النموذج ①

نموذج امتحان لمادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي (2020 - 2021)

الاسم: ....

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة العظمى: ستمئة

أولاً) أجب عن أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D، جدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$3 \searrow$	0	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	1	$\nearrow 2$

1) عيّن D و $f(D)$
2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً. علل؟
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$
4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$
5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$
6) أوجد مجموعة تعريف $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$

السؤال الثاني: حل في R المعادلة الآتية: $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$

السؤال الثالث: أوجد نقطة متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1)$, $B(2,-2,3)$ واستنتج معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

السؤال الرابع: حل المعادلة: $\binom{n+2}{2} = 3P_{n+1}^{1}$

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

1. جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ أياً يكن x من D
2. احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\ dx$

ثانياً) حل ثلاثة تمارين من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$

1) أثبت أن المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$
2) ادرس تغيرات التابع $g(x) = e^{f(x)}$ المعرف على $R\backslash\{1\}$ وارسم الخط البياني

التمرين الثاني: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية التالية $a = -1 + i$, $b = 2 - i$, $c = 1 + 4i$ والمطلوب:

1) اكتب العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي، واستنتج طبيعة المثلث ABC
2) عيّن ε مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تجعل $\frac{c-m}{b-m}$ عدداً تخيلياً بحتاً، حيث $Z \neq b$
3) أوجد صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

الوضع النسبي : $f(x) - y_\Delta = \dfrac{-2}{\ln x}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	‖	$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي	‖	C فوق Δ	‖	C تحت Δ	

3) أثبت أن f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f

f اشتقاقي على D_f

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2} > 0$$

$\Longrightarrow$ f متزايد تماماً على D_f

4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يحقق $3 < \alpha < 4$

f مستمر ومتزايد تماماً على D_f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	

$0 \notin f(]0,1[) =]0,+\infty[$

لا يوجد حل للمعادلة $f(x) = 0$ في $]0,1[$

$0 \in f(]1,+\infty[) = R$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]1,+\infty[$

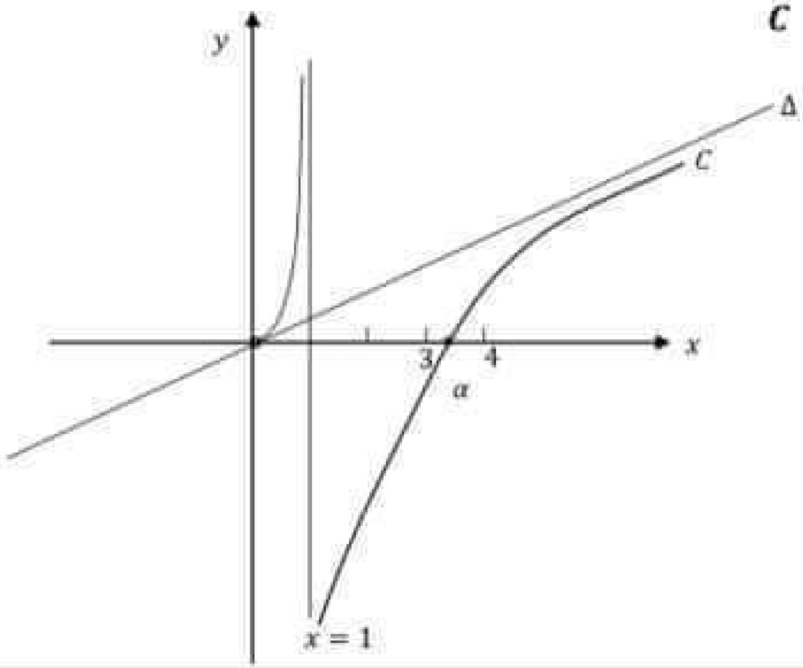
للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد هو α في D_f

$$\left.\begin{aligned} f(3) &= \frac{3}{2} - \frac{2}{\ln 3} < 0 \\ f(4) &= 2 - \frac{2}{\ln 4} = 2 - \frac{1}{\ln 2} > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &f(3)\,.\,f(4) < 0 \\ &3 < \alpha < 4 \end{aligned}$$

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

$\Delta : y = \dfrac{x}{2}$

x	0	2
y	0	1



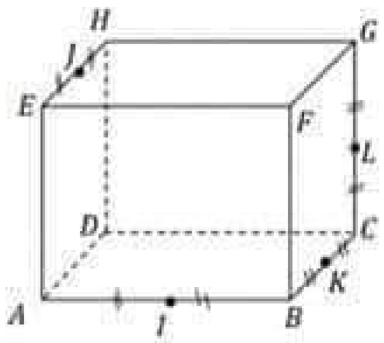
التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق: $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots\ldots - \frac{1}{2^n}$

1) اثبت أن u_n تكتب بالشكل $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
2) ادرس تقارب المتتالية

التمرين الرابع: يحتوي صندوق u_1 على حروف كلمة $SAVE$ ، يحتوي صندوق u_2 على حروف كلمة OUR يحتوي صندوق u_3 على حروف كلمة $SOULS$

1) نسحب حرف من الصندوق u_1 ثم حرف من الصندوق u_2 ثم حرف من الصندوق u_3 ونسجل الحروف التي نحصل عليها بالترتيب ، ما احتمال الحصول على كلمة « SOS » ؟
2) نضع جميع الأحرف في صندوق واحد بكم طريقة يمكن كتابة كلمة $SOLAR$ ؟

ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)



المسألة الأولى : $ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[AB]$

J منتصف $[EH]$ ، K منتصف $[BC]$

L منتصف $[CG]$ ولنختر المعلم المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1) أثبت أن المستقيم (FD) عمودي على المستوي (IJK) ثم اكتب معادلة المستوي (IJK)
2) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (FD) ثم أوجد إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (FD) مع المستوي (IJK)
3) أثبت أن المثلث IJK قائم في I واحسب مساحته ثم احسب حجم الرباعي $FIJK$
4) أثبت أن المستقيمين (IJ) ، (KL) متقاطعان في نقطة N يطلب إيجاد إحداثياتها ثم اكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين (IJ) ، (KL)
5) Q هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,1)$ ، $(H,1)$ أثبت وقوع النقاط I ، K ، Q ، H في مستو واحد

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$$

1) ادرس نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي للخط C
2) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C ، ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ
3) أثبت أن f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f
4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يحقق $3 < \alpha < 4$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C
6) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{\ln\frac{1}{x}}\right)$

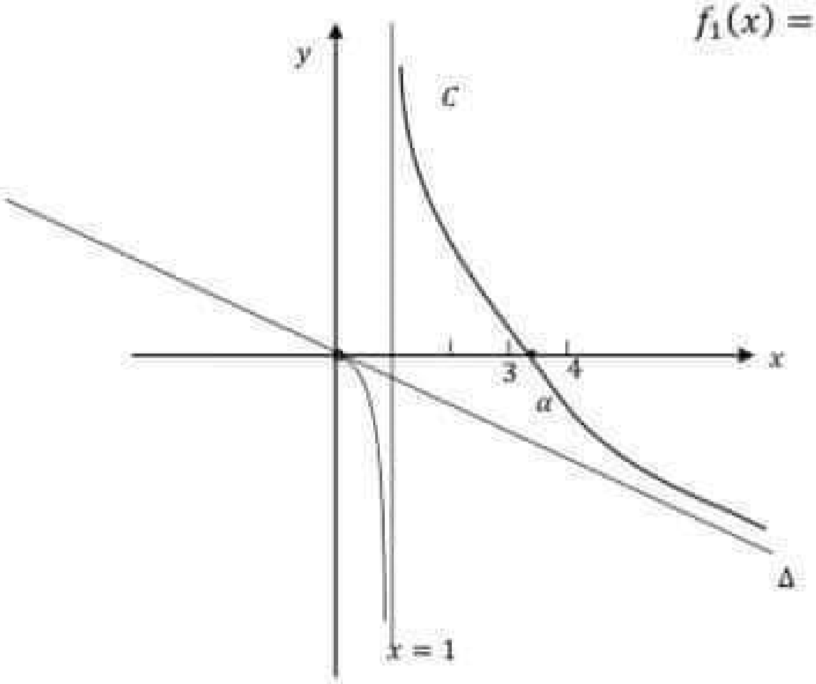
....

انتهت الأسئلة

6) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{\ln\frac{1}{x}}\right)$

$$f_1(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{-\ln x}\right) = -f(x)$$

C_1 نظير C بالنسبة لـ xx'



انتهت الأسئلة

حل النموذج ①

نموذج امتحان لمادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي (2020 - 2021)

الاسم: ....

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة العظمى: ستمئة

أولاً) أجب عن أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D، جدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

1) عيّن D و $f(D)$

$D =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ (من سطر x)

$f(D) =]-\infty, 3[\cup [1, +\infty[= R$ (من سطر $f(x)$)

2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً. علل؟

$f(-1) = 0$ ليست قيمة حدية، لأن المشتق عند $x = -1$ لا يغير إشارته

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

للمعادلة $f(x) = 2$ حلين مختلفين (نأخذ المستقيم $y = 2$ وننظر كم مرة قطع المنحني)

أو (كم مرة سطر $f(x)$ يمر بالعدد 2)

4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$

عند $x = 4$ المماس أفقي لأن $m = f'(4) = 0$

عندئذٍ معادلة المماس $y = 1$

> المماس أفقي
> المماس $\parallel xx'$
> $m = f'(x_0) = 0$
> ومعادلته $y = y_0$

5) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$ حيث $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty}$

6) أوجد مجموعة تعريف $g(x) = \ln(f(x))$

معرف عندما $f(x) > 0$

نلاحظ أن $f(x) > 0$ عندما $x \in]-\infty, -1[$ و $x \in]2, +\infty[$

إذاً $D_g =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

....

السؤال الثاني: حل في R المعادلة الآتية: $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$

$$3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$$

$$3^{2x+1} + 2 = 7.3^{x}$$ نضرب بـ 3^x :

$$3^{2x+1} - 7.3^{x} + 2 = 0$$

$$3.3^{2x} - 7.3^{x} + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

إما $3^{x} = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$$\Longrightarrow e^{x\ln 3} = 2 \Longrightarrow x\ln 3 = \ln 2 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

أو $3^{x} = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$

$$3^{x} = 3^{-1} \Longrightarrow \boxed{x = -1}$$

....

السؤال الثالث: أوجد نقطة متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1)$, $B(2,-2,3)$ واستنتج معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

I منتصف القطعة $[AB]$ وهي متساوية البعد عن A, B إذاً:

$$I\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Longrightarrow I\left(\frac{3}{2}, -1, 2\right)$$

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

I منتصف $[AB]$ حيث $I\left(\frac{3}{2}, -1, 2\right)$ $\qquad \vec{n} = \overrightarrow{AB}(1, -2, 2)$

$$P: \left(x - \frac{3}{2}\right) - 2(y+1) + 2(z-2) = 0$$

$$P: x - 2y + 2z - \frac{15}{2} = 0$$

....

السؤال الرابع: حل المعادلة: $\binom{n+2}{2} = 3P_{n+1}^{1}$

شرط الحل: $n + 2 \geq 2 \cap n + 1 \geq 1 \Longrightarrow n \geq 0$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 3(n+1)$$

$n + 2 = 6 \Longrightarrow \boxed{n = 4}$ مقبول

....

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

1. جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ أياً يكن x من D

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x-1 & x \\ & \mp x \pm 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad : \frac{x}{x} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \\ f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

2. احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\ dx$

$$J = \int_{-3}^{0} \left(1 + \frac{2}{x-1} + (x-1)^{-2}\right) dx = \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left[x + 2\ln(-x+1) - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$= \left(0 + 2\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln 4 - \frac{1}{-4}\right)$$

$$= 1 + 3 - 2\ln 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - 2\ln 4$$

....

ثانياً) حل ثلاثة تمارين من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$

1) أثبت أن المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n = 1$:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1-x} \quad &\xrightarrow{\text{نشتق}} \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad &\xrightarrow{n=1} \quad f^{(1)}(x) = \frac{1!}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 1$.

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{صحيحة}$$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

لدينا من الفرض : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

نشتق : $\left[f^{(n)}(x)\right]' = \frac{-(n+1)(1-x)^{n}(-1).(n)!}{[(1-x)^{n+1}]^{2}}$

$$= \frac{(n+1)n!\,(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}}$$

: $(n+1)n! = (n+1)!$ $\qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل كل $n \geq 1$.

2) ادرس تغيرات التابع $g(x) = e^{f(x)}$ المعرف على $R\backslash\{1\}$ وارسم الخط البياني

$$g(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, 1[\,,\,]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = e^{0} = 1$ $\qquad$ $x=1$ مقارب يوازي yy' عند $-\infty$

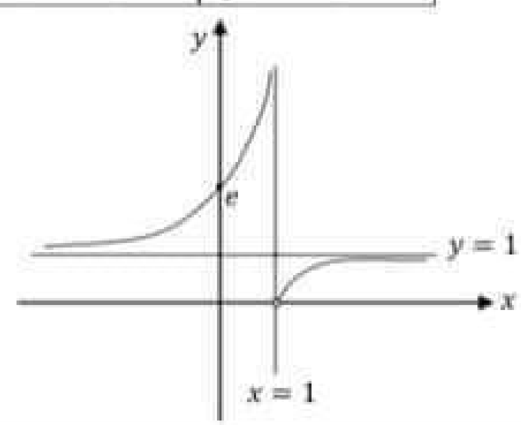
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e^{0} = 1$ $\qquad$ $x=1$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = e^{+\infty} = +\infty$ $\qquad$ $y=1$ مقارب يوازي xx' عند $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = e^{-\infty} = 0$ $\qquad$ $(1,0)$ نقطة مقاربة

$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^{2}}\, e^{\frac{1}{1-x}} > 0$ لا ينعدم

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$0 \nearrow 1$



طارق سعد الدين 0955561648 $\qquad$ وائل زعترية 0933699123

التمرين الثاني: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط $C\,,B\,,A$ التي تمثلها الأعداد العقدية التالية $a=-1+i\ ,\ b=2-i\ ,\ c=1+4i$ والمطلوب:

1) اكتب العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي، واستنتج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+4i+1-i}{2-i+1-i}=\frac{2+3i}{3-2i}$$

$$=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{6+4i+9i-6}{9+4}$$

$$=\frac{13i}{13}=i$$ الشكل الجبري

$$\frac{c-a}{b-a}=e^{\frac{\pi}{2}i}$$ الشكل الأسي

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\left|e^{\frac{\pi}{2}i}\right|$$

$$\frac{AC}{AB}=1$$

$$AB=AC$$

المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=arg\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A

نستنتج أن المثلث قائم في A ومتساوي الساقين

2) عيّن ε مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تجعل $\frac{c-m}{b-m}$ عدداً تخيلياً بحتاً، حيث $Z\neq b$

يكون المقدار $\frac{c-m}{b-m}$ تخيلي بحت إذا كان:

$$\arg\left(\frac{c-m}{b-m}\right)\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right\}$$

$$(MB,MC)\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right\}$$

مجموعة النقاط ε تمثل الدائرة التي قطرها BC ما عدا النقطة B

3) أوجد صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

بفرض C' صورة C وفق دوران R مركز A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$C'-a=e^{\frac{\pi}{3}i}(c-a)$$

$$C'+1-i=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+4i+1-i)$$

$$C'+1-i=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+3i)$$

$$C'+1-i=1+\frac{3}{2}i+\sqrt{3}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$C'=\frac{3}{2}i+i+\sqrt{3}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$C'=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}+\frac{5}{2}\right)i$$

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق: $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots\cdots - \frac{1}{2^n}$

1) اثبت أن u_n تكتب بالشكل $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن:

مجموع n حداً من متتالية هندسية فيها :

$$q = \frac{1}{2} \quad , \quad u_1 = \frac{1}{2}$$

$$S = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$= 1 - \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}\right]$$

نعوض في u_n

$$u_n = 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

2) ادرس تقارب المتتالية

$\boxed{\text{حيث : } -1 < \frac{1}{2} < 1}$ المتتالية متقاربة $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

....

التمرين الرابع: يحتوي صندوق u_1 على حروف كلمة *SAVE* ، يحتوي صندوق u_2 على حروف كلمة *OUR*
يحتوي صندوق u_3 على حروف كلمة *SOULS*

1) نسحب حرف من الصندوق u_1 ثم حرف من الصندوق u_2 ثم حرف من الصندوق u_3 ونسجل الحروف التي نحصل عليها بالترتيب ، ما احتمال الحصول على كلمة « *SOS* » ؟

u_1: $\boxed{\begin{matrix} S & A \\ V & E \end{matrix}}$ $\quad$ u_2: $\boxed{\begin{matrix} O \\ U \\ R \end{matrix}}$ $\quad$ u_3: $\boxed{\begin{matrix} S & O \\ U & L \\ & S \end{matrix}}$

احتمال الحصول على SOS هو:

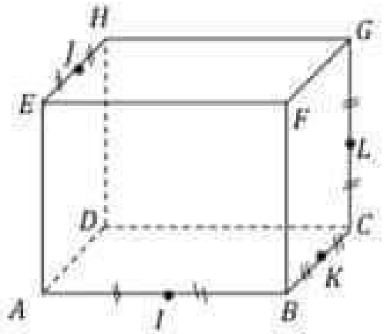
$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

2) نضع جميع الأحرف في صندوق واحد بكم طريقة يمكن كتابة كلمة *SOLAR* ؟

$\square\ \square\ \square\ \square\ \square$

عدد الطرق $= 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$

....



ثالثا) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : $ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[AB]$

J منتصف $[EH]$ ، K منتصف $[BC]$

L منتصف $[CG]$ ولنختر المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1) أثبت أن المستقيم (FD) عمودي على المستوي (IJK)

ثم اكتب معادلة المستوي (IJK)

$$F(1,0,1)\ ,\ D(0,1,0)\ ,\ I\left(\frac{1}{2},0,0\right)\ ,\ J\left(0,\frac{1}{2},1\right)\ ,\ K\left(1,\frac{1}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)\ ,\ \overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\ ,\ \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0 \qquad , \qquad \overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$$

أصبح $\overrightarrow{FD}$ عمودي على $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ فهو عمودي على المستوي (IJK)

إيجاد المعادلة: $\vec{n}=\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$

$$-x+y-z+d=0$$

نختار $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$: $\quad -\frac{1}{2}+0-0+d=0 \quad d=\frac{1}{2}$

$$(IJK):\ -x+y-z+\frac{1}{2}=0$$

2) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (FD) ثم أوجد إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (FD) مع المستوي (IJK)

$\vec{u}=\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$ نختار النقطة $D(0,1,0)$ $\Leftarrow$ $;t\in R$ $\quad (FD):\begin{cases}x=-t\\ y=t+1\\ z=-t\end{cases}$

إيجاد M : نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في المستوي (IJK)

$$-(-t)+t+1-(-t)+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{-1}{2}}\ ,\ \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

3) أثبت أن المثلث IJK قائم في I واحسب مساحته ثم احسب حجم الرباعي $FIJK$

$$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)\ ,\ \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ متعامدان فالمثلث IJK قائم في I

$$S=\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{IJ}\|.\|\overrightarrow{IK}\|$$

النموذج ①

نموذج امتحان لمادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي (2020 - 2021)

الاسم: ....

المدة: ثلاث ساعات

الدرجة العظمى: ستمئة

أولاً) أجب عن أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: بفرض f تابع معرف على D، جدول تغيراته معطى كما يلي:

x	$-\infty$ -1 2	2 4 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $-$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$3 \searrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1 \nearrow 2$

1) عيّن D و $f(D)$
2) هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً. علل؟
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$
4) اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$
5) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$
6) أوجد مجموعة تعريف $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$

السؤال الثاني: حل في R المعادلة الآتية: $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$

السؤال الثالث: أوجد نقطة متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1)$, $B(2,-2,3)$ واستنتج معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

السؤال الرابع: حل المعادلة: $\binom{n+2}{2} = 3P_{n+1}^{1}$

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على $D = R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

1. جد الأعداد c, b, a التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ أياً يكن x من D
2. احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\ dx$

ثانياً) حل ثلاثة تمارين من التمارين الأربعة الآتية: (80 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$

1) أثبت أن المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$
2) ادرس تغيرات التابع $g(x) = e^{f(x)}$ المعرف على $R\backslash\{1\}$ وارسم الخط البياني

التمرين الثاني: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية التالية $a = -1 + i$, $b = 2 - i$, $c = 1 + 4i$ والمطلوب:

1) اكتب العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي، واستنتج طبيعة المثلث ABC
2) عيّن ε مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تجعل $\frac{c-m}{b-m}$ عدداً تخيلياً بحتاً، حيث $Z \neq b$
3) أوجد صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}\,.\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,.\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{(FIJK)}=\frac{1}{3}\,S_{IJK}\,.\,h \qquad ;\ h=FM=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\,.\frac{\sqrt{3}}{4}\,.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$$

4) أثبت أن المستقيمين $(KL)\,,(IJ)$ متقاطعان في نقطة N يطلب إيجاد إحداثياتها ثم اكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين $(KL)\,,(IJ)$

(IJ)

نختار $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ $\quad \vec{u}=\overrightarrow{IJ}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$$(IJ):\ \begin{cases} x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}t & ;t\in R \\ z=t \end{cases}$$

(KL)

نختار $K\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ $\quad \vec{u}'=\overrightarrow{KL}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$(KL):\ \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2} & ;s\in R \\ z=\frac{1}{2}s \end{cases}$$

نلاحظ أن $\vec{u}\,,\vec{u}'$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة فالمستقيمين إما متقاطعين أو متخالفين بالحل المشترك:

$$1=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}s=t \qquad ③$$

بالحل المشترك للمعادلتين ① و ② نجد أن: $t=-1\ ,\ s=-2$ نعوض في ③ فنجد:

$$L_1=\frac{1}{2}(-2)=-1 \qquad \Rightarrow \quad L_1=L_2$$
$$L_2=-1$$

فالمستقيمين متقاطعين في النقطة

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases} \qquad N\left(1,\frac{-1}{2},-1\right)$$

إيجاد معادلة المستوي: نلاحظ أن المستوي يقبل شعاعي توجيه هما:

$\vec{u}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ ، $\vec{u}'\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ويمر بالنقطة $N\left(1,\frac{-1}{2},-1\right)$

التمرين الثالث: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق: $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots\ldots - \frac{1}{2^n}$

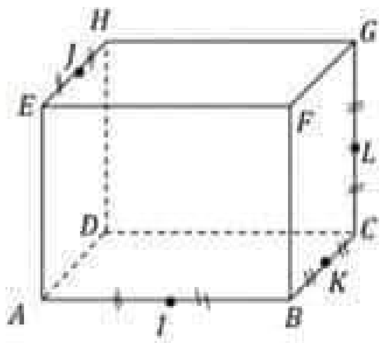
1) اثبت أن u_n تكتب بالشكل $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
2) ادرس تقارب المتتالية

التمرين الرابع: يحتوي صندوق u_1 على حروف كلمة $SAVE$ ، يحتوي صندوق u_2 على حروف كلمة OUR

يحتوي صندوق u_3 على حروف كلمة $SOULS$

1) نسحب حرف من الصندوق u_1 ثم حرف من الصندوق u_2 ثم حرف من الصندوق u_3 ونسجل الحروف التي نحصل عليها بالترتيب ، ما احتمال الحصول على كلمة « SOS » ؟
2) نضع جميع الأحرف في صندوق واحد بكم طريقة يمكن كتابة كلمة $SOLAR$ ؟

ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)



المسألة الأولى : $ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[AB]$

J منتصف $[EH]$ ، K منتصف $[BC]$

L منتصف $[CG]$ ولنختر المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1) أثبت أن المستقيم (FD) عمودي على المستوي (IJK) ثم اكتب معادلة المستوي (IJK)
2) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (FD) ثم أوجد إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (FD) مع المستوي (IJK)
3) أثبت أن المثلث IJK قائم في I واحسب مساحته ثم احسب حجم الرباعي $FIJK$
4) أثبت أن المستقيمين (IJ) , (KL) متقاطعان في نقطة N يطلب إيجاد إحداثياتها ثم اكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين (IJ) , (KL)
5) Q هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,1)$ ، $(H,1)$ أثبت وقوع النقاط I , K , Q , H في مستو واحد

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$$

1) ادرس نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي للخط C
2) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C ، ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ
3) أثبت أن f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f
4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يحقق $3 < \alpha < 4$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C
6) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{\ln\frac{1}{x}}\right)$

....

انتهت الأسئلة

نفرض $\vec{n}(a,b,c) \neq (0,0,0)$ ناظم المستوي المطلوب فيكون:

$$\begin{matrix} \vec{n}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\vec{u}' = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c = 0 \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = 0 \end{matrix}$$

بما أنه يوجد عدد غير منته من أشعة النواظم نختار $c = -1$ فيكون $b = 1$, $a = -1$

$$\vec{n}(-1,1,-1)$$

$$-x + y - z + d = 0$$

$$N\left(1, \frac{-1}{2}, -1\right):\ -1 - \frac{1}{2} + 1 + d = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{1}{2}$$

$$-x + y - z + \frac{1}{2} = 0$$ المستوي المطلوب

5) Q هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,1)$ ، $(H,1)$
اثبت وقوع النقاط I , K , Q , H في مستو واحد

بما أن Q هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط السابقة حسب مبرهنة الوجود:

$$1\,\overrightarrow{QA} + 2\,\overrightarrow{QB} + 1\,\overrightarrow{QC} + 1\,\overrightarrow{QH} = \vec{0}$$

$$1\ \underbrace{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}}_{\text{علاقة المتوسط}} + \underbrace{\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}}_{\text{علاقة المتوسط}} + \overrightarrow{QH} = \vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{QI} \ + \ 2\,\overrightarrow{QK} \ + \overrightarrow{QH} = \vec{0}$$ بملاحظة $(2 + 2 + 1 \neq 0)$

ومنه Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(I,2)$, $(K,2)$, $(H,1)$ فالنقاط I , K , Q , H تقع في مستو واحد

....

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$$

1) ادرس نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي للخط C

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ نقطة مقاربة $(0,0)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{0^-} = +\infty \ \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy' بجوار $+\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{0^+} = -\infty \ \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy' بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C ، ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، C يقبل مقارب مائل عند $+\infty$

لنفرض أن $\Delta: y = \frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$ ولنثبت ذلك:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-2}{\ln x}$$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0 \ \Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$