الجداء السلمي في الفراغ

Souad Hamideh

1

نعطى معادلة المستقيم d في المستوي بالشكل

$d: ax+by+c=0 \Longrightarrow$

- نسمي الشعاع $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم على d وهو كل شعاع عمودي على المستقيم d
- نسمي الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ الشعاع الموجه لـ d وهو كل شعاع موازي أو منطبق على d

2

ليكن لدينا المستقيمان

$d: ax+by+c=0$

$d': a'x+b'y+c'=0$

يكون d, d' متوازيان إذا وفقط إذا	$\vec{n}=\vec{n'}$ $\vec{u}=\vec{u'}$
يكون d, d' متعامدان إذا وفقط إذا	$\vec{u}=\vec{n'}$ $\vec{u'}=\vec{n}$

3

بعد النقطة A عن المستقيم d حيث $A(x_1,y_1)$

$$dis(A,d)=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4

في المستوي الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي

5

قواعد في الجداء السلمي

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta \; : \; \theta(\vec{u},\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

يمكن حساب الجداء السلمي لشعاعين بالإسقاط

إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ بجهة واحدة يكون $\theta=0$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$	إذا كان $\vec{u}\neq 0, \vec{v}\neq 0$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$
إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ بجهتان متعاكستان يكون $\theta=\pi$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$	$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

6

خواص في الجداء السلمي

الجداء السلمي تبديلي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

الشعاع ضرب نفسه مربع الطويلة: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

الجداء السلمي يقبل التوزيع على الجمع: $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

الجداء السلمي يقبل التوزيع على الجمع: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

نضرب العددين ببعض والشعاعين ببعض: $(a\vec{u})\times(b\vec{v})=(ab)(\vec{u}\cdot\vec{v})$

7

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w} \not\Leftrightarrow \vec{v}=\vec{w}$

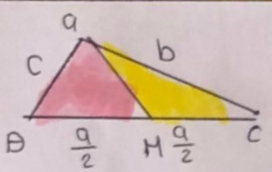
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

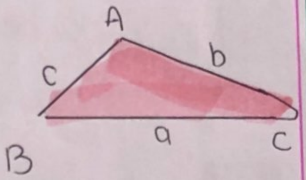
$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}-\vec{w}$

8

علاقة الكاشي: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

مبرهنة المتوسط: $b^2+c^2=2m^2+a^2/2$





$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

9

الطلب: عين a لتكون ABC قائم في B

حيث $A(x_A,y_A,a)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ $C(x_C,y_C,z_C)$

فكرة الحل $\Longleftarrow$ حتى تكون المثلث ABC قائم في B

يجب أن يتحقق $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=0$

نحسب $x_{BA}x_{BC}+y_{BA}y_{BC}+z_{BA}z_{BC}$

10

مثال ص50 حلول يجب مراجعته قبل الامتحان

11

في متوازي الأضلاع مجموع مربعات أطوال الأضلاع يساوي مربعي طولي القطرين

لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d : $d: ax+by+c=0$ $A(x_0,y_0)$

تكون معادلة المستقيم المطلوب $\Delta: a'x+b'y+c'=0$

$d \perp \Delta \Rightarrow \vec{n_d} = \vec{u_\Delta}$: $\vec{n_d}(a,b) = (a',b')$

$(a,b) = \vec{u_\Delta}(-b,a)$

13 اثبات علاقة يجب مراجعتها قبل الامتحان

$$2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

الفكرة الأساسية هنا هي النقلة من العادي لأشعة ♡

$$L_2 = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$
$$= \vec{AB}^2 - \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 - \vec{DA}^2$$
$$= (\vec{AB} - \vec{BC})(\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} - \vec{DA})(\vec{CD} + \vec{DA})$$
$$= (\vec{AB} - \vec{BC})(\vec{AC}) + (\vec{CD} - \vec{DA})(\vec{CA})$$
$$= (\vec{AB} - \vec{BC})(\vec{AC}) + (\vec{CD} - \vec{DA})(-\vec{AC})$$
$$= (\vec{AC})[(\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CD} + \vec{DA})]$$
$$= (\vec{AC})[\vec{DB} - (\vec{BC} + \vec{CD})]$$
$$= (\vec{AC})[\vec{DB} - \vec{BD}]$$
$$= (\vec{AC})[\vec{DB} + \vec{DB}] = 2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = L_1$$

14 ما يدعى أسقط بأشعة حيث يعلم شعاع نعرف أنه متعامد

و يعني بأسقط شعاع على مستوي حوي الشعاع

الآخر مثل تدرب رقم 4 ص 53

15 أي ثلاثة أشعة خاصين من نفس الرأس يعطينا القطر

16 فكرة المسألة 9 ص 68 يهدف الى ايجاد $\cos\alpha$

المحصورة بين OC ، OD'

العمل : نجد $\vec{OD'}$ ، $\vec{OC}$ بعد فرض المعلم ونفرض

نجد $\|\vec{OD'}\|$ ، $\|\vec{OC}\|$ ونعوض بالعلاقة

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OC}\cdot\vec{OD'}}{\|\vec{OC}\|\cdot\|\vec{OD'}\|}$$

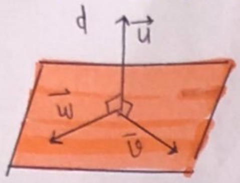
17 يكون الشعاع $\vec{AB}$ غير الصفري ناظم على المستوي

اذا كان المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

18 اذا كان $\vec{u}$ شعاع موجه للمستقيم d عمودياً على زوج

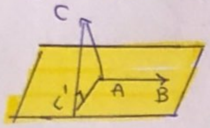
من الأشعة المستقلة خطياً $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ كان $d \perp P$

(هي الفكرة كثير مهمة)



19 نفرض C' المسقط القائم للنقطة (C) على المستوي P

ونفرض أن (AB) محتوى في P عندئذ



20 مبرهنة الأعمدة الثلاث

اذا كان d مستقيم محتوى في P ، A نقطة خارج P

B المسقط القائم لـ A على P
C المسقط القائم لـ B على d
$\Leftarrow$ (AC) و d متعامدان

21 لاثبات تعامد مستقيمان d ، d' يكفي اثبات تعامد

شعاع موجه لـ d مع شعاع موجه لـ d'

22 الأوضاع النسبية لمستويين P_1 ، P_2

حيث n_1 شعاع ناظم لـ P_1

n_2 شعاع ناظم لـ P_2

- $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ P_1 ، P_2 متوازيان أو منطبقان
- $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ليسا مرتبطان $\Leftrightarrow$ P_1 ، P_2 متقاطعان

حالة خاصة $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$ فالمستويان متعامدان

23 لحساب بعد نقطة عن مستوي

$P: ax + by + cz + d = 0$

$A(\alpha, \beta, \gamma)$

$$dis(A,P) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المعادلة الديكارتية لمستوٍ

نفرض المستوي P المار بالنقطة المعلومة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويقبل الشعاع $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً له حيث (a, b, c) ليست كلها أصفاراً ونفرض $M(x, y, z)$ تنتمي لـ P عندئذ المستوي P هو

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

هنا نعوض من الناظم ثم نعوض النقطة لحساب d ثم نعيد كتابة المعادلة الديكارتية معلومة الـ d

25 كيف نطلع معادلة مستوي يلزم نقطة وناظم

26 حين لا يكون $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان

← ننطلق من $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

27 اذا كان $\vec{u}+\vec{v}$ ، $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان يكون لـ $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ الطول نفسه لأن

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0$$

$$\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0$$

$$\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$$

28 اكتب معادلة مستوي P يوازي المستوي Q

$Q: ax+by+cz+d=0$

ونعرف النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

الحل ⇐ ناظم المستوي Q يصلح أن يكون ناظماً لـ P لأنهما متوازيان نكتب المعادلة للمستوي بشكلها العام

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

نعوض $n_Q(a, b, c)$

ثم نعوض بنفس الوقت A

29 حساب البعد بين مستويين

← نفرض نقطة من أحدهما ونحسب بعدها عن الآخر

إما حيث نفرض منها $x, y \xleftarrow{\text{نعوض}}$ نجد z

إما نفرض منها $y, z \xleftarrow{\text{نعوض}}$ نجد x

إما نفرض منها $x, z \xleftarrow{\text{نعوض}}$ نجد y

حسب ما نريد

30 فكرة المسألة 65/4

إيجاد معادلة مستوي P يحوي على مستوي Q ومار من A, B

1. نحسب الشعاع $\vec{AB}$
2. نجد ناظم المستوي P المعطى
3. نتحقق من الارتباط الخطي هاد الخطوة
4. نشكل معادلة ناتجة عن $\vec{AB}=0$
5. نشكل معادلة ناتجة عن $\vec{n_P}=0$
6. نحل المعادلتان بالجمع ونفرض نقطة نعرف ما تكون $n=0$
7. نطلع الناظم ونعوض بالمعادلة العامة هو ونقطة

لأنو لو كانو مرتبطين حصاً كانت طلعت نفس المعادلة يعني يجب أن يتحقق أن $\vec{AB}$ لا يعامد P
$\vec{n_P}$ ، $\vec{AB}$ ليسا مرتبطين

31 فكرة المسألة 69/40

حساب بعد نقطة عن مستوي ما معطى معادلته بل معطى 3 نقاط لا يمر منها فرضاً B, C, D

1. نحسب $\vec{CD}$ ، $\vec{CB}$
2. نتحقق من الارتباط
3. الأشعة غير مرتبطة النقاط تحدد مستوي وحيد
4. نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ حيث $\vec{n} \neq 0$
5. ناظم المستوي يعامد كل من $\vec{CB}$ ، $\vec{CD}$
6. نكمل كالعادة

32 فكرة المسألة 66/5

إثبات تقاطع مستويين بفصل مشترك d وحساب البعد بين A والفصل (مشكلة) المستوي P, Q

1. نحسب $\vec{n_P}$ ، $\vec{n_Q}$
2. نتحقق من الارتباط الخطي
3. غير مرتبطان فالمستويان متقاطعان
4. نوجد مجهولان بدلالة الثالث ونسميه
5. نكتب المعادلات الوسيطية لـ d
6. شعاع توجيه مستقيم له معادلات و
7. نوجد شعاع التوجيه
8. نفرض نقطة $M(x, y, z)$ ونعوض المعادلات في M
9. نحسب $\vec{AM}$
10. بعد نقطة A عن الفصل المشترك ننزل عامود يعني مسقط
11. نبحث عن t التي تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{u}=0$ وطلعت t معوضها بـ

12. لحساب البعد بين A والفصل المشترك هو $\|\vec{AA'}\|$

... 70/16 ... بكتابة معادلة EDC (اضافي)

تم الاثبات في الطلب السابق أن (AB) عمودي على CDE فبالتالي (AB) هو ناظم للمستوى CDE ونعوض احدى النقاط

34 مسالة 70/17 لتعيين احداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC)

1. نوجد معادلة (ABC)
2. من الطلب السابق تم اثبات أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ مستقلين خطياً
3. نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ على (ABC) بشرط أن a,b,c ليست جميعها أصفار
4. نشكل المعادلة $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$
5. نشكل المعادلة $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$
6. نشلف نقطة $a\,|\,b\,|\,c$ ونعوض
7. نعوض في المعادلة العامة ثم نعوض
8. المسقط القائم للنقطة D على ABC تكون شعاعه مرتبط خطياً مع n الناظم حيث $\overrightarrow{DD'}=k\vec{n}$
9. نفرض $D'(x,y,z)$ فينتج ثلاث معادلات بدلالة x, y, z
10. D' تنتمي الى A,B,C فهي تحقق معادلته وبالتالي نعوض معادلات الثلاث بـ (ABC) ونتطلع K ومنها طلعت D'

طريقة ثانية نوجد التمثيل الوسيطي لـ d المار من D وناظم P فيكون $\overrightarrow{n_p}$ هو شعاع توجيه لـ d

$$d:\begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}$$

نعوض بمعادلة المستوي تطلع D'

35 فكرة المسالة 71/24

1. عند اثبات العلاقة واذا أنا ع وقبل الطرف الأول لعند التالي يلاحظ أنو بالطرف التالي في I معناها من المطلق زراعة I

2. $MI^2=r^2$ النقط M تقع على دائرة مركزها I نصف قطرها R

ملاحظة جانبية بحيث أنا أضرب الناظم بعيد بس النقطة لأ

36 مسالة 69/44 كتابة معادلة المستوي IFH

نعرف فيتان ط(1):

1. نطلع شعاعين غير مرتبطين خطياً $\overrightarrow{IH}$ ، $\overrightarrow{IF}$
2. نفرض ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ ليست جميعها أصفار
3. الناظم عمودي على الشعاعين غير المرتبطين خطيا
4. نشكل المعادلة $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HI}=0$

$n\cdot\overrightarrow{IF}=0$

5. نشلف نقطة بيطلعو الباقي

ط(2)

1. المعادلة العامة للمستوي $(IFH): ax+by+cz+d=0$
2. نعوض احداثيات النقطة I في المعادلة العامة

نعوض احداثيات النقطة F في المعادلة العامة

نعوض احداثيات النقطة H في المعادلة العامة

ونحاول ايجاد ثلاث علاقات بدلالة حرف ونأخذ قيمة اختيارية لهذا الحرف

حساب بعد نقطة G عن مستقيم HI

لايجاد التمثيل لمستقيم في الفراغ يلزم نقطة وشعاع توجيه

ط1/ 1. نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (IH)

ويلزم لهذه العملية نقطة منه I / H وشعاع توجيه $\vec{u}=\overrightarrow{IH}$

2. نوجد المعادلات الوسيطية
3. نفرض نقطة $M(x,y,z)$ تقع على (IH) ونعوض التمثيلات فيها
4. نوجد الشعاع $\overrightarrow{GM}$
5. نوجد G' المسقط القائم لـ G على (IH) فنبحث عن t التي تحقق $\overrightarrow{GM}\cdot\vec{u}=0$

ونعوض t' في $\longleftarrow$ G'

والبعد المطلوب هو $\underline{GG'}$

37 يقع مسقط نقطة G عمودياً على P

تكون G واقعة على أحد مستويات هذا المستوى

اذا كان البعد بين G والمستقيم = البعد بين G والمستوي

معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها r

$\Omega(x_0, y_0, z_0)$ $\quad r =$ رقم

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$$

كتابة معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A

1. نحسب $\Omega A = r$ ونكمل كالسابق

39 لنقيس مجموعة النقط $M(x,y,z)$ عند إعطاء معادلة

1. نقسم إلى مربع كاملة ← الانقسام الى مربع كامل نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x ، y ، z
2. ستظهر أحد الأشكال التالية

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0}$$

← مجموعة النقط M تمثل نقطة وحيدة احداثياتها (x_0, y_0, z_0)

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\text{عدد موجب كان}}$$

← مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $\sqrt{\text{عدد موجب}}$

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\text{عدد سالب}}$$

← مجموعة النقاط M تمثل مجموعة خالية من النقاط

40 حساب بعد نقطة A عن الفصل المشترك لمستويين 69/12

1. نتطلع النواظم نتع المستويين ونبرهن أنو غير مرتبطين.
2. من أحد المعادلات للمستويين نطلع مجهولين بدلالة الثالث ونفرض الثالث t
3. نكتب التمثيلات الوسيطية لـ d
4. نفرض نقطة M تنتمي إلى d ونطلع الشعاع التوجيهي لـ d يلي هو أمثال الـ t
5. نوجد المسقط القائم للنقطة A على d ونستنتج t التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

ونعوض t في A' وتكون AA' هو البعد

41 حساب بعد نقطة A عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين

1. B المسقط القائم لـ A على P ، C المسقط القائم لـ B على d] مبرهنة الأعمدة الثلاث فإن C المسقط القائم لـ A على d

42 فكرة المسألة 67/6

إثبات مستقيم يقطع مستوي في نقطة

1. نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم
2. ندرس ~~الارتباط الخطي~~ بين توجيه المستقيم وناظم المستوي
إذا كان الجداء السلمي لهما يساوي الصفر فهما متوازيان
وإذا كان لا يساوي الصفر فهو يقطع المستوي
3. لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيلات في معادلة المستوي

43 مستوي عمودي على مستويين متقاطعين فهو عمودي على فصلهما المشترك معناها الفصل المشترك هو ناظم للمستوي

2018

إذا عندي مستوي Q ومستقيم وبدو نقطة تقاطع
نوجد الفصل المشترك لنحول نعوض بعدين معادلات d في Q
بعد ما فرضنا t وسيط
أو حسب غاوس
وهو شرط غاوس كم الحرف
والتعويض أسهل

وحدة ثالثة

اهم ورقة حل

إذا طلعوا معك أرقام سيئة بالعشري انتبه كلشي غلط

إذا بستخدم الطريقة يلي بدي يكون بجي على غاوس سهلت

$1x+R_1+y$

$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

5