أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في النهايات والاشتقاق للثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

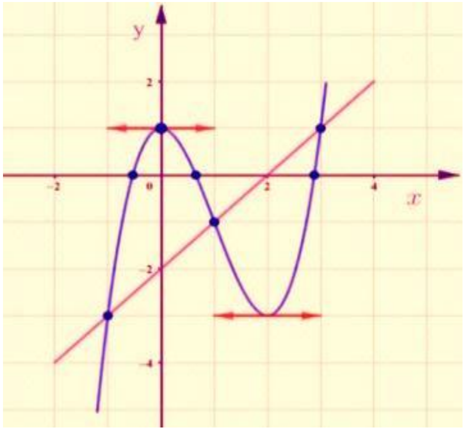
كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :

تأمل الشكل المرسوم جانبا ، الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :



❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ❷ جد $f\,(\,]-1,2[\,)$

❸ جد حلول المعادلة $f\,(x\,) = y_\Delta$ ❹ جد حلول المعادلة $f\,(x\,) = 1$

❺ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❻ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

❼ دل على القيم الحدية للتابع وبين نوعها

❽ جد $f\,(\,2\,)$ و $f'(\,2\,)$ ❾ جد $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-1}{x}$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ $f\,(\,]-1,2[\,) =]-3,1]$

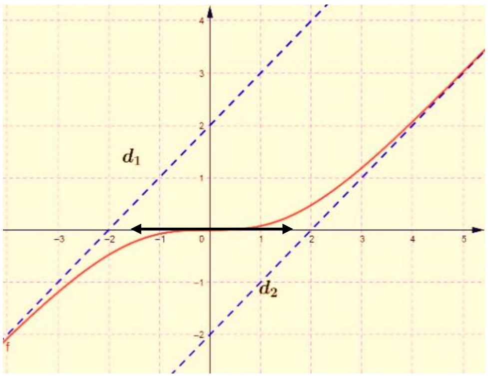
❸ $x = 3\ ,\ x = 1\ ,\ x = -1$ ❹ $x = 3\ ,\ x = 0$

❺ عدد حلول هو 3 ❻ $]0,2[$ ❼ $f(2) = -3$ قيمة صغرى محلية ، $f\,(0) = 1$ قيمة كبرى محلية

❽ $f(2) = -3$ و $f'(2) = 0$

❾ $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 0$

التمرين 2 :



تأمل الشكل المرسوم جانبا ،الذي يمثل الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمطلوب :

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب في هذه الحالة

❷ جد $f'(0)\ ,\ f(0)$ ❸ هل $f(0) = 0$ قيمة حدية ؟ علل اجابتك

❹ هل التابع فردي أم زوجي ؟ علل اجابتك

الحل :

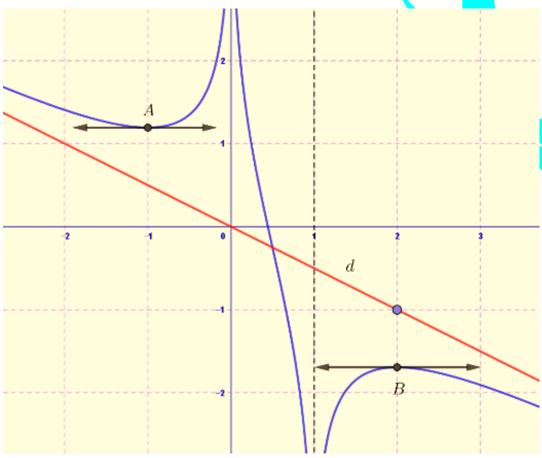
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و المقارب مار من $(2,0)$ و$(0,-2)$ ميله $m = \frac{-2-0}{0-2} = 1$

فمعادلته $y - 0 = 1(x-2) \Longrightarrow y = x - 2$

❷ $f'(0) = 0\ ,\ f(0) = 0$ ❸ لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير اشارته

❹ التابع فردي لأنه متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

التمرين 3 :



تأمل الشكل المرسوم جانبا ،

الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}\{0,1\}$ والمطلوب :

❶ جد $\lim_{x\to1^+} f(x)\ ,\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ جد $f'(2)$ و $f'(-1)$

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

❹ اكتب معادلة المقارب المائل d

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty\ \ ,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

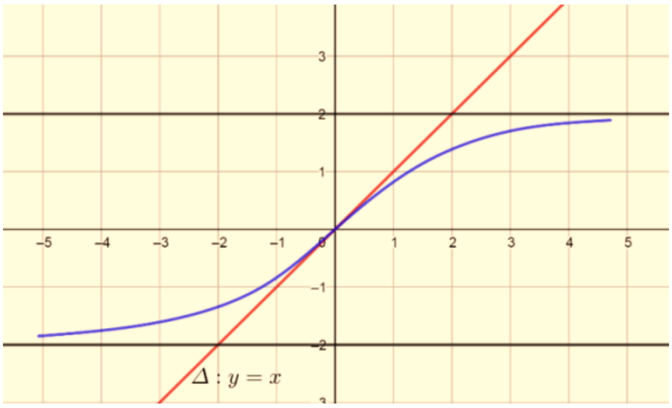
❷ $f'(2) = 0$ و $f'(-1) = 0$

❸ حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ هي $]2,+\infty[\ \cup\ ]0,1[\ \cup\ ]-\infty,-1[$

❹ المقارب المائل d مار من المبدأ $(0,0)$ والنقطة $(2,-1)$

وبالتالي ميله $m = \frac{-1-0}{2-0} = \frac{-1}{2}$ وبالتالي معادلته $y = \frac{-1}{2}x$

التمرين 4 :



C المرسوم جانباً هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$.

أجب عن الأسئلة الآتية:

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ هل f تابع زوجي أم فردي؟ علل.

❸ أوجد معادلة Δ واحسب $f'(0)$.

❹ ماهي حلول المعادلة $f(x) = x$؟

❺ ادرس الوضع النسبي ل C مع Δ

واستنتج حلول المتراجحة $f(x) \geq x$.

❻ كم حل للمعادلة $f(x) = 3ln2$؟

❼ جد $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

❽ هل f محدود أم لا؟ علل

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

❷ fتابع فردي لأن خطه C متناظر بالنسبة للمبدأ 0

❸ $\Delta: y = x$ وميله 1 $\Leftarrow$ $f'(0) = m_\Delta = 1$

❹ C و Δ يتقاطعان مرة واحدة إذاً للمعادلة حل وحيد وهو فاصلة نقطة التقاطع $x = 0$.

❺ في المجال $]-\infty, 0[$ يكون C فوق Δ وفي المجال $]0, +\infty[$ يكون C تحت Δ ويتقاطعان عند $x = 0$

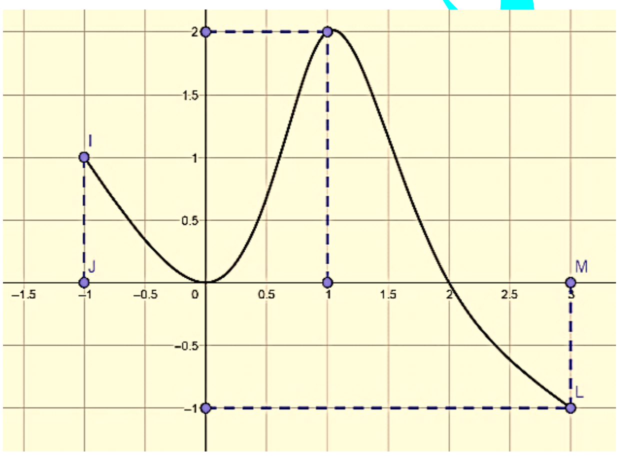
بالتالي حلول المتراجحة $f(x) \geq x$ هي $]-\infty, 0]$

❻ $f(x) = ln8 > 2$ إذاً المعادلة ليس لها حلول

❼ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

❽ نعم محدود لأن $-2 \leq f(x) \leq 2$

التمرين 5 :



لدينا التابع f المعرف على المجال $[-1,3]$ واشتقاقي عليه

و خطه البياني C

الشكل المرسوم جانباً يمثل الخط البياني للتابع المشتق f' :

❶ما هو ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

❷ هل $f(2)$ قيمة حدية للتابع f ؟ علل اجابتك

❸ هل $f(0)$ قيمة حدية للتابع f ؟ علل اجابتك

❹ ماعدد المماسات الافقية للخط C

الحل :

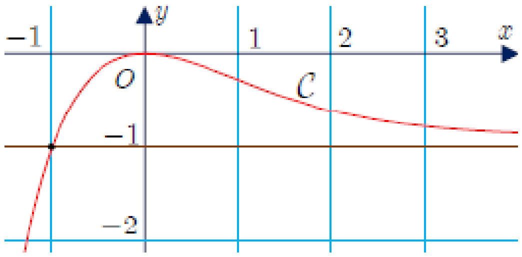
❶ $m = f'(1) = 2$

❷ نعم قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها و يغير اشارته

❸ لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير اشارته

❹ اثنان (عدد نقاط تقاطع الخط مع محور الفواصل)

التمرين 6 : الاختبار 4 (معدل)

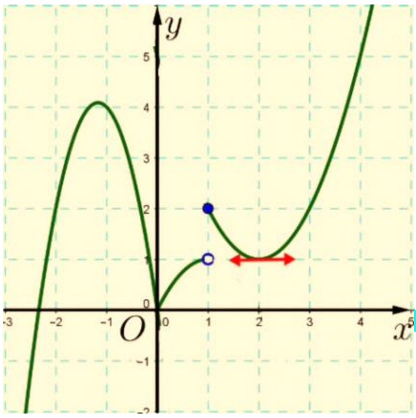


في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f،
من خلال قراءة بيانيّة للشكل أجب عن الأسئلة التالية:
❶ جد $lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج $lim_{x\to+\infty} f(f(x))$
❷ ما معادلة المستقيم المقارب للخط C؟
❸ وما الوضع النسبي للخط C مع المقارب؟
❹ يقبل f قيماً حديّة محلّيّاً. عيّنها وعيّن نوعها.
❺ في حالة عدد حقيقي k، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(-1) = -1$
❷ $y = -1$
❸ $x \in]-\infty , -1[$ الخط يقع تحت المقارب و $x \in]-1 , +\infty[$ الخط يقع فوق المقارب
❹ $f(0) = 0$ قيمة كبرى محلية
❺ $k \in]-\infty, -1] \cup \{0\}$ للمعادلة حل وحيد و $k \in]-1,0[$ للمعادلة حلين
و $k \in]0, +\infty[$ ليس للمعادلة حلول

التمرين 7 : النموذج الوزاري الأول

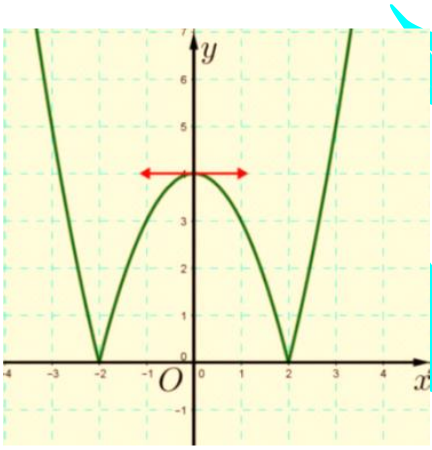


نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:
❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟
❷ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ ؟
❸ هل $f(1)$ قيمة محلّيّة كبرى أو صغرى للتابع. علّل ذلك؟
❹ ما عدد القيم الحدّيّة للتابع f ؟
❺ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ ؟
❻ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$ ؟.

الحل :

❶ حل وحيد
❷ $[4 , +\infty[$
❸ $f(1)$ قيمة محلّيّة كبرى لأنه يوجد جوار $I = \left]\frac{1}{2} , \frac{3}{2}\right[$ يحقق $\forall x \in I \cap \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq f(1)$
❹ أربعة
❺ $f'(2) = 0$
❻ التابع f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي

التمرين 8 : النموذج الوزاري الثالث

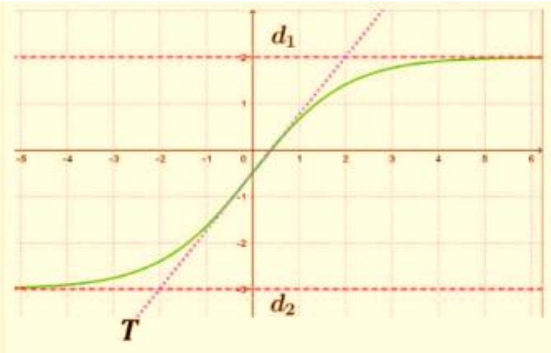


تجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:
❶ كم حلا للمعادلة $f(x) = 2$ ؟
❷ احسب قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ؟
❸ عيّن صورة المجال $I = [-2,2]$ وفق f.
❹ كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f

الحل :

❶ أربعة ❷ $f'(0) = 0$ ❸ $f([-2,2]) = [0, 4]$
❹ صغرى محليا : قيمتان $f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$ و كبرى محليا : قيمة واحدة $f(0) = 4$

التمرين 9 : النموذج الوزاري 2019



إذا كان C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$
والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C
والمطلوب

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 و d_2 .

إذا علمت ان المستقيم المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ أحسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته

الحل :

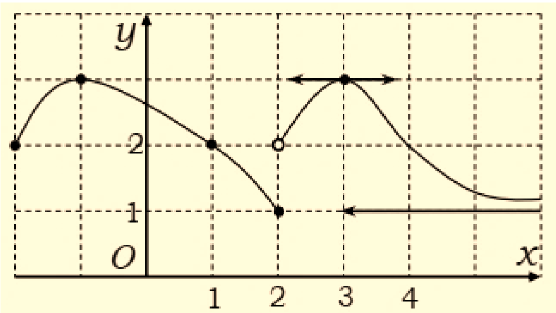
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

❷ $d_1 : y = 2$ و $d_2 : y = -3$.

المستقيم يمر من النقطتين $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $(2\,,2)$ بالتالي $f'(0) = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{5}{4}$

معادلته $y - y_1 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0) \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

التمرين 10 : النموذج الوزاري الثاني 2020 معدل



ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً والمعرف على المجال $]-2,+\infty[$
والذي يقبل المستقيم $y = 1$ مقاربا أفقياً في جوار $+\infty$

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$,

❷ هل f اشتقاقي عند 2 ؟

❸ جد $f(3), f'(3)$. وجد معادلة للمماس عند 3

❹ دل على القيم الحدية المحلية للتابع f

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(1) = 2$

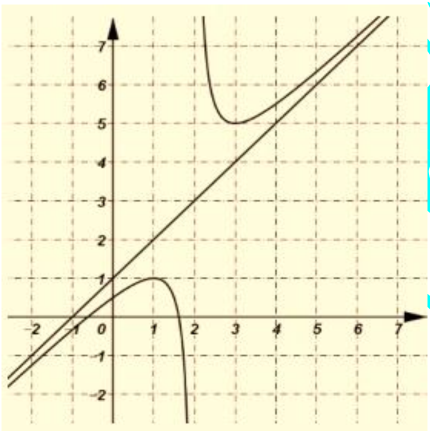
❷ f غير اشتقاقي عند 2 لأنه غير مستمر عند 2

❸ $f(3) = 3$, $f'(3) = 0$ و معادلة المماس عند 3 هي $y = 3$

❹ $f(-2) = 2$ قيمة صغرى محلياً $f(2) = 1$ قيمة صغرى محلياً

$f(-1) = 3$ قيمة كبرى محلياً $f(3) = 4$ قيمة كبرى محلياً

التمرين 11 : النموذج الوزاري الثالث 2020



في الشكل المرسوم جانباً ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$، والمطلوب :

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ دل على القيم الحدية للتابع وبين نوعها

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ اكتب معادلة المقارب المائل

❺ اذكر إحداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f

الحل :

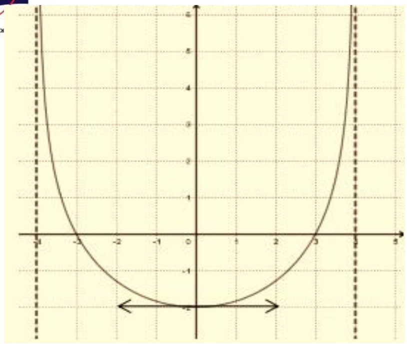
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

❷ $f(3) = 5$ قيمة صغرى محليا و $f(1) = 1$ قيمة كبرى محليا ❸ حلين

❹ المقارب المائل مار من النقطة$(0,1)$ والنقطة $(-1,0)$

وبالتالي ميله $m = \frac{-1-0}{0-1} = 1$ وبالتالي معادلته $y = x + 1$ ❺ $I(2\,,3)$

التمرين 12 : دورة 2017 الأولى



في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f
المعرف على المجال $I =]-4,4[$ والمطلوب :

❶ احسب $\lim_{x\to -4}^{>} f(x)$ و $\lim_{x\to 4}^{<} f(x)$

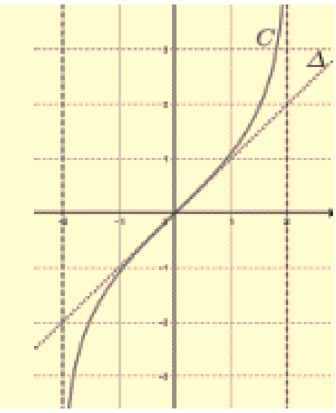
❷ أحسب $f(0)$ و $f'(0)$ ❸ جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

الحل :

❶ $\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$

❷ $f(0) = -2$ و $f'(0) = 0$ ❸ حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي $x = 3 \ , x = -3$

التمرين 13 : دورة 2017 الثانية



نتأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C_f الخط البياني للتابع f
المعرف على المجال $I =]-2,2[$ والمطلوب :

❶ احسب $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

❷ أوجد $f(0)$ و $f'(0)$ ❸ هل التابع فردي أم زوجي

❹ اكتب معادلة المماس Δ

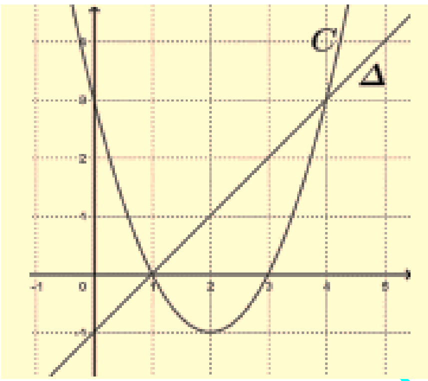
الحل :

❶ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

❷ $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ❸ التابع فردي

❹ من الرسم نلاحظ أن المماس Δ يمر بالمبدأ والنقطة $(1,1)$ وهو منصف الربع الأول والثالث و معادلته $y = x$

التمرين 14 : دورة 2018 الأولى



تأمل الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع f
المعرف على R ، والمطلوب

❶ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

❷ جد $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ❸ ما حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ

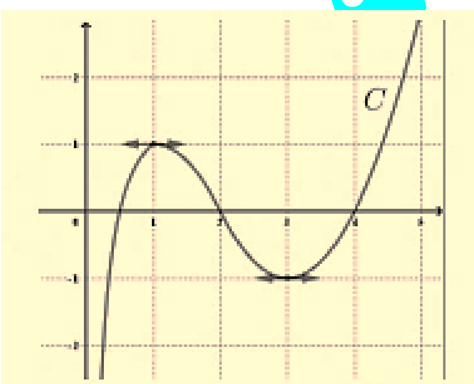
الحل :

❶ $f(2) = -1$

❷ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ❸ $x = 4 \ , x = 1$

❹ المستقيم Δ مار من $(1,0)$ وميله 1 بالتالي : $y = x - 1$

التمرين 15 : دورة 2019 الثانية



في الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع f
المعرف على $]0,+\infty[$ ، والمطلوب

❶ جد $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

❷ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$

❹ جد $f(]1,3[)$

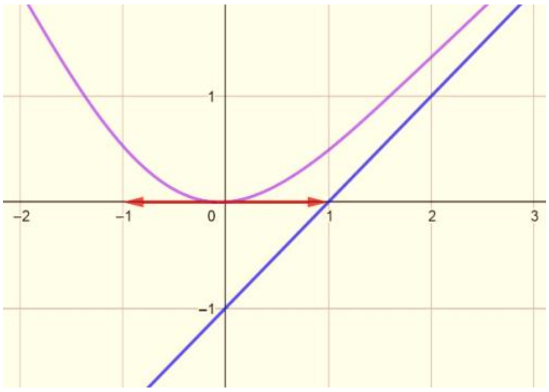
الحل :

❶ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

❷ $f(3) = -1$ قيمة صغرى محلية و $f(1) = 1$ قيمة كبرى محلية

❸ $[1,3]$ ❹ $]-1,1[$

التمرين 16 : دورة 2020 الأولى



نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل ل C والمطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ اكتب معادلة المستقيم Δ.

❸ جد $f'(0)\ ,\ f(0)$

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

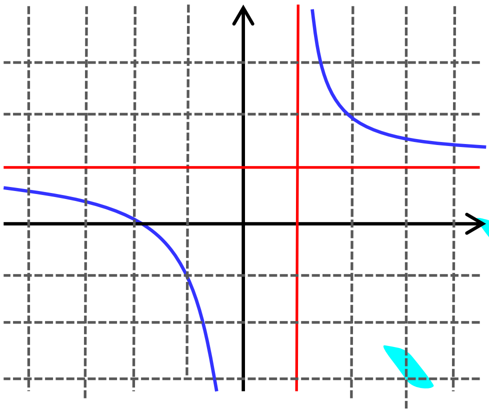
❷ المستقيم Δ مار من $(1,0)$ و $(0,-1)$ وميله 1 بالتالي :

$$y - y_1 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x+1) \Rightarrow y = x + 1$$

❸ $f'(0) = 0\ ,\ f(0) = 0$

❹ $]-\infty, 0[$

التمرين 17 : دورة 2021 الأولى



نتأمل الخط البياني C للتابع f

المعرف على $]-\infty\,,0[\,\cup\,]1\,,+\infty[$ والمطلوب :

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to1} f(x)\,,\lim\limits_{x\to0} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب أفقي و كل مقارب شاقولي للخط C

❸ جد حلول المتراجحة $f'(0) < 0$

❹ جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

الحل :

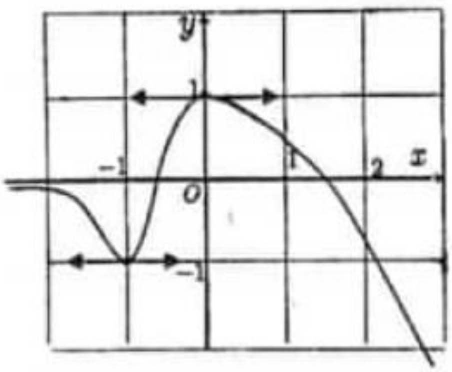
❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1\ ,\ \lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

❷ $y = 1\ ,\ x = 0\ ,\ x = 1$

❸ $]-\infty\,,0[$

❹ $x = -2$

التمرين 18 : دورة 2022 الثانية



نتأمل جانباً الخط البياني للتابع C_f f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f

❸ أكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(0) > 0$

❹ عين القيم الحدية للتابع f مبينا نوع كل منها

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

❷ $y = 0$

❸ $]-1,0[$

❹ $f(-1) = -1$ قيمة صغرى محلية و $f(0) = 1$ قيمة كبرى محلية

التمرين 19 :

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+2 \parallel -3$	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ هل التابع f اشتقاقي عند الصفر ، ولماذا

❸ اوجد $f(D_f)$

❹ اكتب معادلة نصف المماس الأيمن للخط البياني في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

❷ التابع f غير اشتقاقي عند الصفر ، لأنّ $f'(0^-) = +2 \neq f'(0^+) = -3$

❸ $f(D_f) =]-2,3] \cup]2,3] =]-2,3]$

❹ $f(0) = 3$ و $m = f'(0^+) = -3$

و بالتالي : $y - 3 = -3(x - 0)$ أي معادلة نصف المماس الأيمن $y = -3x + 3$

التمرين 20 :

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدول تغييرات التابع f المعرف على $]-\infty, 3]$ والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

❶ ما عدد القيم الحدية وما نوعها ؟

❷ اكتب معادلة المماس الأفقي .

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ هل يملك خط التابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ ؟ ولماذا ؟

الحل :

❶ قيمتان ، قيمة صغرى $f(-1) = -3$ و قيمة كبرى $f(3) = 0$

❷ معادلة المماس الأفقي $y = -3$

❸ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد .

❹ ليس للخط البياني للتابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ وذلك لوجود مقارب أفقي $y = 0$ في جوار $-\infty$

التمرين 21 :

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدول تغييرات التابع f المعرف على $]-\infty, 3[$ والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \parallel$

❶ ما عدد القيم الحدية وما نوعها ؟

❷ اكتب معادلة المماس الأفقي .

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

❹ هل يملك الخط البياني للتابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ ؟ ولماذا ؟

الحل :

❶ قيمة حدية واحدة ، وهي قيمة صغرى $f(-1) = -3$.

❷ معادلة المماس الأفقي $y = -3$.

❸ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد .

❹ ليس للخط البياني للتابع f مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ وذلك لوجود مقارب أفقي $y = 0$ في جوار $-\infty$

التمرين 22 :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4

تأمل الجدول المجاور الذي يمثل جدولاً لتغيرات التابع f الذي خطه البياني C والمطلوب :

❶ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد a

❷ استنتج اشارة $f(x)$

❸ دل على المقارب الأفقي وادرس وضعه النسبي مع الخط البياني للتابع

❹ هل يوجد لخط التابع مماسات أفقية ؟ ولماذا ؟

الحل :

❶ التابع f مستمر ومتناقص تماما على $]-\infty, +\infty[$ و $0 \in]-4, +\infty[= f(]-\infty, +\infty[)$
وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $a \in]-\infty, +\infty[$

❷ $f(x) > 0 \,;\, x \in]-\infty, a[\;,\; f(x) < 0 \,;\, x \in]a, +\infty[$

❸ المقارب الأفقي $y = -4$ ومن جدول التغيرات بما أن $f(x) > -4$ فالخط يقع كاملا فوق المقارب

❹ لا يوجد لخط التابع مماسات أفقية لأن المشتق لا ينعدم

التمرين 23 :

فيما يلي جدول تغيرات التابع المعرف على $I =]-\infty\,, 3]$ والمطلوب :

x	$-\infty$		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

❶ جد $f(I)$

❷ ما عدد القيم الحدية

❸ ما عدد المماسات الأفقية ، أكتب معادلاتها

❹ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❺ أدرس اشارة f تبعا لقيم x

❻ ليكن التابع $g(x)$ المعرف على $I =]-\infty\,, 3]$ ويحقق :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \;,\; g(3) = 2 \;,\; g(1) = 1 \;,\; g'(x) = f(x)$$

نظم جدولا بتغيرات $g(x)$

الحل :

❶ $f(]-\infty\,, 3]) =]-1\,, 3]$

❷ قيمتين

❸ ثلاث مماسات : $y = 0 \;,\; y = 1 \;,\; y = 3$

❹ حل وحيد

❺ $f(x) < 0 : x \in]-\infty\,, 1[$ و $f(x) > 0 : x \in]1\,, 3[$ و $f(x) = 0 : x = 1$

❻ التابع $g(x)$ معرف على $I =]-\infty\,, 3]$ و جدول تغيراته :

x	$-\infty$		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

التمرين 24 : النموذج الوزاري الرابع

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❷ ما عدد القيم الحدّيّة محلياً للتابع f ؟

❸ اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$

الحل :

❶ حل وحيد

❷ قيمة واحدة

❸ $m = f'(1) = 0$ و $f(1) = 1$ بالتالي معادلة المماس $y = f(1) \Longrightarrow y = 1$

التمرين 25 : النموذج الوزاري السادس

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطّه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

❶ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

❷ هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C

❸ هل يوجد للخط البياني C مماسات أفقيّة

❹ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$

الحل :

❶ $y = 3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ و $+\infty$ و $x = -1$ مقارب شاقولي و $x = 1$ مقارب شاقولي

❷ لا ، بسبب وجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$ و $+\infty$

❸ لا

❹ التابع f مستمر ومتناقص تماما على $]-1,1[$ و $0 \in]-\infty,+\infty[= f(]-1,1[)$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $x \in]-1,1[$

التمرين 26 : النموذج الوزاري الأول 2020

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ اذكر قيمة حدية للتابع f وبين نوعها

❸ هل $f(5) = 4$ قيمة حدية للتابع؟ علل اجابتك

❹ اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع

❺ اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = ln(f(x))$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

❷ $f(2) = 0$ قيمة صغرى محلية

❸ لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير اشارته

❹ $y = 6$, $y = 2$

❺ التابع g معرف بشرط $f(x) > 0$ وبالتالي $D =]-\infty\,,2[\; \cup\;]2\,,+\infty[$

التمرين 27 : دورة 2018 الثانية

نجد فيما يلي جدولاً لتغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

الحل :

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ $y = 2$

❸ حلين

❹ $f(2) = -1$

التمرين 28 : دورة 2019 الأولى

نجد فيما يلي جدولاً لتغيرات التابع f المعرف على R

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني للتابع

❸ دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

❹ أحسب $f(]-1,2[)$

الحل :

❶ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

❷ $y = 3$

❸ $f(-1) = -2$

❹ $f(]-1,2[) =]-2,4[$

التمرين 29 : دورة 2020 الثانية

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C. المطلوب:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

❶ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً أنواعها.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

الحل :

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

❷ $f(0) = 2$ قيمة صغرى محلية و $f(4) = 6$ قيمة كبرى محلية

❸ حل وحيد

❹ $]0,4[$

التمرين 30 : دورة 2021 الثانية

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ خطه البياني C المطلوب :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	‖ $-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$ 0

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ و أكتب معادلة المقارب الأفقي

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

❸ دل على القيمة المحلية وبين نوعها

❹ جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)>0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ و $y=0$ مقارب أفقي

❷ حل وحيد

❸ قيمة كبرى محلية $f(1)=\frac{1}{e}$

❹ $]0,1[$

التمرين 31 : دورة 2022 الثانية

نتأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C المطلوب :

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ 2

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

❷ $x=1$ مقارب شاقولي و $y=2$ مقارب أفقي

❸ حلان

❹ $]-\infty,1[\cup]1,2[$

:التمرين 32

جد نهاية $f(x)$ عند a الموافقة :

$f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}\quad : a=1$	$f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}\quad : a=1$
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$
$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}\quad : a=1$	$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\quad : a=1$
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$	$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$
$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^4-1}\quad : a=1$	$f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}\quad : a=1$
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{3}{4}$	$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$
$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4}\quad : a=2$	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\quad : a=3$
$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x}-2)}$ $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x}-2)}$ $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x}-2)}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{0}{0}$ $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$ $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$ $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$

التمرين 33 :

جد نهاية $f(x)$ عند a الموافقة :

$f(x) = x + 1 - \sqrt{x} \quad : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= +\infty(1 - 0) = +\infty$$

$f(x) = x^2 + 1 - \sqrt{x} \quad : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + 1 - \sqrt{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

$f(x) = x + 1 - \sqrt{x-1} \ : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x-1)\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$
$$= +\infty(1 - 0) = +\infty$$

$f(x) = x^2 + 1 - \sqrt{1-x} \ : \ a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 + 1 - \sqrt{1-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (1-x)\left(\frac{x^2+1}{1-x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$
$$= +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

$f(x) = x - \sqrt{x^2-1} \ : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = 0$$

$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2-1} \ : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}} + 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}} + 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x \ : \ a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + 2x \ : \ a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$
$$= -\infty(-2) = +\infty$$

التمرين 34 :

جد نهاية $f(x)$ عند a الموافقة :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad : a=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+0}}=-1$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad : a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$

$$f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1} \quad : a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{x}{x\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1-\frac{x}{x\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty\left(\frac{1-0}{1-0}\right)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad : a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$

$$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right) : a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}=+\infty$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x} \quad : a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\;0$$

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3} \quad : a=2$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{(6-3x)}{\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{-3(x-2)}{\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\frac{-9}{4}$$

التمرين 35 :

جد نهاية $f(x)$ عند a الموافقة :

$f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} \quad : a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=+\infty\times1=+\infty$$

$f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x} \quad : a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)(3)=1\times3=3$$

$f(x)=\dfrac{2-2\cos\sqrt{x}}{x} \quad : a=0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}{x\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(1-\cos^2(\sqrt{x})\right)}{x\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(\sqrt{x})}{x\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\times\frac{2}{\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}$$
$$=1\times1=1$$

$f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x} \quad : a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$=-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\cos x+1}\right)$$

$f(x)=\dfrac{x.\sin x}{1-\cos x} \quad : a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x.\sin x}{1-\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x.\sin x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x.\sin x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x.\sin x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)(1+\cos x)=1\times2=2$$

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x} \quad : a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\sin x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{(\sin x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{(\sin x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

$f(x)=\dfrac{\sin4x-2\sin2x}{x^3} \quad a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x-2\sin2x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x\cos2x-2\sin2x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x(\cos2x-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x(-2\sin^2x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}-4\left(\frac{\sin2x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$
$$=\lim_{x\to0}-8\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-8(1)(1)=-8$$

$f(x)=\dfrac{\sin(7x)+\sin(3x)}{10x\cos(2x)} \quad a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)+\sin(3x)}{10x\cos(2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin(5x)\cos(2x)}{10x\cos(2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$$

التمرين 36 :

مثال : ابحث عن نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x^2}+\cos x$ عند ال $+\infty$:

بفرض $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x=\ell$

لكن $\cos x$ ليس نهاية عند $+\infty$ لأنه تابع دوري و غير ثابت و هذا تناقض وبالتالي $f(x)$ ليس له نهاية عند $+\infty$

التمرين 37 :

ابحث عن نهاية التابع $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$ عند $+\infty$

بفرض $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=\ell$

لكن $\sin x$ ليس نهاية عند $+\infty$ لأنه تابع دوري و غير ثابت و هذا تناقض وبالتالي $f(x)$ ليس له نهاية عند $+\infty$

التمرين 38 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{x^2+\cos x}{x^2}$

❶ بين أنه من اجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$ ❷ استنتج نهايتي التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$

الحل :

❶ من اجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow x^2-1\le x^2+\cos x\le 1+x^2\Rightarrow$

$$\frac{x^2-1}{x^2}\le\frac{x^2+\cos x}{x^2}\le\frac{1+x^2}{x^2}\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$$

❷ حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

التمرين 39 :

ليكن التابع f المعرّف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$ ❷ أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x

الحل :

❶ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x+5}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\frac{-1}{3}$$

❷ $$f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{-x-9}{3x+11}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\frac{-1}{3}$$

التمرين 40 :

ليكن التابع g المعرّف على المجال $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$ ❷ أعد حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x

❶ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}=1$$

في حالة $x>1$ نجد: $f(x)-1=\frac{x-3}{x-1}-1=-\frac{2}{x-1}<0\Rightarrow f(x)<1$

بالتالي $f(x)$ يسعى الى 1 بقيم اصغر من 1 عند $+\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

❷ $$f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\frac{\frac{x-3}{x-1}-3}{\frac{x-3}{x-1}-1}=\frac{\frac{x-3-3x+3}{x-1}}{\frac{x-3-x+1}{x-1}}=\frac{-2x}{-2}=x\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

التمرين 41 :

احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$

ثم أعط عددا A يحقق الشرط : اذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$

الحل :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{x-1}=5$ و $f(x)\in]4.9,5.1[$ مركز المجال هو 5 ونصف قطره 0.1

$$|f(x)-5|<0.1 \Rightarrow \left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<0.1 \Rightarrow \left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<0.1 \Rightarrow \left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$x\in]1,+\infty[\Rightarrow \frac{x-1}{4}>10 \Rightarrow x-1>40 \Rightarrow x>41 \Rightarrow A\le 41$$

التمرين 42 :

اوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$

ثم أوجد عددا A يحقق الشرط : اذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$

الحل :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{x+3}=-2$ و $f(x)\in]-2.05,-1.95[$ مركز المجال -2 ونصف قطره 0.05

$$|f(x)+2|<0.05 \Rightarrow \left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{5}{100} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right|<\frac{5}{100} \Rightarrow \frac{7}{|x+3|}<\frac{5}{100} \Rightarrow \frac{|x+3|}{7}>\frac{100}{5} \Rightarrow |x+3|>140$$

$$x\in]-3,+\infty[\Rightarrow x+3>140 \Rightarrow x>137 \Rightarrow A\ge 137$$

التمرين 43 :

ليكن التابع f والمعرف على $]-\infty,1[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{3x}{x+1}$

❶ أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$

❷ أوجد قيمة A التي تحقق الشرط : اذا كان $x<A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]2.99,3.01[$

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+1}=3$

❷ $f(x)\in]2.99,3.01[$ مركز المجال هو 3 ونصف قطره 0.01 $\Leftarrow$

$$|f(x)-3|<0.01 \Rightarrow \left|\frac{3x}{x+1}-3\right|<0.01 \Rightarrow \left|\frac{3x-3x-3}{x+1}\right|<0.01 \Rightarrow \left|\frac{-3}{x+1}\right|<0.01$$

$$x\in]-\infty,-1[\Rightarrow |x+1|=-x-1 \Rightarrow \frac{3}{-x-1}<\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{-x-1}{3}>100$$

$$\Rightarrow -x-1>300 \Rightarrow -x>301 \Rightarrow x<-301 \Rightarrow A\le -301$$

التمرين 44 :

ليكن التابع f والمعرف على $[-1,+\infty[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x)=\sqrt{x+1}$

❶ جد نهاية التابع f عند 3

❷ جد مجال I مركزه 3 يحقق الشرط : اذا كان $x\in I$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9,2.1[$.

الحل :

❶ $lim_{x\to 3} f(x) = lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

❷ $1.9\le f(x)\le 2.1 \Rightarrow 1.9\le\sqrt{x+1}\le 2.1 \Rightarrow 3.6\le x+1\le 4.4\Rightarrow$
$3.6-1\le x\le 4.4-1\Rightarrow 2.6\le x\le 3.4\Rightarrow x\in\,]2.6\,,3.4[$

طريقة ثانية :

$|f(x)-2|=\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}$

في حالة $x>0$ يكون $x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1\Rightarrow\sqrt{x+1}+2>3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{1}{3}$

بالتالي $|f(x)-2|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{|x-3|}{3}<0.1\Rightarrow|x-3|<0.3\Rightarrow$
$x\in\,]3-0.3,3+0.3[\,=\,]2.7,3.3[$

التمرين 45 :

جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند 5

ثم أوجد مجالا I مركزه 5 ويحقق الشرط : اذا انتمى x الى المجال I انتمى f الى المجال $]3.95,4.05[$

الحل :

$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x+3}{x-3}=4$ و $f(x)\in\,]3.95,4.05[$ مركزه 4 ، ونصف قطره 0.05

$$|f(x)-4|<0.05\Rightarrow\left|\frac{x+3}{x-3}-4\right|<\frac{5}{100}\Rightarrow\left|\frac{x+3-4x+12}{x-3}\right|<\frac{5}{100}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{-3x+15}{x-3}\right|<\frac{5}{100}\Rightarrow\frac{3|x-5|}{|x-3|}<\frac{5}{100}$$

في حالة $x>4$ ، يكون $|x-3|>1$ ، وبالتالي $\frac{3|x-5|}{1}<\frac{5}{100}\Rightarrow|x-5|<\frac{5}{300}$

وبالتالي : $-\frac{5}{300}<x-5<\frac{5}{300}\Rightarrow 5-\frac{5}{300}<x<5+\frac{5}{300}\Rightarrow x\in\left]5-\frac{5}{300},5-\frac{5}{300}\right[$

التمرين 46 :

أوجد نهاية التابع f المُعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ عند 1 ، ثمّ أوجد مجالاً I مركزه 1
يُحقّق الشرط إذا كان x ينتمي إلى المجال I، كان $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1.99,2.01[$

الحل :

❶ $lim_{x\to 1} f(x)=lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2$

❷ $|f(x)-2|=\left|\frac{x+3}{x+1}-2\right|=\left|\frac{-x+1}{x+1}\right|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

في حالة $x>0$ يكون $|x+1|>1$ ومنه يمكن أن نضع $|f(x)-2|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<\frac{|x-1|}{1}<0.01\Rightarrow$
$|x-1|<0.01\Rightarrow x\in\,]1-0.01,1+0.01[\,=\,]0.99,1.01[$

التمرين 47 :

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عين عددا ∝ يحقق الشرط :

اذا كان x عنصرا من المجال $]1-\propto ,1+\propto[$ مختلفا عن 1 كان $f(x)>10^5$

الحل :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$$

وبما ان $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^5$

البسط يسعى نحو 4 عندما x تسعى نحو 1 لذلك نختار $5x-1>3.6$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{3.6}{(x-1)^2}>10^5\Rightarrow (x-1)^2<\frac{3.6}{10^5}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2<\frac{36}{10^6}\Rightarrow |x-1|<\frac{6}{10^3}\Rightarrow |x-1|<0.006$$

$$-0.006<x-1<0.006\Rightarrow 1-0.006<x<1+0.006\Rightarrow I=]0.994,1.006[$$

التمرين 48 :

ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

❶ ادرس نهاية f في جوار 1

❷ أوجد مجالا I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ أيا كان x من $I\backslash\{1\}$

الحل :

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty$ وبما ان $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}>10^6$

البسط يسعى نحو 1 عندما x تسعى نحو الـ 1 ، لذلك نختار $x>0.49$:

$$\frac{x}{(x-1)^2}>\frac{0.49}{(x-1)^2}>10^6\Rightarrow (x-1)^2<\frac{0.49}{10^6}$$

$$(x-1)^2<\frac{49}{10^8}\Rightarrow |x-1|<\frac{7}{10^4}\Rightarrow |x-1|<0.0007$$

$$-0.0007<x-1<0.0007\Rightarrow 1-0.0007<x<1+0.0007\Rightarrow x\in]0.9993,1.0007[$$

التمرين 49 :

فيما يأتي بيّن معلّلاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ.

❶ $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{10}{x+1}$ $\quad \Delta: y = 2x + 3 \quad D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = 2x + 3 + \frac{10}{x+1} - (2x+3) = \frac{10}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{10}{x+1} = 0$$ Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{10}{x+1} = 0$$ Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

ولدراسة الوضع النسبي للخط C_f مع المقارب Δ ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
اشارة $\frac{10}{x+1}$	$-$ ‖ $+$
الوضع النسبي	C تحت Δ C فوق Δ

❷ $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$ $\quad \Delta: y = 3x + 7 \quad D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}} - (3x+7) = -\frac{5}{\sqrt{|x|}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-5}{\sqrt{|x|}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{|x|}} = 0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

$f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{|x|}} < 0$ أياً كانت $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ وبالتالي C يقع دوما تحت Δ

التمرين 50 :

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x^2-x-5}{x-2}$ المعرفة على $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ والمطلوب :

❶ أحسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف ❷ أكتب التابع f بالشكل $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-2}$

❸ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

وادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الخط البياني C

الحل :

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-5}{x-2} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{x^2-x-5}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-x-5}{x-2} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-5}{x-2} = +\infty$$

❷ بالقسمة الاقليدية نجد : $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x-2 & x^2 - x - 5 \\ & \mp x^2 \pm 2x \\ \hline & 0 + x - 5 \\ & \mp x \pm 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

❸ $$f(x) - (x+1) = x + 1 - \frac{3}{x-2} - (x+1) = -\frac{3}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x-2} = 0$$

بالتالي $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
اشارة $-\frac{3}{x-2}$	$+$	$-$
	C يقع فوق d	C يقع تحت d

التمرين 51 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

❶ ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

❷ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

❸ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

❶ حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

وهذا يعني هندسيّاً أنّ محور الفواصل $y = 0$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

❷ $$f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\right) =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = 0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ مستحيلة $\sqrt{x^2+1} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x^2+1 = x^2$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
اشارة $\sqrt{x^2+1} - x$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين 52 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

❶ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

❷ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل :

❶ $$f(x) - (x+1) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

في حالة $x > 0$ يكون $x = \sqrt{x^2}$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+9}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

ومنه المستقيم $\Delta: y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❷ دراسة الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

$$f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+9} = x : x > 0$$

مستحيلة $\Rightarrow x^2 + 9 = x^2$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
اشارة $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$	$-$
الوضع النسبي	C تحت Δ

التمرين 53 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$ وليكن C خطّه البياني .
والمطلوب هو إثبات أنّ الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$، كذلك الأمر في جوار $-\infty$.
بملاحظة أن $\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}|x|$

① أثبتا أن $lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

② استنتج قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$

الحل :

من أجل $x>0$ يكون $\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}|x|=\sqrt{2}x$

① $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=+\infty-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

عند $+\infty$ $lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)$ نكتب :

$$f(x)-\sqrt{2}x=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x\right)}=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}$$

$$f(x)-\sqrt{2}x=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}x}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}\ :\ x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Longrightarrow$$

② نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0$ بالتالي $y=\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

التمرين 54 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

❶ احسب $lim_{x\to-\infty}f(x)$

❷ أثبت وجود عدد حقيقي a يُحقّق $lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وأنّ نهاية $f(x)-ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b.

❸ استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)=+\infty$

❷ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=-1\Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}=-1\Rightarrow b=-1$$

❸ نستنتج أنّ $\Delta':y=-x-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

التمرين 55 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

❷ استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

❸ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right)=+\infty-\infty$$ حالة عدم تعيين

$$f(x)-(x+1)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right)}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}=\frac{x^2+2x+4-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}\right)=0$$

❷ نستنتج أنّ المستقيم $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ $$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$

$$\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)=0\Rightarrow\sqrt{x^2+2x+4}=x+1 \quad : x>-1$$

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1\Rightarrow 4=1$$ مستحيلة

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
اشارة $\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين 56 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية (متمّماً إلى مربّع كامل)

❸ استنتج وجود مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$ اكتب معادلته.

الحل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5} \qquad x\in]-\infty,+\infty[$$

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)=+\infty$$

❷ $$x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5=(x+2)^2+1$$

❸ في جوار $+\infty$ أي $x>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=0$$

نستنتج أنّ $\Delta: y=x+2$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$

التمرين 57 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$

❶ ادرس نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

❷ اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني.

❸ ادرس نهاية التابع h المعرّف وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

❹ استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما.

❺ أثبت أنّ الخط C يقع فوق كلّ من هذين المقاربين.

الحل:

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2-4x+3} = +\infty \,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-4x+3} = +\infty$$

❷ بالإتمام إلى مربّع كامل : $4x^2 - 4x + 3 = 4(x^2 - x) + 3 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3$

$$4x^2 - 4x + 3 = 4x^2 - 4x + 1 - 1 + 3 = (2x-1)^2 + 2$$

❸ $$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}\right)}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}} = 0 \,,\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}} = 0$$

❹ بما أنّ $$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = \begin{cases} (2x-1) & : 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & : 2x-1 < 0 \Rightarrow : x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (2x-1)\right) = 0$$

بالتالي المستقيم $\Delta_1 : y = 2x - 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (-2x+1)\right) = 0$$

فإنّ المستقيم $\Delta_2 : y = -2x + 1$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$

❺ دراسة الوضع النسبي للمنحني والمقاربين :

$h(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}} > 0$ أيّاً كان العدد الحقيقي x بالتالي C يقع دوما فوق مقاربيه Δ_1 و Δ_2

التمرين 58 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x) = \frac{x^2+2-\sin x}{x}$

❶ أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y = x$ في جوار $+\infty$

❷ أدرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ على $]0,+\infty[$

الحل :

❶ $$h(x) = f(x) - (x) = \frac{x^2+2-\sin x}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{2-\sin x}{x}$$

$$-1 \le -\sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2 - \sin x \le 3 \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{2-\sin x}{x} \le \frac{3}{x}$$

حسب مبرهنة الاحاطة $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

وبالتالي $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❷ $1 \le 2 - \sin x \le 3 \Rightarrow 2 - \sin x > 0 \Rightarrow \frac{2-\sin x}{x} > 0$, $x \in]0,+\infty[$

والخط C يقع فوق المقارب Δ على المجال $]0,+\infty[$

التمرين 59 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

❶ أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y = x$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$

❷ أدرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ

❶ $$f(x) - y_\Delta = x + \frac{\sin x}{x} - (x) = \frac{\sin x}{x}$$

في حالة $x < 0$ يكون : $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$

حسب مبرهنة الاحاطة $\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0\, , \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow$ Δ مقارب مائل للخط C_f عند $-\infty$

في حالة $x > 0$ يكون : $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

حسب مبرهنة الاحاطة $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0\, , \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow$ Δ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$

ولدراسة الوضع النسبي للخط C_f مع المقارب Δ ندرس إشارة $\frac{\sin x}{x}$ على $\mathbb{R}^*$:

على المجال $]0,+\infty[$: تتفق اشارة $\frac{\sin x}{x}$ مع اشارة $\sin x$ على $]0,+\infty[$

في حالة عدد طبيعي k لدينا

x	$2\pi k$		$\pi + 2\pi k$		$2\pi + 2\pi k$
اشارة $\frac{\sin x}{x}$	0	+	0	−	0
الوضع النسبي		C فوق Δ		C تحت Δ	

على المجال $]-\infty,0[$: تعاكس اشارة $\sin x$ على المجال $]-\infty,0[$

في حالة عدد صحيح سالب تماما k لدينا

x	$2\pi k$		$\pi + 2\pi k$		$2\pi + 2\pi k$
اشارة $\frac{\sin x}{x}$	0	−	0	+	0
الوضع النسبي		C تحت Δ		C فوق Δ	

التمرين 60 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

❶ ادرس نهاية f عند $+\infty$

❷ أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y = 3x$ في جوار $+\infty$

❸ أدرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ

الحل :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
اشارة $4x^2 - 1$	+	−	+	

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ , \ x = \frac{1}{2}$$

❶ في حالة $x > \frac{1}{2}$ يكون $4x^2 - 1 > 0$ وبالتالي $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{4x^2 - 1}\right) = +\infty$$

❷ في حالة $x > \frac{1}{2}$ يكون $4x^2 - 1 > 0$ وبالتالي $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$:

$$g(x) = f(x) - (3x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x = \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right) = +\infty - \infty$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x} = 0$$

بالتالي المستقيم $y = 3x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ دراسة الوضع النسبي : $g(x) = \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2 - 1|} = 2x \qquad x > 0$$

$\sqrt{|4x^2 - 1|} = 2x \Rightarrow |4x^2 - 1| = 4x^2$ وهنا نميّز حالتين : $4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$ مستحيلة

$4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ مرفوض , $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
اشارة $g(x)$	+	0	−
الوضع النسبي	C فوق Δ_1		C تحت Δ_1

التمرين 61 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

❶ ادرس نهاية f عند $-\infty$

❷ أثبت أن للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y = -x$ في جوار $-\infty$

❸ أدرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ

الحل :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
اشارة $4x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$	

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ , \ x = \frac{1}{2}$$

❶ في حالة $x < -\frac{1}{2}$ يكون $4x^2 - 1 > 0$ وبالتالي $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{4x^2 - 1}\right) = -\infty + \infty$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + |x|\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) = -\infty(1 - \sqrt{4 - 0}) = -\infty(-1) = +\infty$$

❷ في حالة $x < \frac{-1}{2}$ يكون $4x^2 - 1 > 0$ وبالتالي $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$:

$$g(x) = f(x) - (-x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} + x = \sqrt{4x^2 - 1} + 2x$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) == \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x\right) = +\infty - \infty$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x} = 0$$

بالتالي المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

❸ دراسة الوضع النسبي : $g(x) = \sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2 - 1|} = -2x \qquad x < 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = -2x \Rightarrow |4x^2 - 1| = 4x^2$$

وهنا نميّز حالتين :

$$4x^2 - 1 = 4x^2 \Rightarrow -1 = 0$$ مستحيلة

$$4x^2 - 1 = -4x^2 \Rightarrow 8x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ مرفوض ، $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ مقبول

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
اشارة $g(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

التمرين 62 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ أثبت أنّ f مستمر على $\mathbb{R}$ وعيّن $f(R)$

الحل:

التابع مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه تابع كسري بسطه كثير حدود ومقامه كثير حدود لا ينعدم على $\mathbb{R}$

أو (بما أنّ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{x^2+1}\right] = 1 - 0 = 1 \,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{x^2+1}\right] = 1 - 0 = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad , \quad x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

من الجدول نلاحظ أنّ $f(\mathbb{R}) = [0,1[$

التمرين 63 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & : \ x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

① احسب نهاية f عند الصفر ② هل f مستمر عند الصفر ؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$ ؟ علّل إجابتك.

① أيّاً كانت $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \ : \ x^2 > 0$

حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to0}(x^2) = \lim_{x\to0}(-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

وبما أن $f(0) = 0$ فإن $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

② f مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنّه مؤلّف من جداء تابعين كلّ منهما مستمر على $\mathbb{R}^*$

وبما أن $\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$ فالتابع f مستمر عند الصفر و بالتالي f مستمر على $\mathbb{R}$

التمرين 64 :

ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$

ما قيمة m التي تجعل f مستمرّاً على $\mathbb{R}$

الحل :

التابع مستمر على $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

وحتّى يكون مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمر عند $x = 0$ أي : $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = m$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين :

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

بالتالي قيمة m التي تجعل f مستمرّاً على $\mathbb{R}$ هي $m = 0$

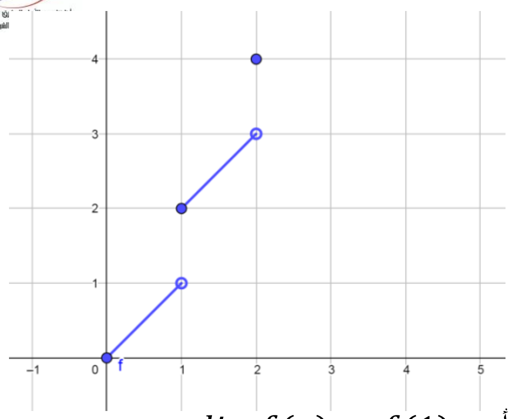
التمرين 65 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق: $f(x) = x + E(x)$

❶ اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$.

❷ أرسم C الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

❸ هل f مستمر على المجال $[0,2]$ ❹ ثم جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.



الحل :

❶ $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ x+1 & x \in [1,2[\\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

❸ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 \neq f(1) = (1+1) = 2$ بالتالي بما أن : $\lim\limits_{x\to1} f(x) \neq f(1)$

فالتابع غير مستمر عند $x = 1$ وبالتالي التابع f غير مستمر على المجال $[\,0\,,2\,]$

❹ $x - 1 < E(x) \leq x \Rightarrow 2x - 1 < x + E(x) \leq 2x \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2} < \frac{x+E(x)}{x^2} \leq \frac{2x}{x^2}$

$lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2} = 0$ و $lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2} = 0$ حسب مبرهنة الاحاة يكون $lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2} = 0$

التمرين 66 :

يُرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = E(x) + \left(x - E(x)\right)^2$

❶ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلّة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$) ❷ أثبت أنّ f مستمر على المجال $[0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \in [0,1[\\ 1 + (x-1)^2 & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$$

التابع كثير حدود على كل من المجالين فهو مستمر عليهما

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$ بالتالي التابع مستمر عند $x = 1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} 1 + (x-1)^2 = 2 = f(2)$ بالتالي التابع مستمر عند $x = 1$

والتابع مستمر على المجال $[0,2]$

التمرين 67 : جد نهاية كلا مما يلي عند النقطة $x = a$

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + E(x)}{x}$ $\quad a = 0^-$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + E(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad : \quad E(x) = -1 \;; x \in [-1\,,0[$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0^-}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + E(x)}{x}$ $\quad a = +\infty$

$$x - 1 < E(x) \leq x \Longrightarrow x - 1 + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+1} + E(x) \leq x + \sqrt{x+1} \Longrightarrow$$

$$\frac{x - 1 + \sqrt{x+1}}{x} < \frac{\sqrt{x+1} + E(x)}{x} \leq \frac{x + \sqrt{x+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\right) = 1 + 0 = 1$$

حسب مبرهنة الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

التمرين 68 :

التابع f معرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ و $f(0) = 0$

❶ هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علّل إجابتك. ❷ احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$

الحل :

❶ عند $x \neq 0$ $\quad g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

في حالة $x > 0$ $\quad -1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ حسب مبرهنة الاحاطة $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

في حالة $x < 0$ $\quad -1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-} -x = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ حسب مبرهنة الاحاطة $\lim\limits_{x\to 0^-} x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

بالتالي $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ والتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0) = 0$

❷ في حال $x \neq 0$ فإنّ : $f'(x) = 2x\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)(x^2) = 2x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

التمرين 69 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

جد $f'(x)$ و استنتج مشتق كل من التابعين $g(x) = f(\ln x)$ و $h(x) = \frac{2\sin x}{\sin x - 1}$

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-1)-1(2x)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(\ln x) \Rightarrow g'(x) = f'(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{(\ln x-1)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x(\ln x-1)^2}$$

$$h(x) = \frac{2\sin x}{\sin x-1} = f(\sin x) \Rightarrow h'(x) = \frac{-2}{(\sin x-1)^2}(\cos x) = \frac{-2\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

التمرين 70 :

نتأمّل التابع f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

❶ عيّن التابع المشتق f' للتّابع f .

❷ نرمز بالرمز g إلى التابع المعرّف على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$

أثبت انّ g اشتقاقي على I ثمّ احسب $g'(x)$ على I .

❸ نرمز بالرمز h إلى التابع المعرّف على $J =]1, +\infty[$ وفق $h(x) = f(\sqrt{x})$

أثبت انّ h اشتقاقي على J ثمّ احسب $h'(x)$ على J .

❶ $f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

❷ $\sin x$ اشتقاقي على I ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وبالتالي $g(x)$ اشتقاقي على I

$$g(x) = f(\sin x) = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1} \Rightarrow g'(x) = f(\sin x)(\sin x)' = \frac{-5\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

❸ $\sqrt{x}$ اشتقاقي على J ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وبالتالي $h(x)$ اشتقاقي على J

$$h(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow h'(x) = f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

دراسة سلوك تابع عند $+\infty$ أو $-\infty$ (احاطة) :

❶ نوجد النهايات عن طريق الاحاطة

❷ الخط البياني للتابع محدود بخطي التابعين على طرفي المتراجحة

❸ نوجد القيمة للتابع بزيادة أو نقصان

$g(x) - A \leq f(x) \leq g(x) + A$ قيمة التابع هي $g(x)$ بزيادة ونقصان مقداره A

أو $g(x) - A \leq f(x) \leq g(x)$ قيمة التابع هي $g(x)$ بنقصان مقداره A

أو $g(x) \leq f(x) \leq g(x) + A$ قيمة التابع هي $g(x)$ بزيادة مقدارها A

لإيجاد القيمة التقريبية للتابع $f(x)$ عند قيمة معينة $x = x_0$: $f(x_0) \approx g(x_0)$ بخطأ مقداره $A(x_0)$

التمرين 71 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$ والمطلوب :

❶ جد قيمة تقريبية للعدد $\sin(0.1)$

❷ ادرس سلوك التابع f عند $+\infty$

❸ أوجد قيمة تقريبية للعدد $f(1000)$

❹ بيّن أنّ التابع f فردي، وأذكر الصفة التناظرية لخطه البياني C

الحل :

❶ $g(x) = \sin x \implies g'(x) = \cos x \implies g(0) = 0 \implies g'(0) = 1$

$a + h = 0.1 \implies a = 0 \ , \ h = 0.1$

$g(a+h) \approx g(a) + hg'(a) \implies g(0.1) \approx g(0) + (0.1)g'(0) \implies g(0.1) \approx 0.1$

❷ مهما كانت $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin x \leq 1 \implies -2 \leq 2\sin x \leq 2 \implies$

$$\frac{x}{2} - 2 \leq \frac{x}{2} + 2\sin x \leq \frac{x}{2} + 2 \implies \frac{x}{2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 2$$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} - 2\right) = +\infty$ حسب المبرهنة 3 نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

والخط البياني محدد بالمستقيمين $y = \frac{x}{2} - 2$ و $y = \frac{x}{2} + 2$

إن $\frac{x}{2}$ هي قيمة تقريبية للعدد بخطأ يساوي 2 زيادة أو نقصان

❸ $\frac{1000}{2} - 2 \leq f(1000) \leq \frac{1000}{2} + 2 \implies 498 \leq f(1000) \leq 502$

❹ مهما تكن $x \in R$ فإن $-x \in R$ فالشرط الأول محقق

$f(-x) = \frac{-x}{2} + 2\sin -x = -\left(\frac{x}{2} + 2\sin x\right) = -f(x)$.

فالشرط الثاني محقق والتابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

التمرين 72 :

انطلاقا من العلاقة $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

❶ استنتج في حالة $x \ge 0$ أن $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

❷ أوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sin(0.1)$ موضحا الخطأ بالحساب

❸ نعرف على $\mathbb{R}^*$ التابع $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$

a. أثبت أن f تابع زوجي b. أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

❶ اذا كان $f(x) \le g(x)$ فإن $F(x)-F(0) \le G(x)-G(0)$ في حالة $x \ge 0$ بالتالي :

$$1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \Rightarrow x-\frac{x^3}{6}-0 \le \sin x-\sin 0 \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-0$$

ومنه في حالة $x \ge 0$ يكون $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

❷ القيمة التقريبية للمقدار $\sin x$ هو $x-\frac{x^3}{6}$ بخطأ حسابي قدره $\frac{x^5}{120}$ بالتالي :

$$\sin(0.1)=(0.1)-\frac{(0.1)^3}{6}=\frac{1}{10}-\frac{1}{6000}=\frac{599}{6000}=0.998$$

والخطأ الحسابي : $\frac{(0.1)^5}{120}=\frac{\frac{1}{100000}}{120}=\frac{1}{12000000}$

❸ a. $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$

$f(-x)=\frac{-x-\sin(-x)}{(-x)^3}=\frac{-x+\sin x}{-x^3}=\frac{x-\sin x}{x^3}=f(x)$ بالتالي فإن f زوجي

b. في حالة $x>0$

$$x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \Rightarrow -x+\frac{x^3}{6} \le -\sin x \le -x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120} \Rightarrow$$

$$\frac{x^3}{6} \le x-\sin x \le \frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120} \Rightarrow \frac{1}{6} \le \frac{x-\sin x}{x^3} \le \frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}$$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\right)=\frac{1}{6}$ بالتالي حسب الاحاطة $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{6}$

في حالة $x<0$ وبما أن f زوجي فإن $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{6}$ بالتالي $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{6}$

التمرين 73 :

التابع f معرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاث وفقط ثلاث حلول حقيقيّة ؟

الحل :

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \& \quad lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow 3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \ , \qquad x = 2 \Longrightarrow f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

① f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, 0[$

و $(]-\infty, 0[)f =]-\infty, 1[\ni -1$ فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد $x_1 \in]-\infty, 0[$

② f مستمر ومتناقص تماماً على $[0,2]$

و $f(]0,2[) =]-3,1[\ni -1$ فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد $x_2 \in [0,2]$

③ f مستمر ومتزايد تماماً على $]2, +\infty[$

و $f(]2, +\infty[) =]-3, +\infty[\ni -1$ فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد $x_3 \in]2, +\infty[$

مما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاث وفقط ثلاث حلول حقيقية.

التمرين 74 :

ليكن f التابع المعرّف على المجال $[1, +\infty[$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

❶ ادرس تغيّرات التابع f .

❷ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

❸ أحصر هذا الحل في مجال طوله 1

❹ احسب جبريّاً القيمة الحقيقيّة لذلك الجذر.

الحل :

❶ التابع f معرّف ومستمر على المجال $I = [1, +\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0 \ \text{و} \ lim_{x\to1} f(x) = f(1) = -3 \quad , \quad lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

❷ التابع مستمر و متزايد تماما على $[1, +\infty[$ و $f([1, +\infty[) = [-3, +\infty[\ni 0$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $x = \alpha \in [1, +\infty[$

❸ $f(1) = -3 < 0 \quad , \quad f(2) = -1 < 0 \ , \ f(3) = 3 + \sqrt{2} - 4 > 0 \Longrightarrow x = \alpha \in]2, 3[$

❹ الحل الجبري للمعادلة $f(x) = 0$

$$x + \sqrt{x} - 1 - 4 = 0 \Longrightarrow \sqrt{x-1} = -x + 4$$

شرط الحل هو $1 \le x \le 4 \Longleftarrow -x + 4 \ge 0$ بالتالي نربّع الطرفين:

$$x - 1 = x^2 - 8x + 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 9x + 17 = 0 \Longrightarrow \Delta = 81 - 68 = 13$$

$x_1 = \frac{9+\sqrt{13}}{2} > 4$ مرفوض $\qquad x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2} < 4$ مقبول

التمرين 75 :

ليكن f التابع المعرّف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

❶ ادرس تغيّرات التابع f على I

❷ استنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$

الحل:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0 $\quad -$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

❶ التابع f معرّف ومستمر على المجال $I =]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

❷ التابع مستمر و متناقص تماما على $]1,+\infty[$

$0 \in]0,+\infty[= f(]1,+\infty[)$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $x = \alpha \in]1,+\infty[$

$$f(2) = 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow f(1).f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 < \alpha < 2$$

التمرين 76 :

ليكن f تابعا مستمرا ومعرفا على المجال $I = [0\,,1]$ ويحقق $f(x) \in I$ أيا كان x من I

نرمز بالرمز k الى التابع المعرف على I وفق $k(x) = f(x) - x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$

$$x \in [0\,,1] \Rightarrow f(x) \in [0\,,1] \Rightarrow f(0) \ge 0 \quad , \quad f(1) \le 1$$

$$k(0) = f(0) - 0 = f(0) \ge 0 \ , \ k(1) = f(1) - 1 \le 0$$

التابع k مستمر على I و $0 \in [k(1)\,,k(0)] \subset k(I)$ اذن يوجد $a \in [0\,,1]$ يحقق $k(a) = 0 \Rightarrow f(a) = a$

التمرين 77 :

ليكن f تابعا مستمرا واشتقاقيا على المجال $I = [0\,,1]$ ويحقق الشرطين :

أيا كان x من I كان $f(x)$ من I و أيا كان x من $]0\,,1[$ كان $f'(x) < 1$

أثبت أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا في I

نرمز بالرمز k الى التابع المعرف على I وفق $k(x) = f(x) - x$

و هو اشتقاقي ومشتقه $k'(x) = f'(x) - 1$ سالب تماما على I $(f'(x) < 1)$ بالتالي k متناقص تماما على I

$$x \in [0\,,1] \Rightarrow f(x) \in [0\,,1] \Rightarrow f(0) \ge 0 \quad , \quad f(1) \le 1$$

$$k(0) = f(0) - 0 = f(0) \ge 0 \ , \ k(1) = f(1) - 1 \le 0$$

بالتالي $k(0) \times k(1) \le 0$ ومنه للمعادلة $k(x) = 0$ حل وحيد في I إذن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا في I

التمرين 78 :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

❶ تحقّق أنّ $\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x)$ ، أيّاً يكن x من $\mathbb{R}$.

❷ استنتج أنّ $(1+x^2)f''(x) + x.f'(x) - f(x) = 0$ ، أيّاً يكن x من $\mathbb{R}$.

❶ $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$ نضرب الطرفين بـ $\sqrt{1+x^2}$ ينتج :

$\sqrt{1+x^2}.f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x$ أي أنّ: $\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x)$ أيّاً يكن x من $\mathbb{R}$

❷ نشتق العلاقة $\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x)$ ينتج $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} f'(x) + \sqrt{1+x^2} f''(x) = f'(x)$

$$x.f'(x) + (1+x^2).f''(x) = \sqrt{1+x^2}.f'(x) \Rightarrow$$

$$x.f'(x) + (1+x^2).f''(x) = f(x) \Rightarrow (1+x^2)f''(x) + x.f'(x) - f(x) = 0$$

التمرين 79 :

ليكن C الخط البياني للتّابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$

❶ اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها $x=1$.

❷ هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$ ؟

❸ هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$ ؟

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ x+1 & x^2-3x+1 \\ & x^2+x \\ \hline & -4x+1 \\ & -4x-4 \\ \hline & 5 \end{array}$$

الحل :

بالقسمة الاقليديّة نجد $f(x)=x-4+\frac{5}{x+1} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{5}{(x+1)^2}$

❶ $x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{-1}{2}\ ,f'(1)=-\frac{1}{4} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

❷ $f'(x)=-4 \Rightarrow 1-\frac{5}{(x+1)^2}=-4 \Rightarrow \frac{5}{(x+1)^2}=5$

$$\Rightarrow (x+1)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \Rightarrow x=0 & f(0)=1 \\ x+1=-1 \Rightarrow x=-2 & f(-2)=-4 \end{cases}$$

إذاً نعم يوجد مماسان يوازيان المستقيم $y=-4x$

❸ $f'(x)=\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\frac{5}{(x+1)^2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{(x+1)^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2=-10$ مستحيلة

بالتالي : لا يوجد مماس يوازي المستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$

التمرين 80 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$

جد الأعداد الحقيقيّة a و b و c و d علماً أنّ الخواص الآتية محققة :

المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط C

المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C.

الحل :

بما أنّ $\lim\limits_{x\to3} f(x)=3a+b+\frac{c}{3-d}$

فإذا كان $d\neq3$ فالنهاية ستكون حقيقية و هذا يناقض كون المستقيم $x=3$ مقارب شاقولي و بالتالي $d=3$

لدينا: $f(x)-(ax+b)=\frac{c}{x-d}$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{c}{x-d}\right)=0$

إذاً المستقيم $y=ax+b$ مقارب للخط C

ولدينا فرضاً المستقيم: $y=2x-5$ هو المقارب المائل بالمطابقة نجد أنّ $a=2$ و $b=-5$ وبالتالي :

$f(x)=2x-5+\frac{c}{x-3}$ و الخط البياني يمر بالنقطة $A(1,2)$ بالتالي $f(1)=2$ ومنه :

$$f(1)=2-5+\frac{c}{-2}=2 \Rightarrow c=-10 \Rightarrow f(x)=2x-5-\frac{10}{x-3}$$

التمرين 81 :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$

عيّن العدد الحقيقيّ a ليكون للتابع f قيمة حديّة محليّاً عند $x=1$

التابع معرّف ومستمر واشتقاقي عند $x=1$ وهي فاصلة القيمة المحليّة فيجب أن يكون $f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2-2x+a$

$f'(1)=0 \quad \Rightarrow 3(1)^2-2(1)+a=0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow \quad a=-1$

ويكون $f(x)=x^3-x^2-x$

التمرين 82 :

a عدد حقيقي و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$.
هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدّية محلّية عند $x = 1$ ؟

الشرط اللازم والكافي ليكون للتابع قيمة حدّية عند $x = 1$ هو $f'(1) = 0$ وأن يغيّر f' إشارته عند $x = 1$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 9 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = -9x^2 + 6x + 3 = 3(-3x^2 + 2x + 1)$$

إشارة f' من إشارة $-3x^2 + 2x + 1$ والذي ينعدم عند:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{13}{9}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{9}$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

والتابع يبلغ قيمة محلّية كبرى عند $x = 1$ قيمتها 9

التمرين 83 :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق : $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$
عيّن الأعداد الحقيقية a و b اذا كان للتابع f قيمة حدّية محليّاً عند النقطة $(-1, 0)$

الحل :

❶ إنّ التابع كسري فهو مستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه فهو اشتقاقي عند $x = -1$

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 1) - (ax^2 + bx + 1)}{(x - 1)^2}$$

وبما أن للتابع f قيمة حدّية محليّاً عند النقطة $(-1, 0)$ فإن :

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a - b + 1}{-2} = 0 \Rightarrow a - b + 1 = 0 \quad ①$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{4a - 2b - (a - b + 1)}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3a - b - 1}{4} = 0 \Rightarrow 3a - b - 1 = 0 \quad ②$$

بحل المعادلتين نجد $a = 1$ و $b = 2$ بالتالي $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

التمرين 84 :

a و b عددان حقيقيّان، و C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$
عين a و b لكي يقبل C مماساً أفقيّاً في النقطة $A(1,2)$ منه

حتّى يقبل مماساً أفقياً عند A يجب أن يكون المشتق عندها يساوي الصفر، والنقطة A تحقّق معادلة C

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \quad , \quad f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \quad ①$$

$$A \in C \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow -3a - 3b = -3 \quad ②$$

بجمع المعادلتين نجد $-b = -3 \Rightarrow b = 3$ نعوّض في الثانية نجد $a = -2$ ومنه $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

التمرين 85 :

a و b عددان حقيقيّان، C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$
عيّن a و b ليكون $y = 4x + 3$ معادلة للمماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ منه

بما أنّ $x = 0$ نعوّض في المماس نجد $y = 3$ وبالتالي نقطة التماس $A(0,3)$

$$f(0) = 3 \Rightarrow \frac{3(0)^2 + a(0) + b}{(0)^2 + 1} = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2 + ax + 3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(3x + a)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + ax + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = m \Rightarrow f'(0) = 4 \Rightarrow \frac{(a)(1) - 0}{1} = 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

التمرين 86 :

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$

❶ جد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❷ أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C .

❸ ادرس نهاية f عند -1 . ماذا تستنتج فيما يتعلّق بالخط C . ❹ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.

❺ أثبت أنّ النقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط C . ❻ ارسم مقاربات C ثمّ ارسم C .

الحل :

❶ $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+7}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+7}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

❷ بالقسمة الاقليديّة نجد: $f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$

$$f(x)-y_\Delta=2x-1+\frac{8}{x+1}-(2x-1)=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{x+1}\right)=0\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x+1}\right)=0$$

إذاً المستقيم Δ مقارب مائل في جوار $-\infty$ وجوار $+\infty$

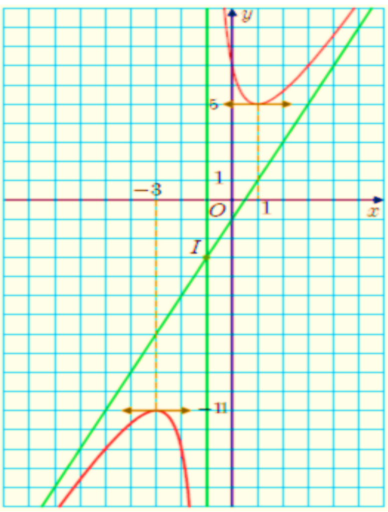
❸ $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(2x-1+\frac{8}{x+1}\right)=-\infty$ المستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(2x-1+\frac{8}{x+1}\right)=+\infty$ المستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

❹ $$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}=\frac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Longrightarrow\ x=-3\Longrightarrow f(-3)=-11\quad,\quad x=1\Longrightarrow f(1)=5$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$



❺ ❶ $2x_0-x=-2-x$

$$x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\Longrightarrow -x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\Longrightarrow -2-x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

❷ $f(2x_0-x)+f(x)=2y_0$

$$f(-2-x)+f(x)=2(-2-x)-1+\frac{8}{-2-x+1}+2x-1+\frac{8}{x+1}$$

$$=-4-2x-1-\frac{8}{x+1}+2x-1+\frac{8}{x+1}=-6$$

والنقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط C .

التمرين 87 :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$

أثبت مستخدما البرهان بالتدريج أن مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا :

$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$ أيا يكن $x \in \mathbb{R}$

الحل :

$f(x) = x\cos x \Longrightarrow f'(x) = \cos x - x\sin x$ لتكن $E(n)$ الخاصة التالية :

أيا تكن x من $\mathbb{R}$ $\quad E(n): f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$

نبرهن صحة الخاصة $E(1)$:

$l_2 = x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x+0) = -x\sin x + \cos x = f'(x) = l_1$ والخاصة صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$ ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

نشتق العلاقة $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$ نجد :

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - n\sin\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

والخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد أن الخاصة $E(n)$ صحيحة مهما تكن $n \geq 1$

التمرين 88 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$

عندئذ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$

الحل :

نرمز الخاصة : " أيا كان x من $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\quad E(n): f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ "

لنبرهن صحّة $E(1)$: $\quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$ و الخاصة صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$ ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

نشتق العلاقة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ نجد :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{0 + n!\,(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد أن الخاصة $E(n)$ صحيحة مهما تكن $n \geq 1$

التمرين 89 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

❶ جد عددين حقيقيّن a و b يُحقّقان : $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

❷ بالاستفادة ممّا سبق ، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n\geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
ثم جد المشتق من المرتبة السادسة

الحل :

❶

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)} \quad , \quad f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{ax+a+bx-b}{(x-1)(x+1)} \Longrightarrow$$

$$(a+b)x+a-b=2x \Longrightarrow a+b=2 \quad , \quad a-b=0$$

بحل جملة المعادلتين نجد : $a=1 \ , \ b=1$ وبالتالي : $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

❷

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x+1)^2} \quad , \quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}+\frac{-6}{(x+1)^4}$$

نستنتج أنّ :

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{(n+1)}}+\frac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{(n+1)}}$$

نبرهن بالتدريج أنّ :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'$$
$$=\frac{(-1)(n+1)(x-1)^n(-1)^n.n!}{(x-1)^{(2n+2)}}+\frac{(-1)(n+1)(x+1)^n(-1)^n.n!}{(x+1)^{(2n+2)}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!}{(x+1)^{(n+2)}} \Longrightarrow$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{(n+2)}}+\frac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x+1)^{(n+2)}}$$

محقّقة من أجل فهي صحيحة أيّاً كان العدد الطبيعي n.

$$f^{(6)}(x)=\frac{(-1)^6.6!}{(x-1)^7}+\frac{(-1)^6.6!}{(x+1)^7}=\frac{720}{(x-1)^7}+\frac{720}{(x+1)^7}$$

التمرين 90 :

ليكن التابع $f(x) = \tan x$ المعرف على $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

❶ أثبت أن التابع فردي ❷ أثبت أن التابع دوري ودوره π

❸ ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$ ونظّم جدولاً بها

❹ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) - 1 = 0$ ، في المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$ جذراً وحيداً α

❺ استنتج قيمة النهاية $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

❶ مهما تكن $x \in D$ فإن $-x \in D$

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$ فالتابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ مهما تكن $x \in D$ فإن $x + \pi \in D$ و $f(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = f(x)$

فالتابع دوري ودوره π

❸ ندرس تغيرات التابع f على المجال $[0, \frac{\pi}{2}[$

$f(0) = 0 \quad , \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

❹ $f(x) - 1 = 0 \Longrightarrow f(x) = 1$ التابع مستمر و متزايد تماما على $[0, \frac{\pi}{2}[$

$1 \in [0, +\infty[= f([0, \frac{\pi}{2}[)$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد $x = \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$

❺ $f(x) = \tan x$ اشتقاقي عند $\frac{\pi}{4}$ و مشتقه $g'(x) = 1 + \tan^2 x$ بالتالي :

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 , \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2 \Longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

التمرين 91 :

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

❶ أثبت أن التابع فردي ❷ أثبت أن التابع دوري ودوره 2π

❸ أثبتا أنّه في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

❹ ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, \pi]$ ونظّم جدولاً بها

❶ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$

فالتابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $x + \pi \in \mathbb{R}$

$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 2\pi) = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$

فالتابع f تابع دوري ودوره 2π

❸ $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

❹ $f(0) = 0 \quad , \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0$ و $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

إنّ $\cos x + 1 \geq 0$ أيّاً كانت x فتكون إشارة $f'(x)$ من إشارة $2\cos x - 1$

الذي ينعدم عندما $\cos x = \frac{1}{2}$ ولها حل وحيد هو $x = \frac{\pi}{3}$ في المجال $[0, \pi]$ و $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

التمرين 92 :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

❶ قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$. استنتج أنّه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

❷ أثبت أنّ $f'(x) = 6\cos x \times \sin x(1-2\cos x)$ عند كل عدد حقيقي

❸ ادرس تغيّرات f على $[0,\pi]$

❶ $f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

والتابع زوجي وخطّه البياني متناظر بالنسبة إلى yy'

$$f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

وذلك لأنّ كل من $\sin$ و $\cos$ تابع دوري دوره 2π

والتابع دوري ويقبل العدد 2π دوراً له. لذلك يكفي دراسة تغيّراته على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$

وبما أنّه زوجي يكفي الدراسة على $[0,\pi]$

❷ نجد مشتق التابع:

$$f'(x) = 6\sin x.\cos x - 12\cos^2 x.\sin x = 6\cos x \times \sin x(1-2\cos x)$$

❸ نبحث عن القيم التي تجعل $f'(x) = 0$ على $[0,\pi]$

$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$\sin x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 & f(0) = 4 \\ x = \pi & f(\pi) = -4 \end{cases}$

$\cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4

التمرين 93 :

ليكن f التابع المعرّف على المجال $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $f(x) = 4x - \tan^2 x$

❶ احسب التابع المشتق $f'(x)$ ❷ استنتج جدولاً بتغيّرات f على المجال I

❸ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = -1$ في المجال I جذراً وحيداً α

❶ $f'(x) = 4 - 2\tan x(1+\tan^2 x) = -2\tan^3 x - 2\tan x + 4$

$= -2(\tan^3 x + \tan x + 2) = -2(\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 2)$

❷ $f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -2(\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 2)$

إنّ $\tan^2 x + \tan x + 2 > 0$ وبالتالي $f'(x) = 0$ عندما :

$\tan x - 1 = 0 \implies \tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} \implies f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\pi - 1$	↘	$-\infty$

❸ $-1 \notin [0,\pi-1] = f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$ ولا يوجد حل للمعادلة $f(x) = -1$ ضمن المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

التابع مستمر و متناقص تماماً على $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ و $-1 \in \left]-\infty,\pi-1\right[= f\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد $x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

بالتالي للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

التمرين 94 :

نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - \cos x$

❶ أحسب $f(0)$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج أنه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$

❷ اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $[-1, 1]$

❸ استنتج أن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $]0, 1[$

❹ استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي الى المجال $]0, 1[$

الحل :

❶ $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0\ ,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

وبما أن f مستمر نستنتج :

حسب مبرهنة القيمة الوسطى يوجد حل حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$ حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

❷ بفرض x حل للمعادلة $f(x) = 0$ وبالتالي :

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x - \cos x = 0 \Longrightarrow x = \cos x \in [-1, 1]$$

❸ اذا كان $x \in [-1, 0]$

$$\cos x > 0 \Longrightarrow -\cos x < 0 \Longrightarrow x - \cos x < x \Longrightarrow x - \cos x < 0 \Longrightarrow f(x) < 0$$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل ينتمي الى المجال $[-1, 0]$

وبما أن $f(1) \neq 0$ فإن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي الى المجال $]0, 1[$

❹ على المجال $]0, 1[$ يكون $f(x) = x - \cos x \Longrightarrow f'(x) = 1 + \sin x > 0$

وبالتالي $f(x)$ متزايد تماما على $]0, 1[$

بما أن $f(x)$ مستمر و متزايد تماما على $]0, 1[$ فهو ينعدم مرة واحدة على الأكثر على $]0, 1[$

ومن الطلب الأول وجدنا أن $f(\alpha) = 0$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

التمرين 95 :

نتأمّل التابع f وفق $f(x) = \sqrt{1 - cosx}$.

❶ ما مجموعة تعريف f ❷ أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه

❸ بين أن التابع f زوجي ويقبل 2π دوراً له

❹ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0, \pi]$ أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني .

❺ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $]-2\pi, 2\pi[$ ما مجموعة تعريف f'

الحل :

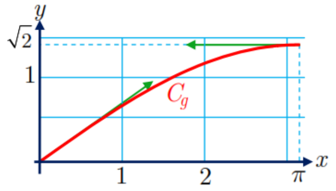
❶ $1 - cosx \geq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فمجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$

❷ التابع f مستمراً على مجموعة تعريفه لأن $1 - cosx$ مستمر و $\sqrt{x}$ مستمر على مجموعة تعريفهما

❸ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = \sqrt{1 - cos(-x)} = \sqrt{1 - cos(x)} = f(x)$ فالتابع زوجي

مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ و $f(x + 2\pi) = \sqrt{1 - cos(x + 2\pi x)} = \sqrt{1 - cos(x)} = f(x)$

والتابع دوري ودوره 2π



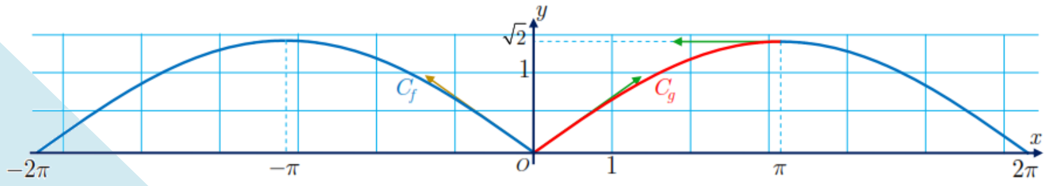
❹ لدينا $g(x) = \sqrt{1 - cos(x)} = \sqrt{2sin^2\frac{x}{2}} = \left|\sqrt{2}sin\frac{x}{2}\right|$

وبما أن $x \in [0, \pi]$ فإن : $\left|\sqrt{2}sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}sin\frac{x}{2}$

وهو اشتقاقي على المجال $[0, \pi]$ ويمكن رسمه بسهولة

❺ لما أن التابع زوجي فخطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

من الرسم نجد أن f' غير معرف عند الصفر وعند كل $x = 2\pi k$ باعتبار f دوري ودوره 2π



التمرين 96 : متراجحة هوينغز Huygens

أثبت صحّة المتراجحة $2sinx + tanx \geq 3x$ أيّاً كان x من المجال $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

الحل :

$$2sinx + tanx \geq 3x \Rightarrow 2sinx + tanx - 3x \geq 0$$

بفرض $f(x)$ التابع المعرف على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 2sinx + tanx - 3x$

نلاحظ أنّه في حال x من I لدينا : $f'(x) = 2cosx + \frac{1}{cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{cos^2 x}$

بما أنّ المقام موجب فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$

بوضع $cosx = t \; ; \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow t \in]0,1]$ نلاحظ أنّ : $P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$

$$P'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 6t(t-1) = 0 \Rightarrow t = 0 \, , t = 1$$

x	0		1
$P'(t)$	‖	$-$	0
$P(t)$	‖ 1	↘	0

من جدول التغيرات نجد $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$ ومنه $f'(x) \geq 0$ على المجال I

فالتابع f تابع متزايد على I وبما أنّ $f(0) = 0$ فإنّ $f(x) \geq 0$ على المجال $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

وبالتالي : $2sinx + tanx - 3x \geq 0 \Rightarrow 2sinx + tanx \geq 3x$

التمرين 97 :

ليكن التابع f والمعرف على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ و المعطى بالعلاقة وفق : $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$

برهن ان التابع $f:]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$ تقابل ثم جد تقابله العكسي f^{-1}

الحل :

أيا كان $x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ فإن $f(x) \in]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

أيا كان $y \in]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$ فإن :

$$y = \frac{5x-1}{x-1} \Rightarrow xy - y = 5x - 1 \Rightarrow x(y-5) = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{y-5}$$

وبالتالي للمعادلة $y = f(x)$ حل وحيد وبالتالي $f(x)$ تقابل و تقابله العكسي هو $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-5}$

التمرين 98 :

f هو تابع معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها . إضافة إلى ذلك نفرض أنّ :

- $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
- f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$.

ارسم خطّاً بيانيّاً C يمكن ان يمثّل التابع f .

الحل :

بما أنّ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها لذلك ممكن أن يكون تابع صحيح،
وحتّى يكون المشتق متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$
يجب أن يكون للمشتق الشكل $f'(x)=ax^2+b$ وبما أنّ $f'(0)=1$ فإنّ $b=1$

$$f'(x)=ax^2+1$$

وبالتالي يجب أن يكون f تابع من الدرجة الثالثة : $f(x)=bx^3+x+c$

$$f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$$

وبالتالي التابع $f(x)=bx^3+x$ يُحقّق الشروط المفروضة مع b أي عدد حقيقي موجب

طريقة ثانية :

بما أنّ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها ولدينا :

أولاً :

f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$ و $f'(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي : $f'(x)>1$ أي $f'(x)>0$ والتابع f متزايد تماما

ثانياً :

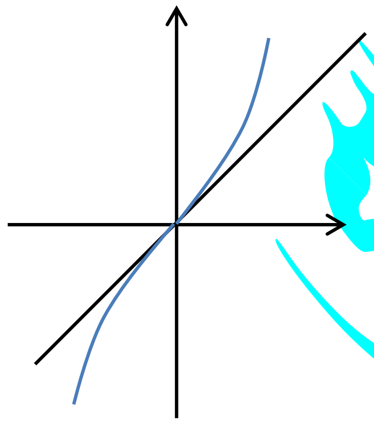
$f(0)=0$ بالتالي الخط C يمر من المبدأ $O(0,0)$ وميل المماس عندها $m=f'(0)=1$
وبالتالي معادلة المماس $y=x$

ثالثاً :

ندرس الوضع النسبي للخط مع المماس : $h(x)=f(x)-x$
$h'(x)=f'(x)-1$ وبما أنه من أولا وجدنا $f'(x)>1$ فإن : $h'(x)\geq 0$

$$h(0)=f(0)-0=0 \quad , \quad h'(0)=f'(0)-1=1-1=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
اشارة h		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		الخط C يقع تحت المماس		الخط C يقع فوق المماس	



وبالتالي يمكن رسم الخط بالشكل المجاور

التمرين 99 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$ والمطلوب :

1. جد a, b اذا علمت أن $f(1) = 1$ قيمة حدية للتابع
2. من أجل $a = 1$ و $b = -1$ ادرس نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف واستنتج معادلة المقارب الشاقولي
3. أثبت أن C يقبل مقاربا مائلا جد معادلته وادرس وضع C بالنسبة له
4. أدرس تغيرات f على مجموعة تعريفه ونظم جدولا بها وارسم المقاربات وارسم C
5. أثبت أن النقطة $Q(0, -1)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع
6. ناقش بيانيا بحسب قيم m عدد حلول المعادلة $x^2 - x(m+1) + 1 = 0$

❶ $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \quad , \quad f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$

$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + 1 = 1 \Rightarrow a = -b \quad ① \quad , \quad f'(1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \quad ②$

$a = 1$ نعوض في ① نجد : $b = -1$

❷ $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \quad : \quad x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$x = 0$ محور التراتيب مقارب شاقولي للخط C

❸ $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

بالتالي المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$ و $+\infty$

$x \in]-\infty, 0[\; : \; f(x) - (x-1) = \frac{1}{x} < 0$ والخط C يقع تحت المقارب

$x \in]0, +\infty[\; : \; f(x) - (x-1) = \frac{1}{x} > 0$ والخط C يقع فوق المقارب

❹ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ المقام موجب فإشارة المشتق من اشارة المقدار $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = -3 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

❺ $x_0 = 0 \; , \; y_0 = 0 \; , \; 2x_0 - x = -x$

$\forall\, x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$f(-x) + f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + x - 1 + \frac{1}{x} = -2$$

بالتالي لنقطة $Q(0, -1)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع f

❻ $x^2 - x(m+1) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - mx - x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = mx \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x} = m \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x} = m \Rightarrow f(x) = m$$

$m \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ للمعادلة حلين $\quad m \in \{-3, 1\}$ للمعادلة حل وحيد

و $m \in]-3, 1[$ ليس للمعادلة حلول

نفترض وجود تابع f معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها ، ويحقّق : $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

وليكن C خطّه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$) .

❶ ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a . تحقّق أنّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$. b . احسب $g(0)$ واستنتج أنّ التابع f فردي.

❷ ليكن h التابع المعرّف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

a . تحقّق أنّ h اشتقاقي على I . واحسب $h'(x)$ على I . b . أثبت أنّ $h(x)=2f(1)$ ، أيّاً يكن x من I .

c . استنتج أنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$. d . ماذا تستنتج بشأن الخط البياني C ؟

❸ ليكن k التابع المعرّف على $J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق : $k(x)=f(tanx)-x$

a . احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k ؟ b . احسب $f(1)$. c . نظّم جدولاً بتغيّرات f على $\mathbb{R}$.

d . ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1 ثمّ ارسم C .

الحل :

❶ a . بما أنّ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x)=f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويكون :

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

b . بما أنّ $g'(x)=0$ فإنّ g تابع ثابت وبالتالي : $g(0)=f(0)+f(0)=0 \Rightarrow g=0$

والتابع f فردي $\Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(-x)$

❷ a . $f(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$ بالتالي : $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow$$ h تابع ثابت

b . بما أنّ h تابع ثابت ولأن $h(1)=2f(1)$ نستنتج أنّ $h(x)=2f(1)$ أياً كانت قيمة x من I

c . نلاحظ في حالة $x>0$: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(1) \Rightarrow f(x)=2f(1)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)-0=2f(1)$

d . إذاً يقبل الخط البياني للتابع f مستقيماً مقارباً أفقيّاً معادلته $y=2f(1)$

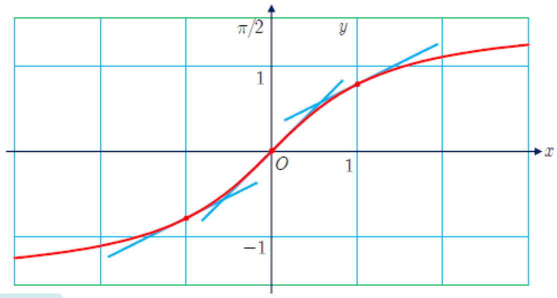
❸ a . في حالة x من J لدينا : $k(x)=f(tanx)-x$ بالتالي :

$$k'(x)=f'(tanx)(1+tan^2 x)-1=\frac{1}{1+tan^2 x}(1+tan^2 x)-1=0$$

إذاً التابع k تابع ثابت على J ، لكن $k(0)=f(0)+0=0$ إذاً $f(tanx)=x$ في حالة x من J

b . لإيجاد $f(1)$ نختار $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $tanx=1$ بالتالي باختيار $x=\frac{\pi}{4}$ نجد $f(1)=\frac{\pi}{4}$

c . مما سبق وجدنا : $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ وبما أنّ التابع فردي يكون :



d . معادلة المماس في $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ هي : $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi-2}{4}$

من التناظر نرسم باقي المماسات

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

الاختبار 2

السؤال الأوّل :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x^3+4-4cosx}{x^2}$

❶ أوجد $lim_{x\to 0^+} f(x)$

❷ أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط C

الحل :

❶ عدم تعيين $lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{0}$

$$f(x)=x+4\left(\frac{1-cosx}{x^2}\right)=x+4\left(\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x^2(1+cosx)}\right)=x+4\left(\frac{1-cos^2x}{x^2(1+cosx)}\right)$$

$$=x+4\left(\frac{sin^2x}{x^2(1+cosx)}\right)=x+4\left(\frac{sin\,x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+cosx}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+4\left(\frac{sin\,x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+cosx}\right)\right)=0+4(1)^2\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

❷

$$f(x)-x=\frac{x^3+4-4cosx}{x^2}-x=\frac{4-4cosx}{x^2}=\frac{4(1-cosx)}{x^2}$$

$$-1\le -cos\,x\le 1\Rightarrow 0\le 1-cos\,x\le 2\Rightarrow 0\le 4(1-cos\,x)\le 8\Rightarrow 0\le\frac{4(1-cos\,x)}{x^2}\le\frac{8}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=0\xRightarrow{\text{بالإحاطة}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4(1-cos\,x)}{x^2}\right)=0\Rightarrow$$

المستقيم $y=x$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$

التمرين الأوّل :

أوجد نهاية التابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$

ثمّ اعط عدداً حقيقيّاً α يحقّق الشرط : إذا كان $x>\alpha$ كان $f(x)\in]2.9,3.1[$.

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{x+1}\right)=3$$

$$|f(x)-3|<0.1\Rightarrow\left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow|x+1|>10\Rightarrow$$

$$x>-1\Rightarrow|x+1|=x+1\Rightarrow\quad x+1>10\Rightarrow x>9\ \Rightarrow\alpha\ge 9$$

الاختبار 3

السؤال الأوّل :

أثبت أنّ للمعادلة $x^3+x+1=0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ ثمّ بيّن أنّ $\alpha \in]-1,0[$.

الحل :

ليكن التابع $f(x)=x^3+x+1$ المعرف على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad f'(x)=3x^2+1>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر و متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ و $0\in]-\infty,+\infty[=f(\mathbb{R})$ بالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α

$f(0)=1>0$ ، $f(-1)=-1<0$ وبالتالي $f(-1)\times f(0)<0$ وبالتالي $\alpha\in]-1,0[$

السؤال الثالث :

ليكن التابع f المعرّف بالصيغة $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$ احسب النهايتين:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}=\frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$$

$$=\frac{2x+3}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} & : x>0\\[2ex] -\dfrac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} & : x<0\end{cases}$$

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

❷ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=-\frac{2}{2}=-1$$

النموذج الوزاري الأول

التمرين الأول:

احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x+sinx}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل :

من اجل $x\in\,]2\,,+\infty[$ فإن :

$$-1\le sin\,x\le 1\Rightarrow 2x-1\le 2x+sin\,x\le 2x+1\Rightarrow \frac{2x-1}{x-2}\le\frac{2x+sin\,x}{x-2}\le\frac{2x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+sin\,x}{x-2}=2$$ حسب مبرهنة الاحاطة

النموذج الوزاري الثاني

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ والمطلوب :

❶ ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟ ❷ ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند الصفر

❸ ثمّ اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطّه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

الحل :

❶

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+|x|}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)=1$$

❷

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}=\begin{cases}\frac{x^2+x}{x(x^2+1)}\\ \frac{x^2-x}{x(x^2+1)}\end{cases}=\begin{cases}\frac{x+1}{x^2+1} & ;x>0\\ \frac{x-1}{x^2+1} & ;x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x-1}{x^2+1}=-1\ ,\ \lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1\Rightarrow\lim_{x\to0^-}g(x)\ne\lim_{x\to0^+}g(x)$$

وبالتالي التابع f ليس اشتقاقيا عند الصفر و $f'(0^+)=1$ و $f'(0^-)=-1$

❸ معادلة نصف المماس الأيمن في النقطة A : $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$

النموذج الوزاري الثالث

التمرين الأول:

إذا كان $f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}+\frac{1}{2}$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}^*$ أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

الحل :

$$f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}+\frac{1}{2}=\frac{(cosx-1)(cosx+1)}{x^2(cosx+1)}+\frac{1}{2}=\frac{cos^2x-1}{x^2(cosx+1)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-\sin^2x}{x^2(cosx+1)}+\frac{1}{2}=-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{cosx+1}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{cosx+1}\right)+\frac{1}{2}\right)=-(1)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=0$$

السؤال الثالث :

ليكن التابع f المعرّف على $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ وفق $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

أوجد $lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ عيّن A ليكون $x > A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$

الحل :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$ و $f(x) \in]1.95\,,2.05[$ مركز المجال 2 ونصف قطره 0.05

$$|f(x) - 2| < 0.05 \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{3}{|x-1|} < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{|x-1|}{3} > \frac{100}{5} \Rightarrow |x-1| > 60$$

وفي جوار $+\infty$ يكون $|x-1| = x-1$ بالتالي $x - 1 > 60 \Rightarrow x > 61$ أي أنّ $A \geq 61$

التمرين الأول :

ليكن C لخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$

اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$ و عيّن قيمة كلاً من a و b

ثمّ أثبت أنّ المستقيم $y = ax + b$ مقارب في جوار $+\infty$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+3 & x^2+2x-2 \\ & x^2+3x \\ \hline & -x-2 \\ & -x-3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3} = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

$a = 1 \quad \& \quad b = -1$

$$f(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{1}{x+3} - (x-1) = \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} = 0$$

بالتالي $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

النموذج الوزاري الخامس

التمرين الأول :

ليكن $g(x) = tanx$ والمطلوب: احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g'(x)$, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثمّ استنتج $lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tanx-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

الحل :

بفرض $g(x) = tan\,x$ الاشتقاقي على $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و مشتقه $g'(x) = 1 + tan^2\,x$ بالتالي :

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,, \qquad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

❶ ادرس نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبيّن إذا كانت له نهاية حقيقيّة عند $x=-1$

❷ أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

❸ احسب $f'(x)$ ونظّم جدول تغيّرات f وعيّن ما له من قيم حديّة محليّة .

❹ أوجد معادلة المماس للخط C في النقطة منه والتي فاصلتها $x=-2$

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الاحداثيّات والمستقيم $x=3$

الحل :

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{(x+1)^2}=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{(x+1)^2}=0$

$y=0$ محور الفواصل مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$ وليس للتابع نهاية حقيقية عند $x=-1$

❷ $g(x)=f(x)-(0)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

إشارة $g(x)$ من إشارة $x+2$ الذي ينعدم عند $x=-2$

عندما $x<-2$ فإنّ $x+2<0$ وبالتالي $g(x)<0$ و C تحت المقارب الأفقي.

عندما $x>-2$ فإنّ $x+2>0$ وبالتالي $g(x)>0$ و C فوق المقارب الأفقي.

❸ . $f'(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\frac{-x^2-4x-3}{(x+1)^4}$

إشارة f' من إشارة $-x^2-4x-3=-(x+1)(x+3)$ الذي ينعدم عند:

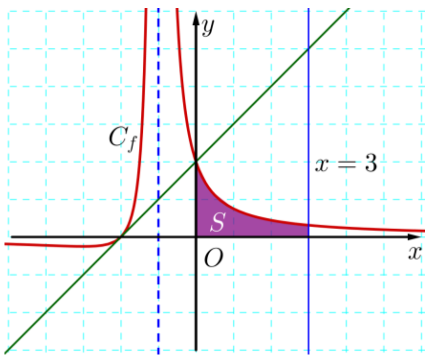
$x=-1\notin D$ و $x=-3$ ومنه $f(-3)=-\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

$f(-3)=-\frac{1}{4}$ قيمة محليّة صغرى

❹ $x=-2 \Rightarrow f(-2)=0\ , f'(-2)=\frac{1}{1}=1$

$T: y=m(x-x_0)+y_0 \quad \& \quad T: y=x+2$



❺ نفرض : $x+1=t \Rightarrow x=t-1$

$$f(x)=\frac{t-1+2}{t^2}=\frac{t+1}{t^2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$S=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\frac{x+2}{(x+1)^2}dx=\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3=\left(\ln 4-\frac{1}{4}\right)-(0-1)=\frac{3}{4}+2\ln 2$$

النموذج الوزاري السادس

التمرين الرابع :

عيّن مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

الحل :

التابع معرف بشرط $1+x\geq 0$ و $\sqrt{1+x}-1\neq 0$

$$1+x\geq 0\Rightarrow x\geq -1 \quad , \quad \sqrt{1+x}-1\neq 0\Rightarrow \sqrt{1+x}\neq 1\Rightarrow x\neq 0$$

وبالتالي التابع معرف على $[-1,0[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)=1\times 2=2$$

النموذج الوزاري 2019

التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

❶ أحسب $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم احسب $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

❷ استنتج معادلة المقارب المائل Δ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C .

❶ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x}=2=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x-3}{x-3}\right)=-1=b$$

❷ نستنتج أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)-(2x-1)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-(2x-1)=\frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x+x-3}{x-3}=\frac{-6}{x-3}$$

نلاحظ أن اشارة $\frac{-6}{x-3}$ هي عكس إشارة المقام

x	$-\infty$ 3 $+\infty$	
اشارة $\frac{-6}{x-3}$	$+$	$-$
الوضع النسبي	C يقع فوق d	C يقع تحت d

النموذج الوزاري الأول 2020

التمرين الثالث :

ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$. والمطلوب:

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$.

❷ جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$

❶ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+5}=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{5}{7}$$

❷ $f(x)\in]1.99,2.01[$ مركز المجال هو 2 ونصف قطره 0.01 $\Leftarrow$

$$|f(x)-2|<0.01\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x+5}-2\right|<0.01\Rightarrow\left|\frac{2x+1-2x-10}{x+5}\right|<0.01\Rightarrow\left|\frac{-9}{x+5}\right|<\frac{1}{100}$$

$$x\in]-5,+\infty[\Rightarrow\frac{x+5}{9}>100\Rightarrow x+5>900\Rightarrow x>895\Rightarrow A\geq 895$$

السؤال الثاني:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \cos x$

❶ جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$. ❷ استنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

❶ f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = -\sin x$ بالتالي :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

❷ $$lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{cos\, x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

التمرين الثالث :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$، والمطلوب:

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$، ثم جد هذا الحل جبرياً.

❸ استنتج مشتق التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = 2\sin x - \sqrt{sin^2x+5}$

الحل : ❶ $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{x^2+5}\right) = +\infty - \infty$

$$= lim_{x\to+\infty}\left(2x - |x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right) = lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right) = +\infty\left(2 - \sqrt{1+0}\right) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{2\sqrt{x^2+5} - x}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+5} - x = 0 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{x^2+5} = x \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = \frac{1}{2}x \Rightarrow$$

$$x^2+5 = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = -\frac{20}{3}$$ مستحيلة

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ f مستمر و متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) =]-\infty,+\infty[\ni 0$ بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α

$f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0 \;,\; f(2) = 1 > 0$ وبالتالي $f(1) \times f(2) < 0$ وبالتالي $\alpha \in]1,2[$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2+5} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = 2x \quad : x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2+5} = 2x \Rightarrow x^2+5 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3}$$

بما أن $x \geq 0$ فإن: $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

❸ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

$$g(x) = 2\,sin\,x - \sqrt{sin^2x+5} \Rightarrow g(x) = f(sin\,x)$$

$$g'(x) = f'(sin\,x) \times (sin\,x)' = \left(2 - \frac{sin\,x}{\sqrt{(sin\,x)^2+5}}\right)(\cos x)$$

دورة 2017 الأولى

التمرين الرابع :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

❶ احسب $lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

❶
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = -\infty - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = +\infty + 1 = +\infty$$

❷
$$g(x) = f(x) - (x+1) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} - 1\right) = 1 - 1 = 0$$

وبالتالي $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸
$$f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2$$ مستحيلة

والاشارة ثابتة على $\mathbb{R}$ ولتحديد الاشارة نختار قيمة ولتكن 0 يكون $\frac{0}{\sqrt{0+1}} - 1 = -1 < 0$

x	$-\infty \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
اشارة $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$	$-$ C يقع تحت d

دورة 2017 الثانية

التمرين الرابع :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$

➊ اكتب التابع بالشكل : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$.

➋ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3} = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$f(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{1}{x+3} - (x-1) = \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} = 0$$

بالتالي $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+3 & x^2+2x-2 \\ & x^2+3x \\ \hline & -x-2 \\ & -x-3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

دورة 2018 الأولى

السؤال الرابع :

ليكن f التابع المعرف $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$

❶ أثبت محدودية f. ❷ استنتج $lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+\cos x}$

الحل

من اجل x من $\mathbb{R}$ فإن $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2 \le 3+\cos x \le 4 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+\cos x} \ge \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \le f(x) \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\cos x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} \le \frac{x^2}{3+\cos x} \le \frac{x^2}{2}$$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$ بالتالي حسب مبرهنة المقارنة نجد $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3+\cos x} = +\infty$

دورة 2018 الثانية

السؤال الثاني :

ليكن f للتابع المعرف على $]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

❶ ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ونظم جدولاً بها

❷ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

❸ أكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

الحل :

❶ $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$ ، $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $lim_{x\to2^+} f(x) = -2$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-2 $\nearrow$	$+\infty$

❷ f مستمر و متزايد تماماً على $]2,+\infty[$ و $0 \in]-2,+\infty[= f(]2,+\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً $x \in]2,+\infty[$

❸ $x = 3 \Rightarrow f(3) = 0\ ,\ f'(3) = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-3)$

دورة 2019 الأولى

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$ والمطلوب :

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

و ادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم Δ

الحل :

$$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

وبالتالي $y = x + 3$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2} < 0$ بالتالي الخط C يقع تحت المقارب Δ على $\mathbb{R}^*$

دورة 2019 الثانية

السؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرف $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & x\neq 0\\ m & x=0\end{cases}$

❶ جد نهاية التابع f عند الصفر

❷ عين قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر

الحل :

❶ حالة تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1=2\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2\times 1=2$$

❷ $x\mapsto x\sin x$ مستمر على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\sqrt{x^2+1}-1$ مستمر على $\mathbb{R}$ و ينعدم فقط عند $x=0$

بالتالي $x\mapsto\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ و يكون f مستمرا على $\mathbb{R}$ اذا كان مستمرا عند $x=0$

أي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=m\Longrightarrow m=2$

دورة 2020 الأولى

السؤال الخامس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x-E(x)$. المطلوب:

❶ اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$.

❷ جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

الحل :

❶ $$f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1[\\ x-1 & x\in[1,2[\end{cases}$$

❷ $x-1<E(x)\leq x\Longrightarrow -x+1>-E(x)\geq -x\Longrightarrow 1>x-E(x)\geq 0$

$\frac{1}{x^2}>\frac{f(x)}{x^2}\geq 0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\Longrightarrow$ حسب مبرهنة الاحاطة $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

التمرين الثالث :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(0) = (0)$, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ في حالة $x \neq 0$ المطلوب :

❶ أثبت أن f اشتقاقي عند $x = 0$ ❷ احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ ❸ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

❶ $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}$, $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

في حالة $x > 0$ فإن : $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} -x = \lim\limits_{x\to0^+} x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$

في حالة $x < 0$ فإن : $-x \ge x\sin\frac{1}{x} \ge x \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} -x = \lim\limits_{x\to0^-} x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ و التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

طريقة ثانية : $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| \le |x| \Rightarrow$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0} |x| = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

و التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

❷ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \left(\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) \times x^2 = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

❸ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = (+\infty)(1) = +\infty$

حيث $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{u\to0}\left(\frac{\sin u}{u}\right) = 1$

دورة 2020 الثانية

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ والمطلوب:

➊ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

➋ ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل :

❶ $f(x) - (2x) = x + \sqrt{x^2+1} - 2x = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = +\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = 0$

ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❷ دراسة الوضع النسبي : $f(x) - (2x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \ge x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Rightarrow$

بالتالي الخط C يقع فوق المقارب Δ على $\mathbb{R}$

السؤال الخامس :

نتأمل التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x - \sin x$

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ❷ أثبت أن التابع f متزايد

❶ $-1 \le -\sin x \le 1 \Rightarrow x - 1 \le x - \sin x \le x + 1 \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة : $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ $f'(x) = 1 - \cos x \ge 0 \Rightarrow$ f متزايد

دورة 2021 الأولى

السؤال الخامس :

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ والمطلوب :

عيّن العددين الحقيقيين a و b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f

الحل :

$$f(-1)=0 \Rightarrow \frac{a-b+1}{-2}=0 \Rightarrow a-b+1=0 \quad ①$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

التابع اشتقاقي عند $x=-1$ بالتالي $f'(-1)=0 \Rightarrow \frac{(-2a+b)(-2)-1(a-b+1)}{4}=0$

$$(-2a+b)(-2)-1(a-b+1)=0 \Rightarrow 4a-2b-a+b-1=0 \Rightarrow 3a-b-1=0 \quad ②$$

بحل المعادلتين نجد $3a-b-1=0$ ② , $-a+b-1=0$ ① بالجمع نجد :

$$2a-2=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

دورة 2021 الثانية

السؤال الخامس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty\,,0[$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2+cos^2x}{x}$ والمطلوب :

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $-\infty$

وادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل :

$$g(x)=f(x)-(2x)=\frac{2x^2+cos^2x}{x}-\frac{2x^2}{x}=\frac{cos^2x}{x}$$

في حالة $x\in\,]-\infty\,,0[$

$$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow 0\le cos^2x\le 1 \Rightarrow 0\ge\frac{cos^2x}{x}\ge\frac{1}{x}$$

حسب مبرهنة الاحاطة $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{cos^2x}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

وبالتالي $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

في حالة $x\in\,]-\infty\,,0[$ يكون

$$cos^2x\ge 0 \Rightarrow \frac{cos^2x}{x}\le 0 \Rightarrow g(x)\le 0$$

والخط C يقع تحت المقارب Δ على المجال $]-\infty\,,0[$

عدا النقاط التي فاصلتها $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k$ حيث k عدد صحيح

السؤال الرابع :

ليكن f تابعا معرفا على المجال $]0\,,+\infty[$ وفق : $f(x) = x + 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ المطلوب :

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $d : y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$

الحل :

$$g(x) = f(x) - (x+1) = x + 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - (x+1) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

في حالة $x \in]0\,,+\infty[$

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} \le \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow 0$$

حسب مبرهنة الاحاطة
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right) = 0\,,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

وبالتالي $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

السؤال السادس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$ والمطلوب :

عيّن العددين a و b ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0\,,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0) = 4$

الحل :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} \quad , \quad f'(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow b = 3 \quad , \quad f'(0) = 4 \Rightarrow a - b = 4 \ \Rightarrow a = 7 \Rightarrow f(x) = 7x + \frac{3}{x+1}$$