U_n = U_m + (n-m)r$

مثلاً $m=0 \Rightarrow U_n = U_0 + nr$

③ مجموع حدود متتالية حسابية:

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$

n عدد الحدود، a أول حد، ℓ آخر حد

④ a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية: $b = \frac{a+c}{2}$

فقرة

المتتالية الهندسية:

① شرط المتتالية الهندسية: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

حيث q أساس المتتالية الهندسية.

② العلاقة بين حدين في متتالية هندسية

$U_n = U_m q^{n-m}$

$m=0$ مثلاً $\rightarrow U_n = U_0 q^n$

$m=1 \rightarrow U_n = U_1 q^{n-1}$

③ مجموع حدود متتالية هندسية:

$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$

حيث n: عدد الحدود

a: الحد الأول

④ a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$b^2 = a \cdot c$

ملاحظة: عدد الحدود في متتالية هو

حد بحد، قفزة قفزة $\rightarrow n = J - i + 1$

قفزتين قفزتين $\rightarrow n = \frac{J-i}{2} + 1$

تمرين ① U_n حسابية فيها:

$U_2 = 41, \quad U_5 = -13$

احسب U_{20} ثم احسب $U_2 + U_4 + \dots + U_{20}$

الحل

$U_n = U_m + (n-m)r$

$U_5 = U_2 + 3r \Rightarrow -13 = 41 + 3r$

$\boxed{r = -18}$

$U_{20} = U_5 + 15r$

$U_{20} = -283$

$U_2 + U_4 + \dots + U_{20}$

$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell), \quad a = U_2 = 41$

$\ell = U_{20} = -283$

n عدد الحدود $= \frac{J-i}{2} + 1 = 10$

$S_n = \frac{10}{2}(41 - 283) = -1210$

تمرين ② $U_{n\geq 0}$ هندسية فيها:

$U_0 = 1, \quad U_5 = 32$

احسب U_{10} ثم أوجد المجموع $U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$

الحل

$U_n = U_m q^{n-m} \Rightarrow U_5 = U_0 q^5$

$32 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = 2$

$U_{10} = U_0 q^{10} = 2^{10} = 1024$

$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right), \quad a = U_3 = 1 \cdot 2^3 = 8$

$n = J - i + 1 = 8$

$S_8 = 8\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = 2040$

تمرين: $(U_n)_{n\ge 0}$ متتالية حسابية أساسها r ثلاثة حدود متتابعة منها c ، b ، a

$b^2-4-ac=0$ والمطلوب احسب r

الحل

$a=a$

$b=a+r$

$c=b+r=a+r+r=a+2r$

نعوض في العلاقة:

$(a+r)^2-4-a(a+2r)=0$

$a^2+2ar+r^2-4-a^2-2ar=0$

$r^2=4 \Rightarrow r=2$ أو $r=-2$

تمرين: c ، b ، a اعداد حقيقية حيث $a\neq 0$

إذا علمت أن a ، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q وأن b ، c ، $6a$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

احسب q

الحل

هندسية	حسابية
$a=a$	
$b=aq$	$c=\frac{b+6a}{2}$
$c=aq^2$	$aq^2=\frac{aq+6a}{2}$

$2aq^2=aq+6a \Rightarrow 2aq^2-aq-6a=0$

نقسم على $a\neq 0$

$2q^2-q-6=0$

$\Delta=49$ ، $q_1=\frac{1+7}{4}=2$

$q_2=\frac{1-7}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$

تمارين على الإثبات بالتراجع:

1 إذا كان $U_{n+1}=10U_n-18$ ، $U_0=7$

اثبت انه أياً كانت n فإن $U_n=5\times 10^n+2$

الحل ① نبرهن $E(0)$

$U_0=5\times 10^0+2=7$

صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة: $U_n=5\times 10^n+2$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$: اي لنبرهن ان

$U_{n+1}=5\times 10^{n+1}+2$

الإثبات: $L_1=U_{n+1}=10U_n-18$

$=10(5\times 10^n+2)-18$ من الفرض

$=5\times 10\times 10^n+20-18$

$=5\cdot 10^{n+1}+2$

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة أياً كانت n

تمرين 2 اثبت أن: $2^{3n}-1$ هو مضاعف للعدد 7 أياً كان العدد الطبيعي n.

① نبرهن $E(0)$: $2^0-1=0$ والصفر هو مضاعف للعدد 7 والعلاقة صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة أي يوجد k عدد طبيعي بحيث: $2^{3n}-1=7k$

③ نبرهن صحة القضية $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$\underbrace{2^{3(n+1)}-1}_{L_1}=\underbrace{7k'}_{L_2}$

$L_1=2^{3n+3}-1=2^{3n}\cdot 2^3-1$

بالاستفادة من الفرض

$=(7k+1)8-1=56k+8-1$

$=56k+7=7(8k+1)=7k'$

من ① و ② و ③ القضية صحيحة أياً كانت n

تمرين 3 اثبت صحة الخاصة:

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!=(n+1)!-1$

الحل ① نبرهن $E(1)$

$L_1=1\times 1!=1$ ، $L_2=(2)!-1=1$

و $L_1=L_2$ والعلاقة صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة.

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n(n!)+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1$

$L_1=\underbrace{1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n(n!)}_{\text{نستفيد من الفرض}}+(n+1)(n+1)!$

$L_1=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$=(n+1)!+(n+1)(n+1)!-1$

$=(n+1)![1+n+1]-1$

$=(n+1)!(n+2)-1$

$=(n+2)!-1=L_2$

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة أياً كانت $n\geq 1$

تمرين: لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$U_0 = 1 \quad , \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$$

① برهن بالتدريج أيا كانت n فإن

$$1 \leq U_n < 4$$

② نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$: $V_n = U_n - 4$

[a] اثبت أن V_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

[b] اكتب عبارة V_n بدلالة n واستنتج U_n بدلالة n

[c] احسب بدلالة n المجموع

$$S = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

الحل:

$E(n): 1 \leq U_n < 4$

① نبرهن $E(0)$

$1 \leq U_0 < 4$

$1 \leq 1 < 4$ صحيحة

② نفرض $E(n)$ صحيحة: $1 \leq U_n < 4$

③ نبرهن $E(n+1)$ أي لنبرهن أن

$$1 \leq U_{n+1} < 4$$

البرهان

$U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$f'(x) = \frac{1}{2} > 0$

f متزايد تماما

من الفرض: $1 \leq U_n < 4$

نطبق: $f(1) \leq f(U_n) < f(4)$

$\frac{1}{2} + 2 \leq U_{n+1} < \frac{1}{2}(4) + 2$

$1 \leq \frac{5}{2} \leq U_{n+1} < 4$

ومنه: $1 \leq U_{n+1} < 4$

والعلاقة صحيحة

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة أيا كانت n

[2] $V_n = U_n - 4$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 4}{U_n - 4} = \frac{\frac{1}{2}U_n + 2 - 4}{U_n - 4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}U_n - 2}{U_n - 4} = \frac{\frac{1}{2}(U_n - 4)}{U_n - 4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ومنه V_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

[b] $V_n = V_0\, q^n$

$V_0 = U_0 - 4 = 1 - 4 = -3$

$V_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$U_n = V_n + 4$

$U_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

[c] $S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ و $a = V_1 = U_1 - 4$

$$= V_1\,\frac{1-q^n}{1-q} = -\frac{3}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= -3\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)$$

طلب إضافي: احسب بدلالة n :

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$U_1 = V_1 + 4$,

$U_2 = V_2 + 4$

$\vdots$

$U_n = V_n + 4$

$S_n = V_1 + 4 + V_2 + 4 + \dots + V_n + 4$

$= V_1 + V_2 + \dots + V_n + 4n$

$= -3\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) + 4n$

مذكرة: نهاية متتالية

دائما نهاية المتتالية عند $+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$: المتتالية متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$: المتتالية متباعدة

مذكرة: نهاية متتالية هندسية:

① إذا كانت: $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

② إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

③ $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

④ إذا كانت $q < -1$: ليس للمتتالية نهاية

متباعدة $\quad$ 1 $\quad$ متقاربة من الصفر $\quad$ -1 $\quad$ ليس لها نهاية

النهاية واحد

ملاحظة هامة: نفس المبرهنات والخواص التي استخدمت لايجاد نهاية تابع نستخدمها لايجاد نهاية متتالية مبرهنة الإحاطة + الضرب بالمرافق + إخراج عامل مشترك + ...

تمرين: أوجد النهاية لكل من:

① $U_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

المتتالية U_n هندسية $-1 < q = \frac{4}{5} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

② $U_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

$$U_n = \frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

نلاحظ ان كلاً من $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هندسية $-1<q<1$ فكل منهما نهايته تساوي الصفر.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

③ $U_n = \frac{\cos(3n+1)}{\sqrt{n+1}}$

الحل

$$-1 \le \cos(3n+1) \le 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{\cos(3n+1)}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(3n+1)}{\sqrt{n+1}} = 0$$

④ $U_n = \sqrt{2n^2+3} - n\sqrt{2}$

$$U_n = \frac{\left[\sqrt{2n^2+3} - n\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{2n^2+3} + n\sqrt{2}\right]}{\sqrt{2n^2+3} + n\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2n^2+3} + n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

تمرين: لتكن $U_n = \frac{3n+1}{n-1}$

جد $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $U_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n أكبر من n_0

الحل $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

$|U_n - \ell| < \epsilon$ $\quad L = 3$ ، $\epsilon = b - \ell = 0.02$

$$\left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < \frac{2}{100}$$

$$\left|\frac{4}{n-1}\right| < \frac{1}{50}$$

$$\frac{|n-1|}{4} > 50 \Rightarrow n-1 > 200$$

$n_0 = 201$ وبالتالي $n > 201$

مذكرة: المتتالية المحدودة:

* $U_n \le M$: المتتالية محدودة من الأعلى نسمي M عنصر راجح.
* $U_n \ge m$: محدودة من الأدنى m عنصر قاصر
* $m \le U_n \le M$ عندها نقول ان المتتالية محدودة.

تمرين: $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

اثبت ان المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ محدودة.

إذا كانت المتتالية صريحة اي بدلالة n لاثبات انها محدودة نشكل تابع وندرس تغيراته.

الحل نشكل تابع $U_n = f(n)$

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ، $[0,+\infty[$

$f(0) = 1$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right]}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$

$\sqrt{x} = \sqrt{x+1} \xRightarrow{\text{تربيع}} x = x+1 \Rightarrow 0 = 1$ مستحيل

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$$0 < f(x) \le 1$$

ومنه: $0 < U_n \le 1$ فهي محدودة

المتتالية U_n محدودة من الأعلى والأدنى فهي محدودة

ملاحظة: كان يمكن أن يكون الطلب هو: اثبت أن

$0 < U_n \le 1$ (نفس الحل)

طلب إضافي: ادرس اطراد المتتالية U_n ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها.

الحل: من الجدول السابق نلاحظ أن $f(x)$

أي f متناقص تماماً $\Leftarrow U_n = f(n)$

بما أن f متناقص تماماً فإن U_n متناقصة تماماً

U_n محدودة من الأدنى بالعدد 0 ومتناقصة تماماً فهي متقاربة.

فكرة:

* كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى هي متباعدة.
* كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى هي متباعدة.
* كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متقاربة.
* كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى هي متقاربة.

تمرين: لتأمل المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ المعرفة

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

اثبت أن $1 \le U_n \le 3$ أياً كانت n

الحل: يمكن أن نشكل تابع وندرس تغيراته

يكفي بأنه أعطانا الحد الأعلى والأدنى

والمتتالية كتابع ودراسة تغيراته صعبة

نأخذ هذه الطريقة:

$$U_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{2n-1}{n^2-n+1} \ge 0$$

$$U_n - 1 \ge 0 \Rightarrow U_n \ge 1$$

وكذلك:

$$U_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3 = \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$$

$$U_n - 3 \le 0 \Rightarrow U_n \le 3$$

ومنه $1 \le U_n \le 3$

فكرة: المتتاليات المتجاورات

نقول عن متتاليتين أنهما متجاورتان إذا تحقق: ① إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

② نهاية الفرق تساوي الصفر.

تمرين: بين إذا كانت المتتاليتين متجاورتين:

$$x_n = 2 - \frac{1}{n} \ , \ y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

الحل: المتتالية $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow$

f متزايد تماماً ومنه المتتالية متزايدة

$y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ ، $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} < 0$

f متناقص تماماً $\Leftarrow$ المتتالية متناقصة

نهاية الفرق:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان.

تمرين:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

هل $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ متجاورتان علل ذلك.

الحل

$X_{n+1} = \underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}_{X_n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$X_{n+1}-X_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

X_n متتالية متزايدة تماماً

$y_n = X_n + \frac{1}{n}$

$y_{n+1} = X_{n+1}+\frac{1}{n+1}$

$y_{n+1}-y_n = X_{n+1}-X_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{n}$

$=\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$

$=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}<0$

والمتتالية y_n متناقصة تماماً

$\lim_{n\to+\infty}(y_n-X_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$

والمتتاليتان X_n و y_n متجاورتان.

تمرين (1) لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$U_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}$

① اثبت بالتدريج ان $n \le 2^n$ ايا كان $n\in N$

② استنتج مما سبق أن المتتالية متقاربة.

الحل

$E(n): n\le 2^n$

① نبرهن $E(0)$: $0\le 2^0$ محققة

② نفرض $E(n)$ صحيحة ، $n\le 2^n$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$n+1\le 2^{n+1}$

الإثبات: من الفرض $n\le 2^n$ نضرب بـ 2

$2n \le 2\cdot 2^n$

$n+1\le 2n\le 2^{n+1}$

$\Rightarrow n+1 \le 2^{n+1}$

② لدينا: $n\le 2^n$

$n=1 \Rightarrow 1\le 2$

$n=2\to 2\le 2^2$

$n=3 \to 3\le 2^3$

$\vdots$

$U_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}$

$U_n\le \frac{2^1}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\dots+\frac{2^n}{3^n}$

$U_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

$U_n\le \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$

$U_n \le 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

عندما $n\to+\infty$ ، $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$

$U_n\le 2$

ومنه 2 هو عنصر راجح على المتتالية

طلب اضافي: استنتج ان المتتالية متقاربة.

بما ان المتتالية محدودة من الأعلى يكفي ان نبرهن انها متزايدة.

$U_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}}_{U_n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{n+1}{3^{n+1}}>0$

ومنه U_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تمرين (2) لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$ ، $u_0=1$.

① اثبت ان $0\le U_n\le 2$

② استنتج ان المتتالية U_n متقاربة

③ حدد نهاية المتتالية.

الحل: اذا كان المعطى تدريجية U_{n+1} وكان الطلب على U_n نبرهن بالتدريج

$E(n): \quad 0 \leq U_n \leq 2$

① نبرهن $E(0)$: $0 \leq U_0 \leq 2$

$0 \leq 1 \leq 2$

صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة : $0 \leq U_n \leq 2$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$0 \leq U_{n+1} \leq 2$

الاثبات:

$U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \sqrt{2+x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \Leftarrow f$ متزايد تماما

من الفرض : $0 \leq U_n \leq 2$

نصور

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(2)$

$\sqrt{2} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{4}$

$0 \leq \sqrt{2} \leq U_{n+1} \leq 2$

والعلاقة صحيحة.

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة أياً كانت n

④ التقارب : بما أن المتتالية محدودة يبقى علينا اطرادها :

$U_0 = 1, \quad U_1 = \sqrt{3}, \quad U_2 = \sqrt{U_0+2} = \sqrt{\sqrt{3}+2}$

لنبرهن ان المتتالية متزايدة

$E(n): \quad U_{n+1} > U_n$

① نبرهن $E(0)$: $U_1 > U_0$

$\sqrt{3} > 1$ صحيحة

② نفرض ان $E(n)$ صحيحة : $U_{n+1} > U_n$ صحيحة

③ لنبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$U_{n+2} > U_{n+1}$

الاثبات : من الفرض : $U_{n+1} > U_n$

نصور : $f(U_{n+1}) > f(U_n)$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

صحيحة

من ① و ② و ③ المتتالية متزايدة تماما وهي محدودة من الاعلى فهي متقاربة

③ ايجاد النهاية :

بما أن المتتالية متقاربة فإن نهايتها هو حل المعادلة $f(x) = x$

حيث $f(x) = \sqrt{2+x}$ هو تابع مستمر

$\sqrt{2+x} = x$

نربع : $x \geq 0$

$2 + x = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2, \quad x = -1$ مرفوض

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

تمرين 2

$U_0 = 1$

$U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$

① اثبت ان $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماما

ثم استنتج أن :

$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$ أياً كانت n

② حدد جهة اطراد المتتالية ثم اثبت انها مطردة.

③ استنتج ان المتتالية U_n متقاربة وجد نهايتها.

الحل :

$f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$

ندرس الاطراد على المجال $[0, +\infty[$

f مستمر على $[0, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{14}{(2x+6)^2} > 0$

وبالتالي f متزايد تماما.

استنتج ان $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

نبرهن بالتدريج :

$E(n): \frac{1}{2} < U_n \leq 1$

① نبرهن $E(0)$: $\frac{1}{2} < U_0 \leq 1$

$\frac{1}{2} < 1 \leq 1$

صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة: $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

الاثبات: من الفرض: $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

تصور: $f(\frac{1}{2}) < f(U_n) \leq f(1)$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

والعلاقة صحيحة

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة ايا كانت n

② كمية الاطراد

$U_0 = 1,\ U_1 = \frac{5}{8},\ U_2 = \frac{31}{58} \ldots$

نلاحظ ان الحدود متناقصة لنبرهن ذلك

$$E(n):\ U_{n+1} < U_n$$

بالتدريج:

① نبرهن $E(0)$: $U_1 < U_0$

$\frac{5}{8} < 1$ صحيحة

② نفرض $E(n)$ صحيحة.

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

الاثبات: من الفرض

$$U_{n+1} < U_n$$

تصور: $f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

صحيحة

من ① و ② و ③ نجد ان U_n متناقصة

③ بما ان المتتالية محدودة من الادنى بـ $\frac{1}{2}$ ومتناقصة فهي متقاربة.

ايجاد النهاية: النهاية هو حل المعادلة

$$f(x) = x$$

حيث f مستمر وان $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

$$\frac{3x+2}{2x+6} = x$$

$$3x+2 = 2x^2+6x$$

$$2x^2+3x-2=0$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = -2$$

الاقرب للحد الادنى هو $\frac{1}{2}$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

تمرين 3: لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$

$U_0 = \frac{3}{2}$

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

① اثبت ان $1 \leq U_n \leq 2$

② اثبت ان $U_{n+1} - U_n = (U_n-2)(U_n-1)$

③ استنتج ان U_n متقاربة على:

الحل:

$E(n):\ 1 \leq U_n \leq 2$

① نبرهن $E(0)$: $1 \leq U_0 \leq 2$: $1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$ صحيحة

② نفرض $E(n)$: $1 \leq U_n \leq 2$ صحيحة.

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

الاثبات: من اجل التصور نلاحظ ان f ونبرهن انه متزايد

$f(x) = x^2 - 2x + 2\ ,\ [0,+\infty[$

f مستمر في $[0,+\infty[$

$f'(x) = 2x - 2$

نلاحظ ان f متزايد

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$		1	$\nearrow$

من الفرض: $1 \leq U_n \leq 2$

$$f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$$

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2$$

صحيحة

من ① و ② و ③ $E(n)$ صحيحة ايا كانت n

②

$$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$$

$$= U_n^2 - 3U_n + 2$$

$$= (U_n - 2)(U_n - 1)$$

٣) كي تكون المتتالية متقاربة يجب ان تكون محدودة نبحث عن اطرادها:

$$U_{n+1}-U_n=(U_n-2)(U_n-1)$$

بما ان: $1\le U_n\le 2$

فان $U_n-2\le 0$ وان $U_n-1\ge 0$

$$U_{n+1}-U_n=(\underbrace{U_n-2}_{\text{سالب}})(\underbrace{U_n-1}_{\text{موجب}})\le 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n\le 0$$

والمتتالية U_n متناقصة ومحدودة من الادنى بـ 1 فهي متقاربة.

اضافي: لو طلب النهاية فهي حل المعادلة $f(x)=x$

f مستمر:

$$x^2-2x+2=x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=1,\quad x=2$$

الاقرب للحد الادنى هو 1

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

تمرين 4: $U_n=\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$ معرفة ونضع $(U_n)_{n\ge1}$

١) جد طبيعة المتتالية E نضع $S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$

a) اثبت بالتدريج ان $S_n=\ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$

b) جد طبيعة S_n

الحل:

١) $\lim_{n\to+\infty} U_n=\ln(1)=0$

٢) $E(n): S_n=\ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$

a) برهن E(1): $S_1=\ln\frac{(3)(2)}{2}=\ln 3$

$L_1=S_1=U_1=\ln\left(\frac{3}{1}\right)=\ln 3$

$L_2=\ln 3$

العلاقة صحيحة.

٢) نفرض E(n) صحيحة: $S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

٣) برهن E(n+1) اي لنبرهن ان $S_{n+1}=\ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$

الاثبات:

$$S_{n+1}=\underbrace{U_1+U_2+\dots+U_n}_{S_n}+U_{n+1}$$

$$S_{n+1}=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$=\ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$$

والعلاقة صحيحة.

من ١ و ٢ و ٣ العلاقة صحيحة.

b) $$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n^2+5n+6}{2}\right)=+\infty$$

تمرين 5:

$$U_1=\frac{1}{2}$$

$$U_{n+1}=\frac{nU_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}$$

١) احسب U_2 ٢) اثبت بالتدريج ان $U_n<1$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$

٣) ادرس جهة اطراد المتتالية.

الحل

$$n=1\Rightarrow U_2=\frac{U_1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

٢) $E(n): U_n<1$

١) برهن E(1): $U_1<1$

$\frac{3}{4}<1$ صحيحة.

٢) نفرض E(n) صحيحة: $U_n<1$

٣) برهن E(n+1) اي لنبرهن ان $U_{n+1}<1$

الاثبات: من اجل التصور نعطي تابع

$$f(x)=\frac{nx}{n+1}+\frac{1}{n+1}$$

f مستمر على $[1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{n}{n+1}>0$$

f متزايد تماما

من الفرض: $U_n<1$

نصور: $f(U_n)<f(1)$

$$U_{n+1}<\frac{1}{2}<1$$

$$U_{n+1}<1$$

صحيحة، من ١ و ٢ و ٣ العلاقة صحيحة

٣) الاطراد:

$$U_{n+1}-U_n = \frac{nU_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{U_n}{1}$$

$$= \frac{nU_n+1-nU_n-U_n}{n+1}$$

$$= \frac{1-U_n}{n+1}$$

لدينا $U_n<1$

$0<1-U_n$

بسط موجب والمقام موجب

$U_{n+1}-U_n>0$

والمتتالية U_n متزايدة تماماً

ملاحظة: المتتالية المعطاة تدريجية لطلوب اطراد المتتالية U_n، عادة "نلجأ إلى" الإثبات بالتدريج حتى نلجأ إلى مثل الطريقة السابقة نستعمل الفرض عندما يجب معلوم لدينا المتتالية محدودة من الأعلى أو الأدنى أو محدودة كي نستفيد من ذلك لدراسة الإشارة.

تمرين 6) لتكن f تابع معرف على R^* وفق

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$$

والمتتالية $U_{n+1}=\frac{U_n}{2}+\frac{2}{U_n}$ ، $U_0=4$

① ادرس تغيرات f على $]0,+\infty[$

② اثبت أن $2\le U_{n+1}\le U_n$

③ اثبت أن U_n متقاربة واحسب نهايتها

الحل: f مستمر على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0$

$x=2 \rightarrow f(2)=2$

$x=-2$ مرفوض

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$E(n):\ 2\le U_{n+1}\le U_n$

① نبرهن $E(0)$

$U_0=4$

$U_1=\frac{U_0}{2}+\frac{2}{U_0}=\frac{5}{2}$

$E(0):\ 2\le U_1\le U_0$

$2\le\frac{5}{2}\le 4$ صحيحة

② نفرض $E(n)$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$ أي لنبرهن أن

$2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$

من الفرض:

$2\le U_{n+1}\le U_n$

نصور

$f(2)\le f(U_{n+1})\le f(U_n)$

$2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$

والعلاقة صحيحة

من ① و② و③ العلاقة صحيحة

٣) بما أن المتتالية محدودة من الأدنى حيث $U_n\geq 2$. لندرس اطرادها:

لدينا: $2\le U_{n+1}\le U_n$

$2\le U_{n+1}-U_n\le 0$

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n\le 0$

والمتتالية متناقصة

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة، ولتكن نهايتها حل المعادلة

$f(x)=x$

f حيث:

$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x \Rightarrow$ نضرب بـ x، $x\neq 0$

$\frac{x^2}{2}+2=x^2 \Rightarrow x^2=4$

مسألة : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

وفق $U_0=2$ وعند كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1}=\frac{U_n^2+2}{2U_n}$$

1] احسب U_1 و U_2

2] لتكن f تابع معرف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$$

a) اثبت ان المستقيم $\Delta : y=\frac{1}{2}x$ مقارب لـ C ثم ادرس وضع C بالنسبة لـ Δ

b) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

c) ارسم مقاربات C_f ثم ارسم C_f

3] اثبت بالتدريج $\sqrt{2}\leq U_{n+1}\leq U_n$

4] استنتج ان المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل : 1]

$n=0 \to U_1=\frac{U_0^2+2}{2U_0}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$n=1 \to U_2=\frac{U_1^2+2}{2U_1}=\frac{17}{12}$

2] a :

$f(x)-y_\Delta=\frac{x^2+2}{2x}-\frac{1}{2}x=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

الوضع النسبي :

$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x}>0$

في المجال $]0,+\infty[$ وفيه C يقع فوق Δ

b] تغيرات : f مستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=\frac{2x(2x)-2(x^2+2)}{(2x)^2}=\frac{2x^2-4}{4x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2-4=0 \Rightarrow x^2=2$

$x=\sqrt{2} \to f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

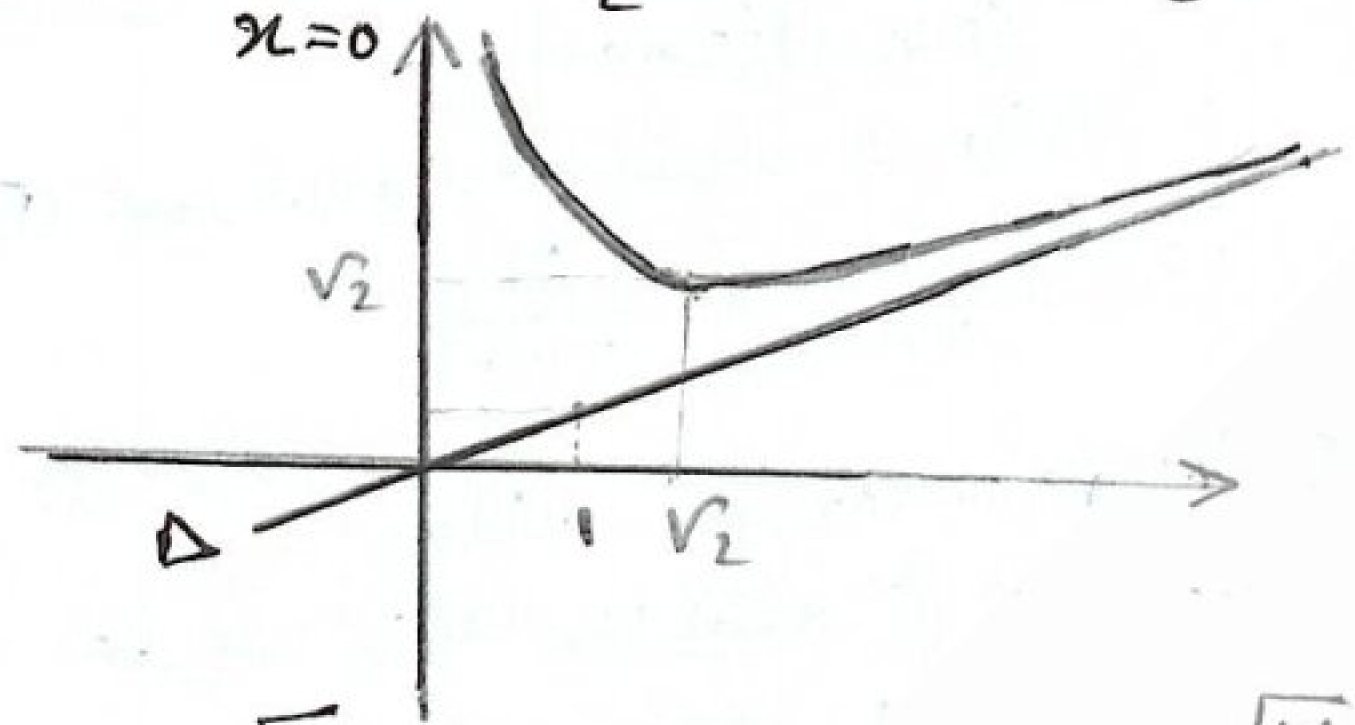
x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(33)

c) $x=0$

x	0	1
y	0	$\frac{1}{2}$

$\Delta : y=\frac{1}{2}x$



3] $E(n) : \sqrt{2}\leq U_{n+1}\leq U_n$

1) نبرهن $E(0)$

$\sqrt{2}\leq U_1\leq U_0$

$\sqrt{2}\leq\frac{3}{2}\leq 2$ صحيحة.

2) نفرض $E(n)$ صحيحة

3) نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$\sqrt{2}\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}$

البرهان : من الفرض

$\sqrt{2}\leq U_{n+1}\leq U_n$

بما ان $U_{n+1}=f(U_n)$ و f متزايدة تماماً نضع

$f(\sqrt{2})\leq f(U_{n+1})\leq f(U_n)$

$\sqrt{2}\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}$

والعلاقة صحيحة

من 1) و 2) و 3) العلاقة صحيحة

4] $\sqrt{2}\leq U_{n+1}\leq U_n$

$U_{n+1}-U_n\leq 0$ المتتالية متناقصة

$U_n\geq\sqrt{2}$ المتتالية محدودة من الادنى

بما ان المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة

نهايتها هو حل المعادلة $f(x)=x$ ، f مستمرة

$\frac{x^2+2}{2x}=x \Rightarrow x^2=2$

$x=\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

تمرين لتكن $U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

① عين عددين حقيقيين a, b بحيث

$$U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

② نفرض $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل:
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

توحيد المقامات ثم نحذفها:

$$1 = a(2n+1) + b(2n-1)$$
$$1 = 2na + a + 2nb - b$$
$$0n+1 = n(2a+2b) + a - b$$

بالمطابقة

$2a+2b=0 \Rightarrow a+b=0$ ①

$a-b=1$ ②

بالجمع: $b=-\frac{1}{2}$ ، $a=\frac{1}{2}$

$$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$
$$U_0 = \frac{\frac{1}{2}}{-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{1}$$
$$U_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-\frac{1}{2}}{3}$$
$$U_2 = \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{-\frac{1}{2}}{5}$$
$$\vdots$$
$$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

تمرين لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

$$U_0 = 6$$
$$U_{n+1} = \sqrt{4+3U_n}$$

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-\frac{4}{3},+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$

والمستقيم $d: y = x$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ارسم C_f وارسم d

③ مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 هندسياً

④ اثبت ان $4 \leq U_{n+1} \leq U_n$

⑤ استنتج ان U_n متقاربة واحسب نهايتها.

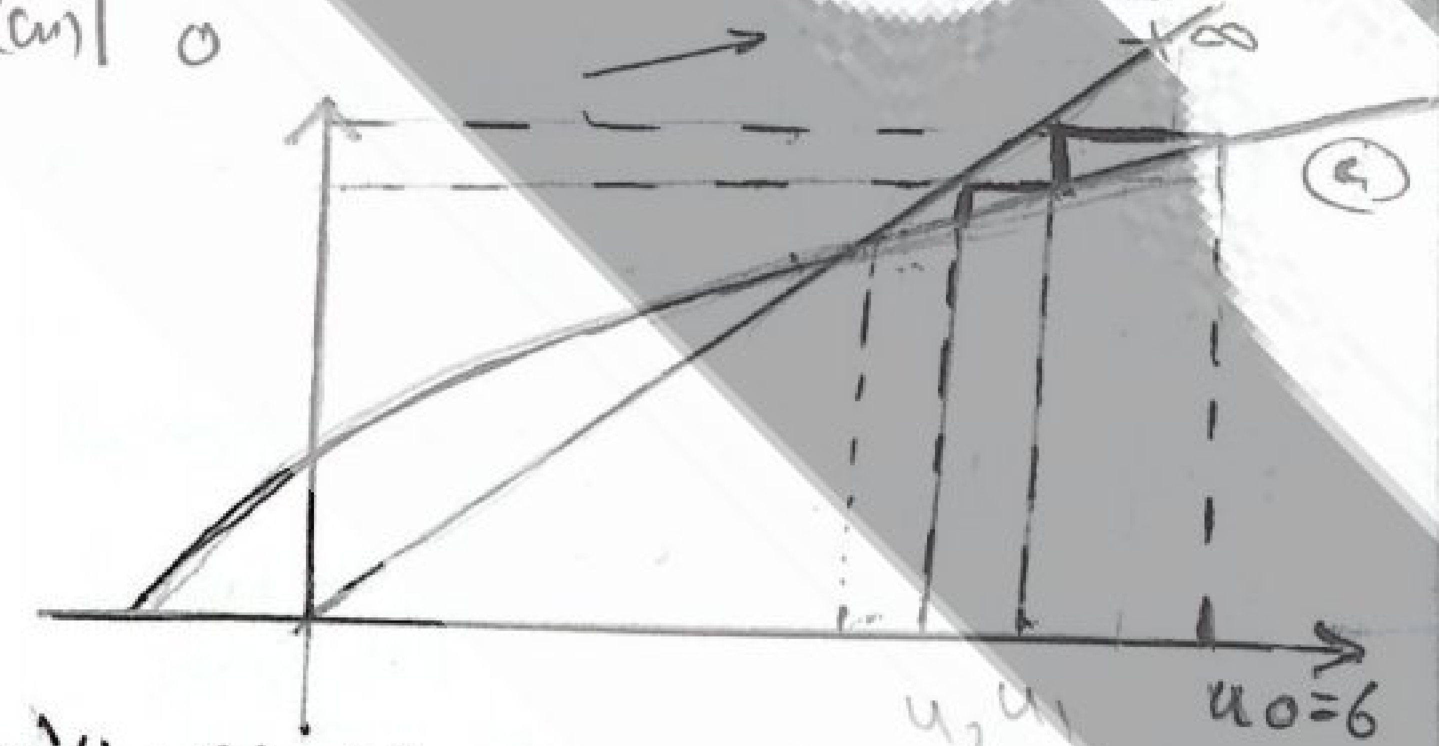
الحل: f مستمر على $[-\frac{4}{3},+\infty[$ واشتقاقي على $]-\frac{4}{3},+\infty[$

$f(-\frac{4}{3}) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} > 0$$

x	$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

②



من u_0 نصعد الى C ثم افقي الى d ثم ننزل عمود الاكس نحصل على u_1 ثم نعيد العملية من u_1

④ $E(n):\ 4 \leq U_{n+1} \leq U_n$

① برهن $E(0):\ 4 \leq U_1 \leq U_0$

$u_0 = 6$

$u_1 = \sqrt{4+18} = \sqrt{22}$

$4 \leq \sqrt{22} \leq 6$ صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة

③ لنبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان $4 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من الفرض: $4 \leq U_{n+1} \leq U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$ والتابع f متزايد

$$f(4) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$$
$$4 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

③ التقارب:

$$4 \le U_{n+1} \le U_n$$

$U_{n+1} - U_n \le 0$ المتتالية متناقصة

$U_n \ge 4$ المتتالية محدودة من الادنى

بما ان المتتالية محدودة من الادنى ومتناقصة فهي متقاربة ونهايتها هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$\sqrt{4+3x} = x$$

نربع $x \ge 0$ نفرض: β

$$4 + 3x = x^2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

$x = 4$, $x = -1$ مرفوض

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$$ هو نقطة تقاطع $y = x$ مع C

تمرين: جد نهاية كل من المتتاليتين:

① $U_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n^2 + 1}$

② $U_n = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} - \cdots - \dfrac{1}{2^n}$

الحل ①

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

$$2n - 1 \le 2n + (-1)^n \le 2n + 1$$

$$\frac{2n-1}{n^2+1} \le \frac{2n + (-1)^n}{n^2+1} \le \frac{2n+1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} = 0$$

حسب الاحاطة

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n^2+1} = 0$$

②
$$U_n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

مجموع حدود متتالية هندسية

$$U_n = 1 - a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$U_n = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$ لان $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية $-1 < q < 1$

تمرين (فكرة التعميم للمتتالية)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ معرفة وفق

$$u_0 = 2 ,\ U_{n+1} = 2U_n - 3$$

① احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ثم خمن عبارة U_n بدلالة n

② عبر عن U_n بدلالة n (نفس السؤال) او جد U_n بدلالة n

اثبات بالتدريج

الحل: فكرة التعميم:

اذا كانت $U_{n+1} = aU_n + b$ فان U_n تكتب بالشكل:

$U_n = \alpha\, a^n + \beta$ ، $a = 2$

لمعرفة α , β نعوض قيم لـ n

① $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2\alpha + \beta \Rightarrow 1 = 2\alpha + \beta$

② $n = 2 \Rightarrow u_2 = \alpha(2)^2 + \beta \Rightarrow -1 = 4\alpha + \beta$

بالحل المشترك نجد $\alpha = -1$ ، $\beta = 3$

نخمن: $U_n = -1(2)^n + 3$

①
$n = 0 \Rightarrow u_1 = 2u_0 - 3 = 1$

$n = 1 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - 3 = -1$

$n = 2 \Rightarrow u_3 = 2u_2 - 3 = -5$

$n = 3 \Rightarrow u_4 = 2u_3 - 3 = -13$

$n = 4 \Rightarrow u_5 = 2u_4 - 3 = -29$

نلاحظ ان $U_n = -1(2)^n + 3$

② لنبرهن بالتدريج ان

$E(n) : U_n = -1(2)^n + 3$

① نبرهن $E(0)$: $u_0 = -1(2)^0 + 3$

$2 = -(2)^0 + 3 = 2$

صحيحة

② نفرض $E(n)$ صحيحة

③ نبرهن $E(n+1)$ اي لنبرهن ان

$$U_{n+1} = -1(2)^{n+1} + 3$$

الاثبات:

$L_1 = U_{n+1} = 2U_n - 3$

$= 2\left[-1(2)^n + 3\right] - 3$

$= -1(2)(2)^n + 6 - 3$

$= -1(2)^{n+1} + 3$. العلاقة صحيحة

تمرين: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

① اثبت بالتراجع ان $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

② استنتج ان العدد 3 راجح على المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$

③ اثبت ان $(U_n)_{n\ge 0}$ متقاربة.

الحل: ①: $E(n):\ \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

① برهن $E(1)$: $\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^0}$

$1 \le 1$ صحيحة.

② نفرض $E(n)$ صحيحة: $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ صحيحة

③ برهن $E(n+1)$ اي لنبرهن

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$$

الاثبات: من الفرض $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{(n+1)\,n!} \le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2}{n+1} \le \frac{1}{2^n}$$

اي $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$

والعلاقة صحيحة

من ① و ② و ③ العلاقة صحيحة ايا كانت $n \ge$

② لدينا: $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

$n=1 \rightarrow \frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^0}$

$n=2 \rightarrow \frac{1}{2!} \le \frac{1}{2}$

$n=3 \rightarrow \frac{1}{3!} \le \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$n \rightarrow \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\le 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\le 1 + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول $= \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ ، $q = \frac{1}{2}$ ، عدد حدود n

$$U_n \le 1 + 1\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$U_n \le 1 + 2\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$U_n \le 3 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$n \rightarrow +\infty$ تسعى

$$U_n \le 3$$

ومنه U_n محدودة من الاعلى و 3 هو راجح على المتتالية $(U_n)_{n\ge 0}$

③ للاثبات انها متقاربة: بما انها محدودة من الاعلى يكفي ان نثبت انها متزايدة.

$$U_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{U_n} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

ومنه U_n متزايدة تماما وهي محدودة من الاعلى فهي متقاربة.

أ. محمد مصطفى

لوغاريتم

$\ln x :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

يكون $\ln x > 0$ ، يكون $\ln x < 0$ ، يكون $\ln x = 0$

عندما $x \in]1,+\infty[$ ، عندما $x \in]0,1[$ ، عندما $x = 1$

مجموعة تعريف

$f(x) = \ln x$ هي $D =]0,+\infty[$

$f(x) = \ln[g(x)]$ هي $g(x) > 0$

مجموعة تعريف لوغاريتم: المقدار الذي داخله أكبر تماماً من الصفر

حل معادلة لوغاريتمية:

$\ln[f(x)] = \ln[g(x)]$

نوجد شرط الحل: تقاطع مجموعتي التعريف (أي مجموعة تعريف التابع)

نحل المعادلة $f(x) = g(x)$ ونأخذ الحلول التي توافق شرط الحل.

حل متراجحة لوغاريتمية

$\ln[f(x)] \le \ln[g(x)]$

* نوجد شرط الحل مجموعة تعريف الأصغر.
* نحل المتراجحة $f(x) \le g(x)$
* نأخذ تقاطع شرط الحل مع حل المتراجحة السابقة

خواص تابع اللوغاريتم:

① $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

② $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

③ $\ln a^m = m \ln a$

مشتق تابع لوغاريتمي:

$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln[g(x)] \to f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

كيف نُثبت أن $f(x) = \ln[g(x)]$ اشتقاقي على I: يجب تحقق شرطين:

① $g(x)$ اشتقاقي على I ② g موجب تماماً على I

نهايات توابع لوغاريتمية

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\mathrm{Log}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ للأساس 10

$\ln(g(x))$ معلومة: كيف تعرف إشارته نقارن $g(x)$ بالواحد.

مثال $\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$

$\frac{x}{x+3} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+3}\right) < 0$

ملاحظة: ممنوع استخدام أي خاصة قبل إيجاد مجموعة التعريف (أوجد مجموعة التعريف ثم استخدم خواص)

تمرين: حل كل من المعادلات:

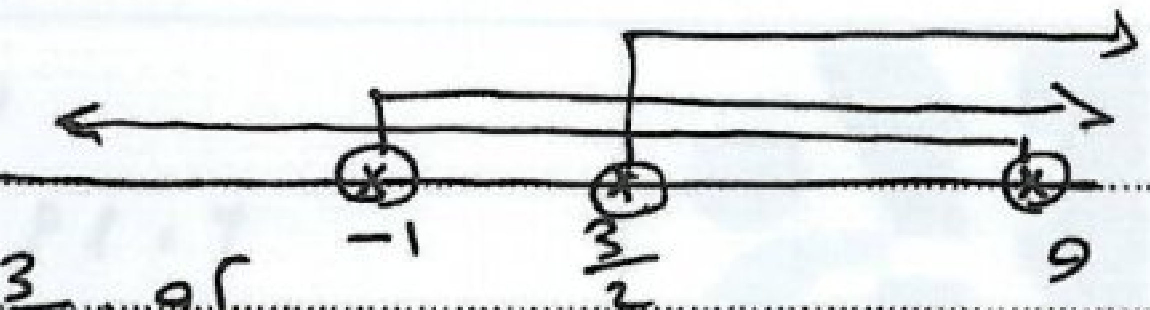
① $\ln(2x-3) + \ln(x+1) = 2\ln(-x+9)$

الحل

$2x - 3 > 0 \to x > \frac{3}{2}$

$x + 1 > 0 \to x > -1$

$-x + 9 > 0 \to x < 9$



$D =]\frac{3}{2}, 9[$

$\ln[(2x-3)(x+1)] = \ln(-x+9)^2$

$(2x-3)(x+1) = (-x+9)^2$

$2x^2+2x-3x-3 = x^2-18x+81$

$x^2+17x-84=0$, $(x+21)(x-4)=0$

إما $x=-21$ مرفوض أو $\boxed{x=4}$ مقبول

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

D_1: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

D_2: $x+4>0$, $D_2 =]-4, +\infty[$

$D =]-4, +\infty[\setminus \{2\}$

$\ln[|x-2|(x+4)] = \ln 8$

$|x-2|(x+4) = 8$

إما $(-x+2)(x+4) = 8$ $\boxed{x<2}$

$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

إما $\boxed{x=0}$ مقبول أو $\boxed{x=-2}$ مقبول

أو $(x-2)(x+4)=8$

$x^2+2x-16=0$ $\boxed{x>2}$

$\Delta = 68$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17}$

$x_1 = -1+\sqrt{17}$ مقبول

$x_2 = -1-\sqrt{17}$ مرفوض

③ $(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

$D =]0, +\infty[$

إما $\ln x = 3$, $x = e^3$ مقبول

أو $\ln x = -1$, $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ مقبول

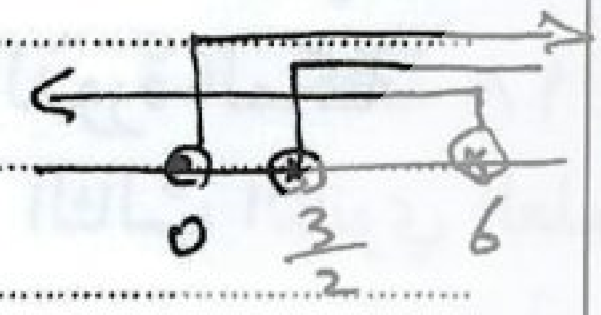
تمرين: حل المعادلة:

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

الحل: $2x-3>0 \to x > \frac{3}{2}$

$6-x>0 \to x<6$

$x>0$, $D =$



$D =]\frac{3}{2}, 6[$

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \ln\sqrt{x}$

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln\frac{6-x}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{2x-3} = \frac{6-x}{\sqrt{x}}$ نربع

$2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x} \to 2x^2-3x = (6-x)^2$

$x^2+9x-36=0$

$(x+12)(x-3)=0$

إما $x=-12$ مرفوض

أو $x=3$ مقبول

تمرين: حل: $\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$

$D =]0, +\infty[$

$(\ln x - 2)(\ln x - 1) = 0$

إما $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$ مقبول

أو $\ln x = 1 \to x = e$ مقبول

تمرين: اثبت انه اذا كانت $x>0$ فإن $\ln x \le x-1$

الحل: ندرس الدالة $f(x) = \ln x - x + 1$ على $]0, +\infty[$

f مشتقة على $]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$, $x=1$, $f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

نستنتج انه اذا كانت $x>0$ فإن $f(x) \le 0$

اي $\ln x - x + 1 \le 0$

$\ln x \le x-1$

تمرين: اثبت انه اذا كانت $x>0$ فإن $\ln x < 2\sqrt{x}$

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

الحل: ندرس اطراد التابع $f(x)=\ln x-2\sqrt{x}$

على المجال $]0,+\infty[$

f مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$, $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=0$

إما $x=0\notin D$ أو $x=1$, $f(1)=-2$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	-2	↘	

نلاحظ من الجدول أنه أياً كانت $x>0$ فإن $f(x)\le -2$, $\ln x-2\sqrt{x}\le -2<0$

أي $\ln x<2\sqrt{x}$

استنتاج النهاية:

$0<\ln x<2\sqrt{x}$

$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(0)=0$

حسب الإحاطة: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ملاحظة: نلجأ إلى دراسة اطراد عند حل معادلة لوغاريتمية أو متراجحة لوغاريتمية عندما يكون مجموع (طرح) تابعين لوغاريتمي وكثير حدود أو كسري

تمرين

1) حل المعادلة:

$$\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$$

الحل: $2x>0$, $x>0$

$3-x>0\to x<3$

$x+1>0\to x>-1$

$D=]0,3[$

$$\ln\sqrt{2x}=\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$\sqrt{2x}=\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$, $\sqrt{2x(x+1)}=3-x$

نربع

$2x(x+1)=(3-x)^2$

$\to x^2+8x-9=0$

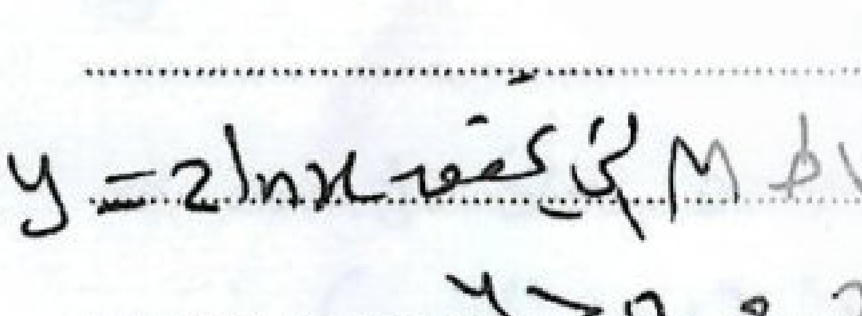
$(x+9)(x-1)=0$

$x=-9$ مرفوض , $x=1$ مقبول

2) ارسم في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط $\ln x=\ln(y+1)$

$y=x-1 \leftarrow x=y+1$ نرسم المستقيم

x	0	1
y	-1	0



نأخذ جزء من المستقيم الذي يحقق:

$x>0$ ، $y+1>0$ مجموعة التعريف

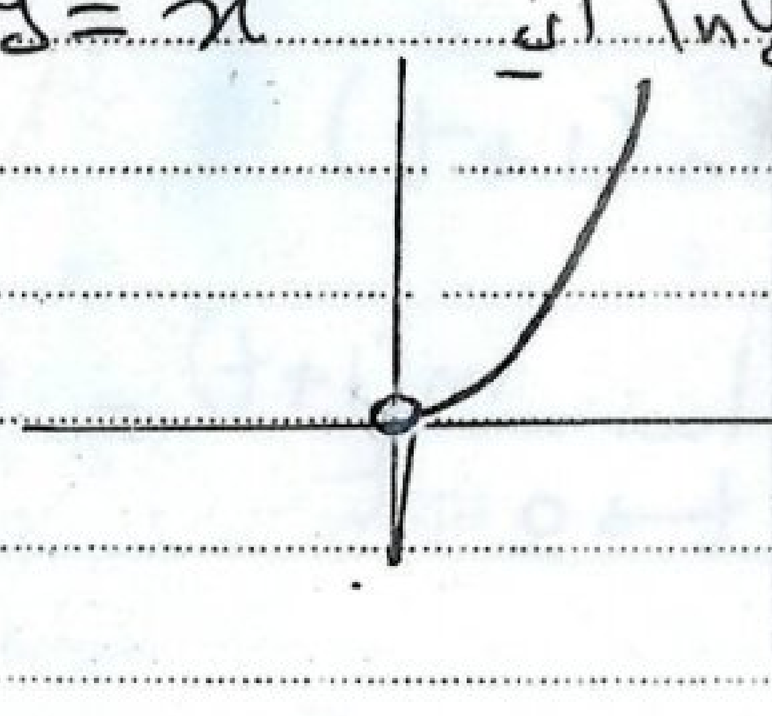
$y>-1$

3) ارسم مجموعة النقاط M التي تحقق $\ln y=2\ln x$

الشرط $x>0$ و $y>0$

نرسم $\ln y=\ln x^2$ أي $y=x^2$

مجموعة النقاط M هي جزء من قطع مكافئ



تمرين) جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$(\ln x)(\ln y) = -12$$
$$\ln(x \cdot y) = 1$$

الحل: شرط الحل: $x > 0$, $y > 0$

$$(\ln x)(\ln y) = -12$$
$$\ln x + \ln y = 1$$

بفرض $\ln x = a$, $\ln y = b$

عندئذٍ: $a \cdot b = -12$ (1)

$a + b = 1$ (2)

من (2) $b = 1 - a$ نعوض في (1)

$$a(1-a) = -12 \rightarrow a^2 - a - 12 = 0$$
$$(a-4)(a+3) = 0$$

اما $a = 4 \longrightarrow b = -3$

$\ln x = 4$, $\ln y = -3$

$x = e^4$, $y = e^{-3}$

او $a = -3 \longrightarrow b = 4$

$\ln x = -3$, $\ln y = 4$

$x = e^{-3}$, $y = e^4$

مجموعة الحل: $S = \{(e^{-3}, e^4), (e^4, e^{-3})\}$

تمرين) اوجد نهاية كل مما

(1) $f(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$, $x \rightarrow +\infty$

بفرض $\frac{1}{x+1} = t \rightarrow x + 1 = \frac{1}{t}$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{t}\ln(1+t)$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(2) $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2x+2} - 2}$, $x \rightarrow 1$

$$f(x) = \frac{\ln(2-x)\left[\sqrt{2x+2} + 2\right]}{\left[\sqrt{2x+2} - 2\right]\left[\sqrt{2x+2} + 2\right]}$$
$$f(x) = \frac{\ln(2-x)\left[\sqrt{2x+2} + 2\right]}{2x - 2}$$
$$f(x) = \frac{\ln(2-x)}{(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{2x+2} + 2}{-2}$$
$$f(x) = \frac{\ln(1+1-x)}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{2x+2} + 2}{-2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+1-x)}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + 2}{-2} = -2$

اذاً $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1(-2) = -2$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\ln x}$, $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} - \frac{3}{\ln x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2} - \frac{3}{\ln x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}} - \frac{3}{\ln x}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{t}{\ln t} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0 \ , \ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - 0 = \infty$$

(4) $f(x) = \ln x - \ln(x+3) - \frac{2}{x}$, $x \rightarrow +\infty$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+3}\right) - \frac{2}{x}$$
$$\lim f(x) = \ln(1) - \frac{2}{\infty} = 0 - 0 = 0$$

معهد الخطيب

الدورة المكثفة ٢٠ - ٢٠

الثالث الثانوي العلمي / التحليل/

تمرين: اثبت ان f اشتقاقي على المجال I

① $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})$

$I =]0,+\infty[$

$\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$1+\frac{1}{x}$ اشتقاقي على I وموجب تماماً عليه ⇐ $\ln(1+\frac{1}{x})$ اشتقاقي على I

وبالتالي f اشتقاقي على I لانه مجموع تابعين اشتقاقيين على I هو تابع اشتقاقي على I.

تمرين 1: ليكن f تابع معرف كما يلي:

$f(x) = \frac{x}{x-\ln x}$

تحقق ان f معرف على $]0,+\infty[$

② $g(x) = \begin{cases} 0 & ; x=0 \\ \frac{x}{x-\ln x} & ; x>0 \end{cases}$

① اثبت ان g مستمر عند الصفر ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر

عين ان امكن المماس للخط عند مبدأ الاحداثيات

② ادرس تغيرات g عندما $x>0$

الحل: $\ln x$ معرف على $]0,+\infty[$

لنحل المعادلة $x-\ln x=0$

نعرف تابعاً $h(x) = x-\ln x$

ندرس اطراده على $]0,+\infty[$

$h'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		↘	1	↗	

نلاحظ ان $h(x) \geq 1 > 0$

اي المقام لا ينعدم وبالتالي $D_f =]0,+\infty[$

② استمرار g

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{x}{x-\ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = g(0) = 0$$

وبالتالي g مستمر عند الصفر.

قابلية الاشتقاق

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{x-\ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{x-\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

اذن g اشتقاقي عند الصفر

ميل المماس عند $x=0$ يساوي الصفر

المماس في المبدأ $(0,0)$ هو $y = 0 = 0(x-0)$

$\boxed{y=0}$

② تغيرات g: $g(x) = \frac{x}{x-\ln x}$

g مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x(1-\frac{\ln x}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} = 1$$

$$g(x) = \frac{x}{x-\ln x}$$

$$g'(x) = \frac{x-\ln x-(x-\ln x)'(x)}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{x-\ln x-(1-\frac{1}{x})x}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

$g'(x)=0$, $\ln x=1$, $x=e$, $g(e)=\frac{e}{e-1}$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

تمرين: ليكن f تابع معرف على $]0,+\infty[$ وفق

$f(x)=x-\ln x$

① اوجد $f(1)$, $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ ثم ② استنتج $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-\ln x-1}{x-1}$

الحل

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$, $f(1)=1$

$f'(x)=1-\frac{1}{x}$, $f'(1)=0$

حسب تعريف المشتق:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\ln x-1}{x-1}=0$$

تمرين: $f(x)=\ln\left(\frac{x+3}{\ln x}\right)$ اثبت ان f اشتقاقي على $]1,+\infty[$ ثم اوجد $f'(x)$

الحل

$x+3>0$ في المجال $]1,+\infty[$

$\ln x>0$ في المجال $]1,+\infty[$

وبالتالي $\frac{x+3}{\ln x}>0$ في المجال $]1,+\infty[$

وان $\frac{x+3}{\ln x}$ اشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$

فيكون f اشتقاقي في $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{x+3}{\ln x}\right)'\cdot\left(\frac{\ln x}{x+3}\right)$$

$$=\frac{\ln x-\frac{1}{x}(x+3)}{\dots}\cdot\frac{\ln x}{\dots}$$

٤٤

$$f'(x)=\frac{x\ln x-x-3}{x(x+3)\ln x}$$

تمرين: $f(x)=x+3-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\Delta:\ y=x+2$

اثبت ان Δ مستقيم مقارب للخط البياني.

الحل: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

نفرض $\frac{1}{x}=t$ فيكون $x=\frac{1}{t}$

عندما $x\to+\infty$ فإن $t\to0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{t\to0}\left[1-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]$$

$=1-1=0$

اي Δ مقارب مائل للخط البياني عند $+\infty$

مسألة (1): ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً لها وارسم خطها البياني

① $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$, $D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$

الحل: f مستمر واشتقاقي على كل من $]0,1[$, $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

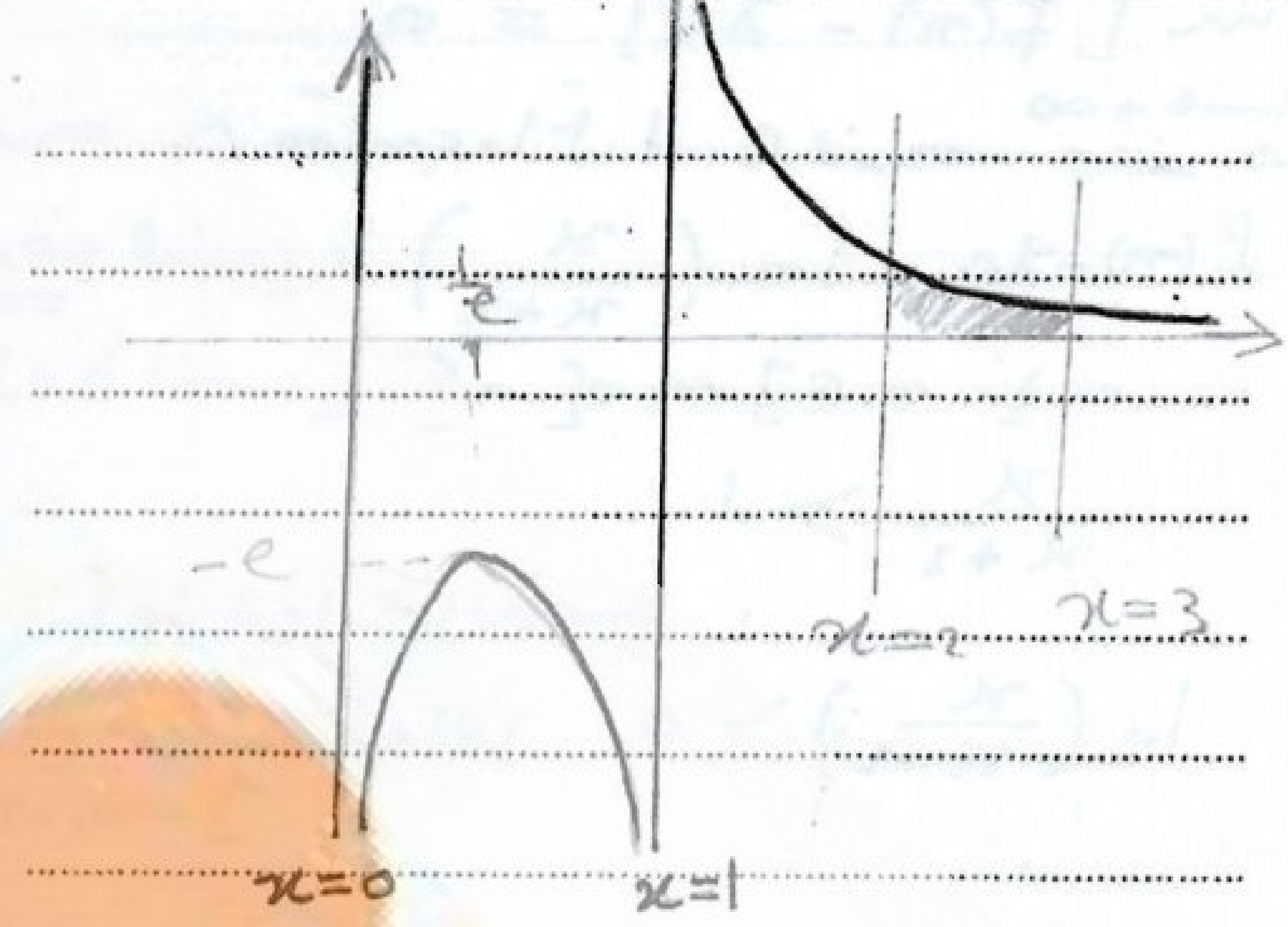
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$$f'(x)=\frac{0-(x\cdot\ln x)'}{(x\cdot\ln x)^2}=\frac{-(\ln x+\frac{1}{x}x)}{(x\cdot\ln x)^2}$$

$f'(x)=\frac{-\ln x-1}{(x\cdot\ln x)^2}$, $f'(x)=0$, $-\ln x-1=0$

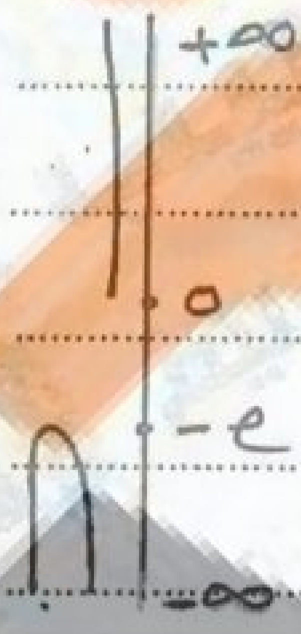
$\ln x=-1$, $x=e^{-1}$, $f(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}(-1)}=-e$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	



طلبات إضافية:

① ناقش بيانياً حسب قيم $\lambda \in \mathbb{R}$ عدد حلول المعادلة $f(x)=\lambda$



$\lambda \in]-\infty,-e[$ فإن المعادلة $f(x)=\lambda$ لها حلان

$\lambda \in]-e,0[$ ليس للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلول

$\lambda \in]0,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=\lambda$ حل وحيد

$\lambda=-e$ للمعادلة حل وحيد

$\lambda=0$ ليس للمعادلة $f(x)=\lambda$ حل

② احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين $x=2$, $x=3$ ومحور $x'x$

$$S=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$$

نقسم البسط والمقام على x

$$=\int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\left[\ln(\ln x)\right]_2^3$$

$$S=\left(\ln(\ln 3)-\ln(\ln 2)\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$$

مسألة 2: ليكن f تابعاً معرفاً على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

① اكتب معادلة كل مقارب أفقي وشاقولي للخط C وادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها

③ اثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α في I ثم اثبت ان $\alpha \in]0,1[$

④ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=e$, $x=1$

الحل: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $I=]0,+\infty[$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{x}=1+0=1$$

$\boxed{y=1}$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x+\ln x}{x}-1=\frac{\ln x}{x}$$

المقام: موجب تماماً

البسط: $\ln x=0$, $x=1$, $f(1)=1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت Δ		C يقع فوق Δ

$(1,1)$ نقطة مشتركة بين C و المقارب

② f مستمر و اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(x+\ln x)'\cdot x-1(x+\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$, $1-\ln x=0$, $\ln x=1$

$x=e$, $f(e)=\frac{e+1}{e}$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{e+1}{e}$	↘ 1

③ في المجال $]0,e[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

عليه $0 \in f(]0,e[) =]-\infty, \frac{e+1}{e}[$

اذن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في $]0,e[$

في المجال $]e,+\infty[$ لا يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حلول لأن $0 \notin f(]e,+\infty[)$

وبالتالي $f(x)=0$ لها حل وحيد في $]0,+\infty[$ ولنعين

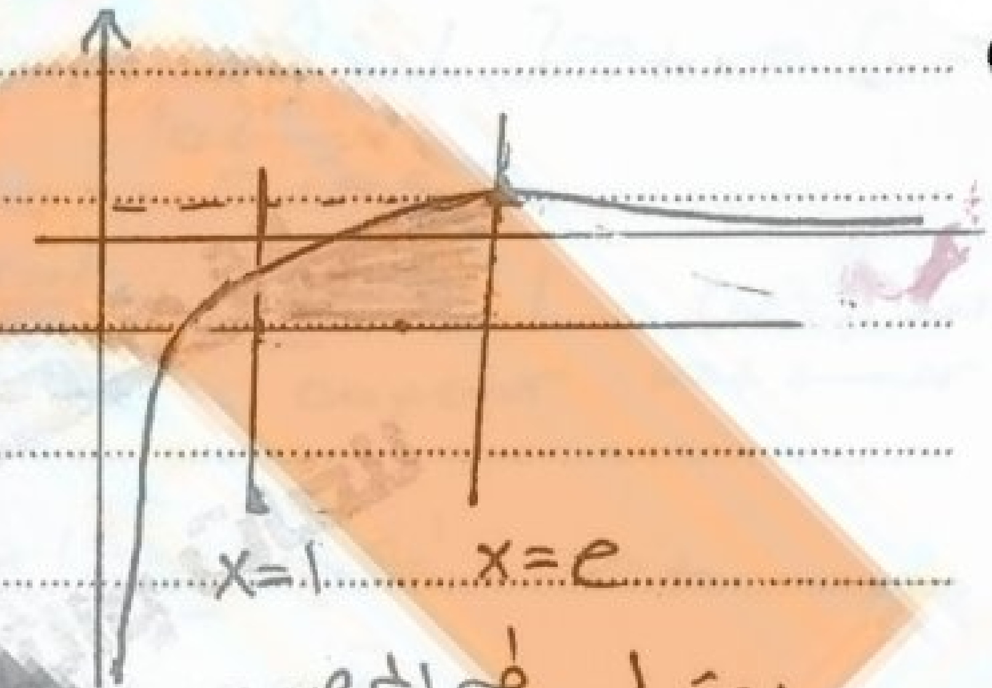
$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty < 0$

$f(1) = \frac{e+1}{e} > 0$

$f(1)\times\lim_{x\to 0} f(x) < 0$

وبالتالي الحل الوحيد هو: $\alpha \in]0,1[$

④



⑤ مساحة الحيز المحصور

$S=\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{x+\ln x}{x}\,dx$

$=\int_1^e \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_1^e \left[1+\frac{1}{x}\ln x\right]dx$

$=\left[x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$

$=\left[e+\frac{(\ln e)^2}{2}\right]-\left(1+\frac{\ln^2(1)}{2}\right)$

$= e+\frac{1}{2}-1 = e-\frac{1}{2}$

مسألة 3

$f(x)=x-2+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

① اثبت ان $\Delta: y=x-2$ مقارب لـ C

ثم ادرس وضع C بالنسبة للمقارب Δ.

② احسب نهاية f عند كل طرف من اطراف D_f

③ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

⑤ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

⑥ استنتج رسم C_1 للتابع $f_1(x)=2-x+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

الحل: ①

$f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta] = \ln(1)=0$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta] = 0$

ومنه Δ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$ وعند $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

نلاحظ انه اياً يكن $x\in]-\infty,-2[$ فإن $\frac{x}{x+2}>1$

نأخذ لوغاريتم الطرفين: $\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)>0$

C يقع فوق Δ في المجال $]-\infty,-2[$

وكذلك اياً يكن $x\in]0,+\infty[$ فإن $\frac{x}{x+2}<1$

$\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)<0$

وبالتالي C يقع تحت Δ في المجال $]0,+\infty[$

② $D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty-2+\ln(1)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

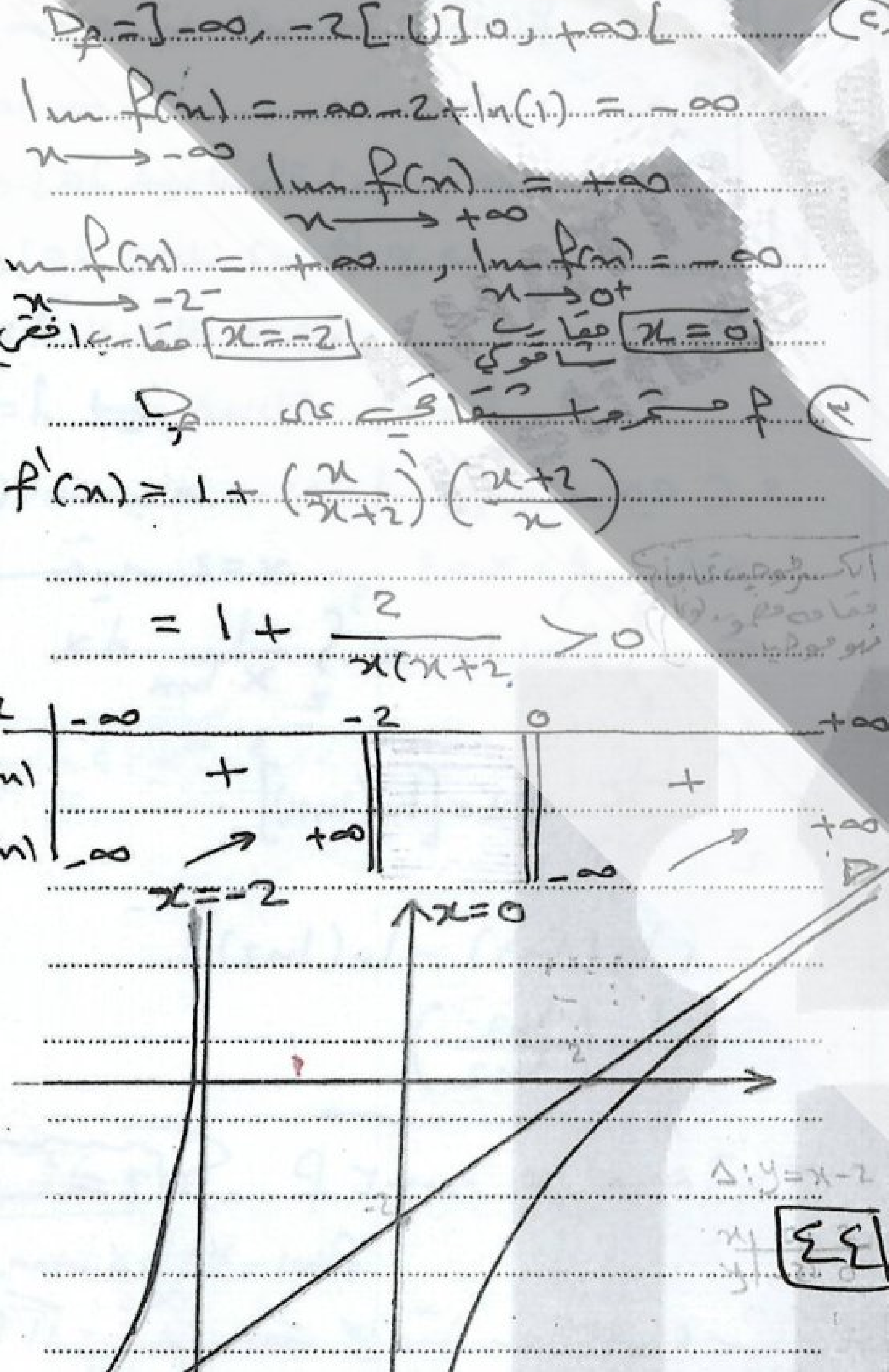
$\boxed{x=-2}$ مقارب شاقولي . $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

③ f مستمر واشتقاقي على D_f

$f'(x)=1+\left(\frac{x}{x+2}\right)'\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$=1+\frac{2}{x(x+2)}>0$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



تكملة المسألة

③ استنتاج الرسم لـ C_1

$f_1(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$= -\left[x-2-\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right]$

$f_1(x) = -f(x)$

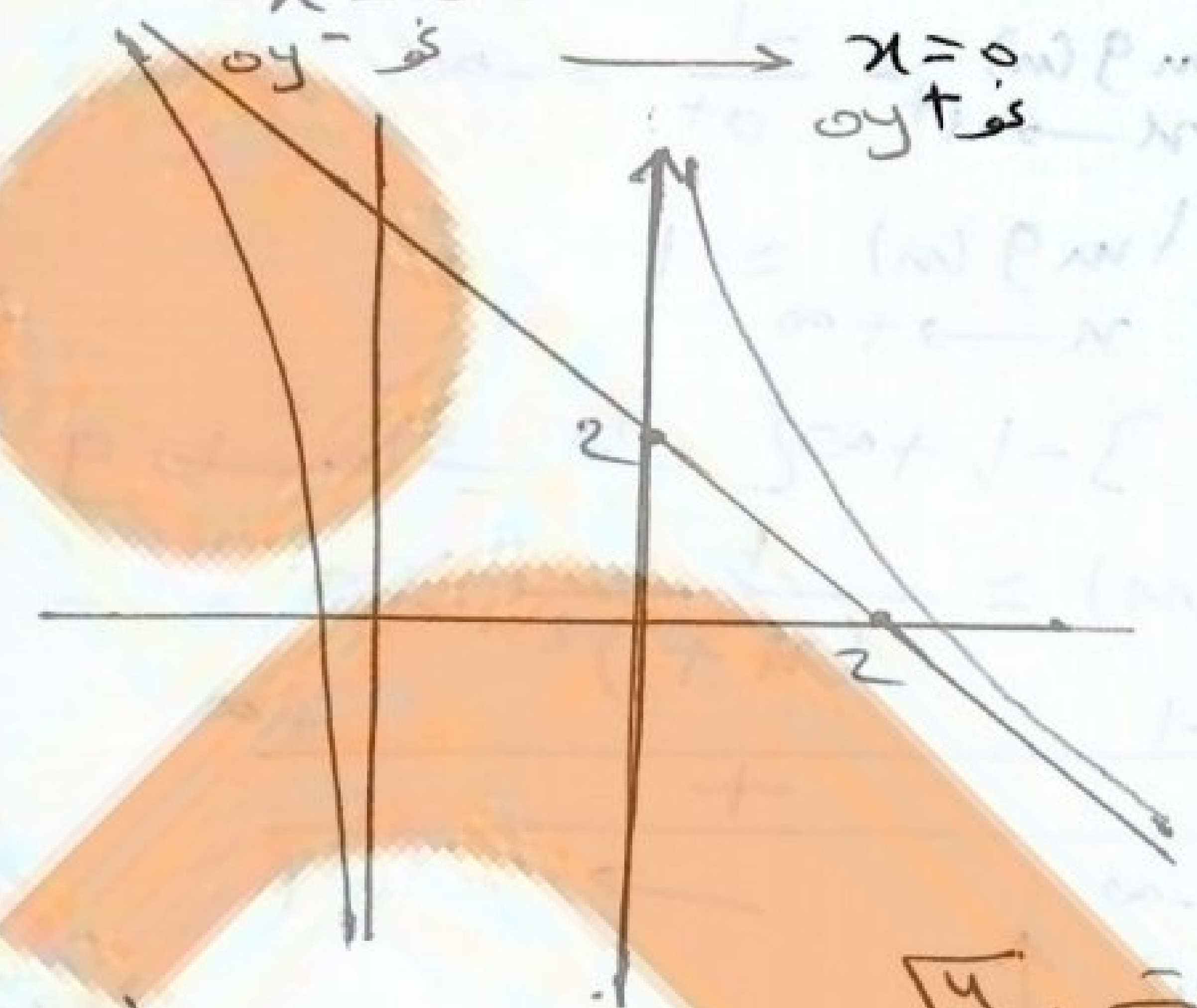
C_1 هو نظير C بالنسبة للمحور xx'

$(x,y) \xrightarrow{\text{التحويل}} (x,-y)$

$\Delta: \begin{cases} (0,-2) \to (0,2) \\ (2,0) \to (2,0) \end{cases}$

$x=-2$ نحو oy^+ $\longrightarrow$ $x=-2$ نحو oy^-

$x=0$ نحو oy^- $\longrightarrow$ $x=0$ نحو oy^+



مسألة ٤

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً واستنتج ما للخط C من مقاربات افقية

② ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

③ بفرض M_1, M_2, M_3, M_4 نقاط معرفة:

M_1 : نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

M_2 : نقطة من C مماسه يمر من المبدأ

M_3 : نقطة من C مماسه يوازي محور الفواصل

M_4 : ينعدم فيها المشتق الثاني

ⓐ احسب فواصل هذه النقاط

ⓑ اثبت ان تلك الفواصل هي حدود متتالية هندسية

الحل: f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]=0$

$\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$y=0$ مقارب افقي عند $+\infty$

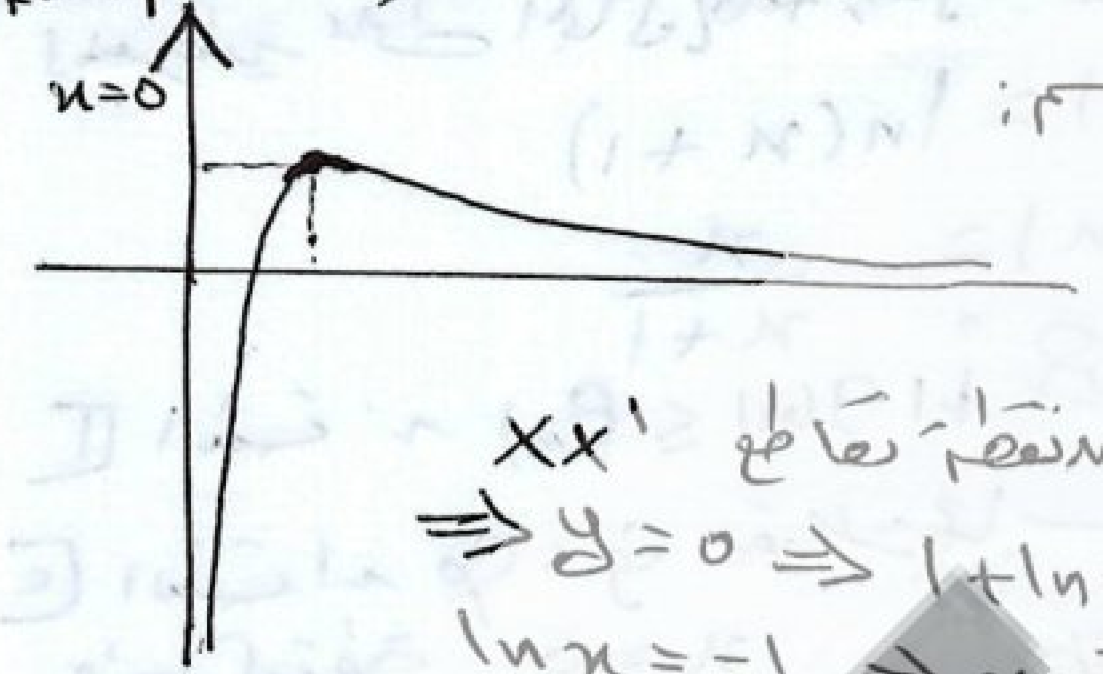
$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - 1(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$

$\Rightarrow x=1$, $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

② الرسم:



③ M_1 نقطة تقاطع xx'

$\Rightarrow y=0 \Rightarrow 1+\ln x = 0$

$\ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\boxed{x_{M_1}=\frac{1}{e}}$

M_2 : المماس عندها يمر من المبدأ ، معادلة المماس من المبدأ: $y=mx$ حيث $m=f'(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}$

نقطة التماس $\left(x_2, \frac{1+\ln x_2}{x_2}\right)$

$\frac{1+\ln x_2}{x_2} = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}\cdot x_2$

$\Rightarrow \frac{1+\ln x_2}{x_2}=\frac{-\ln x_2}{x_2}$

$1+\ln x_2 = -\ln x_2 \Rightarrow \ln x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$, $\boxed{x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}}$

M_3 : المماس في M_3 يوازي xx' اي

$m=f'(x_3)=0$

$\Rightarrow \frac{-\ln x_3}{x_3^2}=0 \Rightarrow \ln x_3=0$

$\boxed{x_3=1}$

M_4 : ينعدم عندها المشتق الثاني:

$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

$f''(x) = \frac{(-\ln x)'\cdot x^2 - 2x(-\ln x)}{x^4}$

$= \frac{-x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-1+2\ln x}{x^3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{x_4=\sqrt{e}}$

فواصل النقاط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 على الترتيب

$\sqrt{e}$ ، 1 ، $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ، $\frac{1}{e}$

x_4 ، x_3 ، x_2 ، x_1

$\frac{x_2}{x_1}=\sqrt{e}$, $\frac{x_3}{x_2}=\sqrt{e}$, $\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$

ومنه x_1, x_2, x_3, x_4 اربعة حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{e}$

تمرين: C_f و C_g الخطان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق

$f(x)=\ln(x+1)$

$g(x)=\frac{x}{x+1}$

1 اثبت ان $g(x)\le f(x)$ أياً كان x من I

2 اثبت ان C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $x=0$

3 ادرس تغيرات f و g وارسم الخطين البيانيين في مستوٍ واحد مع رسم المماس المشترك.

الحل: 1 اثبت: $\frac{x}{x+1}\le\ln(x+1)$

نفرض $h(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

وندرس اطرادها على $]-1,+\infty[$

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$

$h'(x)=0\Rightarrow x=0$, $h(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ ان أياً كانت $x\in]-1,+\infty[$ فإن $h(x)\ge 0$

أي $\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\ge 0$

$\ln(x+1)\ge\frac{x}{x+1}$

2 نقطة التماس المشتركة $x=0$

(الشرط 1) $\Rightarrow f(0)=\ln(1)=0$

$g(0)=\frac{0}{0+1}=0$ $\Big\}$ $f(0)=g(0)=0$

(الشرط 2) $f'(0)=\frac{1}{0+1}=1$, $f'(x)=\frac{1}{x+1}$

$g'(0)=1$, $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(0)=g'(0)=1$

الشرط 2 محقق

ومنه C_f و C_g لهما مماس مشترك عند النقطة $(0,0)$ و $m=1$ معادلته

$y-0=1(x-0)\Rightarrow\boxed{y=x}$

3 تغيرات f : $f(x)=\ln(x+1)$

$]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

f اشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تغيرات g : $g(x)=\frac{x}{x+1}$

$]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to-1^+}g(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

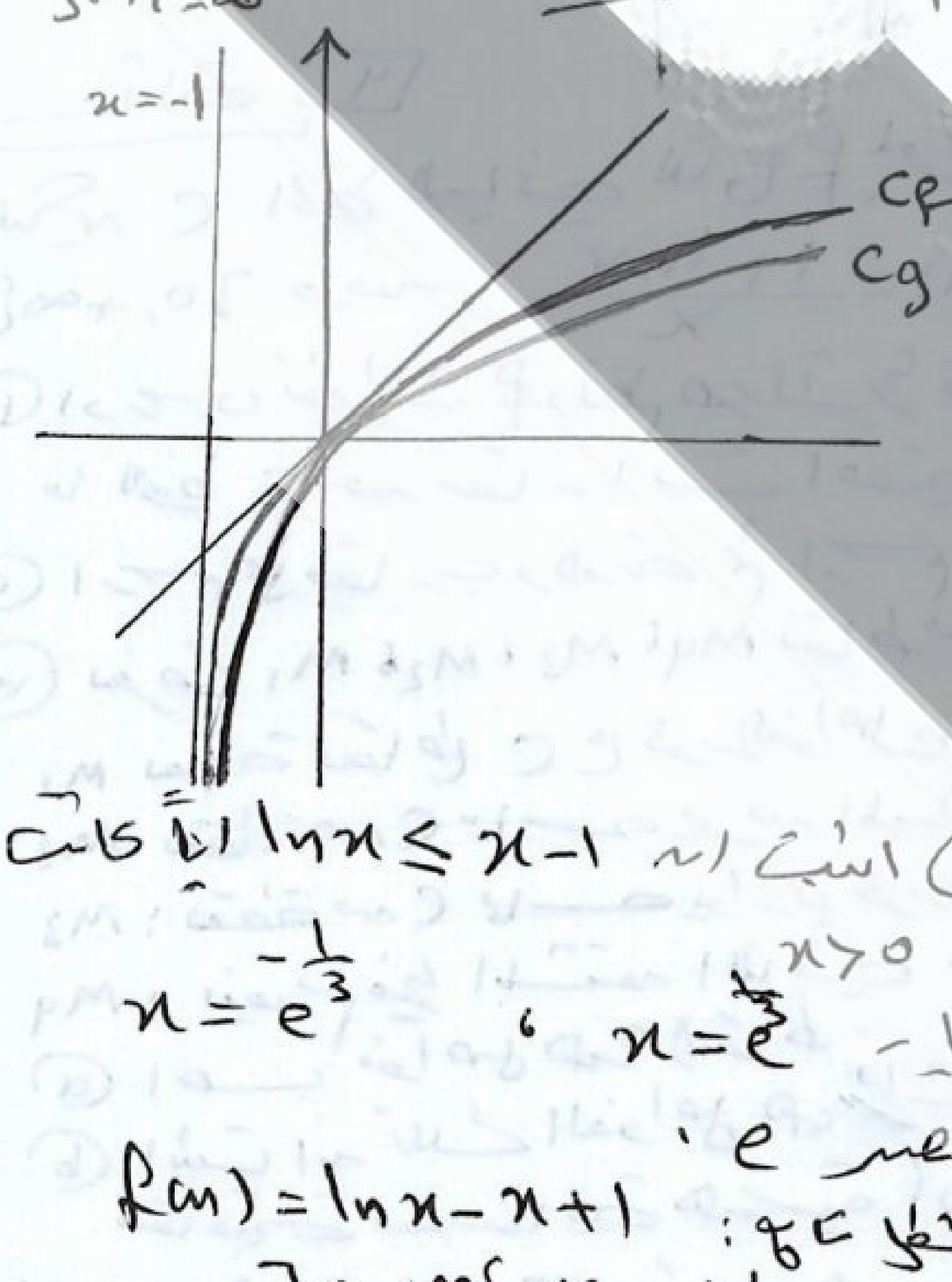
$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$

g اشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

الرسم



تمرين: اثبت ان $\ln x\le x-1$ أياً كانت $x>0$

باختيار $x=e^{-\frac{1}{3}}$ ، $x=e^{\frac{1}{3}}$

احصر e

الحل: نشكل تابع: $f(x)=\ln x-x+1$

وندرس اطرادها على $]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$, $f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

نلاحظ انه اذا كانت $x\in]0,+\infty[$ فا
$\ln x - x+1\le 0 \Leftarrow f(x)\le 0$
ومنه $\ln x\le x-1$ المطلوب

$x=e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln e^{\frac{1}{3}}\le e^{\frac{1}{3}}-1$

$\frac{1}{3}\le\sqrt[3]{e}-1$

$\frac{4}{3}\le\sqrt[3]{e}$ نكعب $\Rightarrow \boxed{\frac{64}{27}\le e}$ ①

$x=e^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln e^{-\frac{1}{3}}\le e^{-\frac{1}{3}}-1$

$-\frac{1}{3}\le\frac{1}{\sqrt[3]{e}}-1 \Rightarrow \frac{2}{3}\le\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

$\frac{3}{2}\ge\sqrt[3]{e} \Rightarrow \boxed{\frac{27}{8}\ge e}$ ②

$\frac{64}{27}\le e\le\frac{27}{8}$ من ① و ② نجد

تمرين: لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-1,1[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
اكتب معادلة المماس T في $x=0$
ادرس الوضع النسبي لـ C مع المماس T.

الحل: $x=0\Rightarrow f(0)=\ln(1)=0$
f اشتقاقي على I
$f'(x)=\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'\cdot\frac{1-x}{x+1}=\frac{1-x+1(x+1)}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{x+1}$

$f'(x)=\frac{2}{(1-x)(x+1)}$

$m=f'(0)=\frac{2}{1}=2$

نقطة التماس $(0,0)$

$y-0=2(x-0)\Rightarrow T:\ y=2x$

الوضع النسبي: $f(x)-y_T=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-2x$
نشكل تابع وندرس اطراده

$g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-2x$

$g'(x)=\frac{2}{(1-x)(1+x)}-2=\frac{2x^2}{(1-x)(1+x)}\ge 0$

$g'(x)=0\Rightarrow x=0,\ g(0)=0$

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	
إشارة g		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تقع تحت المماس		C فوق المماس	

و $(0,0)$ نقطة مشتركة.

ملاحظة: عند دراسة الوضع النسبي: نشكل تابع وندرس اطراده
عندما يكون مجموع تابعين غير متجانسين
مثال: لوغاريتمي ± صحيح او كسري او جذري
أسي ± صحيح او كسري او جذري

مسألة: لتكن C الخط البياني لـ f المعرف على D وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$
① تحقق ان مجموعة التعريف هي $]1,3[$
② اثبت ان $4-x\in D$ اذا كان $x\in D$
③ ⓐ احسب $f(4-x)+f(x)$
ⓑ استنتج ان $A(2,0)$ مركز تناظر لـ C
④ ادرس تغيرات f ونظم جدول بها.
⑤ ارسم C في معلم متجانس.

الحل: ① $\frac{x-1}{3-x}>0$ ، $x=1$ ، $x=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$(x-1)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نلاحظ ان $\frac{x-1}{3-x}>0$ عندما $x\in]1,3[$
$D_f=]1,3[$

② $x\in]1,3[\Rightarrow -x\in]-3,-1[$
$4-x\in]1,3[=D$

③ ⓐ $f(4-x)=\ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)=$
$=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$

$f(4-x)+f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$
$=\ln\left[\frac{3-x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{3-x}\right]=\ln(1)=0$

ⓑ حتى يكون $A(2,0)$ مركز تناظر يجب تحقق شرطين
[1] $x\in D\Rightarrow 2x_0-x=4-x\in D$ وهذا محقق
[2] $f(2x_0-x)=2y_0-f(x)$
$f(4-x)-f(x)=2y_0=0$ وهنا تحقق ايضا ومنه A مركز تناظر

④ تغيرات $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$, $D=]1,3[$

f مستمر في D

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \ln(0) = -\infty$

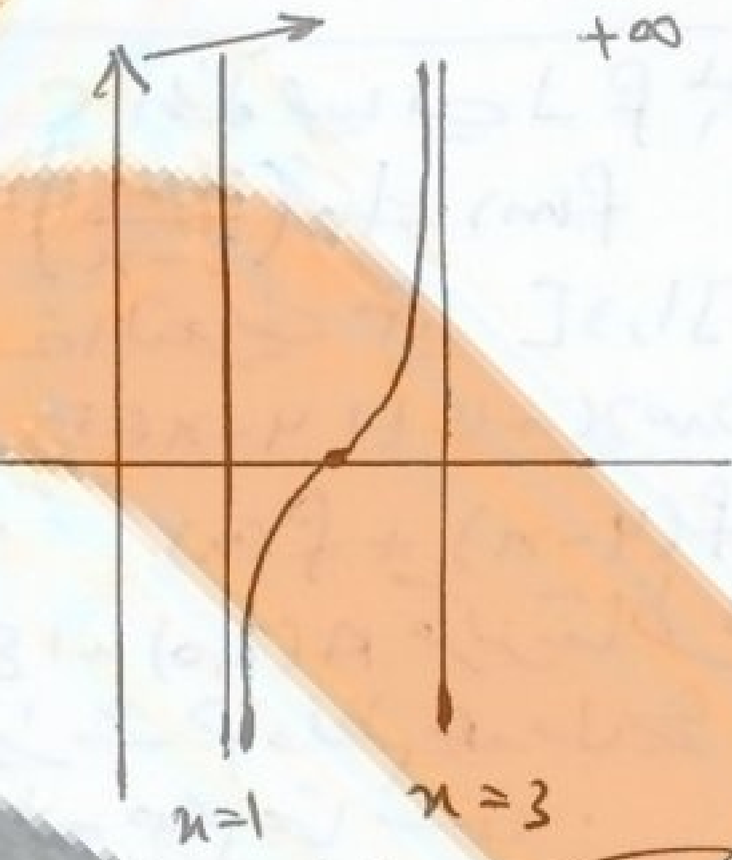
$\lim_{x\to3^-} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$f'(x) = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)' \cdot \frac{3-x}{x-1}$

$= \frac{3-x+x-1}{(3-x)^2}\cdot\frac{3-x}{x-1}$

$f'(x)=\frac{2}{(3-x)(x-1)} > 0$

x	1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



مسألة: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$

أولاً: عين a و b إذا علمت أن المماس لـ C في $A(1,0)$ يوازي المستقيم $y=3x+2$

ثانياً: بفرض $b=-2$, $a=2$

① اثبت أن $d: y=2x-2$ مقارب لـ C

② ادرس تغيرات f ثم ارسم C

③ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=1$, $x=e$

الحل: ① $A(1,0)\in C: \boxed{0=a+b}$ ①

$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$m=3=f'(1)\Rightarrow 3=a+1\Rightarrow \boxed{a=2}$

نعوض في ① نجد $\boxed{b=-2}$

ثانياً: $f(x)=2x-2+\frac{1}{x}\cdot\ln x$

$f(x)-y_d=\frac{1}{x}\cdot\ln x$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ومنه d مقارب مائل لـ C

② تغيراته: f مستمر في $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0-2+\infty(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-2+0=+\infty$

$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{2x^2-\ln x+1}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2-\ln x+1=0$

معادلة فيها تابعين مختلفين نأخذ البسط تابعاً وندرس إشارة $f'(x)$.

$g(x)=2x^2-\ln x+1$ معرف على $]0,+\infty[$

$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$

$4x^2-1=0\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} & \text{مرفوض} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}+\ln2>0$

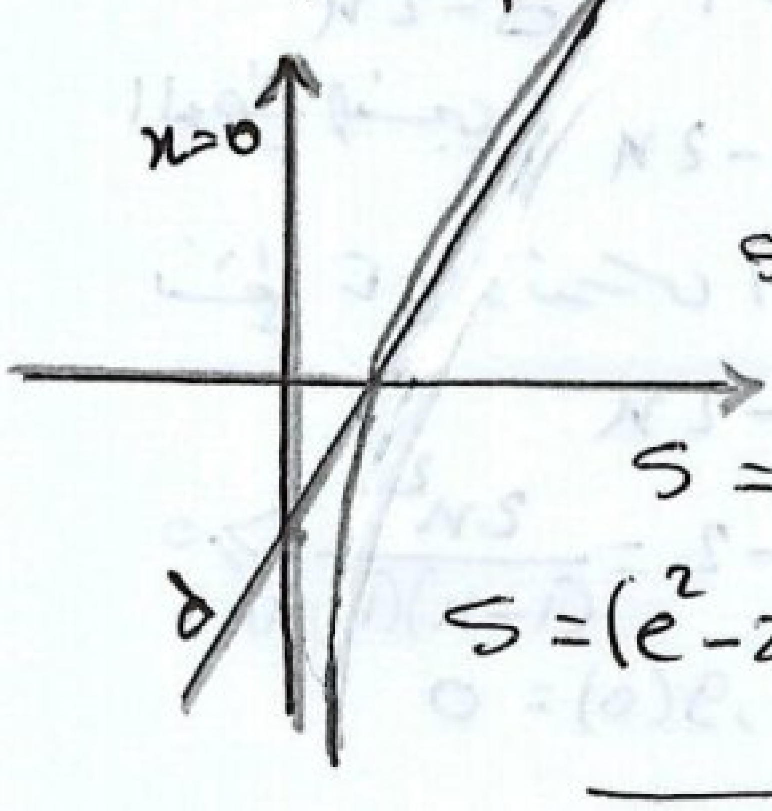
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln2$	$\nearrow$	

نلاحظ أن $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$d: y=2x-2$

x	0	1
y	-2	0



$S=\int_1^e\left[2x-2+\frac{\ln x}{x}\right]dx$

$S=\left[x^2-2x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$

$S=\left(e^2-2e+\frac{1}{2}\right)-(1-2)=e^2-2e+\frac{3}{2}$

تعاريف هامة :

١] التابع الزوجي : له شرطان :

1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$

2) $f(-x) = f(x)$

ويكون الخط البياني متناظر بالنسبة لـ yy'

٢] التابع الفردي : 1) $x \in D \Rightarrow -x \in D$

2) $f(-x) = -f(x)$

الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

٣] التابع الدوري : مثلاً دوره 2π

$f(x+2\pi) = f(x)$

٤] لإثبات أن $A(x_0, y_0)$ مركز تناظر :

1) $x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D$

2) $f(2x_0 - x) = 2y_0 + f(x)$

التابع الأسي

$e^x : R \longrightarrow]0, +\infty[$

فكرة 1) مجموعة تعريف التابع الأسي

$f(x) = e^{g(x)}$

مجموعة التعريف هي مجموعة تعريف $g(x)$

مثال $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$D = [0, +\infty[$

فكرة 2) خواص في التابع الأسي :

① $\ln e^x = x$ ② $e^{\ln x} = x$

③ $e^0 = 1$ ④ $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

⑤ $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

⑥ $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$

فكرة 3) حل معادلة أو متراجحة أسية :

① $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

② $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

تمرين) حل كلاً من المعادلات التالية :

① $e^{x^2} - e^{2x+3} = 0$

الحل $e^{x^2} = e^{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\boxed{x = 3}$, $\boxed{x = -1}$

② $2e^x - 3 = 0$

$e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{3}{2}$

③ $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$(e^{-x})^2 - 7(e^{-x}) + 6 = 0$

معادلة درجة ثانية

Δ أو حل مباشر

$(e^{-x} - 6)(e^{-x} - 1) = 0$

إما $e^{-x} - 6 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 6$

$-x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 6}$

أو $e^{-x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow -x = \ln 1$

$\boxed{x = 0}$

④ $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$

$4(e^x)^2 - (e^x) + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(4)(2) < 0$

المعادلة مستحيلة الحل في R

تمرين) حل المتراجحة :

$e^{x+2} \geq \dfrac{3}{e^x}$

الحل : بما أن $e^x > 0$ نضرب طرفي المتراجحة بـ e^x

$e^x \cdot e^{x+2} \geq 3 \Rightarrow e^{2x+2} \geq 3$

$2x+2 \geq \ln 3 \Rightarrow x \geq \dfrac{-2+\ln 3}{2}$

الحلول $x \in [-\frac{2+\ln 3}{2}, +\infty[$

تمرين) حل المتراجحة : $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

الحل : نضرب طرفي المتراجحة بـ e^x

$e^{3x} - 3e^x - 2 < 0$

$$e^{3x} - 3e^{x} - 2 = 0$$

نفرض $e^{x} = t \Rightarrow t^{3} - 3t - 2 = 0$

بالتجريب نجد ان احد الحلول هو $t = -1$

$$\begin{array}{r|l} t+1 & t^3-3t-2 \\ \hline & t^2-t-2 \\ & -(t^3+t^2) \\ & -t^2-3t-2 \\ & -(-t^2-t) \\ & -2t-2 \\ & -(-2t-2) \\ & 0 \end{array}$$

$$t^{3} - 3t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t^{2}-t-2) = 0$$

$$(t+1)(t-2)(t+1) = 0$$

$$(t-2)(t+1)^{2} = 0$$

$$(e^{x}-2)(e^{x}+1)^{2} = 0$$

موجب دائماً لا يؤثر

$$e^{x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{x} = 2$$

e^{x}	0		2		$+\infty$
الإشارة		$-$	0	$+$	
		تحقق		غير محقق	

$$e^{x} \in]0, 2[\Rightarrow x \in]\ln(0), \ln 2[$$

$$x \in]-\infty, 2[$$

تذكرة — النهايات

① $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ ② $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$ ④ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0$

لاحظ ان e^{x} هي الاقوى والبرهان x^{n} لذلك هي تسيطر ∞ و x^{n} هي لا

⑤ $\lim_{x\to-\infty} x^{n} e^{x} = 0$

هذا الصفر يكون موجب او سالب اذا كانت n فردية

⑥ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$, ⑦ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{x}-1} = 1$

تمرين جد نهاية كل مما يأتي

① $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$, $a = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$: حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right)$$

$$= e^{-x}(2x \cdot e^{x} - e^{x} + 1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + 1) = +\infty$$

② $f(x) = \ln(e^{x} + 2) - x$, $a = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$: حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = \ln\left[e^{x}\left(1 + \frac{2}{e^{x}}\right)\right] - x$$

$$= \ln e^{x} + \ln\left(1 + \frac{2}{e^{x}}\right) - x$$

$$= x + \ln\left(1 + \frac{2}{e^{x}}\right) - x$$

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{e^{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

③ $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(3x+1)}$, $a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$: حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

نقسم البسط والمقام على x

$$f(x) = \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\ln(3x+1)}{x}}$$

$$= 2\,\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{3\ln(3x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\ln(3x+1)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2(1) \cdot \frac{1}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

④ $f(x) = \frac{\sqrt{x^{2}-3} - 1}{\ln(x-1)}$, $a = 2$

$\lim_{x\to 2} f(x)$: حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) - y_\Delta = x \cdot e^{-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y_\Delta] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad f(0) = -2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

والنقطة $(0,-2)$ هي نقطة مشتركة.

② $f(x) = \ln(e^x + 2)$, $D = \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln\left[e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)\right]$$

$$f(x) = \ln e^x + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)$$

$$f(x) = x + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)$$

لنبرهن أن $\Delta : y = x$ مقارب

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \ln(1) = 0$$

إذا Δ هو مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

كان من الممكن أن يعطينا f نفسه ويطلب إثبات أن $\Delta : y = x$ مقارب
نفس الحل

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)$$

نلاحظ أنه أيا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$1 + \frac{2}{e^x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0$$

C تقع بأكملها فوق Δ.

$$f(x) = \frac{[\sqrt{x^2-3} - 1][\sqrt{x^2-3} + 1]}{[\sqrt{x^2-3} + 1]\ln(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{[\sqrt{x^2-3} + 1]\ln(x-1)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{[\sqrt{x^2-3} + 1]\ln(x-1)}$$

$$= \frac{x-2}{\ln(x-1+2-2)} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$$

$$= \frac{x-2}{\ln(1+x-2)} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x-2}{\ln(1+x-2)} = \lim_{t\to0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = 1 \cdot \frac{4}{2} = 2$$

تمرين جد $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+1}$

الحل $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+1}$: حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

نضرب البسط والمقام في $x+2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\cdot\ln(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{\ln(x+2)}{x+2} = 1(0) = 0$$

حيث أن $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

تمرين: جد مقارب مائل لـ C_f ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع هذا المقارب.

① $f(x) = x - 2 + x \cdot e^{-x}$

الحل لنبرهن أنه مقارب. $\Delta : y = x - 2$

فكرة: مشتقة الـ e الأسي:

$$f(x)=e^{x} \Rightarrow f'(x)=e^{x}$$

$$f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=g'(x)\,e^{g(x)}$$

تمرين: جد مشتقة كل من:

① $f(x)=(x+1)e^{x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{x}+e^{x}(x+1)$$
$$=e^{x}(x+2)$$

② $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

③ $f(x)=\ln(e^{x}+1)$

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

④ $f(x)=2x\,e^{x^2}$

$$f'(x)=2\cdot e^{x^2}+2x\,e^{x^2}\cdot 2x$$
$$=e^{x^2}(2+4x^2)$$

فكرة: النهاية الشهيرة: إزالة عدم التعيين 1^{∞}

نعتمد على الخاصية:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{1}=e$$

وتذكر أنه في مثل هذا السؤال:

① ما داخل القوس يجب أن يكون $1+t$ وأن يكون الأس $\frac{1}{t}$

② ننشر $(1+t)^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

③ ثم نستفيد من الملاحظة $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

تمرين: جد: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

الحل:

$$\frac{x+3}{x-1}=\frac{x-1+1+3}{x-1}$$
$$=\frac{x-1}{x-1}+\frac{4}{x-1}=1+\frac{4}{x-1}$$

نفرض $t=\frac{4}{x-1}\Rightarrow \frac{1}{t}=\frac{x-1}{4}$

$$\frac{4}{t}=x-1\Rightarrow x=\frac{4}{t}+1$$

عندما $x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}+\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{2}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\right)^{2}\right]$$
$$=(1+0)^{\frac{1}{2}}\cdot(e^{1})^{2}=e^{2}$$

تمرين: جد: $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$

الحل: $f(x)=(1+1-x)^{\frac{3}{x-1}}$

نفرض $t=1-x\Rightarrow x=1-t$

عندما $x\to 1\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{3}{1-t-1}}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{-3}{t}}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-3}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\right]^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}$$

فكرة: حل معادلة من الشكل a^x

خاصية هامة: $\boxed{f(x)=a^x \Leftrightarrow f(x)=e^{x\ln a}}$

ملاحظات:

① الدالة a^x معرف على R واشتقاقية على R

② $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

③ $f(x)=e^{x\ln a} \Rightarrow f'(x)=\ln a\cdot e^{x\ln a}$

إذا كانت $0<a<1$ سالب $f'(x)<0$ ومنه f متناقص تماما

إذا كانت $a>1$ فإن $f'>0$ (لأنه سالب $\ln a$ موجب تماما) وبالتالي f متزايد تماما

تمرين: حل في R: $3^{x+1}+2\times3^{-x}=7$

ثم استنتج حلول المتراجحة: $3^{x+1}+2\times3^{-x}\geq 7$

الحل:

$3^{x+1}+2\times3^{-x}=7$

نضرب الطرفين بـ 3^x

$3^x\cdot3^{x+1}+2=7\cdot3^{x}$

$3^{2x+1}-7\,3^x+2=0\Rightarrow 3\cdot3^{2x}-7\times3^x+2=0$

$3(3^x)^2-7(3^x)+2=0$ معادلة درجة ثانية

$\Delta=49-4(3)(2)=25$

إما $3^x=\frac{7+5}{6}=2$

$3^x=2\Rightarrow \ln3^x=\ln2\Rightarrow x\ln3=\ln2$

$x=\frac{\ln2}{\ln3}$

أو $3^x=\frac{7-5}{6}\Rightarrow 3^x=\frac13$

$\ln3^x=\ln\frac13\Rightarrow x\ln3=-\ln3$

$\Rightarrow \boxed{x=-1}$

المتراجحة:

x	$-\infty$	-1		$\frac{\ln2}{\ln3}$	$+\infty$
المتراجحة	$+$ محققة		$-$		$+$ محققة

حلول المتراجحة: $x\in]-\infty,-1]\cup[\frac{\ln2}{\ln3},+\infty[$

تمرين: لتكن C الخط البياني لـ f المعرف على R وفق: $f(x)=2^{x^2-2x}$

1 ادرس تغيرات f.

2 اكتب معادلة المماس d للخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$

3 ارسم d ثم ارسم C

الحل: نعيد كتابة f بالشكل الأسي:

$f(x)=e^{(x^2-2x)\ln2}$

f اشتقاقي في R.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=(2x-2)\ln2\, e^{(x^2-2x)\ln2}$

$f'(x)=0\Rightarrow 2x-2=0$

$x=1,\ f(1)=2^{-1}=\frac12$

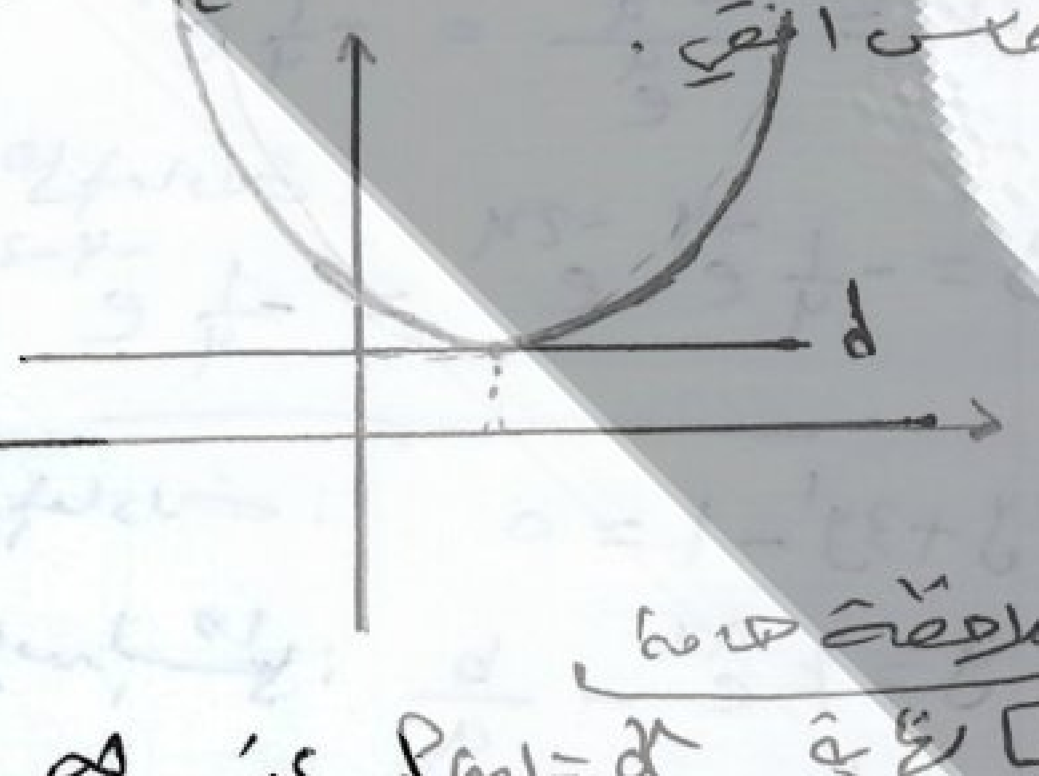
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac12$	$\nearrow$	$+\infty$

2 نوجد نقطة التماس

$f'(x)=0\Rightarrow x=1,\ A(1,\frac12)$

$m=0$

$y-\frac12=0(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\frac12}$ مماس أفقي



ملاحظة هامة

1 نهاية $f(x)=a^x$ عند $-\infty$

$a>1$: $\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=0$

$0<a<1$: $\lim_{x\to-\infty} a^x=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=+\infty$

2 نهاية $f(x)=a^x$ عند $+\infty$

$a>1$: $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=+\infty$

$0<a<1$: $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=0$

0.٣

مثال: جد النهاية عند $\pm\infty$ للدالة: $f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$f(x) = 3\cdot e^{x\ln\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

فكرة: المعادلات التفاضلية.

المعادلة التفاضلية: هي كل معادلة تحوي y ومشتقاتها

نموذج ①: $y' = ay$

حلها بالشكل: $y = k e^{ax}$

حيث k حقيقي

نموذج ②: $y' = ay + b$

حلها بالشكل: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

تمرين: عين حل المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ الذي يحقق شرط ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من منحنى البياني يساوي $\frac{1}{2}$

الحل:

$y' = -2y$

حلها بالشكل: $a=-2$

$$y = k e^{ax} \Rightarrow y = k e^{-2x} \quad ⊛$$

$$m = y' = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{المعادلة التفاضلية}]{\text{نعوض في}} \frac{1}{2} + 2y = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{نعوض في } ⊛} -\frac{1}{4} = k e^{+4}$$

$$k = \frac{-\frac{1}{4}}{e^{4}} = -\frac{1}{4} e^{-4}$$

ومنه حل المعادلة:

$$y = -\frac{1}{4} e^{-4}\cdot e^{-2x} = -\frac{1}{4} e^{-4-2x}$$

تمرين: حل المعادلة: $2y + 3y' - 1 = 0$

الحل: حلها بالشكل: $⊛\ y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

$$3y' = -2y + 1$$

$$y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

شكل المعادلة $y' = ax + b$

$$\Rightarrow a = \frac{-2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

نعوض في الحل ⊛

$$y = k e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}} \Rightarrow y = k e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$$

تمرين: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وعند

$$f(x) = e^x + \ln|x|$$

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وعند: $g(x) = xe^x + 1$

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

② ادرس تغيرات f وارسم منحنى البياني.

الحل: g مستمرة على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x=-1, \quad g(-1) = 1-\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

إشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$1-\frac{1}{e}$	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{g(x)}{x}$		$-$			$\|\|$	$+$	

نلاحظ أن $\frac{g(x)}{x} > 0$ عندما $x>0$

$\frac{g(x)}{x} < 0$ عندما $x<0$

②

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln x & : x>0 \\ e^x + \ln(-x) & : x<0 \end{cases}$$

تغيرات f: مستمرة على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

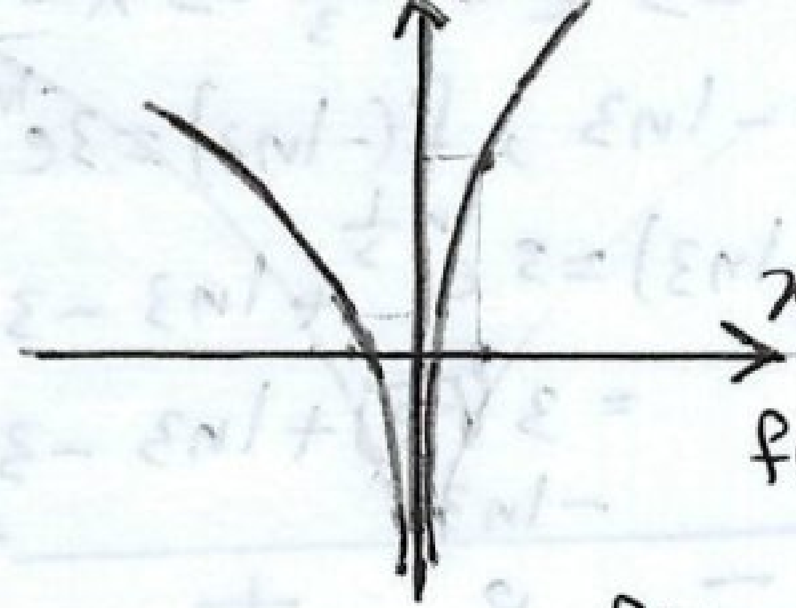
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & x>0 \\ e^x + \frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$

نلاحظ في كل الحالات: $f'(x) = \frac{x\cdot e^x+1}{x} = \frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



$f(x) = e^{x} + \ln|x|$

نقاط مساعدة

$f(1) = e$

$f(-1) = \frac{1}{e}$

مسائل :

مسألة [1] لتكن C الخط البياني لـ f المعرف على R وفق :

$f(x) = (2-x)e^{x}$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

(2) اثبت أن للمعادلة $f(x)=1$ حلين في R

(3) اكتب معادلة المماس d للخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم المشتق الثاني.

(4) ارسم في معلم واحد المماس d والخط C.

الحل : (1) f مستمرة على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [2e^{x} - xe^{x}] = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -e^{x} + e^{x}(2-x) = e^{x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 , f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

(2) في المجال $]-\infty, 1]$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$1 \in f(]-\infty, 1]) =]0, e]$

ومنه للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد في $]-\infty, 1]$

في المجال $]1, +\infty[$ التابع مستمر ومتناقص تماماً وأن

$1 \in f(]1, +\infty[) =]-\infty, e[$

ومنه للمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في $]1, +\infty[$

وبالتالي : $f(x)=1$ لها حلين في R.

(3) $f'(x) = e^{x}(1-x)$

$f''(x) = e^{x}(1-x) + (-1)e^{x}$

$= -x \cdot e^{x}$

$x = 0 , f(0) = 2 \to (0, 2)$

نقطة تماس.

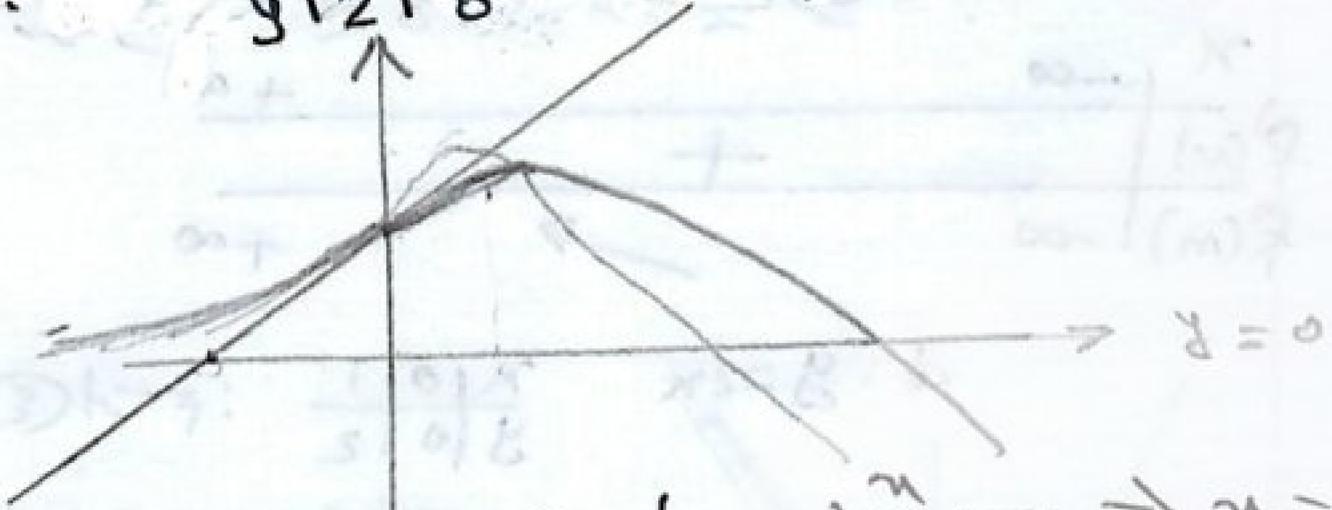
$m = f'(0) = 1$

معادلة المماس : $y - 2 = 1(x-0)$

معادلة المماس $\boxed{y = x+2}$

(4) الرسم : المماس :

x	0	-2
y	2	0



$f(x) = 0 \Rightarrow (2-x)e^{x} = 0 \Rightarrow x = 2$

$S = \int_0^2 (2-x)e^{x}\, dx$

$u = 2-x \longrightarrow u' = -1$

$v' = e^{x} \longrightarrow v = e^{x}$

$S = [(2-x)e^{x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{x}\, dx$

$= [(2-x)e^{x} + e^{x}]_0^2$

$= (0+e^{2}) - (2+1) = e^{2} - 3$

مسألة 2 لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{x})$

(1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف.

(2) اثبت أن المستقيم $d: y - 2x = 0$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع d

(3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

(4) ارسم d و الخط C.

(5) ~~استنتج~~ رسم الخط البياني للتابع $g: x \to \ln(e^{-2x} + e^{-x})$

الحل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty , \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2) $f(x) - y_d = \ln(e^{2x} + e^{x}) - 2x$

$= \ln[e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{x}})] - 2x$

$= \ln e^{2x} + \ln(1 + \frac{1}{e^{x}}) - 2x$

$= 2x + \ln(1 + \frac{1}{e^{x}}) - 2x$

$= \ln(1 + \frac{1}{e^{x}})$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_d] = 0$

الوضع النسبي

$1 + \frac{1}{e^{x}} > 1 \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{e^{x}}) > 0$

C يقع بأكمله فوق d

وعليه $d: y=2x$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

③ تغيرات f : f قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+e^{x})'}{e^{2x}+e^{x}}=\frac{2e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{2x}+e^{x}=0 \Rightarrow e^{x}(2e^{x}+1)>0$$

تذكر أن e^x قيمه لا تساوي سالب

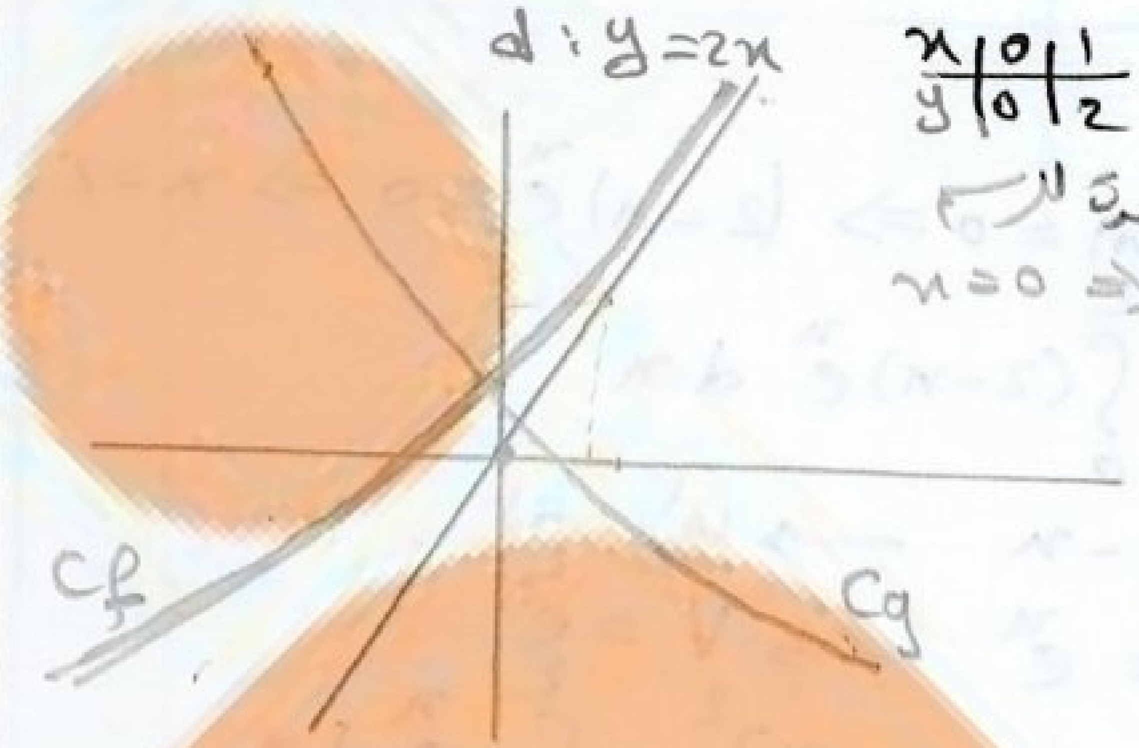
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

④ الرسم: $d: y=2x$

x	0	1
y	0	2

نقطة مساعدة للرسم

$x=0 \Rightarrow f(0)=\ln 2$



⑤ استنتاج رسم g

$g(x)=f(-x)$ تناظر

C_1 هو نظير C بالنسبة لمحور yy'

مسألة 3) ليكن C الخط البياني f المعرفة على R بـ

$$f(x)=3e^{x}-x-3$$

① اثبت أن المستقيم: $y+x+3=0$ مقارب لـ C

وادرس الوضع النسبي لـ C مع المقارب

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

③ استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر α اثبت أن

$-3<\alpha<-2$

④ ارسم المقارب و C

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور xx' والمستقيم $x=\ln 2$

الحل

$\Delta: y=-x-3$

$f(x)-y_\Delta=3e^{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=+\infty$

Δ هو مقارب لـ C في جوار $-\infty$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=3e^{x}>0$

C يقع فوق Δ

② تغيرات f : f قابلة للاشتقاق على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to} x\left[3\frac{e^{x}}{x}-1-\frac{3}{x}\right]=+\infty$

$f'(x)=3e^{x}-1$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{x}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\ln\frac{1}{3}$

$x=-\ln 3$, $f(-\ln 3)=3e^{-\ln 3}+\ln 3-3$

$f(-\ln 3)=3e^{\ln\frac{1}{3}}+\ln 3-3$

$=3(\frac{1}{3})+\ln 3-3=\ln 3-2$

x	$-\infty$		$-\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 3-2$	$\nearrow$	$+\infty$

③ في المجال $]-\infty,-\ln 3]$ الدالة مستمرة ومتناقصة تماماً

$0\in f(]-\infty,-\ln 3])=[\ln 3-2,+\infty[$

وعليه $f(x)=0$ لها حل وحيد في $]-\infty,-\ln 3]$

في المجال $]-\ln 3,+\infty[$ الدالة مستمرة ومتزايدة تماماً

$0\in f(]-\ln 3,+\infty[)=]\ln 3-2,+\infty[$

$f(x)=0$ لها حل وحيد في $]-\ln 3,+\infty[$

الحل الأول $f(0)=0$

والحل الثاني هو α

$f(-2)=3e^{-2}+2-3=\frac{3}{e^{2}}-1<0$

$f(-3)=3e^{-3}+3-3=\frac{3}{e^{3}}>0$

$f(-2)\times f(-3)<0 \Rightarrow -3<\alpha<-2$

④: $d: y=-x-3$

x	0	-3
y	-3	0

⑤ $S=\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx=\int_0^{\ln 2}(3e^{x}-x-3)\,dx$

$=\left[3e^{x}-\frac{x^{2}}{2}-3x\right]_0^{\ln 2}$

$=(3e^{\ln 2}-\frac{\ln^{2} 2}{2}-3\ln 2)-(3-0-0)$

$=6-\frac{\ln^{2} 2}{2}-3\ln 2-3=3-\frac{\ln^{2} 2}{2}-3\ln 2$

$f(x) = x-1+\frac{4}{e^x+1}$

① اثبت ان $d: y=x-1$ مقارب لـ C عند $+\infty$

و $d': y=x+3$ مقارب لـ C عند $-\infty$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس T للمنحني C في نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

④ ادرس وضع C بالنسبة للمماس T

ثم ارسم d ، d' ، T ، C

⑤ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين C ومحور xx' والمستقيمين $x=0$ ، $x=1$

الحل:

① $f(x)-y_d = \frac{4}{e^x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = 0 \Rightarrow$ d مقارب لـ C

$f(x)-y_{d'} = \frac{4}{e^x+1}-4$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_{d'}] = \frac{4}{0+1}-4 = 0$

ومنه d' مقارب لـ C.

② f اشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 + \frac{0-e^x(4)}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$

$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \geq 0$

$f'(x)=0 \Rightarrow (e^x-1)^2=0 \Rightarrow e^x-1=0$

$e^x=1 \Rightarrow x=\ln 1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f(0) = 0-1+\frac{4}{1+1} = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

③ $x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow (0,1)$

$m = f'(0) = 0$

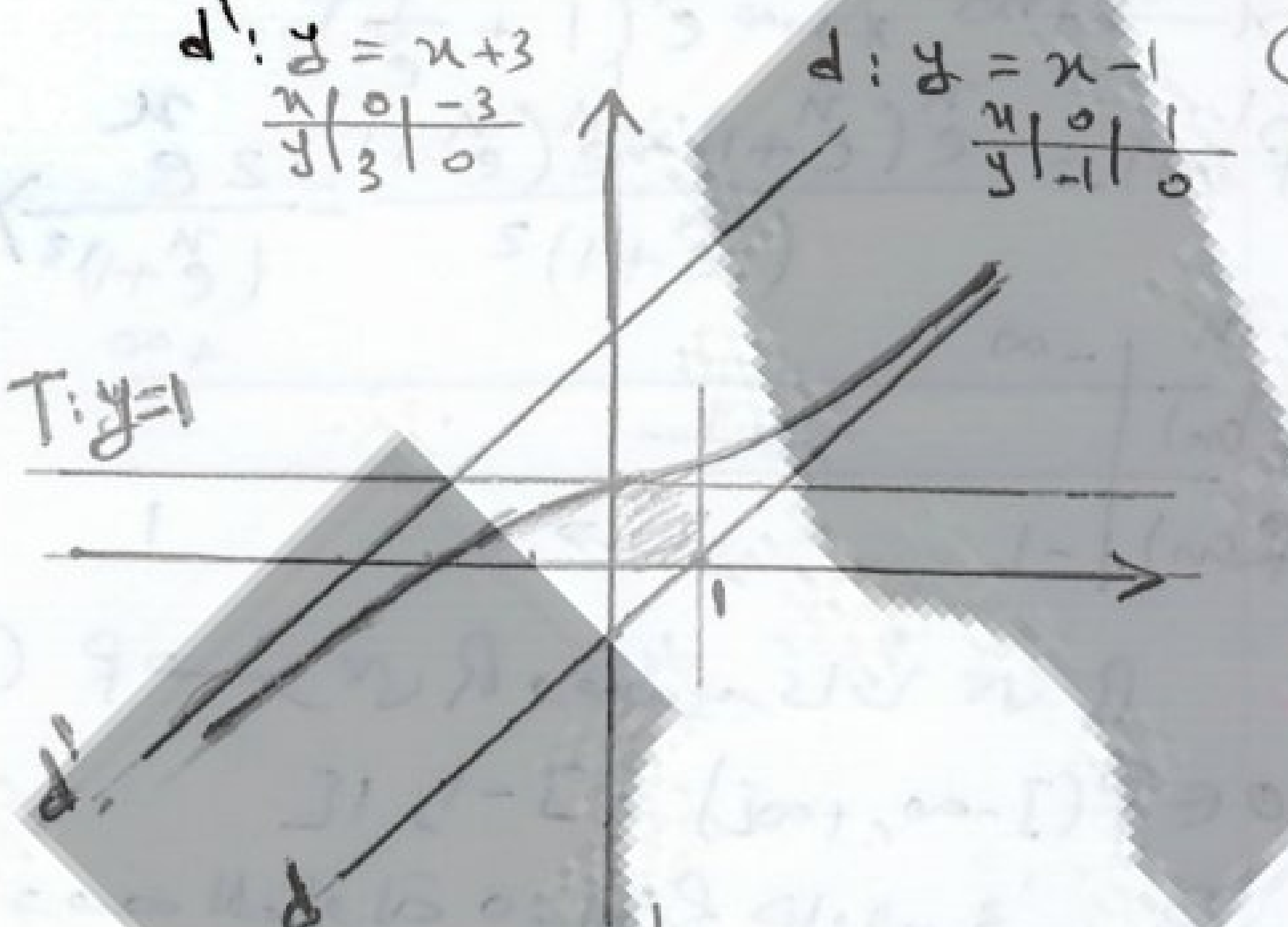
$T: \ y-1 = 0(x-0) \Rightarrow \boxed{y=1}$

④ الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_T$

ندرس إشارة $g(x) = f(x)-1$

وبما أن الدالة متزايدة فإننا نستفيد من جدول التغيرات في ذلك.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
إشارة g		$-$		$+$	
الوضع النسبي		C يقع تحت T	نقطة مشتركة $(0,1)$	C يقع فوق T	



⑤ $S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right] dx$

$= \int_0^1 \left[x-1+\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x - 4\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{2} - 1 - 4\ln(1+\frac{1}{e})\right) - (0-0-4\ln 2)$

$= -\frac{1}{2} - 4\ln\left(\frac{e+1}{e}\right) + 4\ln 2$

$= -\frac{1}{2} - 4[\ln(e+1) - \ln e] + 4\ln 2$

$= -\frac{1}{2} - 4\ln(e+1) + 4 + 4\ln 2$

$= \frac{7}{2} + 4\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$

مسألة ④ لتكن C الخط البياني لـ f المعرف على R وبعد: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

① ادرس تغيرات f وتضم جدول التغيرات.

② اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في R

③ اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ C مع المماس.

④ ارسم المماس ثم ارسم C

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x=1$

الحل: ① f مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

② f مستمر على R ومتزايد تماما على R

$0 \in f(]-\infty, +\infty[) =]-1, 1[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في R

③ $x=0 \Rightarrow f(0) = 0$, $(0,0)$ نقطة التماس

$m = f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

معادلة المماس $y - 0 = \frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow d: \boxed{y = \frac{1}{2}x}$

الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق

$$f(x) - y_d = \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{1}{2}x$$

نستعمل دالة جديدة:

$$g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{1}{2}x$$

وندرس تغيراتها على R

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1+\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1-\infty = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{4e^x - (e^x+1)^2}{2(e^x+1)^2} = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{2(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{2(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$

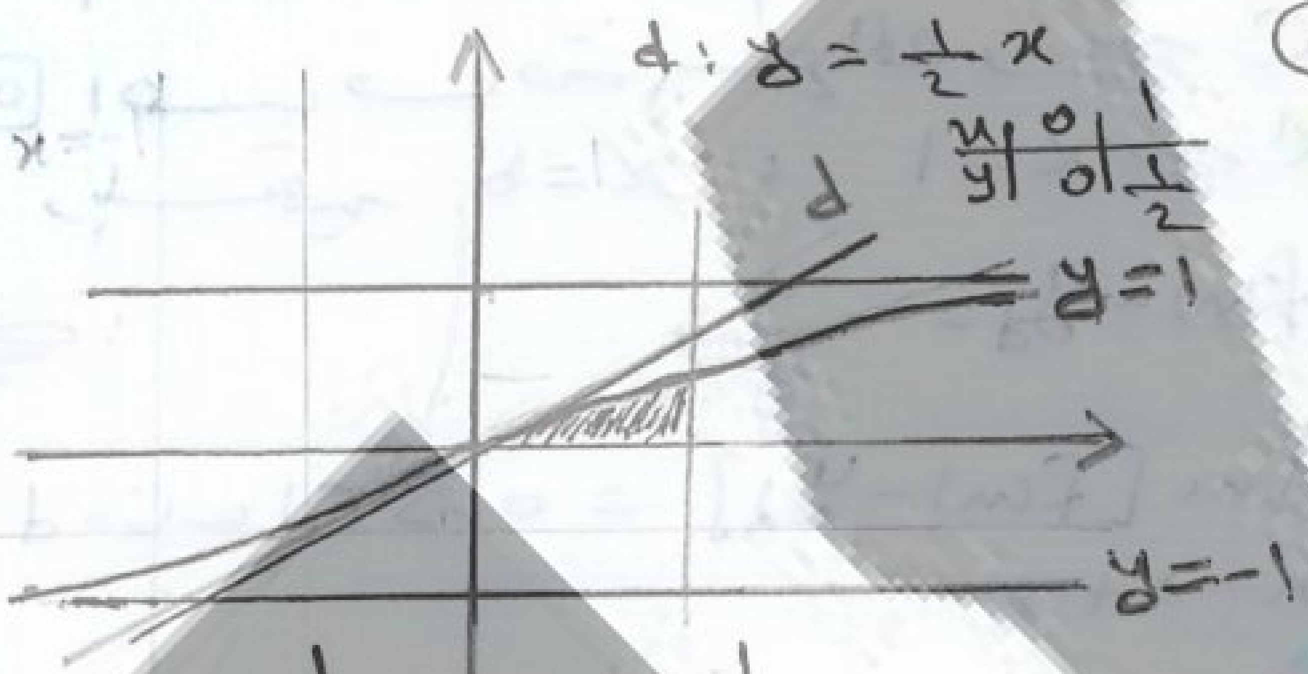
$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$ إشارة		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C يقع فوق المماس	نقطة مشتركة $(0,0)$	C يقع تحت المماس	

④ $d: y = \frac{1}{2}x$

x	0	1
y	0	$\frac{1}{2}$



⑤ $$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x+1-1-1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x+1-2}{e^x+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1}\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{e^x+1}\right)dx$$

نضرب البسط والمقام بـ e^{-x}

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$= \left[x + 2\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= (1 + 2\ln(1+e^{-1})) - (0 + 2\ln 2)$$

$$= 1 + 2\ln(\frac{1}{e}+1) - 2\ln 2$$

$$= 1 + 2[\ln(\frac{1+e}{e})] - 2\ln 2$$

$$= 1 + 2[\ln(1+e) - \ln e] - 2\ln 2$$

$$= -1 + 2\ln(\frac{1+e}{2})$$

مسألة: ليكن C الخط البياني لـ f المعرف على R وفق: $f(x)=ae^{2x}-be^{x}$

حيث a ، b حقيقيان.

<u>أولاً</u>: عين a ، b إذا علمت أن لـ f قيمة حدية محلياً تساوي -1 عند $x=0$

<u>ثانياً</u>: من أجل $a=1$ ، $b=+2$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مستقيمات مقاربة.

② استنتج من جدول التغيرات عدد حلول المعادلة $e^{x}-2=-e^{-x}$

③ ارسم C ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الاحداثيات.

<u>الحل</u>: نستفيد من القيمة الحدية في تفسير الشرط:

$f(0)=-1$ ، $f'(0)=0$

نعوض $(0,-1)\in C$ ، $f'(x)=2ae^{2x}-be^{x}$

$\boxed{-1=a-b}$ ، $\boxed{0=2a-b}$

بالحل المشترك للمعادلتين بالطرح يكون:

$1=a \xrightarrow{\text{بالتعويض}} b=2$

<u>ثانياً</u>:

$f(x)=e^{2x}-2e^{x}$

① تغيرات f: مستمرة على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-2)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{x}(e^{x}-1)=0$

$e^{x}-1=0 \Rightarrow e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f(0)=-1$

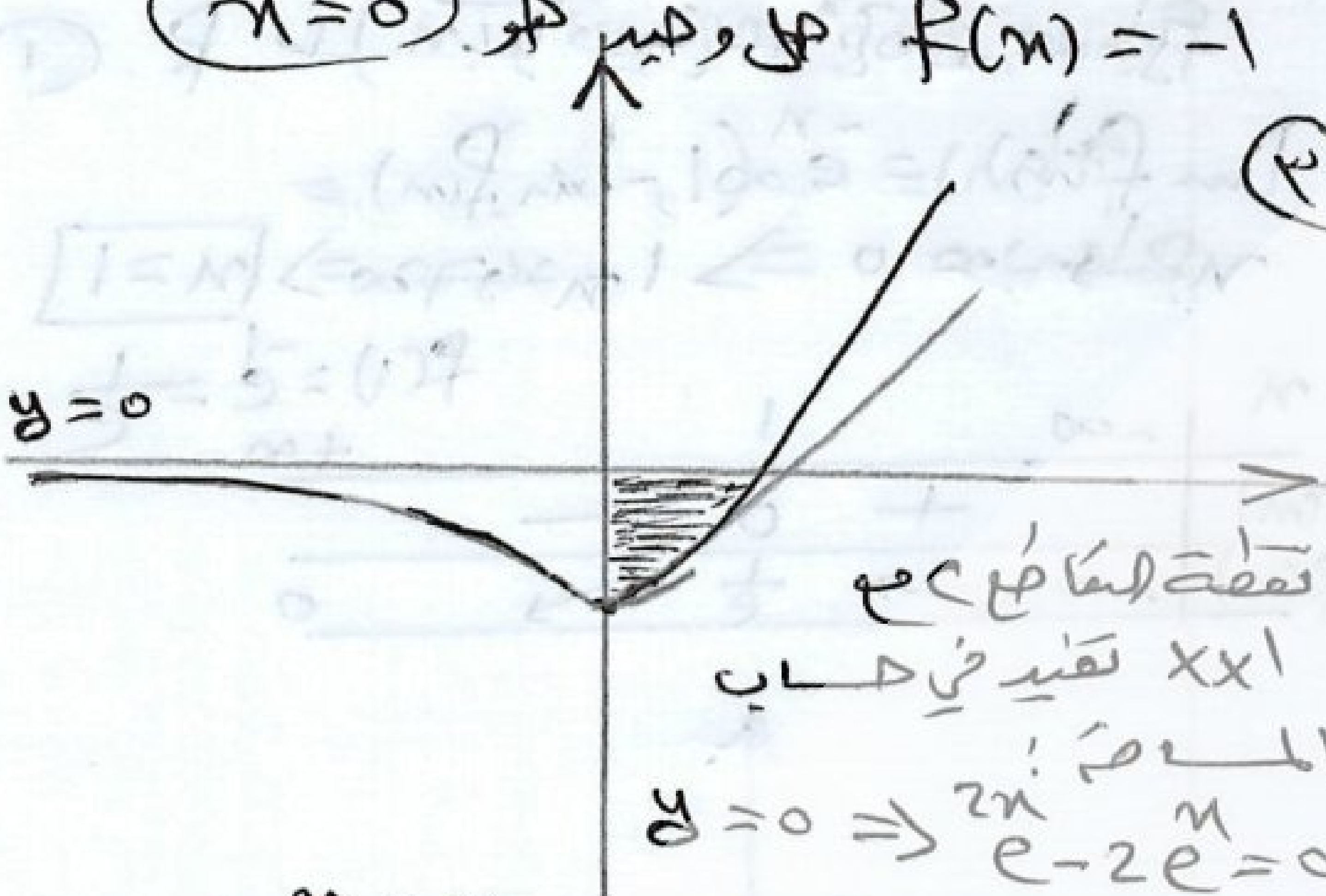
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

② $e^{x}-2=-e^{-x} \Rightarrow e^{x}-2=-\frac{1}{e^{x}}$

$e^{2x}-2e^{x}=-1 \Rightarrow f(x)=-1$

نلاحظ من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد هو $x=0$

③



نقطة التقاطع مع xx' تفيد في حساب المساحة:

$y=0 \Rightarrow e^{2x}-2e^{x}=0$

$e^{x}(e^{x}-2)=0 \Rightarrow e^{x}=2$

$\Rightarrow x=\ln 2$

$$S=\int_0^{\ln 2} -f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}(-e^{2x}+2e^{x})\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+2e^{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(4)+2(2)-\frac{3}{2}$$

$$=-2+4-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

تذكر: التكامل الناتج الأسي:

$$\int e^{x}\,dx=e^{x}$$

$$\int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx=e^{g(x)}$$

تمرين: لتكن f دالة معرفة على R وفق $f(x)=x\cdot e^{-x}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط البياني الناتج.

② اثبت أن الناتج $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية: $y'+y=e^{-x}$

<u>الحل</u>: f مستمرة على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

$f(x) = x e^{-x}$

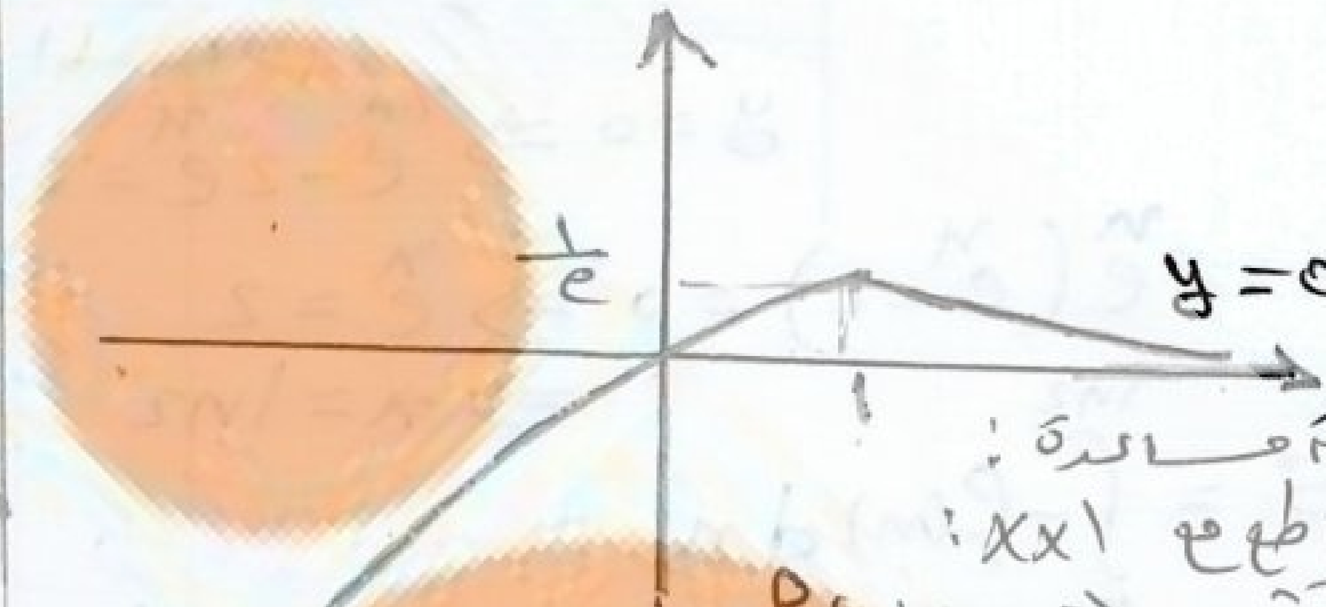
$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (-e^{-x})(x)$

$f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



نقطة مساعدة:

التقاطع مع xx':

$f(x)=0 \Rightarrow x e^{-x}=0$

$x=0$

$(0,0)$ نقطة مرجع السيني

٣) اثبت ان $y=f(x)$ هو حل $y'+y=e^{-x}$ شوط في المعادلة

$y = f(x) \Rightarrow y = x e^{-x}$

$y' = f'(x) \Rightarrow y' = e^{-x}(1-x)$

$y'+y = e^{-x} \Rightarrow e^{-x}(1-x) + x e^{-x} = e^{-x}$

$e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$

محققة $e^{-x} = e^{-x}$

ومنه $y=f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية

تذكرة + استنتاج الرسم البياني

① $f_1(x) = f(-x)$

C_1 يستنتج من C وفق التحويل

$(x,y) \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ }yy']{C_1 \text{ نظير}} (-x,y)$

② $f_1(x) = -f(x)$

C_1 نظير C بالنسبة لـ xx'

التحويل $(x,y) \to (x,-y)$

③ $f_1(x) = -f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة للمبدأ O

التحويل: $(x,y) \to (-x,-y)$

④ $f_1(x) = |f(x)|$

الجزء من الخط البياني الذي يقع فوق xx' نرسمه كما هو اما الذي تحت xx' نأخذ نظيره

⑤ $f_1(x) = f(x) + b$

C_1 يستنتج من C بالسحاب من yy' وفق

التحويل: $(x,y) \to (x, y+b)$

⑥ $f_1(x) = f(x+a)$ عكس الاشارة

التحويل: $(x,y) \to (x-a, y)$

السحاب من xx'

تمرين $f(x) = x e^{-x}$ في التمرين السابق

استنتج الرسم البياني لـ

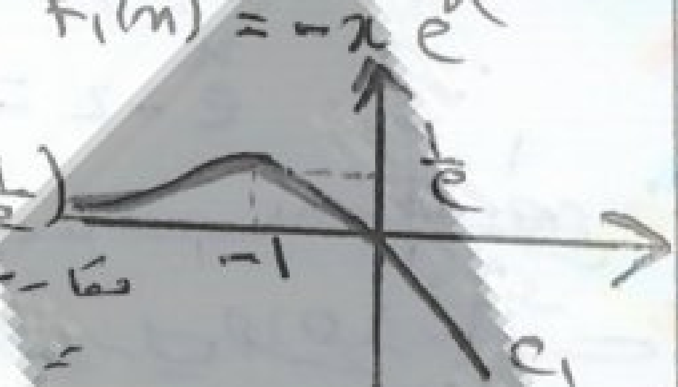
① $f_1(x) = f(-x)$ $\quad f_1(x) = -x e^{x}$

$(x,y) = (-x,y)$

$(1,\frac{1}{e}) \to (-1,\frac{1}{e})$

$y=0$ مقارب افقي $0x^+$:

$y=0$ حوالي



② $f_2(x) = -x e^{-x}$

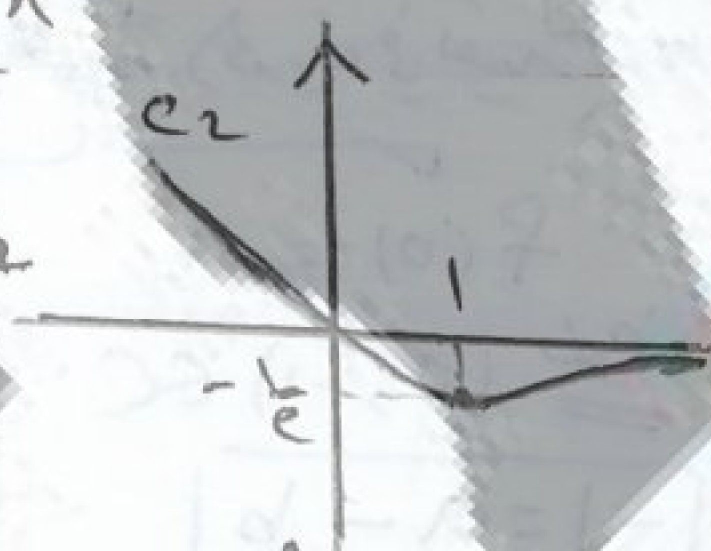
$f_2(x) = -f(x)$

C_2 نظير بالنسبة لـ xx'

$(x,y) \to (x,-y)$

$(1,\frac{1}{e}) \to (1,-\frac{1}{e})$

$(0,0) \to (0,0)$



③ $f_3(x) = x e^{x}$

$f_3(x) = -f(-x)$

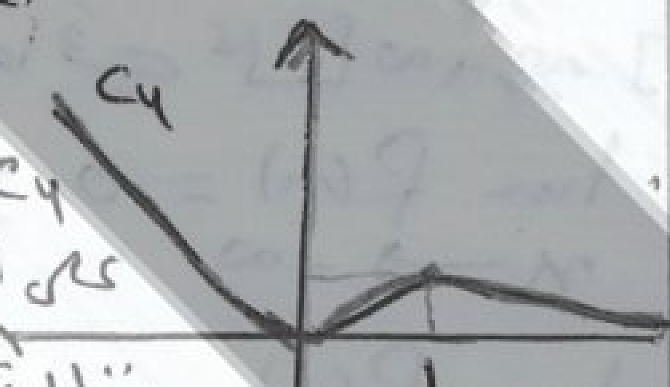
C_3 نظير C بالنسبة للمبدأ

$(x,y) \to (-x,-y)$

$(1,\frac{1}{e}) \to (-1,-\frac{1}{e})$

④ $f_4(x) = |f(x)|$

C_4 يستنتج من C بالمحافظة على النقاط التي ترتيبها موجب ونأخذ نظائر النقاط التي ترتيبها سالب بالنسبة لـ xx'



⑤ $f_5(x) = (x+1) e^{-x-1}$

$f_5(x) = f(x+1)$

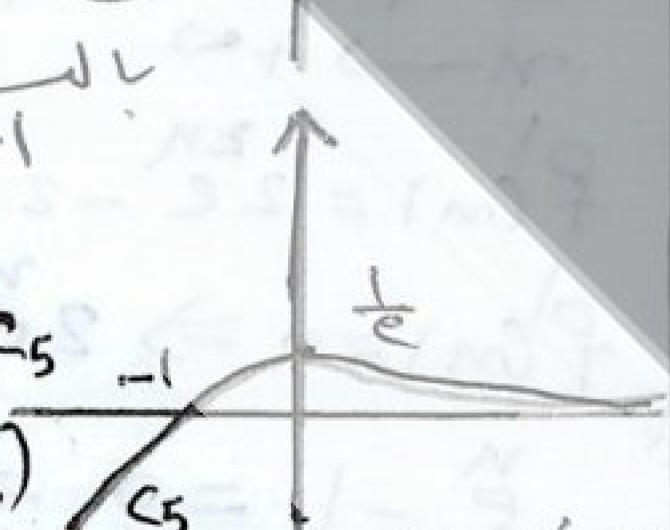
C_5 يستنتج من C وفق التحويل

$(x,y) \to (x-1, y)$

$(1,\frac{1}{e}) \to (0,\frac{1}{e})$

$(0,0) \to (-1,0)$

السحاب من xx' بمقدار (1) نحو اليسار



⑥ $f_6(x) = x e^{-x} + 1$

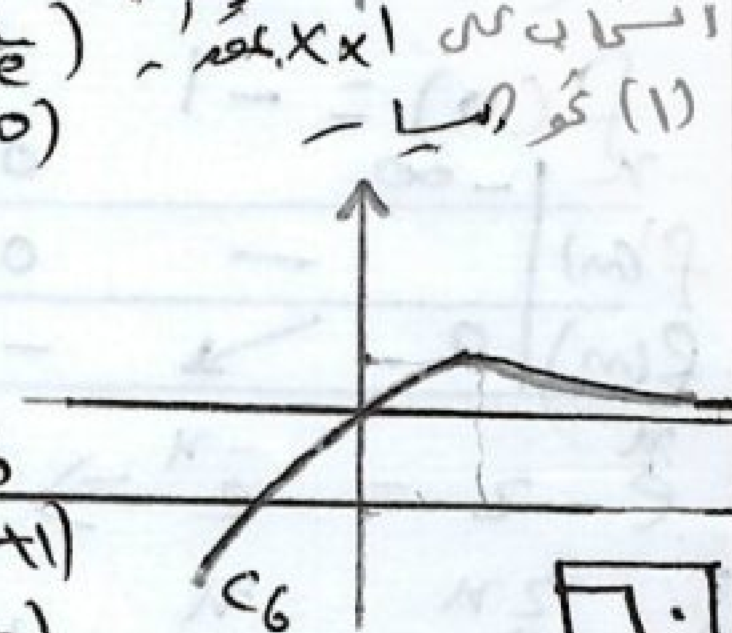
$f_6(x) = f(x) + 1$

C_6 يستنتج من C وفق التحويل

$(x,y) \to (x,y+1)$

$(1,\frac{1}{e}) \to (1, 1+\frac{1}{e})$

$(0,0) \to (0,1)$



التكامل

تعريف 1: نقول عن التابع F أنه تابع أصلي لـ f على المجال I إذا تحقق شرطان

① F اشتقاقي على I

② $F'(x) = f(x)$

تعريف 2: نقول عن التابعين F ، G أنهما أصليان لتابع f على المجال I إذا تحقق:

① F و G اشتقاقيان على I

② $F'(x) = G'(x)$

ملاحظة بالنسبة للشرط $F'(x) = G'(x)$ نحسب الفرق $F(x) - G(x)$ ويجب أن يساوي هذا الفرق عدد ثابت

$F(x) - G(x) =$ ثابت

نشتق: $F'(x) - G'(x) = 0$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$

تمرين 1) تحقق أن F تابع أصلي لـ f على I

① $F(x) = \tan x - x$, $f(x) = \tan^2 x$

$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

الحل: F اشتقاقي على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$

ومنه F تابع أصلي لـ f على I

② $F(x) = \ln(\ln x)$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$I =]1, +\infty[$

الحل: F اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$F'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$

$= f(x)$

ومنه F تابع أصلي لـ f على I

تمرين 2) تحقق أن F ، G تابعان أصليان لـ f على المجال I

① $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$

$I =]-\infty, +\infty[$

الحل: F ، G اشتقاقيان على I

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$$

$$= \frac{2-5-3x^2}{2(1+x^2)} = \frac{-3(1+x^2)}{2(1+x^2)}$$

$$F(x) - G(x) = -\frac{3}{2}$$

نشتق

$F'(x) - G'(x) = 0$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$

ومنه F ، G أصليان لتابع f على I

② $F(x) = \tan^2 x$, $G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

الحل F و G اشتقاقيان على I

$$F(x) - G(x) = \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) = -1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$F(x) - G(x) = -1$

نشتق

$F'(x) - G'(x) = 0$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$

ومنه F و G أصليان لـ f على I

قواعد تفيد في إيجاد التابع الأصلي

مجموعة [1]:

التابع f	التابع الأصلي F
$f(x) = 0$	$F(x) = c$ ثابت
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$; $n \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

مثال: أوجد أصلياً: $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5$

$F(x) = 3\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 5x$

$\boxed{61}$

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}=(x-1)^{-2}$

$F(x)=\frac{1}{1}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x-1}$

② $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $I=]2,+\infty[$

الحل

$f(x)=(x-1)\underbrace{(x^2-2x)}_{g}^{-\frac{1}{2}}$

نضرب ونقسم على 2

$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{(2x-2)}_{g'}\underbrace{(x^2-2x)}_{g}^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-2x}$

③ $f(x)=3\sqrt[3]{2-5x}+2$

$f(x)=3(2-5x)^{\frac{1}{3}}+2$

$F(x)=3\left(\frac{1}{-5}\right)\frac{(2-5x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+2x$

$F(x)=-\frac{9}{20}(2-5x)^{\frac{4}{3}}+2x$

④ $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ $I=]3,+\infty[$

نلاحظ ان البسط مشتقة المقام ⟸ الدالة الاصلية لوغاريتم

$F(x)=\ln|x^2-2x-3|$

$F(x)=\ln(x^2-2x-3)$ دائما موجب

⑤ $f(x)=\tan^2x-\frac{1}{\sin^2x}$

الحل

$f(x)=-1+\underline{1+\tan^2x}-\frac{1}{\sin^2x}$

$F(x)=-x+\tan x-(-\cot x)$

$=-x+\tan x+\cot x$

$\boxed{7C}$

مجموعة 2

الدالة f	الدالة الأصلية F
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
$f(x)=\sin(ax)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos ax$
$f(x)=g'(x)\cdot\sin[g(x)]$	$F(x)=-\cos(g(x))$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\cos ax$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin ax$
$f(x)=g'(x)\cdot\cos[g(x)]$	$F(x)=\sin[g(x)]$

مثال جد الدالة الاصلية لـ

① $f(x)=2\cos3x-3\sin x$

$F(x)=2\left(\frac{1}{3}\right)\sin3x-3(-\cos x)$

$=\frac{2}{3}\sin3x+3\cos x$

② $f(x)=x\sin(x^2+1)$

نجعلها مشتقة الزاوية

$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{2x}_{g'(x)}\sin\underbrace{(x^2+1)}_{g(x)}$

$F(x)=-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)$

مجموعة 3

الدالة f	الدالة الأصلية F
① $f(x)=\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x$	$F(x)=\tan x$
② $f(x)=\frac{1}{\sin^2x}=1+\cot^2x$	$F(x)=-\cot x$

مجموعة 4

الدالة f	الدالة الأصلية F
$f(x)=(ax+b)^n$, $n\neq-1$	$F(x)=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=g'\cdot g^n$	$F(x)=\frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x)=\ln\lvert g(x)\rvert$

تمرين جد الدالة الاصلية لكل مما يلي:

① $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$, $I=]1,+\infty[$

الحل

$f(x)=\frac{1}{\ldots}$

تمرين ① جد تابعاً أصلياً F

$f(x) = \sin^2 2x$

الحل: لا توجد قاعدة مباشرة لـ $\sin^2$ نخفض الدرجة من خلال قانون

$f(x) = \frac{1-\cos 4x}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x$

② $f(x) = \cos^3 x$

الحل

$f(x) = \cos x \cdot \cos^2 x$

$= \cos x\,(1-\sin^2 x)$

$f(x) = \cos x - \underbrace{\cos x}_{g'}\,(\underbrace{\sin x}_{g})^2$

$F(x) = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3}$

تذكرة

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

تمرين جد تابعاً أصلياً لـ f

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

الحل

$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}$

$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$

② $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ $\quad I =]1, +\infty[$

الحل

نقسم البسط والمقام على x

$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ البسط هو مشتق المقام

$F(x) = \ln|\ln x|$

ضمن المجال المعطى:

$F(x) = \ln(\ln x)$

قاعدة في إيجاد التابع الأصلي:

① $f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x$

② $f(x) = e^{ax+b} \rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$

③ $f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} \rightarrow F(x) = e^{g(x)}$

تمرين جد تابعاً أصلياً لـ

① $f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$

نجعله مشتق الأس

$f(x) = \frac{1}{2} 2x\, e^{x^2+1}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$

② $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

البسط مشتق المقام

$F(x) = \ln|e^x+1| = \ln(e^x+1)$

موجب دائماً

تمرين: جد تابعاً أصلياً لـ f

$$f(x) = \frac{2}{e^{x}+1}$$

الحل نضرب البسط والمقام بـ e^{-x} كي نصل إلى أن البسط هو مشتقة المقام

$$f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$f(x) = \frac{-2(-e^{-x})}{1+e^{-x}}$$

$$F(x) = -2\ln(1+e^{-x})$$

التكامل جـ2

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

تمرين: احسب كل من:

① $$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cdot 2\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot|\sin x|\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -2\sin x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx$$

$$= [2\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-2\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (2)-(0)+(0)-(-2)$$

$$= 4$$

② $$\int_0^4 x|x-3|\,dx$$

نعرف القيمة المطلقة

$x-3=0$

x		3	
	$-$	0	$+$

$$\int_0^4 x|x-3|\,dx = \int_0^3 x(-x+3)\,dx + \int_3^4 x(x-3)\,dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx + \int_3^4 (x^2-3x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_3^4$$

$$= \left[\left(-9+\frac{27}{2}\right)-(0)\right] + \left[\left(\frac{64}{3}-24\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)\right]$$

$$= -9 + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - 24 - 9 + \frac{27}{2}$$

$$= -42 + \frac{54}{2} + \frac{64}{3} = \frac{38}{6}$$

التكامل بالتجزئة:

القاعدة

$$\int_a^b u\cdot v' = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v$$

ملاحظة: متى نفكر في استخدام التكامل بالتجزئة

$$\left.\begin{array}{r}\text{لوغاريتمي × صحيح}\\ \text{أسي × صحيح}\\ \text{مثلثي × صحيح}\end{array}\right\}$$ جداء تابعين غير متجانسين

تمرين: احسب:

$$I = \int_1^e x\cdot\ln x\,dx$$

الحل:

$u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}\ln e\right) - \left(\frac{1}{2}(0)\right) - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$$

$$= \frac{e^2-1}{4}$$

(2) $\int_0^1 x e^{-x}\,dx$

$u = x \rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$

$$I = \int_0^1 x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x e^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left(-e^{-1} - e^{-1}\right) - (0 - 1)$$

$$= -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

ملاحظة هامة: عند التكامل بالتجزئة دائماً نفرض التابع الصحيح هو u وما يتبقى هو v' عدا الحالة التي يوجد فيها لوغاريتم حيث أننا نفرض u هو اللوغاريتم.

(3) $I = \int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$

نفرض

$u = x-1 \rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$

$$I = \left[(x-1)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$= \left[(x-1)\sin x + \cos x\right]_0^\pi$$

$$= \left((\pi-1)(0) - 1\right) - \left((0-1)(0) + 1\right)$$

$$= -2$$

إيجاد التكامل لاقترانات كسرية بسط ومقام

صعبة

طريقة التفكير:

[1] هل البسط هو مشتقة المقام (أو يمكن أن يكون مشتقة المقام؟) عندها نأخذ القاعدة

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow F(x) = \ln|g(x)|$$

[2] إذا كان المقام له قوة يمكن أن نرفعها إلى البسط كي نستفيد من الخاصة:

$$f(x) = g'(x)\cdot[g(x)]^n \rightarrow F(x) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}$$

[3] إذا فشلت الحالات السابقة يتبقى أمامنا طريقة تفريق الكسور (بحيث تكون درجة البسط أصغر من درجة المقام) تدريب جداً أساسياً

(1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ $\quad I =]-\infty, -2[$

الحل

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

توحيد المقامات وحذفها:

$x+1 = a(x+2) + b(x-2)$ أفضل طريقة تعويض الأصفار

$x = -2 \rightarrow -1 = 0 - 4b \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

$x = 2 \rightarrow 3 = 4a + 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$

$f(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}$

$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2|$

ضمن المجال المعطى $]-\infty,-2[$

$F(x) = \frac{3}{4}\ln(-x+2) + \frac{1}{4}\ln(-x-2)$

② $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$ $\quad I =]-\infty, 2[$

الحل

نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام ← قسمة اقليدية

$f(x) = x+1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$

نفرض الكسر $I = \frac{3x+2}{x^2-x-2}$

$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$

(1) $\quad (x+1) \quad (x-2)$

توحيد مقامات وحذف:

$3x+2 = a(x+1) + b(x-2)$

$x=-1 \to -1 = -3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

$x=2 \to 8 = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{3}$

أصبح $f(x)$ يكتب بالشكل:

$f(x) = x+1+\frac{8}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$

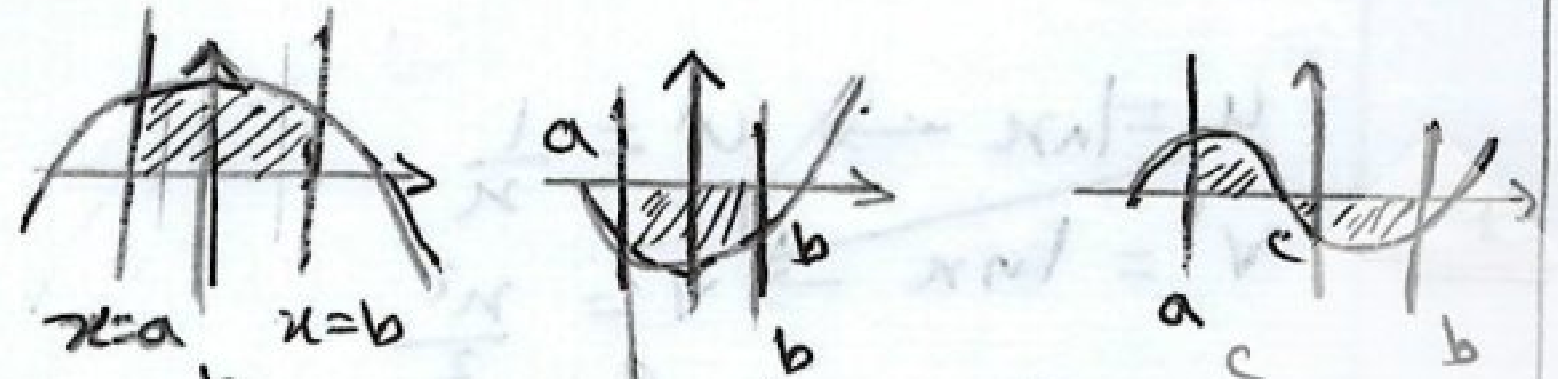
$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|$

ضمن المجال المعطى

$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln(-x+2)+\frac{1}{3}\ln(-x-1)$

حساب المساحة:

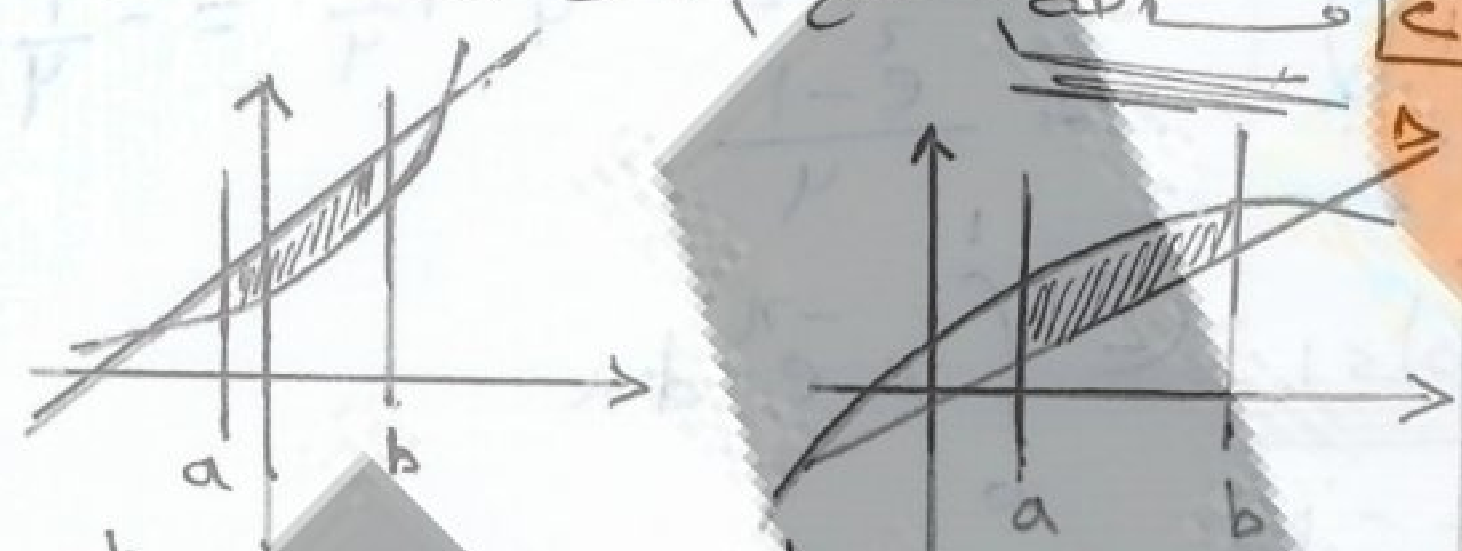
$\boxed{1}$ حساب مساحة الحيز المحصور بين C ومحور xx' والمستقيمين $x=a$ و $x=b$



$S = \int_a^b f(x)dx \quad S = \int_a^b -f(x)dx \quad S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

إذا كانت المنطقة المحصورة فوق xx' نأخذ $f(x)$ وإذا كانت المنطقة تحت محور xx' نأخذ $-f(x)$، إذا لم يعطينا حدود التكامل نحل المعادلة $f(x)=0$

$\boxed{2}$ مساحة الحيز المحصور بين C و Δ

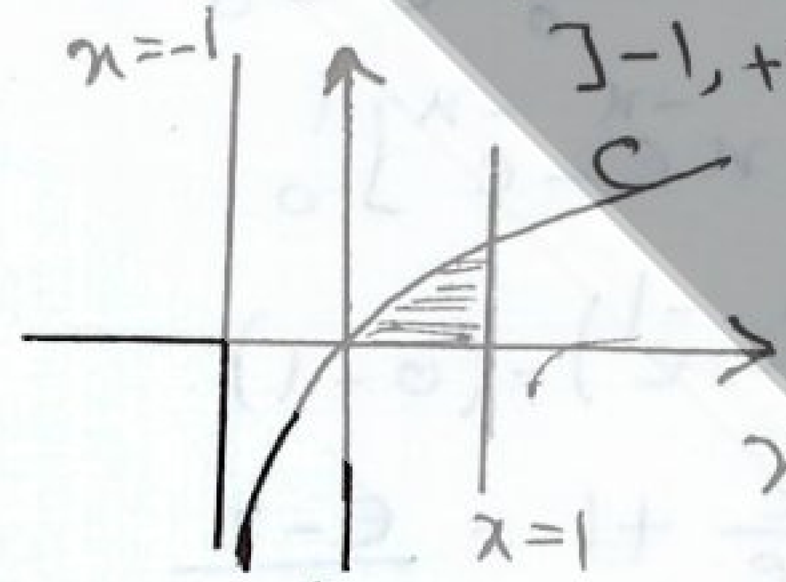


$S = \int_a^b [y_\Delta - f(x)]dx \quad S = \int_a^b [f(x) - y_\Delta]dx$

نأخذ الخط العلوي ناقص الخط السفلي

ملاحظة: إذا لم يعطينا حدود التكامل نحل المعادلة $f(x) = y_\Delta$

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\ln(x+1)$ المعرف على $]-1,+\infty[$



احسب مساحة الحيز المحصور بين C ومحور xx' والمستقيم $x=1$

$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(x+1)dx$ بالتجزئة

$u = \ln(x+1) \to u' = \frac{1}{x+1}$

$v' = 1 \to v = x$

$S = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

$= [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (1-\frac{1}{x+1})dx$

$= [x\ln(x+1) - x + \ln|x+1|]_0^1$

$= (\ln 2 - 1 + \ln 2) - (0-0-0) = 2\ln 2 - 1$