البحث السادس: التابع الأسي e^{x}

ندعو e عدد نيبري وقيمته $e \simeq 2,7$

لإيجاد مجموعة التابع الأسي $e^{g(x)}$

معرف بل يقبل مجموعة تعريف $g(x)$ يعني كانوا ما هي e

خواص في التابع الأسي:

1- $e^{0} = 1$

2- $\ln e^{g(x)} = g(x)$

3- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$

4- $e^{-\infty} = 0$

5- $e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$

6- $e^{+\infty} = +\infty$

7- $(e^{a})^{b} = e^{a \cdot b}$

8- $\dfrac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$

تكرورية: دائماً $e^{g(x)} > 0$

حل المعادلات والمتراجحات الأسية: هامة

يعطينا في نص السؤال $e^{g(x)} \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} e^{h(x)}$ حيث $g(x)$ ، $h(x)$ توابع

خطواتها: 1 نوجد مجموعة تعريف $D_{g(x)}$ ، $D_{h(x)}$

2- تقاطع $D_{الحل} = D_{h(x)} \cap D_{g(x)}$

3 $\cancel{e}^{h(x)} \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} \cancel{e}^{g(x)}$

$\Downarrow$

$h(x) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} g(x)$

ننقل إلى جهة واحدة ثم نحل معادلة (درجة أولى - درجة ثانية ...الخ)

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧
الأستاذ : أحمد تكروري

③/186: حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

① - $e^{3-x} = 1$

$e^{3-x} = e^{0}$ شرط التعريف $x \in R$

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

② - $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

شرط التعريف $x \in R$

$\cancel{e}^{2x^2+3} = \cancel{e}^{7x} \Rightarrow 2x^2 + 3 = 7x$

$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x-3) = 0$

إما $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

③ - $\dfrac{e^{x}}{1-2e^{x}} = 5$

شرط التعريف $1 - 2e^{x} \neq 0 \Leftarrow 1 \neq 2e^{x} \Leftarrow e^{x} \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \neq \ln(\frac{1}{2})$

$\dfrac{e^{x}}{1-2e^{x}} = \dfrac{5}{1} \Rightarrow e^{x} = 5 - 10e^{x}$

$\Rightarrow 11e^{x} = 5 \Rightarrow e^{x} = \dfrac{5}{11}$

$x = \ln(\frac{5}{11})$

④ - $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x+2}}$

شرط التعريف IR

$\dfrac{2}{e^{x}} = \dfrac{1}{e^{x+2}} \Rightarrow 2e^{x} \cdot e^{2} = e^{x}$

$\Rightarrow 2e^{x} \cdot e^{2} - e^{x} = 0$

$(2e^{2} - 1)e^{x} = 0 \Rightarrow$ إما $2e^{2} - 1 \neq 0$

أو $e^{x} = 0$ مستحيلة الحل

⑤ $\ln(e^x - 2) = 3$

شرط التعريف

$e^x - 2 > 0$

$e^x > 2 \Rightarrow x > \ln(2)$

$\ln(e^x - 2) = \ln(e^3)$

$e^x - 2 = e^3$

$e^x = 2 + e^3$

$x = \ln(2 + e^3)$ مقبول

⑥ $\ln(2 - e^x) \geq 3$

شرط التعريف

$2 - e^x > 0$

$2 > e^x$

$\ln(2) > x$

$\ln(2 - e^x) \geq \ln(e^3)$

$2 - e^x \geq e^3$

$e^x \leq 2 - e^3$

وهي معادلة مستحيلة الحل لأن

$2 - e^3 < 0$

لا تقلقوا

⑦ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$

شرط التعريف $x \in \mathbb{R}$

$e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$

$x^2 - 2 \leq 4 - x$

$x^2 + x - 6 \leq 0$

تكميلية : تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$x = -3 \qquad x = 2$

$-\infty$		-3		2		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow x \in [-3, 2]$

⑧ $(e^x - 1)\cdot(e^x - 4) < 0$

شرط التعريف $x \in R$

$(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

نفرض : $e^x = t$

$(t - 1)\cdot(t - 4) < 0$

$t = 1 \qquad t = 4$

$-\infty$		1		4		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow t \in]1, 4[$

$e^x \in]1, 4[$

$\Rightarrow x \in]\ln(1), \ln(4)[$

$x \in]0, \ln(4)[$

4 / ص19 : حل المعادلات الآتية:

1" $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

تكرورية: دائماً عند وجود e^{2x} في المعادلة نفرض $e^{x} = t$

الحل: نفرض $e^{x} = t$

$(e^{x})^2 - 5e^{x} + 4 = 0$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

إما $t-1 = 0 \Rightarrow t = 1$

$e^{x} = 1 \xrightarrow{\ln} x = 0$ مقبول

$t = 4 \Rightarrow e^{x} = 4 \xrightarrow{\ln} x = \ln(4)$ مقبول

2" $4e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$

$4(e^{x})^2 - e^{x} + 2 = 0$

نفرض $e^{x} = t$

$4t^2 - t + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(4)(2)$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

3" $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

$(e^{x})^2 - e^{x} - 6 = 0$

نفرض $e^{x} = t$

$t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

$t = 3 \Rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$ مقبول

$t = -2 \Rightarrow e^{x} = -2$ مرفوض

4" $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$(e^{-x})^2 - 7e^{-x} + 6 = 0$

نفرض $e^{-x} = t$

$t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-1)(t-6) = 0$

$t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow -x = 0$

$x = 0$ مقبول

$t = 6 \Rightarrow e^{-x} = e^{\ln(6)}$

$\Rightarrow -x = \ln(6)$

$\Rightarrow x = -\ln(6)$

5 / ص19 : حل المتراجحات الآتية:

1" $e^{x} + 4e^{-x} \leq 5$

تكرورية: عندما نرى e^{x} و e^{-x} بنفس المعادلة نضرب الأطراف بـ e^{x} حيث $e^{x} \cdot e^{-x} = 1$

الحل: نضرب الأطراف بـ e^{x}

$e^{2x} + 4 \leq 5e^{x}$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 \leq 0$

نفرض $e^{x} = t$

$t^2 - 5t + 4 \leq 0$

ترتيب + متراجحة = دراسة إشارة

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

إما $t = 1$

أو $t = 4$

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧
الأستاذ : أحمد تكروري

نهايات التابع الاسي :

$x < e^{x}$

① - $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

② - $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

③ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$ ④ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0$

⑤ - $\lim_{x \to -\infty} (x^{n} \cdot e^{x}) = 0$

⑥ - $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \right) = 1$

كيف نزيل حالات التعيين في التابع الاسي !

① - إخراج عامل مشترك e^{-x}, e^{x}, x

② تفريق الكسور (تفريق البسط بالمقام)

$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$

مشتق التابع الاسي :

$f(x) = e^{g(x)}$; $g(x)$ تابع

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

أي أن مشتق التابع الاسي = مشتق الاس X التابع نفسه

t	$-\infty$		1		4		$+\infty$
t^2-5t+4		+	0	—	0	+	
متراجحة		غير محقق		محقق		غير محقق	

$t \in [1, 4]$

$e^{x} \in [1, 4]$

$\xRightarrow{\ln} x \in [\ln(1), \ln(4)]$

$x \in [0, \ln(4)]$

أثبت صحة المساواة

$\ln(e^{x}+1) - \ln(e^{-x}+1) = x$

$\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{-x}+1}\right) = \ln\left(\frac{e^{+x}(1+\cancel{e^{-x}})}{\cancel{e^{-x}+1}}\right)$

$= \ln(e^{x}) = x$

لا تقلقوا ...

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

① 194/ : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = exp\left(\frac{1}{2} - x^2\right) = e^{\left(\frac{1}{2} - x^2\right)}$$

1- احسب نهاية f عند $+\infty$ ، $-\infty$ واكتب معادلة كل مقارب للخط C

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $\mp\infty$

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وعيّن القيمة الحدية للتابع

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال

$$]-\infty , +\infty[$$

$$f'(x) = -2x \cdot e^{\left(\frac{1}{2} - x^2\right)}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-2x \cdot e^{\left(\frac{1}{2} - x^2\right)} = 0$$

أما

$$e^{\left(\frac{1}{2} - x^2\right)} > 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

$f(0) = \sqrt{e}$ قيمة حدية كبرى

3- اكتب معادلة المماس d للخط C في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$

ينعدم المشتق الأول في النقطة $A(0, \sqrt{e})$

ومعادلة المماس : $y = \sqrt{e}$

المماس في القيمة الحدية يكون مستقيماً "أفقياً"

4- أوجد إحداثيات النقطتين التي ينعدم فيها $f''(x)$ واكتب معادلتي المماس d_1 , d_2 فيها

$$f''(x) = -2 e^{\frac{1}{2} - x^2} + \left(-2x \cdot e^{\frac{1}{2} - x^2}\right)(-2x)$$

$$f''(x) = \left[-2 + 4x^2\right] e^{\frac{1}{2} - x^2}$$

$$f''(x) = 0$$

$$\left[-2 + 4x^2\right] \cdot e^{\frac{1}{2} - x^2} = 0$$

$$e^{\frac{1}{2} - x^2} > 0$$

$$-2 + 4x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{0} = 1$

$A_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

$m_1 = f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$m_1 = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow y_1 - 1 = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$

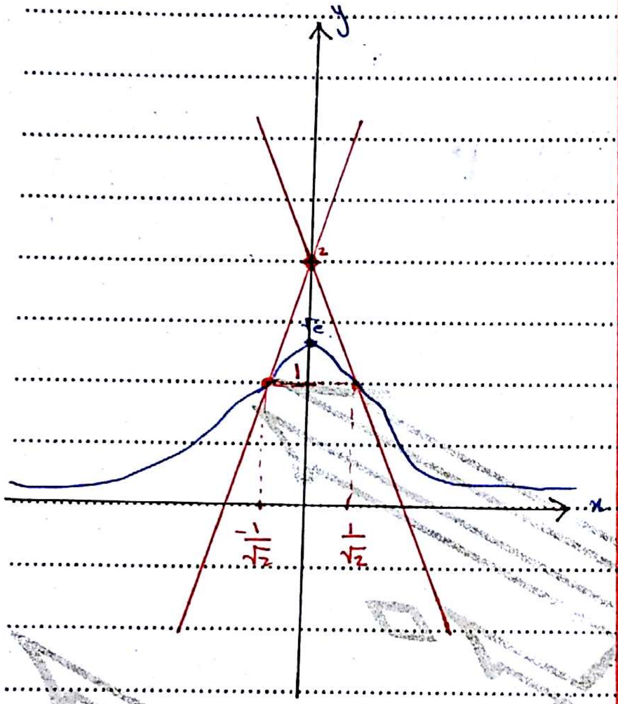
$y_1 = -\sqrt{2}\,x + 2$

$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{0} = 1$

$m_2 = f'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2(\frac{-1}{\sqrt{2}}) \cdot e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$y_2 - 1 = \sqrt{2}(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow y_2 = \sqrt{2}\,x + 2$



5. ارسم الخط البياني C ومماساته

الرسم: 1- مقاربات + معادلة مماس

مماس أفقي: $y = \sqrt{e}$

$d_1 : y_1 = -\sqrt{2}\,x + 2$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	2	1

$y_2 = \sqrt{2}\,x + 2$

x	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	2	1

2/194 : f و g تابعان معرفان على R بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

وليكن h المعرف وفق $h = \frac{g}{f}$ أثبت أن $h' = \frac{1}{f^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = f(x)$$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$h'(x) = \frac{g' \cdot f - f' \cdot g}{f^2} = \frac{f \cdot f - g \cdot g}{f^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x}\right)}{f^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{4}\left[\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}\right]}{f^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{4}[4]}{f^2} = \frac{1}{f^2}$$

وهو المطلوب.

Scanned by CamScanner

عندما يكون لدينا تابع من الشكل

$f(x) = a^x$; a بدوره موجب

كيف نحولها إلى تابع e : exp

$f(x) = e^{x \cdot \ln(a)}$

مثال:

① $f(x) = 3^x$

$f(x) = e^{x \cdot \ln(3)}$

② $f(x) = 4^{x+1}$

$f(x) = e^{(x+1)\ln(4)}$

حالة عدم تعيين من الشكل $(1)^\infty$

احسب نهاية التوابع الآتية عند a :

① - $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; $a = 0$

صيغة ثانية إلى السؤال

أثبت أن $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

الحل:

$\lim\limits_{x \to 0} (1+1)^{\frac{1}{0}} = (1)^\infty$

ع . ت

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = a = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$

② - $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ $a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (1)^\infty$ ع . ت

لنفرض $\frac{1}{x} = t \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty \quad t \to 0$

$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}$

$f(t) = e^{\frac{1}{t} \cdot \ln(1+t)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(t) = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e^1$

$= e$

①/199 : ادرس نهاية كل من التابعين عند حدود مجموعة التعريف :

① - $f(x) = \ln(x) - e^{x}$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty - 1 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ع.ت

$\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{\ln x}{x} - \frac{e^{x}}{x}\right]$

$= +\infty\,[0 - (+\infty)] = -\infty$

② - $g(x) = \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

$D = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\infty}{\infty}$ ع.ت

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}\left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1 + \frac{1}{e^{x}}\right)}$

$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

③ $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$; $a = +\infty$

$\lim f(x) = (1)^{\infty}$ ع.ت

نضيف ونطرح واحد في البسط

$f(x) = \left(\frac{x - 1 + 1 + 3}{x - 1}\right)^{\frac{x}{2}}$

$f(x) = \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

$f(x) = \left[\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}$

نفرض $\frac{4}{x-1} = t \Leftarrow \frac{x-1}{4} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow x - 1 = \frac{4}{t} \Rightarrow x = 1 + \frac{4}{t}$

$x \to +\infty \quad t \to 0$

$f(t) = \left[(1+t)^{1+\frac{4}{t}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[(1+t)^{\frac{4}{t}} \cdot (1+t)^{1}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[\left[\left(\underbrace{e^{\frac{1}{t}(1+t)}}_{x \to 0,\ 1}\right)^{4}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x \to 0} (e^{4})^{\frac{1}{2}} \cdot (1+0)^{\frac{1}{2}}$

$e^{2} \cdot 1 = e^{2}$

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

الأستاذ : أحمد تكروري

② / 199 : ليكن الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = (3-x)\,e^{x}$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3.e^{x} - x.e^{x})$

$= (3)(0) - 0 = 0$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$f'(x) = -1\,e^{x} + e^{x}(3-x)$

$f'(x) = (-1+3-x)\,e^{x}$

$f'(x) = (2-x)\,e^{x}$

لنضع $f'(x) = 0$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

$f(2) = (3-2)\,e^{2} = e^{2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{2}	$\searrow$	$-\infty$

2- اكتب معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$

$f''(x) = -1\,e^{x} + e^{x}(2-x)$

$f''(x) = (-1+2-x)\,e^{x}$

$f''(x) = (1-x)\,e^{x}$

لنضع: $f''(x) = 0$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$

لأن $e^{x} > 0$

$f(1) = (3-1)e^{1} = 2e$

$\Rightarrow$ نقطة التماس $N(1, 2e)$

$m = f'(1) = (2-1)\,e^{1} = e$

$y - y_0 = m(x-x_0)$

$y - 2e = e(x-1)$

معادلة المماس $y = ex + e$

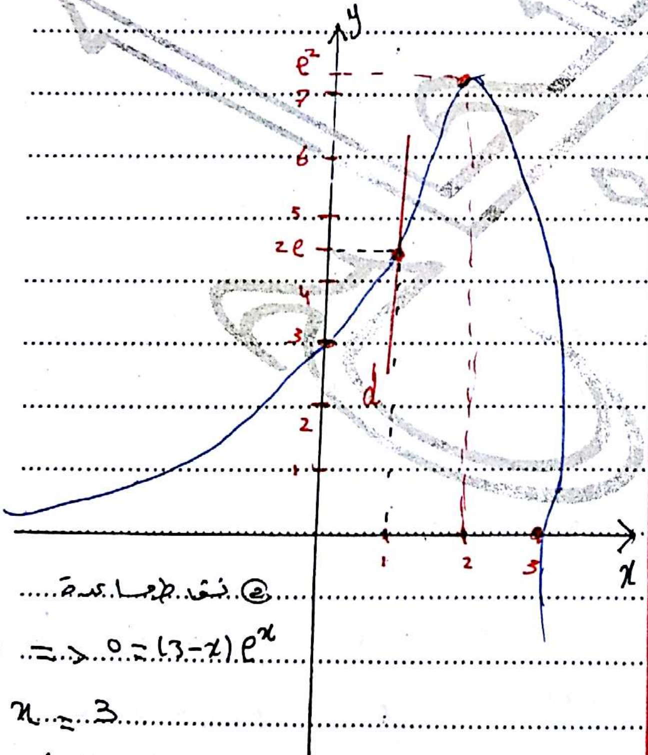
3- ارسم C و d

① المقاربات + معادلات

$y=0$ أفقي

معادلة مماس $y = ex + e$

x		
y		



② نقط التقاطع

$y=0 \Rightarrow 0=(3-x)e^{x}$

$x=3$

$(3, 0)$

Scanned by CamScanner

② / 203 : حل المعادلة أو المتراجحة المعطاة :

① $(7)^{x-1} = (3)^{x}$

$e^{(x-1)\ln(7)} = e^{x\ln(3)}$

$x\ln7 - 1\ln7 = x\ln3$

$x\ln7 - \ln7 - x\ln(3) = 0$

$x\underbrace{(\ln7 - \ln3)}_{\ln\frac{7}{3}} = \ln7$

$x = \dfrac{\ln7}{\ln\frac{7}{3}}$

② $(3)^{x} = (4)^{2x+1}$

$e^{x\ln3} = e^{(2x+1)\ln(4)} \iff x\ln3 = (2x+1)\ln(4)$

$x\ln3 = 2x\ln4 + \ln(4)$

$x\ln3 - 2x\ln4 = \ln(4)$

$x(\ln3 - 2\ln4) = \ln4$

$x(\ln3 - \ln16) = \ln4$

$x\left(\ln\frac{3}{16}\right) = \ln4$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln(4)}{\ln\frac{3}{16}}$

③ $(3)^{x} > 4$

$e^{x\ln3} > e^{\ln4} \iff x\ln3 > \ln4$

$x > \dfrac{\ln4}{\ln3} \Rightarrow x \in \left]\dfrac{\ln4}{\ln3}, +\infty\right[$

④ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 4$

$e^{x\ln\frac{1}{3}} > e^{\ln4} \iff x\ln\frac{1}{3} > \ln4$

$-x\ln3 > \ln4$

$x < \dfrac{\ln4}{-\ln3}$

$x \in \left]-\infty, -\dfrac{\ln4}{\ln3}\right[$

⑤ $(5)^{-x} < (5)^{2x}$

$e^{-x\ln5} < e^{2x\ln5} \iff -x\ln5 < 2x\ln5$

$-x < 2x \Rightarrow 0 < 3x$

$x > 0$

$\Rightarrow x \in]0, +\infty[$

⑥ $\dfrac{(2)^{x}}{(2)^{x}+1} < \dfrac{1}{3}$

نضرب ب $3[(2)^{x}+1] > 0$

$3(2)^{x} < (2)^{x}+1$

$3(2)^{x} - (2)^{x} < 1$

$2(2)^{x} < 1$

$(2)^{x+1} < 1$

$e^{(x+1)\ln(2)} < e^{0} \iff (x+1)\ln(2) < 0$

$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$x \in]-\infty, -1[$

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

③ / 203 : حل كلاً من المعادلات والمتراجحات الآتية :

① $(4)^x + (2)^{x+1} - 3 = 0$

$(4)^x + (2)^{x+1} - 3 \le 0$

الحل

المعادلة:

$[(2)^2]^x + (2)^x \cdot (2)^1 - 3 = 0$

$[(2)^x]^2 + (2)^x \cdot (2)^1 - 3 = 0$

نفرض أن $2^x = t$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

إما $t = -3 \Rightarrow (2)^x = -3$ مستحيلة الحل

أو $t = 1 \Rightarrow (2)^x = 1$

$(2)^x = (2)^0 \Rightarrow x = 0$

المتراجحة: بالاعتماد على الحالة السابقة

$t^2 + 2t - 3 \le 0$

تربيع متراجحة = دراسة إشارة

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$t = 1 \qquad t = -3$

$+ \quad -3 \quad - \quad 1 \quad +$

$t \in [-3, 1]$

$(2)^x \in [-3, 1]$; $2^x > 0$

$(2)^x \in]0, 1]$

$e^{x \cdot \ln 2} \in]0, 1]$

$\xrightarrow{\ln} x \cdot \ln 2 \in]-\infty, 0[$

$x \in]-\infty, 0[$

② $(2)^{x+1} - 10(2)^x + 12 = 0$

$(2)^{x+1} - 10(2)^x + 12 \ge 0$

المعادلة:

$2(2)^x - 10(2)^x + 12 = 0$

$-8(2)^x = -12$

$(2)^x = \frac{-12}{-8}$

$(2)^x = \frac{3}{2} \Rightarrow e^{x \cdot \ln 2} = e^{\ln \frac{3}{2}}$

$x \cdot \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

$x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}$

المتراجحة: بالاعتماد على السابقة

$2(2)^x - 10(2)^x \ge -12$

$-8(2)^x \ge -12$

$(2)^x \le \frac{3}{2}$

$x \le \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}$

$x \in]-\infty, \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2}[$

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

③ $(3)^{x+1} + 2(3)^{-x} = 7$

$(3)^{x+1} + 2(3)^{-x} \geq 7$

المعادلة: $(3)^{x+1} + 2(3)^{-x} = 7$

نضرب في $(3)^x$; $(3)^x > 0$: $(3)^x \cdot (3)^{x+1} + 2(3)^0 = 7(3)^x$

$(3)^{2x+1} - 7(3)^x + 2 = 0$

$(3)^{2x} \cdot (3)^1 - 7(3)^x + 2 = 0$

$3((3)^x)^2 - 7(3^x) + 2 = 0$

نفرض $3^x = t$

$3t^2 - 7t + 2 = 0$

$(t-2)(3t-1) = 0$

إما $t = 2 \Rightarrow (3)^x = 2$

$e^{x \cdot \ln 3} = e^{\ln 2}$

$x \cdot \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

أو $t = \frac{1}{3} \Rightarrow (3)^x = \frac{1}{3}$

$e^{x \cdot \ln 3} = e^{\ln \frac{1}{3}}$

$x \cdot \ln 3 = \ln \frac{1}{3}$

$x = \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln 3} = \frac{-\ln 3}{\ln 3} = -1$

المتراجحة: $(3)^{x+1} - 2(3)^{-x} \geq 7$

وبالاعتماد على الحالة السابقة

$3t^2 - 7t + 2 \geq 0$

تربيعية متراجحة = دراسة إشارة

$t = 2$, $t = \frac{1}{3}$

$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$t \in]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [2, +\infty[$; $t = 3^x$

$3^x \in]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [2, +\infty[$

$e^{x\ln 3}$]

$x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$

لا تقلقوا

④ 203/ ليكن الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = 2^{(x^2-2x)}$$

① - ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f(x) = e^{(x^2-2x)\ln(2)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{(-\infty)^2 . \ln 2} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{(+\infty)^2 . \ln 2} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$f'(x) = (2x-2)\, e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x-2=0$$

$e^{(x^2-2x)\ln 2} > 0$ لأن

$$2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$f(1) = (2)^{1-2} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

② - اكتب معادلة d مماس الخط C في النقطة التي تعدم $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$(1, \frac{1}{2})$ نقطة التماس

$$f'(1) = 0 = m$$

$$y = \frac{1}{2}$$

③ - ارسم C , d

الرسم:

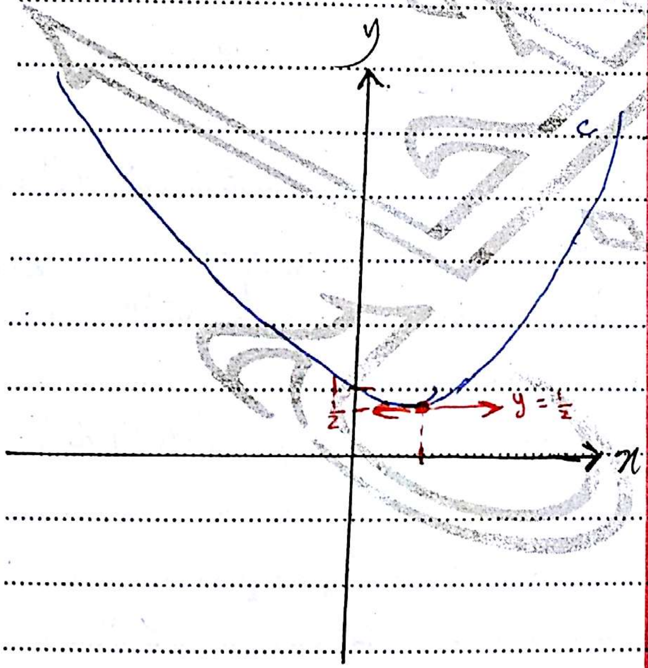
① مقاربات + معادلة مماس

$y = \frac{1}{2}$ مماس أفقي

نقاط مساعدة

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$(0,1)$



Scanned by CamScanner

8/ 3.2: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\,(2)^{-x}$ ادرس تغيراته وارسم مخطط البياني.

$f(x) = x \cdot e^{-x\cdot\ln 2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\; e^{-(-\infty)}$$
$$= (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\frac{x}{e^{x\cdot\ln 2}}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x\cdot\ln 2}{e^{x\cdot\ln 2}}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}(0) = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = (1)\left(e^{-x\cdot\ln 2}\right) + \left(-\ln 2\cdot e^{-x\cdot\ln 2}\right)x$$
$$f'(x) = e^{-x\cdot\ln 2}\left[1-(\ln 2)x\right]$$
$$f'(x)=0$$
$$e^{-x\cdot\ln 2} > 0$$
$$1-\ln(2)\cdot x = 0$$
$$x = \frac{1}{\ln(2)}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{-\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e\cdot\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\cdot\ln 2}$	$\searrow$	0

الرسم:

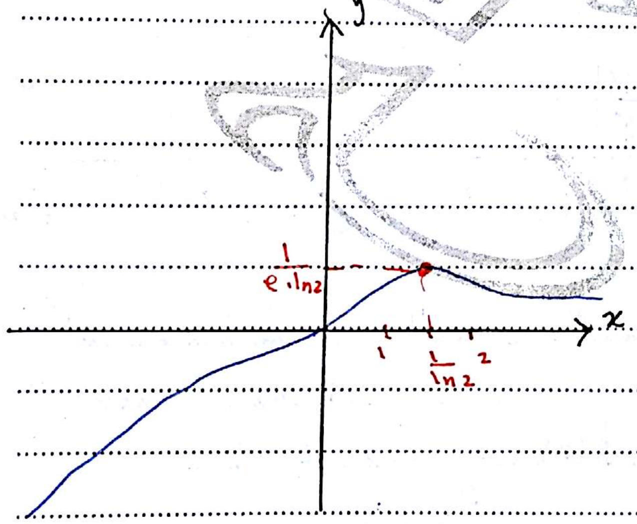
1) المقاربات + ~~معادلة مماس~~

$y=0$ مقارب أفقي

2) نقاط مساعدة

$x=0 \Rightarrow f(0)=e^{0}$

$\Rightarrow (0,0)$



⑨ 2د3/ : ليكن f التابع المعرف على R وفق

$$f(x) = (4)^x - (2)^{x+2}$$

ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني

$$f(x) = [(2)^2]^x - (2)^{x+2}$$

$$f(x) = (2)^{2x} - (2)^{x+2}$$

$$f(x) = e^{2x \cdot \ln 2} - e^{(x+2)\ln 2}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad \text{ع . ت . ع}$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln 2} \cdot e^{x \cdot \ln 2} - e^{x \cdot \ln 2} \cdot e^{2 \cdot \ln 2}$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln 2}\left[e^{x \cdot \ln 2} - e^{2 \cdot \ln 2}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\left(+\infty - e^{2 \cdot \ln 2}\right) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 2 \cdot e^{2x \cdot \ln 2} - \ln 2 \, e^{(x+2)\ln 2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 2 \, e^{x \ln 2} \cdot e^{x \cdot \ln 2} - \ln 2 \, e^{x \cdot \ln 2} \cdot e^{2 \ln 2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 2 \, e^{x \cdot \ln 2}\left[2 e^{x \cdot \ln 2} - e^{2 \cdot \ln 2}\right]$$

$$f'(x) = 0$$

$$\ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} > 0$$

$$2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} - e^{2 \cdot \ln 2} = 0$$

$$2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = e^{2 \cdot \ln 2}$$

$$e^{\ln 2} \cdot e^{x \cdot \ln 2} = e^{2 \cdot \ln 2}$$

$$e^{x \cdot \ln 2 + \ln 2} = e^{2 \cdot \ln 2}$$

$$x \cdot \ln 2 + \ln 2 = 2 \cdot \ln 2$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln 2$$

$$x = 1$$

$$f(1) = (4)^1 - (2)^{1+2}$$

$$f(1) = 4 - 8 = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-4	↗	$+\infty$

الرسم:

① مقاربات: $y = 0$ أفقي

② نقاط مساعدة: $x = 0 \Rightarrow f(0) = (4)^0 - (2)^2 = -3$

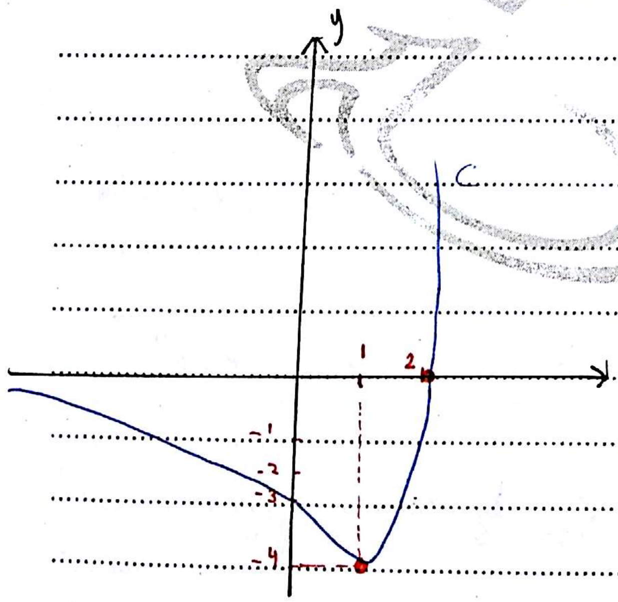
$(0, -3)$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = (4)^x - (2)^{x+2}$$

$$\Rightarrow (2)^{x+2} = (4)^x \Rightarrow (2)^{x+2} = ((2)^2)^x$$

$$\Rightarrow (2)^{x+2} = (2)^{2x} \Rightarrow x + 2 = 2x$$

$x = 2$ $\quad (2, 0)$



(١٥) /203 : ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$f(x) = (1-x)\cdot(2)^x$

ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

$f(x) = (1-x)\, e^{x\cdot\ln 2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

ع.ت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)(0)$

نضرب ونقسم $\ln 2$

$f(x) = e^{x\cdot\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\, x\cdot\ln 2\, e^{x\cdot\ln 2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - \frac{1}{\ln 2}(0) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$f'(x) = (-1)\cdot e^{x\cdot\ln 2} + \ln 2\cdot e^{x\cdot\ln 2}\cdot(1-x)$

$f'(x) = e^{x\cdot\ln 2}\left[-1+\ln 2-\ln 2\cdot x\right]$

$e^{x\cdot\ln 2} > 0$; $f'(x) = 0$

$-1+\ln 2-\ln 2\cdot x = 0$

$x = \frac{-1+\ln 2}{\ln 2} = \frac{-1}{\ln 2} + 1$

$f\left(\frac{-1}{\ln 2}+1\right) = \left(\cancel{1}+\frac{1}{\ln 2}-\cancel{1}\right)\cdot e^{\left(\frac{-1}{\ln 2}+1\right)\cdot\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{-1+\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\, e^{-1}\cdot e^{\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{e}\cdot 2 = \frac{2}{e\cdot\ln 2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}+1$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e\cdot\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$

الرسم :

① مقاربات : $y=0$ أفقي

② نقاط مساعدة :

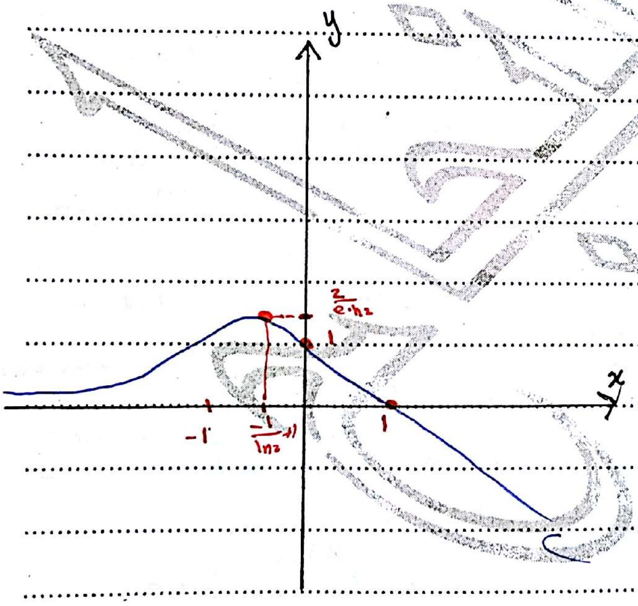
$x=0 \Longrightarrow$

$f(0) = (1-0)(2)^0 = 1$ $(0,1)$

$y=0 \Longrightarrow 0 = (1-x)(2)^x$

$x=1 \Longleftarrow x-1=0 \Longleftarrow (2)^x > 0$

$(1,0)$



المعادلات التفاضلية :

كل معادلة تحوي y'

لها شكلين :

شكل أول : قطعتين $y' = ay$

حله $f(x) = y = k\,e^{ax}$

شكل ثاني : ثلاث قطع $y' = ay - b$

حله $f(x) = y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

تكرورية : في المعادلات التفاضلية فقط

$y \xrightarrow{'} y'$

$ay \xrightarrow{'} ay'$

$y^2 \xrightarrow{'} 2yy'$

205/1 : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

① $y' = 3y$

$a = 3$

حلها $f(x) = k\,.\,e^{ax}$

$f(x) = k\,.\,e^{3x}$

② $y' + 2y = 0$

$y' = -2y \Rightarrow a = -2$

حلها $f(x) = k\,.\,e^{-2x}$

③ $3y' = 5y$

دائماً يلزم تخلي اجمال y' واحد

$y' = \frac{5}{3}y \Rightarrow a = \frac{5}{3}$

حلها $f(x) = k\,.\,e^{\frac{5}{3}x}$

④ $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y$

$y' = \frac{-3}{2}y$

$f(x) = k\,.\,e^{-\frac{3}{2}x}$

205/2 : فيما يأتي عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى :

① $y' = 2y$; $f(0) = 1$

$a = 2$

$y = k\,.\,e^{ax}$

حلها $y = k\,.\,e^{2x}$

لكن $f(0) = 1$ $\quad 1 = k\,e^{2(0)}$

$k = 1$

حل المعادلة $f(x) = 1\,.\,e^{2x}$

② $y' + 5y = 0$; يمر من C $A(-2, 1)$

$y' = -5y \Rightarrow a = -5$

حلها $f(x) = k\,e^{-5x}$

$1 = k\,.\,e^{-5(-2)} \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}}$

$f(x) = e^{-5x-10}$

③ $y' + 2y = 0$

وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 يساوي $\frac{1}{2}$

$y' = -2y \Rightarrow a = -2$

حلها العام

$f(x) = k \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = -2k \cdot e^{-2x}$

$f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2k \cdot e^{-2(-2)}$

$\frac{1}{2} = -2k\, e^{4}$

$\Rightarrow k = \frac{-1}{4e^{4}}$

$f(x) = \frac{-1}{4 \cdot e^{4}} \cdot e^{-2x} = -\frac{1}{4}\, e^{-2x-4}$

③/205 : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

① $y' = 2y + 1$ $\quad a = 2 \quad b = 1$

$f(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$

$f(x) = k \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}$

② $y + 3y' = 2$

$3y' = -y + 2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

$f(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}$

$f(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{3}} + 2$

③ $2y' = y - 1$

$y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$f(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 1$

④ $2y + 3y' - 1 = 0$

$3y' = -2y + 1 \Rightarrow y' = \frac{-2}{3}y + \frac{1}{3}$

$f(x) = e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$

~~$f'(x)$~~