# تحليل المعطيات /السنة الرابعة-إحصاء رياضي/

## المحاضرة السادسة

# جدول المعطيات2

# DATA TABLE2

الدكتورة: فاطمة عبد الرحمن شلاف

**للعام الدراسي 2019-2020**

**تعريف العطالة:**

يعرف المقدار التالي:

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i \|e_i - g\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - g)' M (e_i - g) \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

بعطالة المركبات $e_i$ لمركز الثقل $g_{p\times1}$.

حيث $M$ محددة موجبة التحديد ومتناظرة، وغالباً ماتكون: $M = I_p$ أو $M = V^{-1}$

أي أن العطالة هي مجموع مربعات الأبعاد مع الأخذ بعين الاعتبار الأثقال.

**خواص العطالة:**

١- إذا كان $g = \vec{0}$ فإنه سيكون

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i)' M (e_i)$$

٢- إذا كان لدينا متجه آخر $\bar{a}_{p\times1}$ فتكون العطالة بالنسبة لهذا المتجه الجديد هي:

$$I_a = I_g + \|a - g\|^2$$

البرهان:

حسب تعريف العطالة لدينا:

$$I_a = \sum_{i=1}^{n} p_i \|e_i - a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - a)' M (e_i - a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - g + g - a)' M (e_i - g + g - a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i[(e_i - g) - (a - g)]' M[(e_i - g) - (a - g)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i[(e_i - g)M - (a - g)M]'[(e_i - g) - (a - g)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i[(e_i - g)'M - (a - g)'M][(e_i - g) - (a - g)]$$

وذلك لأن $M$ متناظرة بمعنى $M = M'$

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i(e_i - g)'M(e_i - g)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i(e_i - g)'M(a - g)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} p_i(a - g)'M(e_i - g)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i(a - g)'M(a - g)$$

$$I_a = I_g - 0 - 0 + \|a - g\|^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = I_g + \|a - g\|^2$$

.....................

**مبرهنة1:**

إذا كان لدينا $X_{p\times 1}$ متجهاً عشوائياً عل الفضاء الاحتمالي $[\Omega, \mathrm{F}, p]$ وبفرض أن لدينا:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من المجتمع الاحصائي، وبفرض أن $e_i$ ، $e_r$ متجهان من فضاء العينة فعندئذ يكون:

$$I_g = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} p_i p_r \|e_i - e_r\|^2$$

وهذا يعني أن العطالة تساوي نصف مربع البعد بين $e_i$ ، $e_r$

**<u>مبرهنة</u>2:**

إذا كان لدينا $X_{p\times 1}$ متجهاً عشوائياً عل الفضاء الاحتمالي $[\Omega, \mathrm{F}, p]$ فعندئذ: العطالة هي الأثر لجداء المصفوفة المحددة الموجبة والمتناظرة $M$ بمصفوفة تمام التباين.

$$I_g = Tr(M\Sigma)$$

**البرهان:**

لدينا من تعريف العطالة:

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - g)' M (e_i - g)$$

$$I_g = Tr\left(\sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - g)' M (e_i - g)\right) = \sum_{i=1}^{n} Tr[p_i (e_i - g)' M (e_i - g)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i Tr[M(e_i - g)'(e_i - g)]$$

$$= Tr\left[M \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i - g)'(e_i - g)\right]$$

$$= Tr\left[M \sum_{i=1}^{n} p_i (e_i e'_i - e_i g' - g e'_i + g g')\right]$$

$$= Tr\left[M(\sum_{i=1}^{n} p_i e_i e'_i - \sum_{i=1}^{n} p_i e_i g' - \sum_{i=1}^{n} p_i g e'_i + \sum_{i=1}^{n} p_i g g')\right]$$

$$I_g = Tr[M(X'DX - gg' - gg' + gg')]$$

$$I_g = Tr(M\Sigma)$$

............

**حالة خاصة:**

١- إذا كان $M = I_p$ فإن:

$$I_g = Tr(M\Sigma) = Tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$$

٢- إذا كان $M = V^{-1}$ فسيكون:

$$I_g = Tr(V^{-1}\Sigma)Tr\left(V^{-\frac{1}{2}}\Sigma V^{-\frac{1}{2}}\right) = Tr(\rho)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdot & \cdot & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdot & \cdot & \rho_{2p} \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & . & . & 1 \end{bmatrix}_{p\times p} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p\text{مرة}} = p$$

**نتيجة:**

العطالة بالنسبة لمركز الثقل تساوي عدد المتغيرات في حال كان $M = V^{-1}$

**مثال:**

لتكن لدينا مصفوفة المعطيات التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

١– أوجد التوقع الرياضي ومصفوفة التباين والجدول المعياري لمصفوفة المعطيات.

٢– أحسب العطالة لمركز الثقل في الحالة: $M = I_p$ و $M = V^{-1}$

٣– أحسب العطالة بالنسبة للمتجه $a = (1\ \ 1\ \ 1)$ في الحالة: $M = I_p$ و$M = V^{-1}$

1- التوقع الرياضي لمصفوفة المعطيات

أولا نقوم بحساب مركز الثقل للمصفوفة:

$$g = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون التوقع الرياضي:

$$E(X) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ثانياً مصفوفة التباين:

$$\Sigma = X'DX - gg'$$

$$\Sigma = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} * [2 \quad 2 \quad 2]$$

$$\Sigma = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ثالثاً الجدول المعياري:

$$Z = YV^{-\frac{1}{2}} = (X - E(X))V^{-\frac{1}{2}}$$

$$Z = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- العطالة لمركز الثقل في الحالتين: $M = I_p$ و $M = V^{-1}$

$$Ig = Tr(M\Sigma)$$

$$Ig = Tr\left(I_p\Sigma\right) = 2$$

$$Ig = Tr\left(V^{-1}\Sigma\right) = 3$$

3- العطالة بالنسبة للمتجه $a = (1 \quad 1 \quad 1)$ في الحالتين: $M = I_p$ و $M = V^{-1}$

$$Ia = Ig + \|g - a\|^2$$

$$\|g - a\|^2 = (g - a)'M(g - a)$$

من أجل: $M = I_p$

$$\|g - a\|^2 = (g - a)'^{I_p}(g - a) = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$Ia = Ig + \|g - a\|^2$$

$$Ia = 2 + 3 = 5$$

من أجل: $M = V^{-1}$

$$\|g - a\|^2 = (g - a)'V^{-1}(g - a) = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$Ia = Ig + \|g - a\|^2$$

$$Ia = 3 + 5 = 8$$