BAC MATHS	مذاكرة التابع الأسي الدرجة الكاملة : 300	الاسم : المدّة :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل المعادلتين الآتيتين :

1) $25^x + 5^{x+1} - 6 = 0$ 2) $e^x + 10e^{-x} - 7 = 0$

السؤال الثاني:

1) عيّن حل المعادلة التفاضليّة $y' - y = 1$ الذي يمر خطه البياني بالمبدأ O .
2) أثبت أنّ التابع $f(x) = x\ln x$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y' - \frac{1}{x}y = 1$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = xe^{1-x} + 2$. **المطلوب :**

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .
2) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، و يحقّق $\alpha \in]-1,0[$.
3) أثبت في حالة $n \geq 1$ أنّ : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{1-x}$.

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ في حالة $x \neq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$.
2) اكتب معادلة المماس T للخط C عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.
3) أثبت من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أنّ $e^x - 1 \geq x$ ، ثم استنتج وضعيّة المماس T بالنسبة للخط C .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2\ln(e^x + 1) - x$ **و المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f زوجي و استنتج صفته التناظريّة .
2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .
3) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيم الحديّة .
4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .
5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع : $g(x) = -2\ln(e^{-x} + 1) - x$.

-------- انتهت الأسئلة --------

عبد الملك خير الله – 0964621810 عبد الله عطورة – 0951803301

حل مذاكرة التابع الأسي 1-2022

أولاً: السؤال الأول:

1) $25^x+5^{x+1}-6=0$

$5^{2x}+5\cdot 5^x-6=0$

بفرض: $t=5^x$

$t^2+5t-6=0$

$(t+6)(t-1)=0$

إما: $t+6=0$

$t=-6$

$5^x=-6$ مستحيلة الحل

أو: $t-1=0$

$t=1$

$5^x=1$

$\boxed{x=0}$

2) $e^x+10e^{-x}-7=0$ $\quad (\times e^x)$

$e^{2x}+10-7e^x=0$

$(e^x)^2-7e^x+10=0$

$(e^x-2)(e^x-5)=0$

إما: $e^x-2=0$

$e^x=2$

$x=\ln 2$

أو: $e^x-5=0$

$e^x=5$

$x=\ln 5$

مجموعة الحلول $\boxed{S=\{\ln 2,\ln 5\}}$

السؤال الثاني: 1)

$y'-y=1$

$y'=y+1$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

حيث $a=1\ ,\ b=1$

$y=Ke^{ax}-\frac{b}{a} \Rightarrow y=Ke^x-1$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

لإيجاد الحل الخاص الذي يحقق: $y(0)=0$

$y(0)=Ke^0-1=K-1$

$\Rightarrow \boxed{K=1}$

$\boxed{y=e^x-1}$

2) $y=x\ln x$

$y'=(1)(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\right)(x)=\ln x+1$

$y'-\frac{1}{x}y=(\ln x+1)-\frac{1}{x}(x\ln x)$

$=\ln(x)+1-\ln(x)=1$ محققة.

فالتابع $f(x)=x\ln x$ حل للمعادلة التفاضلية $y'-\frac{1}{x}y=1$

ثانياً: التمرين الأول: 1)

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)(+\infty)+2=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e\cdot\frac{x}{e^x}+2\right)$

$=e(0)+2=2$

$f'(x)=(1)e^{1-x}+(-e^{1-x})(x)$

$=e^{1-x}[1-x]$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f(1)=1+2=3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

2) $f([1,+\infty[)=]2,3]$

f معرف ومستمر ومطرد تماماً على المجال $]-\infty,1[$ كما أنّ:

$$f(]-\infty,1[) =]-\infty,3[$$

$$0 \in f(]-\infty,1[)$$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α .

f مستمر ومطرد تماماً على $]-1,0[$:

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -e^2+2 < 0 \\ f(0) &= 2 > 0 \end{aligned}\right\} \quad f(-1)\cdot f(0) < 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى نجد أنّ

$$\alpha \in]-1,0[$$

3) نتأمل القضية:

$$E(n): \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)\, e^{1-x}$$

$E(1)$ محققة لأنّ:

$$(-1)^1 (x-1)\, e^{1-x} = e^{1-x}[1-x] = f'(x)$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)\, e^{1-x}$$

باشتقاق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left[(1) e^{1-x} + (-e^{1-x})(x-n) \right]$$

$$= (-1)^n e^{1-x} [1-x+n]$$

$$= -(-1)^n (x-n-1)\, e^{1-x}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (x-(n+1))\, e^{1-x}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

التمرين الثاني: 1) معدل التغير:

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2}{e^x-1} - 0}{x} = \frac{x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to 0} t(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ بحيث

$$f'(0) = 1$$

2) $$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\boxed{T: \quad y = x}$$

3) ليكن التابع g المعرف على IR وفق:

$$g(x) = e^x - x - 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) - 1 \right]$$

$$= (+\infty)(+\infty) - 1 = +\infty$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 0 \iff e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ: $g(x) \geq 0$

أي أنّ: $e^x - x - 1 \geq 0$

$$\boxed{e^x - 1 \geq x}$$

$$f(x) - y_T = \frac{x^2}{e^x-1} - x = x\left(\frac{x}{e^x-1} - 1\right)$$

لدينا $e^x - 1 \geq x$

في حالة $x > 0$: $1 \geq \frac{x}{e^x-1}$

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 \leq 0$$

$$x\left(\frac{x}{e^x-1} - 1\right) \leq 0$$

$$f(x) - y_T \leq 0$$

C تحت المماس T على المجال $]0,+\infty[$

أمّا في حالة $x<0$:

$$e^{x}-1 \geq x \qquad \left(\div (e^{x}-1)\right)$$

$$\frac{x}{e^{x}-1} \geq 1$$

$$\frac{x}{e^{x}-1}-1 \geq 0 \qquad (\times x)$$

$$x\left(\frac{x}{e^{x}-1}-1\right) \leq 0$$

$$f(x)-y_T \leq 0$$

C تحت المماس T على المجال $]-\infty, 0[$

ويتقاطع C مع T في النقطة $O(0,0)$.

الحل:

$$f(x)=2\ln(e^{x}+1)-x$$

1) $\forall x \in D_f \Rightarrow (-x) \in D_f$

الشرط الأول محقق.

$$f(-x)=2\ln(e^{-x}+1)+x$$

$$=2\ln(e^{-x}(1+e^{x}))+x$$

$$=2\ln(e^{-x})+2\ln(1+e^{x})+x$$

$$=-2x+2\ln(1+e^{x})+x$$

$$f(-x)=2\ln(1+e^{x})-x$$

$$f(-x)=f(x)$$

فالتابع f زوجي ، وخطه البياني C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب $y'y$.

2) بما أن التابع f زوجي:

$$f(x)=f(-x)$$

$$\Rightarrow f(x)=2\ln(e^{-x}+1)+x$$

$$f(x)-y_{\Delta}=2\ln(e^{-x}+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=2\ln(0+1)=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x)-y_{\Delta}=2\ln(e^{-x}+1)$$

$$e^{-x}>0$$

$$e^{-x}+1>1$$

$$2\ln(e^{-x}+1)>0$$

$$f(x)-y_{\Delta}>0$$

C فوق Δ .

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\ln(e^{x}+1)-x\right)$$

$$=0-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln(e^{-x}+1)+x\right)$$

$$=0+\infty=+\infty$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-1=\frac{2e^{x}-e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

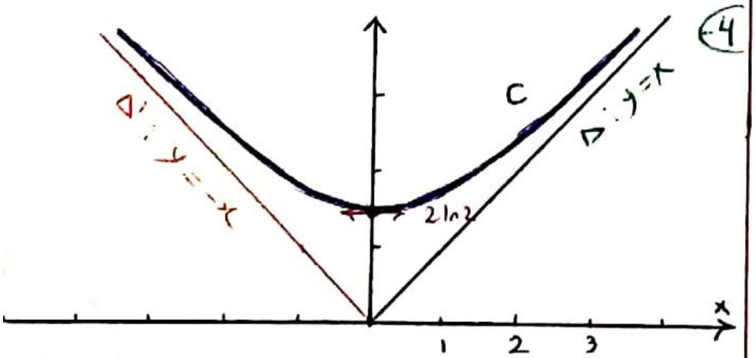
$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f(0)=2\ln 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=2\ln 2$ قيمة حدية صغرى .

4)



5) طريقة 1 : $g(x)=-f(x)$

C_1 نظير C بالنسبة لمحور الفواصل $x'x$

طريقة 2 : $g(x)=-f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة للمبدأ O .

— انتهى الحل —