اسم الطالب/ة : ....

مدة الاختبار : ساعتان

الصف : الثالث الثانوي العلمي

◊مركز أونلاين التعليمي◊

اختبار العقدية و تطبيقاتها

بكالوريا 2020

Online center

مركز أونلاين التعليمي

السؤال الأول : ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و z عدد عقدي و $f(z)$ كثير حدود معرف ب :

$$f(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$$

① تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(z)$

② عين العددين العقديين $a\,,b$ بحيث

$$f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$$

③ حل في C المعادلة $f(z)=0$

السؤال الثاني : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}\quad,\ c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\quad,b=e^{i\frac{\pi}{3}}\quad,a=1$$

بالترتيب ..والمطلوب :

① اكتب c بالشكل الأسي و اكتب d بالشكل الجبري

② وضّع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس

③ أثبت أن الرباعي $OACB$ معين

السؤال الثالث : ليكن لدينا كثير الحدود

$$p(z)=z^3-3z^2+3z+7$$

① أثبت أن $p(-1)=0$

② اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z)=(z+1)Q(z)$

③ حل المعادلة $p(z)=0$

④ $A\,,B\,,C$ ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

السؤال الرابع : ليكن لدينا كثير الحدود $p(z)=z^4-19z^2+52z-40$ والمطلوب :

①عين عددين حقيقيين $a\,,b$ يحققان :

$$p(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$$

② حل في C المعادلة $p(z)=0$

السؤال الخامس : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$$Z_A=3\quad,\quad Z_B=1+2i\quad,\ Z_Q=-1+2i$$

① مثل هذه الأعداد في مستو عقدي

② جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

③ جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع

④ أثبت تعامد المستقيمين $OR\,,AB$ و أثبت أن $OR=\frac{1}{2}AB$

السؤال السادس : لتكن الأعداد العقدية :

$$a=1+\frac{3}{4}i\quad,\quad b=2-\frac{5}{4}i\,,c=3+\frac{7}{4}i$$

① وضّع النقاط $A\,,B\,,C$ في شكل وما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$

② استنتج أن المثلث (ABC)قائم ومتساوي الساقين

③ احسب العدد العقدي $Z_{A'}$ ليكون الشكل $ABA'C$ مربعا

السؤال السابع : لتكن الأعداد العقدية :

$$a=2-2i,b=-1+7i\,,c=4+2i\ ,\quad d=-4-2i\quad,\omega=-1+2i$$

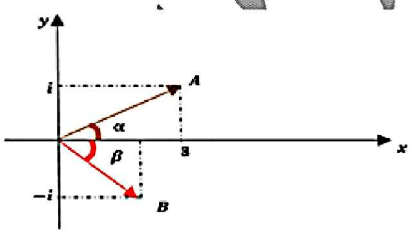
أثبت وقوع النقاط A,B,C,D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R=5$

السؤال الثامن : ليكن العددان العقديان $z_A\,,z_B$ حيث $arg(z_A)=\alpha$ و $arg(z_B)=-\beta$ كمابالشكل :

① اكتب $z_A\,,z_B$ بالشكل الجبري

② اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي

③ استنتج قيمة $\alpha+\beta$



انتهت الأسئلة 🙂

مع أطيب الامنيات لكم بالنجاح 💙

اختبار عقدية

السؤال الأول:

1) $f(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$

$f(1) = 1^3 - (1-2\sin\alpha)(1)^2 + (1-2\sin\alpha)(1) - 1$

$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1$

$= 0$

⟸ العدد 1 جذر للكثير الحدود

2) $f(z) = (z-1)(z^2+az+b)$

$z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1 = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$

$z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

بالمطابقة

$1 = 1$

$-1 + 2\sin\alpha = a - 1$ (1)

$1 - 2\sin\alpha = b - a$ (2)

$-1 = -b$ (3)

من (3) نجد $b = 1$

من (1) نجد $a = 2\sin\alpha$

للتأكد نعوض في 2 ⟸ محققة...

$\Rightarrow f(z) = (z-1)(z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1)$

3) $f(z) = 0$

إما $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

أو $z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1 = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4a.c$

$= 4\sin^2\alpha - 4$

$= 4(\sin^2\alpha - 1)$

$= 4(-\cos^2\alpha)$

$= -4\cos^2\alpha < 0$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{-2\sin\alpha + 2\cos\alpha\, i}{2(1)}$

$= -\sin\alpha + \cos\alpha\, i$

$\Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = -\sin\alpha - \cos\alpha\, i$

السؤال الثاني:

$a = 1\ ,\ b = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\ ,\ c = \underset{x}{\frac{3}{2}} + \underset{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, i\ ,\ d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1) c بالشكل الأسي: $c = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ rad

$\Rightarrow c = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$d =$ جبري ⟵ مثلثي ⟵ أسي

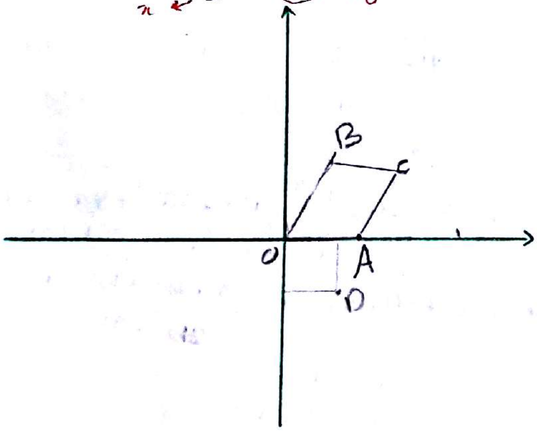
$r[\cos\theta + i\sin\theta] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\, i$

2) $A(1,0)$

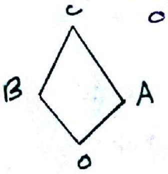
$b = e^{i\frac{\pi}{3}} = 1\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\,\underset{\sin 60}{\sin\frac{\pi}{3}}\right]$

$= \underset{x}{\frac{1}{2}} + \underset{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, i$



3) المعين: شكل رباعي تتساوى أضلاعه الأربعة.

OACB



$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$

$AC = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2}$

$= 1$

$CB = 1$

$BO = 1$

⟸ معين.

السؤال الثالث:

1) $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

$P(-1) = 0$

نعوض -1 بدل z ⇐

2)
$$\begin{array}{r|l} z^3 - 3z^2 + 3z + 7 & z + 1 \\ \hline \mp z^3 \mp z^2 & z^2 - 4z + 7 \\ -4z^2 + 3z + 7 & \\ -4z^2 \mp 4z & \\ 7z + 7 & \\ 7z + 7 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

3) $P(z) = 0 \Rightarrow$

إما $z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$

أو $z^2 - 4z + 7 = 0$

$\Delta = 16 - 28 = -12$

$z_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \bar{z}_1 = 2 - \sqrt{3}i$

4) $A(-1, 0)$ $B(2, \sqrt{3})$ $C(2, -\sqrt{3})$

نبرهن

$AB = BC = AC$

$\sqrt{12} = \sqrt{12} = \sqrt{12}$

فالمثلث متساوي الأضلاع

السؤال الرابع:

1) $z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + 4az^2 + 2a^2z + az^3 + bz^2 + 4bz + 2ab$

نفسه $= z^4 + (4+a)z^3 + (2a + 4a + b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$

$1 = 1$

$-19 = 6a + b$ (1)

$0 = 4 + a$ (2)

$-40 = 2ab$ (3)

$52 = 2a^2 + 4b$ (4)

من 3 $a = -4$

نعوض في 4

$-40 = -8b$

$\Rightarrow b = 5$

للتأكد في 2 و 5 تحقق...

$\Rightarrow P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0$

2) حل المعادلة نستنتجه التحقيقة

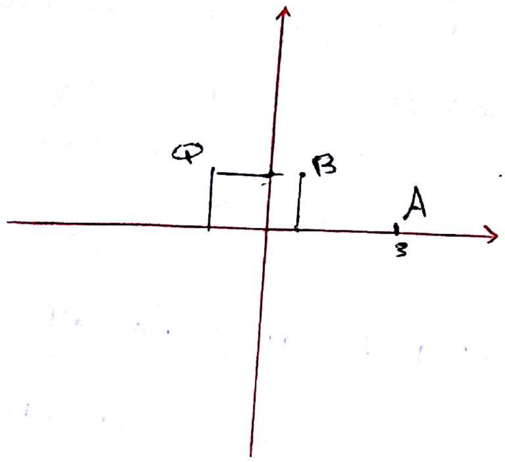
السؤال الخامس:

1) $z_A = 3$, $z_B = 1 + 2i$, $z_Q = -1 + 2i$

$A(3, 0)$

$B(1, 2)$

$Q(-1, 2)$

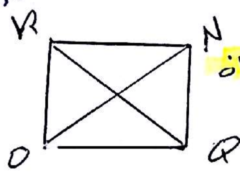


2) الصورة - المركز $= e^{i\theta}$ (الأصل - المركز)

$z_N - (0 + 0i) = e^{i\frac{\pi}{2}}[(3 + 0i) - (0 + 0i)]$

$z_N = 3i$

3)



هذا متوازي الأضلاع متناصفان

$\dfrac{z_R + z_Q}{2} = \dfrac{z_O + z_N}{2}$

$z_R - 1 + 2i = +3i$

$z_R = i + 1$

4) تخيلي بحت $= \dfrac{z_B - z_A}{z_R - z_O}$ ⇐ طريقة الدراسي

$\dfrac{1 + 2i - 3}{1 + i - 0 + 0i} = \dfrac{(2i - 2)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$\Rightarrow \dfrac{2i + 2 - 2 + 2i}{1 + 1} = \dfrac{4i}{2} = 2i$

تخيلي بحت إذا ضلع متقيم ما لشعاعه متوازيان ⇐ المستقيما متوازيا

⇐ المستقيمين متعامدان. سوكاه بالنامونه ثلاث نقاط

وضلع متقيم النقاط ليا مستقيما راحد

⇐ طريقة الهندسة $\overrightarrow{OR}(1, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, 2)$

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 2 = 0$ الشعاعان متعامدان

⇐ متعامدان

فرق لـ z بلا طويلة سعاع
فرق لـ z مع طويلة وجهة مستقيمة

$OR = \frac{1}{2} AB$

الهندسة

$OR = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$

محققة.

الدراسة

$\frac{|z_B - z_A|}{|z_R - z_o|} = |2i|$

$\frac{AB}{R_o} = \sqrt{2^2}$

$\frac{AB}{R_o} = 2 \Rightarrow R_o = \frac{AB}{2}$

السؤال السادس

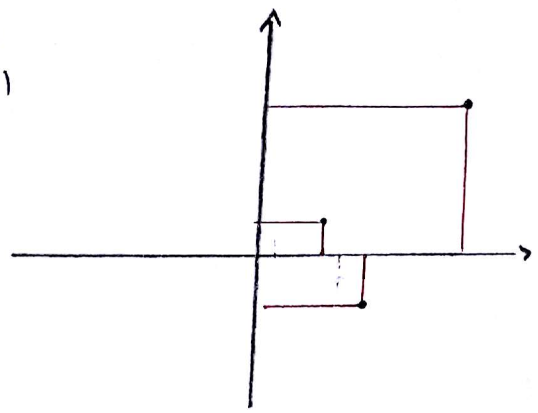
على الرسم حرف كبير

①

$A(1, \frac{3}{4})$

$B(2, -\frac{5}{4})$

$C(3, \frac{7}{4})$



②

$\vec{AC} = c - a$

$\vec{AB} = b - a$

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\text{مضوان}}{\text{مضوان}} \Rightarrow$ نضرب بالمرافق $= i$ تخيلي

$\Leftarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$

فالمثلث ABC قائم في A

برهان متساوي الساقين

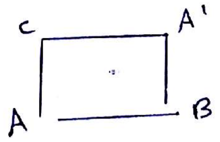
$\frac{|c-a|}{|b-a|} = |i|$

$\frac{AC}{AB} = 1$

$AC = AB$

وهو المطلوب،

$\arg = \frac{\pi}{2}$



③ قطرا المربع متناصفان

$\frac{a+a'}{2} = \frac{b+c}{2}$

$1 + \frac{3}{4}i + a' = 2 - \frac{5}{4}i + 3 + \frac{7}{4}$

$a' = 4 - \frac{1}{4}i$

السؤال السابع

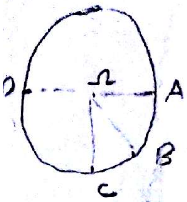
$A(2, -2)$

$B(-1, 7)$

$C(4, 2)$

$D(-4, -2)$

$\omega = -1 + 2i \Rightarrow \Omega(-1, 2)$



الشرط

$A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega = R$

$\sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2}$

$\sqrt{25}$

$5 = 5 = 5 = 5 = R$

طريقة أخرى

$(x - x_{\text{المركز}})^2 + (y - y)^2 = R^2$

$(x+1) + (y-2) = 25$

نعوض النقطة A

$B, C, B, A \Rightarrow$ محققة.

السؤال الثامن:

$\arg(z_A) = \alpha$

$\arg(z_B) = \beta$

①

$z_A = 3 + i$

$z_B = 2 - i$

② $\frac{z_A}{z_B} = \frac{3+i}{2-i} \Rightarrow$ المرافق $\Leftarrow 1+i$

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{-i\beta}} = \frac{\sqrt{10}\, e^{i\alpha}}{\sqrt{5}\, e^{-i\beta}} = \sqrt{2}\, e^{i(\alpha+\beta)}$

③

استنتج قيمة $\sin\ldots$, $\cos\ldots$

$\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$

مقارنة بين الشكلين الجبري والأسي المثلثي

$\frac{z_A}{z_B} = 1 + i \Rightarrow$ جبرياً $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{z_A}{z_B} = \sqrt{2}\, e^{i(\alpha+\beta)} \Rightarrow \theta = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$